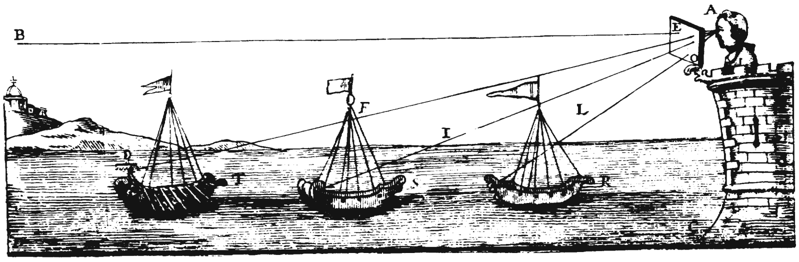
INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA



UNA PERSPECTIVA PARA EL ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS. IMPLICACIONES METODOLÓGICAS

Gavilán, José María[1], García, María Mercedes[1] y Llinares, Salvador[2]
[1] Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla.
[2] Departamento de Innovación y Formación Didáctica.Universidad de Alicante.
gavilan@us.es
mgblanco@us.es
sllinares@ua.es

Resumen. Analizar la práctica del profesor de matemáticas conlleva explicitar un modelo de aprendizaje del estudiante (construcción de conocimiento matemático) y generar herramientas analíticas que permitan explicarla de manera coherente con el modelo de aprendizaje asumido. En este artículo introducimos la herramienta analítica «modelación de mecanismos de construcción de conocimiento» para realizar dicho análisis e incorporamos la noción de «viñeta» como una manera de hacer explícito este proceso de análisis.

Palabras clave. Práctica del profesor, construcción de conocimiento, modelación de mecanismo de construcción, derivada.

A perspective for the analysis of the mathematics teacher's practice. Methodological implications

Summary. To analyse the mathematics teacher's practice involves making explicit a model of the student's learning (construction of mathematical knowledge) and generating analytic tools that allow explaining the teacher's practice in a way coherent with the chosen learning model. In this article we introduce the analytic tool «modelling of mechanisms for the construction of knowledge» to carry out this analysis and the «vignette» notion as the way to make it explicit in the analysis of the teacher's practice.

Keywords. Teacher's practice, construction of knowledge, modelling of mechanism of construction, derivative.

1. UNA MANERA DE ENTENDER LA PRÁCTICA DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Recientemente, el análisis de la práctica del profesor se está configurando como una problemática de investigación en el campo de la educación matemática (Artzt y Armour-Thomas, 1999; Barbé et al., 2005; Chevallard, 1999; Escudero, 2003; Leinhardt y Greeno, 1986; Martin et al., 2005; Simon y Tzur, 1999; Schoenfeld, 2000; Sensevy et al., 2005). Desde un punto de vista cognitivo, Simon y sus colegas (Simon y Tzur, 1999, pp. 253-254) señalan que «la práctica del profesor no son sólo las cosas que los profesores hacen (planificar, evaluar, interactuar con los estudiantes) sino también las cosas que piensan, conocen, creen sobre lo que ellos hacen». La «herramienta teórica» para estudiar la práctica que utilizan estos investigadores es una adaptación del estudio de casos que denominan el «informe de la práctica». Éste se realiza desde la perspectiva de los investigadores, «caracterizando cómo el profesor intenta el avance del aprendizaje de los estudiantes en un momento dado» (Simon y Tzur, 1999, pp. 261-262). Estos investigadores (Simon et al., 2000) desde un punto de vista constructivista consideran el aprendizaje como la transformación de las concepciones de los estudiantes. También desde perspectivas cognitivas Schoenfeld (2000) y Artzt y Armour-Thomas (1999), siguiendo a Leinhardt y Greeno (1986), abordan el análisis de la práctica desde la organización de las concepciones del profesor (incluyendo conocimiento y creencias).

Por otra parte, desde un punto de vista antropológico, Chevallard (1999) señala que el profesor asume el papel de director del proceso de estudio de las matemáticas entendido como un proceso social articulado a través de diferentes momentos didácticos (Espinoza y Azcárate, 2000) considerando la influencia de las restricciones institucionales en el desarrollo de praxeologías didácticas (Barbé et al., 2005). También desde la teoría de las situaciones didácticas, algunos investigadores (Hersant y Perrin-Glorian, 2005; Sensevy et al., 2005) analizan la práctica del profesor en clases ordinarias (en oposición, en cierto sentido, a diseños de ingeniería didáctica). En este enfoque, las «técnicas de enseñanza» empleadas por el profesor ayudan a comprender sus acciones; y su caracterización y estudio son un objetivo de investigación al igual que desde el punto de vista antropológico (Sensevy et al., 2005).

Finalmente, el enfoque sociocultural considera «la actividad del profesor» como una forma de introducir a los estudiantes en una comunidad de práctica (Lerman, 2001; Llinares, 2000). Desde esta perspectiva el análisis de la práctica del profesor se centra en modelizar la manera en la que el profesor crea en su aula las situaciones que favorecen la modificación de las formas de participar de los estudiantes en el desarrollo de la actividad matemática desde una perspectiva social para dotar de significado a las nociones matemáticas a partir de una perspectiva individual.

1.1. La noción de *instrumento* en el análisis de la práctica del profesor

La «práctica profesional del profesor» incluye no sólo lo que el profesor hace sino también su comprensión de los instrumentos y del propósito de su uso. Los instrumentos son entendidos como los medios a través de los cuales obtener un fin. Así, los instrumentos de la práctica son los recursos que utiliza el profesor para realizar las tareas que la definen.

La noción de *instrumento* no se refiere sólo a materiales físicos sino que engloba todos los medios a disposición del profesor. Podemos considerar instrumentos técnicos (materiales didácticos, *software*, etc.) e instrumentos conceptuales como conceptos y construcciones teóricas que se generan a partir de investigaciones en Didáctica de las Matemáticas y del conocimiento derivado desde la práctica. Lerman (2001) considera instrumentos materiales y conceptuales, y se refiere a ideas conceptuales tales como gráficos, diagramas, y Hillel (1993) propone la existencia de tecnologías cognitivas (instrumentos conceptuales) tales como los sistemas notacionales (sistemas de representación). También podemos considerar entre los instrumentos el lenguaje hablado (el discurso empleado), los modos de representación simbólica, las tareas-problema que plantea el profesor y los materiales didácticos. El lenguaje y las tareas-problema desde este punto de vista son los «medios» para el desarrollo de la actividad de enseñar matemáticas. Desde la perspectiva sociocultural se asume que los instrumentos utilizados y la forma en que se utilizan en la práctica del profesor de matemáticas influyen en el tipo de comprensión matemática y creencias de sus estudiantes. Esta hipótesis conlleva que las investigaciones bajo este enfoque empiecen a identificar aspectos del uso que el profesor hace de los instrumentos como medio para caracterizar las prácticas matemáticas en el aula.

Desde esta perspectiva podemos plantearnos cuestiones del siguiente tipo: ¿cómo usa el profesor el lenguaje, los problemas-tareas matemáticas, los diferentes modos de representación? (Llinares, 2000). En este sentido, una manera de comprender la práctica del profesor en esta perspectiva implica centrarse en dos aspectos:

– identificar los instrumentos de la práctica que el profesor emplea en la realización/planificación de sus tareas, es decir, el tipo de problemas presentados a los estudiantes y cómo están organizados, y los modos de representación (sistemas de símbolos), y

– caracterizar cómo el profesor usa dichos instrumentos (fase de gestión), indicando cuál es el propósito de su uso, es decir, su comprensión del significado de dichos instrumentos.

Estas consideraciones son la base del problema de investigación que nos planteamos: ¿cómo los profesores guían la construcción del conocimiento matemático en el aula? El objetivo de la investigación es describir e interpretar la práctica del profesor desde la perspectiva de la construcción de conocimiento matemático potenciada en los estudiantes. La razón de ser de este objetivo es que consideramos que el profesor, cuando desempeña su trabajo en el aula, pretende que «sus estudiantes construyan comprensión matemática». Nuestra hipótesis es que la práctica del profesor tiene reflejo en el aprendizaje que alcanzarán los estudiantes. Por tanto, este problema de investigación está situado en la intersección entre la investigación sobre la práctica del profesor y la forma en que se modela el aprendizaje matemático. Como consecuencia de este planteamiento es necesario explicitar el modelo de aprendizaje.

Nuestra propuesta para describir e interpretar la práctica del profesor se apoya, por una parte, en la noción de *práctica* que proporciona el enfoque sociocultural (Llinares, 2000), y por otra, en el modelo APOS como modelo teórico de construcción de conocimiento matemático (Dubinsky, 1996). Desde esta perspectiva, el entorno de aprendizaje que el profesor crea en su aula, como contexto de aprendizaje potencial para el estudiante, debe venir caracterizado por los «mecanismos de construcción cognitiva» que son pertinentes en el proceso de construcción del conocimiento. Desde este punto de vista, el tipo de tareas que el profesor propone y la forma en la que las gestiona en el aula (por ejemplo, a través del discurso que genera) son aspectos idóneos para observar e interpretar cómo el profesor guía la construcción del conocimiento en los estudiantes.

En este artículo caracterizamos una herramienta teórica generada desde perspectivas socioculturales sobre la práctica del profesor y considerando la construcción del conocimiento desde el modelo APOS, lo que nos permite afrontar el análisis y descripción de la práctica del profesor cuando pretende promover en sus estudiantes la construcción de conocimiento matemático. Por ello explicitamos brevemente en la próxima sección la manera de entender la construcción del conocimiento matemático desde APOS.

2. UNA FORMA DE ENTENDER LA CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

El modelo APOS se basa en la dualidad proceso-objeto. Este modelo se apoya en la noción piagetiana de «abstracción reflexiva» (Asiala et al., 1996). La abstracción reflexiva es una noción teórica introducida por Piaget (Piaget y García, 1983) para describir el mecanismo de construcción de conocimiento mediante el cual el individuo abstrae características de las acciones y operaciones sobre los objetos diferenciándose de la abstracción de características físicas de los objetos. La abstracción reflexiva permite al individuo «reconstruir» lo que ya conoce en un nivel superior tras un proceso de instrucción, integrando lo ya conocido.

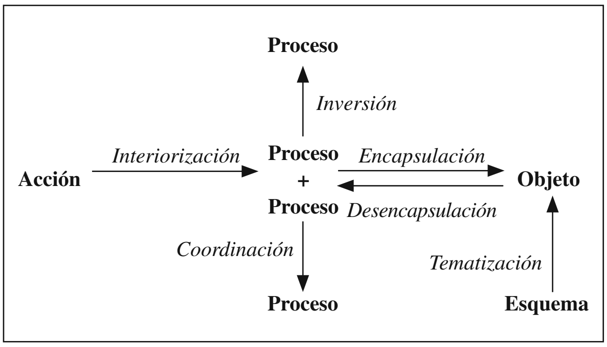
Dubinsky y sus colaboradores (1996) plantean un modelo de desarrollo de la comprensión (APOS) particularizando la idea de la abstracción reflexiva en el que consideran diferentes formas de conocer (construcciones o concepciones): acción, proceso, objeto y esquema; a éstas se llega a través de diferentes mecanismos de construcción: interiorización, encapsulación, tematización... En este modelo se empieza por la forma de conocer, *acción* entendida como transformaciones de objetos externas al individuo. Cuando sólo hay comprensión en el nivel de acción, sólo puede realizarse la transformación cuando hay detalles precisos sobre qué pasos dar (por ejemplo, cuando se conocen algoritmos) (Dubinsky, 1996). Desde esta perspectiva, las acciones se *interiorizan* para generar procesos.

La forma de conocer *proceso* es caracterizada por Dubinsky (1996) como aquella acción que se repite y sobre la que el individuo reflexiona. Se diferencia de la forma de conocer *acción* en que ahora no hay un estímulo externo (mirar o recordar una fórmula o tabla; utilizar un procedimiento algorítmico) que detalla la acción a realizar. Por ejemplo, Breidenbach et al. (1992, p. 278), al investigar el concepto de *función*, identificaron algunas diferencias entre estas dos construcciones: «La diferencia principal entre una acción y un proceso es la necesidad en la primera de una receta o fórmula explícita que describa la transformación. Es más, en una acción se tiende a pensar sobre la transformación en forma paso-a-paso con los pasos relacionados solamente por la receta.». Por otra parte, una vez obtenida la construcción proceso para un concepto es posible obtener nuevos procesos, mediante *inversión* de un proceso, o bien, por *coordinación* de dos procesos.

Por otra parte, Cottrill et al. (1996) señalan que hay dos formas de construir *objetos*, a partir de procesos (mediante el mecanismo de *encapsulación*) o a partir de esquemas (mediante el mecanismo de *tematización*). El mecanismo de encapsulación produce un objeto a partir de un proceso. Los estudiantes pueden desencapsular los objetos a través del mecanismo de *desencapsulación*, para usar el proceso del que provienen (Asiala et al., 1996). Los objetos se pueden obtener (proceso encapsulado) a través de la reflexión sobre un proceso y de este modo se llega a ser consciente del proceso como una totalidad (Dubinsky, 1996). Finalmente, para Asiala et al. (1996) un esquema es una colección coherente de objetos y procesos, que pueden estar interrelacionados en una organización más compleja. En la siguiente figura esquematizamos los elementos teóricos del modelo de comprensión APOS: formas de conocer y sus relaciones a través de los mecanismos de construcción.

Ilustración 1

Modelo APOS: relaciones entre formas de conocer y mecanismos de construcción.



3. LA MODELACIÓN DE MECANISMOS CONSTRUCTIVOS

Nuestra propuesta para el análisis de la práctica deriva de la noción teórica «descomposición genética de un concepto» introducida por el grupo RUMEC (Asiala et al., 1996). Para este grupo de investigadores, la descomposición genética de un concepto es «un conjunto estructurado de construcciones mentales que pueden describir cómo el concepto puede desarrollarse en la mente de un individuo» (Asiala et al., 1996, p. 7). En este sentido, la descomposición genética de un concepto hace referencia a las dos componentes del modelo de comprensión: formas de conocer (acción, proceso, objeto y esquema) y los mecanismos de construcción (cómo se desarrollan).

Para el análisis de la práctica del profesor, desde la perspectiva de la construcción de la comprensión matemática que parece potenciar en sus alumnos, usamos la idea de «modelación de un mecanismo de construcción». Esta idea es una forma de dar significado, desde la perspectiva de los investigadores, a las acciones del profesor, a sus decisiones sobre qué problemas utilizar y a cómo gestiona el contenido matemático en el aula y a las justificaciones que proporciona. La idea de «modelación de un mecanismo de construcción» nos permite hablar de los aspectos de la práctica del profesor que apoyan los procesos de construcción *potencial* del conocimiento en los estudiantes.

Así, la idea «modelación de mecanismos constructivos» es una interpretación del investigador acerca de las acciones, decisiones y justificaciones que el profesor realiza para dar cuenta de cómo la instrucción ayuda a potenciar la generación de los mecanismos que internamente debe realizar el estudiante para llegar a comprender el contenido matemático. Esta interpretación del investigador la realizamos apoyándonos en la caracterización de las acciones, decisiones y discurso del profesor realizada en un contexto específico. Las «acciones» del profesor en este tipo de investigaciones tienen un sentido amplio incluyendo las decisiones en relación con las tareas/problemas, su secuencia, la organización del contenido matemático que asume y lo que «hace» el profesor (por ejemplo, las características del discurso matemático generado y la manera en la que gestiona la participación de los estudiantes cuando intentan resolver un problema).

Asumimos como hipótesis de partida que existe cierto paralelismo entre lo que el profesor hace y piensa y la constitución de las condiciones en el aula para el desarrollo de la comprensión matemática del alumno, junto con la manera en la que el currículo limita o potencia estas decisiones del profesor. Desde un punto de vista piagetiano el «aprendizaje» es un proceso de adaptación al medio. En nuestro caso uno de los aspectos del medio es la manera en la que el profesor presenta el contenido matemático a través de las tareas que plantea (lo que hace y dice) y lo que les pide a los estudiantes que deben hacer. Por tanto, la práctica del profesor determina las condiciones (por lo menos parte de ellas) del medio a través de las cuales el alumno tiene la oportunidad de aprender matemáticas.

El objetivo de este artículo es introducir y justificar el uso de la idea teórica «modelación de mecanismos constructivos» para analizar la práctica del profesor. Para mostrar la pertinencia de esta idea en las próximas secciones usaremos datos e interpretaciones procedentes de la investigación realizada por Gavilán (2005) centrada en el análisis de la práctica del profesor en la enseñanza de la derivada en bachillerato.

4. LA NOCIÓN DE «VIÑETA»

4.1. Los datos

Los datos para elaborar la viñeta que sirve de ejemplificación aquí proceden de las fases de planificación de la lección, de la fase de gestión, y de la reflexión posterior (Gavilán, 2005). Los datos de la fase de planificación son: entrevistas sobre la planificación, la unidad didáctica diseñada por el profesor, el libro de texto o material usado, etc. Los datos procedentes de la gestión son los vídeos de las sesiones de clase y su trascripción íntegra.

Los datos de la fase de reflexión consisten en las entrevistas con el profesor realizadas después de algunas sesiones de clase y al finalizar la unidad didáctica. En particular la entrevista sobre la planificación permitía obtener información sobre:

a) aspectos generales de contextualización del grupo de estudiantes;

b) el contenido matemático y la forma en la que el profesor lo concibe (modos de representación, elementos matemáticos y sus relaciones (Sánchez-Matamoros, 2004; Sánchez-Matamoros et al., 2006), diferentes significados del concepto y relaciones…);

c) la unidad didáctica, contenidos, secuencias de tareas, objetivos; y

d) aspectos ligados a la comprensión del tópico matemático. Por ejemplo, la pregunta *¿utilizas el cálculo de secantes, de pendientes de secantes para las derivadas?* tenía como objetivo indagar sobre los significados gráficos de la primera derivada de f en $x = a$ [$f'(a)$] y la presencia de mecanismos de interiorización de dichos significados.

De la fase de gestión, los datos son grabaciones en vídeo y su trascripción de todas las sesiones de clase que constituyen la unidad didáctica y las entrevistas con el profesor y su transcripción a lo largo del desarrollo de la unidad didáctica. En el caso de la investigación de la cual proceden los datos usados en este artículo (Gavilán, 2005), para las grabaciones de clase se disponía de una cámara de vídeo con micrófono de ambiente y un micrófono inalámbrico que llevaba el profesor para grabar su discurso y las interacciones con los estudiantes cuando estaban en el radio de acción del mismo. Se recogieron los materiales utilizados por el profesor y las colecciones de problemas planteados en el aula.

4.2. El análisis

El análisis de estos datos tiene como objetivo identificar y caracterizar «las modelaciones de mecanismos de construcción» y sus posibles relaciones realizadas por el profesor durante la enseñanza. Dicho análisis se realizó en dos niveles. El primer nivel fue de naturaleza descriptiva, y perseguía un doble objetivo. Por un lado, hacer una «inmersión» del investigador en los datos, y por otro lado, «reducir» el volumen de datos. En este sentido, Powell et al. (2003) indica que al utilizar vídeos puede suceder que se disponga de una sobreabundancia de datos por lo que es necesario encontrar formas de hacerlos manejables. Los vídeos se analizaron siguiendo las propuestas de estos investigadores. Una vez realizado este análisis descriptivo se dispone de:

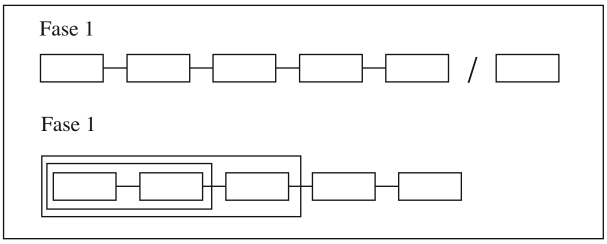
– informes de las fases de planificación, e

– informes de la fase de gestión en los que se recogen los objetivos del profesor (declarado o atribuible), el resultado del análisis de las tareas teniendo en cuenta el lugar en la secuencia de planificación y la demanda al resolutor, los elementos matemáticos usados y las relaciones establecidas entre ellos, los modos de representación usados y las relaciones entre ellos, y por último, observaciones sobre eventos que parecían relevantes para la investigación.

El segundo nivel de análisis tiene un carácter inferencial. Su objetivo es describir la modelación de mecanismos de construcción de la noción de derivada realizada por el profesor. Este segundo nivel de análisis se realiza en dos fases. En la primera fase se utiliza como unidad de análisis la idea de «segmento de enseñanza» entendido como un intervalo temporal de clase caracterizado por la modelación de un mecanismo de construcción por el profesor. Esta identificación-inferencia de modelaciones de mecanismos (en los diferentes segmentos de enseñanza) se realiza teniendo en cuenta el modelo sobre la comprensión matemática APOS. Esta primera identificación permite el análisis de cada segmento, que debe ser consensuado por al menos dos investigadores, para realizar una «triangulación metodológica» (Asiala et al., 1996). Para analizar los segmentos se utilizan las trascripciones de las clases, los informes elaborados en el análisis descriptivo (primer nivel) teniendo como apoyo las trascripciones de las entrevistas y la unidad didáctica.

De esta forma se cumple el requisito de «triangulación», que significa que hay que disponer de datos de diferentes fuentes, entre ellas, vídeos de clase, entrevistas con el profesor, planes para la lección, notas de clase… para apoyar las inferencias realizadas (Schoenfeld, 2001). Este proceso permite integrar dos triangulaciones metodológicas, una centrada en la fuente de datos y otra centrada en el procedimiento de análisis seguido. Los segmentos de enseñanza identificados se ordenan cronológicamente y se describe e interpreta lo que sucede en ellos. La segunda fase tiene como objetivo identificar posibles relaciones y coordinaciones entre conceptos que el profesor puede estar intentando realizar, y para ello se consideran agrupaciones de segmentos en los que se infiere conjuntamente la modelación de un nuevo mecanismo de construcción, construyéndose de esta manera nuevos «segmentos» formados por grupos de segmentos de la fase primera (Ilustración 2).

Ilustración 2
Agrupación de segmentos de enseñanza.



En cada fase de este nivel de análisis se pretende responder a las siguientes preguntas:

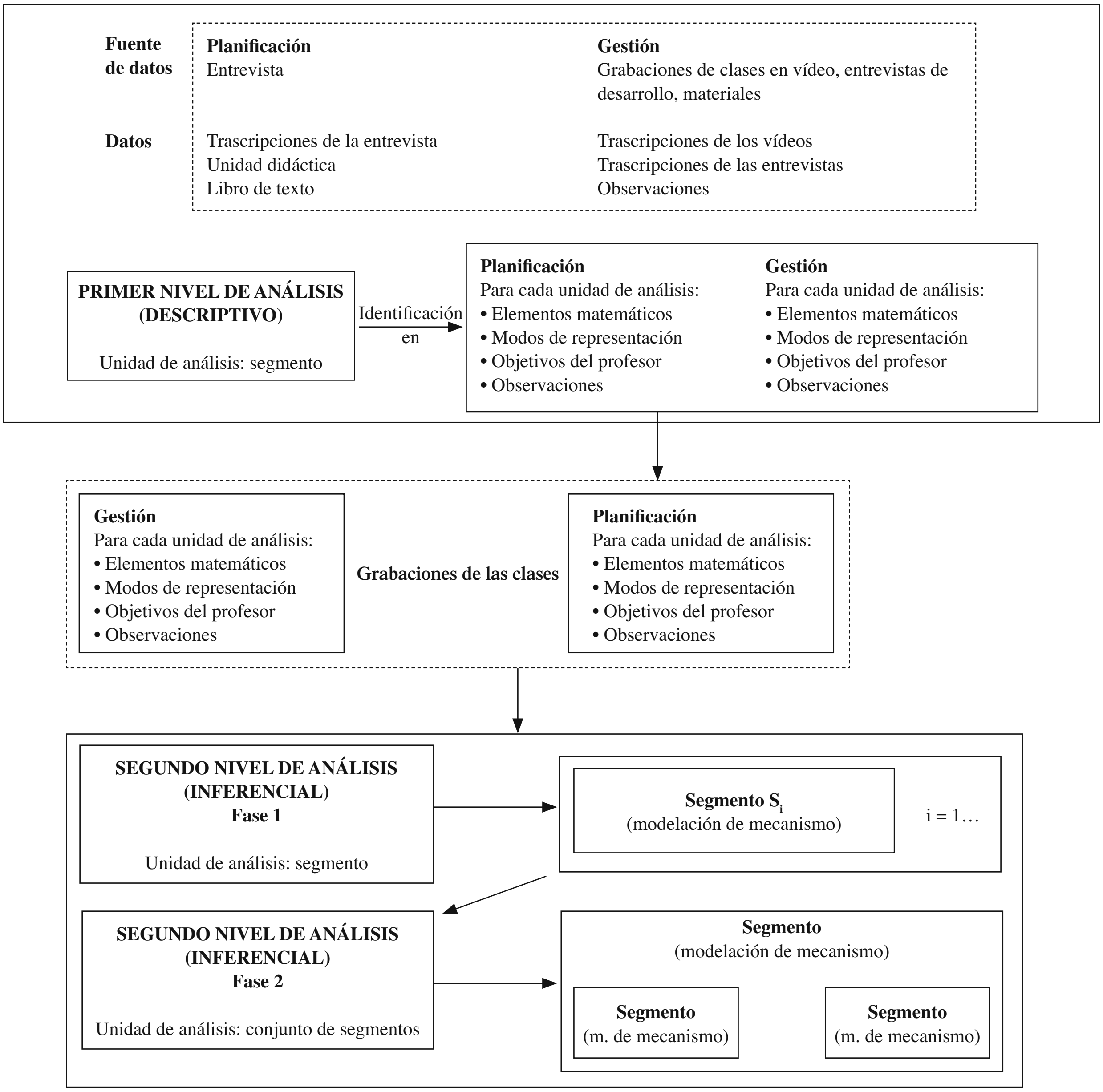
¿Qué mecanismos modela el profesor con su práctica para la noción de derivada? ¿Qué relaciones establece el profesor entre los distintos mecanismos modelados para la noción de derivada?

De esta manera, la «modelación de mecanismos de construcción» es una construcción teórica que nos informa de las metas del profesor en cuanto a los objetivos de aprendizaje (en el sentido de formas de conocer potenciadas) e intenta dar cuenta de cómo la práctica del profesor construye las condiciones en el aula para favorecer la comprensión de un concepto en los estudiantes (entendida desde la perspectiva neo-piagetiana dada por el modelo APOS). En el siguiente cuadro (Ilustración 3) se detallan los distintos niveles de análisis.

4.3. El proceso de construcción de una viñeta

La viñeta es un informe sobre aspectos de la práctica del profesor que integra información de diferentes fuentes, trascripciones de las sesiones de clase, los informes elaborados en el análisis descriptivo, la unidad didáctica, y la descripción e interpretación de lo que sucede en los segmentos de enseñanza. En las «viñetas» además se integran inferencias realizadas por los investigadores para mostrar qué interpretaciones se han realizado y su vinculación con la evidencia empírica.

Ilustración 3
Esquema metodológico: niveles de análisis y fases.



De esta forma la viñeta es un informe elaborado por el investigador en el que se incluye:

– el lugar cronológico en el que sucede la acción del profesor en relación con la unidad didáctica considerada globalmente,

– las tareas que se plantean a los alumnos y que definen el objeto de interacción entre el profesor y los alumnos,

– la organización del contenido matemático que el profesor potencia (datos que proceden de la entrevista de planificación y del análisis realizado por el investigador de la unidad didáctica planificada por el profesor),

– lo que el profesor hace y dice durante la gestión a través de la trascripción del discurso y la descripción de lo que sucede en el aula,

– la justificación que hace el profesor de la gestión realizada, y

– la inferencia realizada por el investigador sobre la modelación del mecanismo de construcción que realiza el profesor mediante los elementos matemáticos y sistemas de representación utilizados (instrumentos de la práctica).

5. UN EJEMPLO: MODELACIÓN DEL MECANISMO DE INTERIORIZACIÓN

En este apartado vamos a mostrar cómo usamos la idea de «modelación de mecanismos de construcción». Usaremos una viñeta de la investigación de Gavilán (2005) y mostraremos cómo a través de su uso podemos describir e interpretar la práctica del profesor.

En la viñeta, Juan (seudónimo) es un profesor de secundaria con más de veinte años de experiencia profesional y prestó su colaboración para el desarrollo de la investigación. La unidad didáctica que se observó estaba centrada en la noción de derivada en 1º de bachillerato. Esta unidad didáctica ocupó 17 sesiones de clase de una duración aproximada de 45 minutos cada una. El profesor utilizó una vez por semana *software* matemático, Cabri-Géomètre II, disponible para el trabajo de los estudiantes en grupo.

La viñeta que vamos a presentar se construye a partir de un «segmento de enseñanza» identificado en la tercera clase. La viñeta se empieza a generar desde la fase 1 del segundo nivel de análisis. Usaremos esta viñeta para ejemplificar la manera en la que la noción «modelación del mecanismo constructivo» permite identificar las condiciones que el profesor crea en el aula para favorecer la generación de un mecanismo de construcción en los estudiantes.

VIÑETA: Paso al límite del cociente incremental en contexto gráfico (de secante a tangente) y analítico (tasa de variación): los procesos de aproximación

La tarea que el profesor plantea es:

Calcular la derivada de $f(x) = x^2$ en $x = 1$

Para gestionar esta tarea Juan pone a disposición de los estudiantes una figura de Cabri II (realizada por él) para que la manipulen usando el «arrastre» de puntos (Ilustración 4). El «artefacto» construido por el profesor proporciona los valores de $f(1)$ f (del punto rojo) y la pendiente de la recta que pasa por esos puntos.

En la figura de Cabri aparecen dos puntos: un punto negro (1) y un punto rojo (0,5). Juan pide a los estudiantes que muevan el punto rojo aproximándolo al punto negro (1) y que confeccionen una tabla mostrando los valores del cociente incremental $(f(1) - f(x))/(1 - x)$ (Tabla 1).

Ilustración 4

Figura de Cabri II en la pantalla.

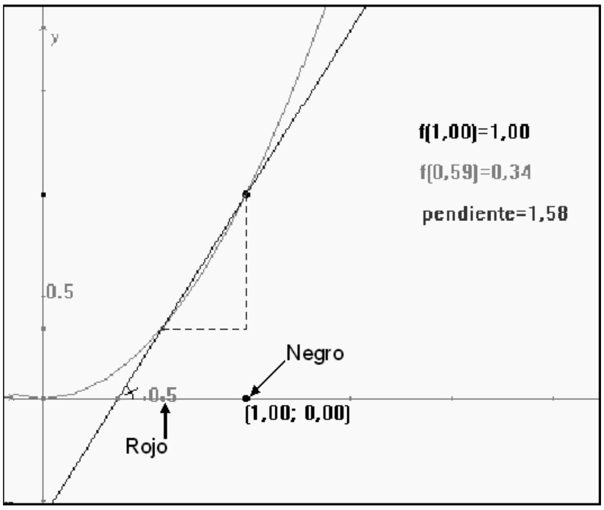


Tabla 1

Tabla de cocientes incrementales de $f(x) = x^2$ para el punto $x = 1$.

X	0,59	0,89	0,9	…	1
$\frac{f(1) - f(x)}{1 - x}$					

También les pide que describan qué ocurre con la recta secante cuando el punto rojo ($x = 0{,}5$) se aproxima al negro ($x = 1$). Juan y los estudiantes van confeccionando la tabla de cocientes utilizando la figura del ordenador. El diálogo que se genera en clase en relación con esta tarea es el siguiente:

Juan (J): Podemos coger el punto rojo que aparece ahí. El punto negro, aparece un punto negro sobre el 1, y lo que vamos a calcular, lo que vamos a calcular es *cómo está variando*, cómo está variando la función en el punto 1.
Entonces si nosotros vamos aproximando, si nosotros nos vamos aproximando, aquí, cogiéndolo con la manita el punto éste <punto rojo>, pues nos va tomando distintos valores.

A través del discurso generado, Juan intenta centrar la atención de los estudiantes en el proceso de variación de los valores de f (punto rojo) y de los valores que va tomando el cociente incremental. La manera en la que Juan usa el artefacto construido le permite, desde su punto de vista, intentar hacer visible a los estudiantes el proceso de variación, y por tanto el paso al límite a través del uso de los elementos matemáticos y modos de representación. En este momento hay que tener en cuenta que lo que el ordenador proporciona y los alumnos construyen son valores (en un caso los valores de la función y en otro el del cociente incremental) y lo que Juan intenta hacer visible a los estudiantes es la «tendencia» de estos valores. Y este objetivo lo intenta conseguir a través del discurso. Esto es lo que justifica expresiones como las que genera Juan en este contexto.

J: Si cogemos este punto <punto rojo> nos vamos aproximando, ¿cuánto me sale la tasa de variación?, ¿qué nos dice el ordenador? Eso es la pendiente de esta recta que aparece aquí.

El artefacto usado por Juan le permite además relacionar diferentes modos de representación con el objetivo de hacer visibles a los estudiantes la tendencia en la tasa de variación y los significados matemáticos de esta variación. Así, en este momento Juan pretende que sus estudiantes empiecen a construir la idea de relación entre los significados analítico (tasa de variación) y gráfico (pendiente de la recta secante) mediante las modelaciones de dos acciones, el cálculo de la tasa de variación (elemento matemático, modo analítico) y trazar la recta secante a la curva por dos puntos y su pendiente (elemento matemático, modo gráfico). En este caso, las acciones las realiza el ordenador lo que permite a los estudiantes centrarse en la relación.

J: Cuando yo me vaya acercando, otro punto aquí, 0,63, pues la pendiente que me aparece 1,63, cuando yo me acerque más. En 0,80 ¿qué pendiente me aparece?
Estudiante (E): 1,75
J: Si yo pongo aquí 0,9 ¿qué hay que poner aquí? <Indicando cómo completar la tabla>.
E: 1,85

Juan propone a sus estudiantes que repitan la acción, aproximando el punto rojo a 1. Desde el punto de vista de la descomposición genética del concepto de *derivada* realizada en la literatura (Asiala et al., 1997), los alumnos deben relacionar los significados gráficos y analíticos de la tendencia al límite de la tasa de variación (cociente incremental) y del paso de la secante a la tangente para construir el significado de la idea de derivada (llegar a comprender). La manera en la que Juan maneja el artefacto construido (la tarea con el ordenador), el discurso generado y las referencias a las relaciones entre los modos de representación deben ser considerados conjuntamente para poder caracterizar cómo Juan está creando las condiciones en el aula para que sus alumnos puedan construir el *mecanismo de interiorización* de f'(1). Esta es la razón por la que Juan desarrolla el siguiente discurso:

J: Cuando yo ponga aquí un 1, ¿qué voy yo a tener que poner aquí? <última columna de la tabla>.
E: 1.
J: Cuando este punto x se vaya acercando a éste de aquí <punto negro>, fijaros la recta ésta <recta secante> ¿a qué va *tendiendo*? ¿a qué *se va pareciendo*? A la recta tangente a la curva ¿lo veis o no lo veis? se va aproximando, aproximando…

En este momento Juan espera una respuesta de sus alumnos que le indique si ellos están trascendiendo a los datos que se visualizan en la pantalla del ordenador para empezar a singularizar el significado de la *tendencia de los objetos* que está manejando (en este caso la recta secante y la tasa de variación). Los alumnos responden:

E: A la tangente.
J: Hasta que llega a la tangente, pues lo que tengo realmente es la recta tangente.
E: Sí.
J: A eso es a lo que vamos a llamar la derivada. Entonces cuando yo este punto <punto rojo> lo hago tender, se lo hago cada vez más cerca del punto negro, pues, esta recta que yo tenía aquí que era una recta secante ¿a dónde? ¿a *dónde se nos va a ir*?, mira ¿lo veis? cada vez más cerca, *cada vez más cerca*, cuando llego al punto ése, realmente ¿qué es lo que tengo aquí? La recta tangente.

Juan, de manera integrada, a través de su discurso, de la gestión de la tarea y de los modos de representación, intenta poner de manifiesto la *reflexión sobre las acciones* planteando qué sucede con la pendiente y con la recta secante. Las acciones son realizadas por el ordenador pero los estudiantes tienen los resultados de estas acciones en forma de dibujo de recta tangente y valor numérico de la tasa de variación. *La reflexión* sobre los resultados de estas acciones se hace imprescindible ya que es necesario «inferir» la tendencia de los valores de las pendientes a partir de los valores de x próximos a 1, es decir, los puntos del intervalo están cada vez más cercanos para la cuerda y su pendiente. La repetición y la reflexión sobre las acciones permiten caracterizar el mecanismo de interiorización (Dubinsky, 1996). Para ello Juan intenta identificar claramente el objeto de su discurso y de sus acciones en los últimos minutos de la clase identificándolo mediante el uso del símbolo matemático para la derivada de la función en $x = 1$.

J: Realmente nosotros lo que hemos hecho, lo que hemos hecho es calcular el límite cuando x tiende a 1 de esto de aquí, eso es lo que hemos hecho, de $(f(1) - f(x))/(1 - x)$, esto es lo que se llama el valor de la derivada en el punto 1 y se representa de esta manera, $f'(1)$, eso va a ser la derivada, nada más, o sea que va a ser únicamente una pendiente.

Juan justifica su forma de actuar, la elección de la tarea y la forma de hacerla indicando una dirección de su manera de actuar. Así, en la entrevista de planificación Juan indicó la necesidad de centrar la atención de los estudiantes en los procesos de aproximación. En este sentido, centrar la atención en la idea de «tendencia de la variación» es un objetivo vinculado a los procesos de construcción del conocimiento por parte de los estudiantes.

J: Con aproximaciones, cogemos la secante y ahora vamos obteniendo un poquito más, vamos obteniendo cada vez más... una cosa así, queremos calcular la derivada en el punto, pendiente, pendiente hasta que nos vaya saliendo la tangente. Una cosa así, queremos calcular la derivada en el punto, pendiente, pendiente hasta que nos vaya saliendo la tangente. Sí, también algunas veces lo hacemos, vamos, esto es lo que te digo que le hago en el programita. Claro van así, *vamos tendiendo hacia el punto y lo que vamos cogiendo realmente una secante, cogiéndola, echándola para acá*, hasta... y van calculando las pendientes en cada momento, entonces ahora tenemos la tangente.

En los procesos de construcción del conocimiento desde un punto de vista neopiagetiano se asume que el aprendizaje está constituido por «saltos cualitativos» (saltos de nivel), que permiten a los individuos ver el conocimiento desde perspectivas diferentes como una función de la adaptación al medio. Desde esta manera de ver el proceso de construcción del conocimiento resultan importantes las condiciones que el profesor crea en el aula para que se puedan dar estos «saltos cualitativos». El mecanismo de «interiorización de las acciones» propugnado desde el modelo APOS es uno de estos mecanismos cognitivos que caracterizan el proceso de construcción del conocimiento. La manera en la que el profesor crea las condiciones en el aula para que los estudiantes puedan generar este «salto cualitativo» constituye la razón de ser de la vinculación entre la enseñanza y el aprendizaje.

El hecho de que el profesor justifique sus decisiones en relación con el tipo de tarea planteada, con lo que les pide a los alumnos en clase y con las características del discurso generado en el aula, en función de las condiciones que él cree que son las idóneas para potenciar la generación de los mecanismos de construcción del conocimiento, es lo que globalmente permite hablar de «modelación de los mecanismos constructivos» por parte del profesor. En este caso, Juan centró su atención en los procesos de aproximación (tendencia de las variaciones) y en que sus alumnos dotaran de sentido a esta tendencia desde diferentes modos de representación y sus relaciones. Así, el uso más o menos transparente (Llinares, 2000) de los diferentes modos de representación por parte del profesor está en función de crear las condiciones para que los estudiantes puedan generar determinados mecanismos de construcción del conocimiento. La descripción de esta visión global de lo que sucede en determinados momentos de una clase (los segmentos de enseñanza) es el objetivo de este análisis y en la que la idea de «modelación de mecanismos constructivos» es una manera de hacer referencia de una manera integrada a lo que sucede y a por qué sucede. Así, en determinados momentos de la práctica del profesor tenemos referencias de la relación entre la enseñanza y el aprendizaje a través de la modelación de mecanismos de construcción.

Este hecho permite considerar que las ideas inferidas en esta aproximación metodológica permiten describir los fundamentos de la práctica del profesor. Así, en una de las entrevistas de desarrollo, Juan indicó:

J: Elegí enseñarles el *método de aproximaciones*, la tangente mediante un gráfico de un ordenador porque creo que es lo que te da más juego. En una clase te da tiempo a ver muchos puntos aproximando y verlo una y otra vez sin tener que escribir en la pizarra, de una forma más directa… (para que) se hagan idea de qué es realmente aproximar, cómo pueden coger puntos aproximándolos al otro y cómo va variando la tangente, *cómo va variando en principio la secante y va tendiendo hacia la tangente* geométrica de la curva, ésa era la idea.

En el documento de la unidad didáctica Juan señaló:

J: En este sentido se puede hacer una buena visualización de la obtención de la recta tangente como límite de secantes a través del programa MAPLE mediante la rutina with (plots): animate({x^2, (t + 2)*(x – 2) + 4|). Que corresponde a la función x^2 en $x = 1$».

Aunque Juan hace referencia en este momento al programa MAPLE que luego no usó, lo que importa aquí es subrayar la justificación que da del uso de los programas informáticos para modelar la idea de aproximación sucesiva y el paso al límite del cociente incremental como una manera de ayudar a los estudiantes a dotar de significado a la idea de derivada. En este sentido, las decisiones de usar un determinado *software* están dirigidas por la necesidad de generar en el aula unas condiciones centradas en la identificación por parte de los estudiantes de la tendencia de la variación (el método de las aproximaciones como lo denomina Juan). Hacer énfasis en este aspecto del contenido matemático de $f'(a)$ y considerar en su argumentación el «mecanismo cognitivo que se supone deben generar los estudiantes para construir el significado de estos elementos matemáticos» es lo que globalmente denominamos «modelación de los mecanismos constructivos». Esta forma de usar esta idea teórica en el análisis de la práctica del profesor tiene el potencial de permitir al investigador «ir más allá» de lo que se ve en el aula, y en particular, «ir más allá de las propias acciones del profesor».

El hecho de que en la planificación Juan tuviera previsto usar recursos didácticos con el fin de crear las condiciones en el aula para favorecer la generación de los mecanismos constructivos –en este caso el mecanismo de interiorización de las acciones vinculadas a la idea de $f'(a)$– se manifiesta en el énfasis en poder visualizar el proceso de aproximación de la secante hacia la tangente. La manera de actuar de Juan perseguía visualizar la idea de $f'(a)$ integrando lo analítico y lo gráfico.

Estas reflexiones están en consonancia con las descripciones de Asiala et al. (1997, p. 407) dadas para el mecanismo de interiorización para $f'(a)$, entre otros, en el modo gráfico:

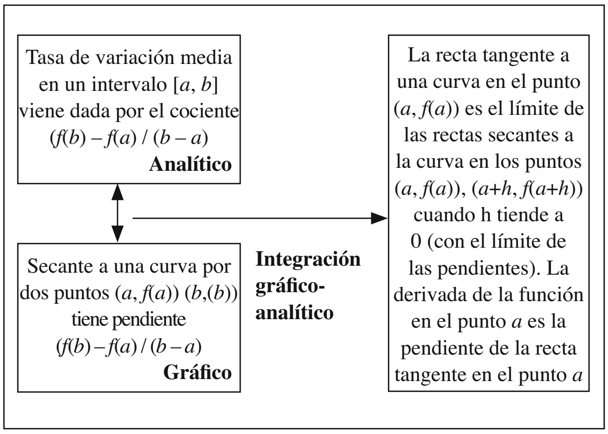
1r. Gráfico: la acción de conectar dos puntos de una curva y formar la cuerda que es la parte de la recta secante a través de los dos puntos, junto con la acción de calcular la pendiente de la línea secante por los dos puntos…

2o. Gráfico: interiorización de las acciones del punto 1a a un proceso cuando los dos puntos de la gráfica de la función están «cada vez más próximos».

Cottrill et al. (1996) señalan que cuando son necesarios infinitos cálculos para obtener un concepto, éste sólo puede ser comprendido en la forma de conocer proceso. Este aspecto aparece en la tarea propuesta por Juan cuando pretende completar la tabla de cocientes incrementales y en la forma en que justifica el uso de los recursos didácticos previstos, la naturaleza de la tarea elegida y el tipo de discurso generado.

El aspecto de la práctica de Juan inferida desde este segmento, la modelación del mecanismo de interiorización y la integración de lo gráfico y lo analítico a través de la tecnología pueden ser descritos gráficamente a través de los elementos matemáticos y modos de representación (Ilustración 5).

Ilustración 5
Descripción de la modelación del mecanismo de interiorización mediante el uso de los instrumentos de la práctica.



5.1. La «modelación de mecanismos constructivos» como herramienta del investigador

La herramienta teórica propuesta nos ha permitido describir y caracterizar la manera en la que el profesor crea las condiciones para el aprendizaje de sus alumnos. Así, por ejemplo, en el caso de Juan mostrado en este artículo podemos considerar que el aprendizaje potencial para la derivada de una función en un punto $f'(a)$ viene dado por las formas de conocer, construyéndose la forma de conocer proceso a partir de la forma de conocer acción, tal y como se prescribe en la descomposición genética de un concepto (Asiala et al., 1997). Podemos inferir que Juan potencia el modelo descrito teóricamente en APOS. En la práctica de Juan el significado construido para el proceso $f'(a)$ se lleva a cabo con los significados gráfico y analítico integrados.

La «modelación de mecanismos constructivos» como herramienta del investigador, además de describir la práctica del profesor relacionando enseñanza y aprendizaje, permite inferir algunas características de la misma. A partir de la viñeta mostrada en este trabajo podemos indicar que una característica de la práctica de Juan es la importancia dada a la idea de «relación» y a los procesos de aproximación. La «construcción de la idea de relación» es una característica que podemos inferir en distintos momentos. Por ejemplo, cuando: *a*) Juan establece relaciones entre distintos elementos matemáticos sobre los significados analíticos (tasa de variación media) y gráficos (recta secante a una curva por dos puntos y su pendiente); *b*) establece relaciones entre los significados de $f'(a)$, lo que potencia interiorizar (tasa de variación instantánea en $x = a$ y recta tangente a la curva en $x = a$ y su pendiente); y *c*) potencia las formas de conocer un concepto relacionándolas entre sí. En definitiva, los dos primeros momentos nos hablan de la integración de los modos de representación en la práctica de Juan y el tercero de la descomposición genética de $f'(a)$ potenciada por la práctica de Juan.

El potencial de la construcción de «viñetas», según ha sido mostrado en este ejemplo, radica en que permite dar un informe integrado de la práctica del profesor considerando:

– el currículo (los problemas y la organización del contenido matemático propuesta)

– el contexto institucional, y

– la cognición del profesor.

En este sentido, la información derivada de las viñetas permite caracterizar diferentes prácticas del profesor (Gavilán, 2005) y por tanto proporcionar los medios para teorizar sobre la noción de práctica.

6. LA PRÁCTICA DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS Y SU RELACIÓN CON EL APRENDIZAJE DE LOS ESTUDIANTES

Investigadores como Even y Schwarz (2003, p. 309) plantean la cuestión de integrar y armonizar aspectos socioculturales y cognitivos para el análisis de la práctica: «una comprensión más completa de la complicada práctica de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas requiere el uso tanto de la perspectiva cognitiva como de la perspectiva sociocultural». Nuestra caracterización de la idea «modelación de mecanismos de construcción» se ha elaborado a partir de elementos de ambas perspectivas. Por un lado, el foco sobre la visibilidad del discurso y la naturaleza de las acciones del profesor provienen de la perspectiva sociocultural al caracterizarse a través del uso de los «instrumentos». En segundo lugar, la justificación del uso de los instrumentos en la práctica del profesor la interpretamos apoyándonos en ideas de la perspectiva cognitiva y haciendo énfasis en el papel que desempeña la cognición del profesor. De alguna manera, el profesor *actúa* en un ámbito «sociocultural» con lo que lo individual y lo social se interrelacionan.

El elemento teórico «modelación de mecanismos de construcción» permite describir la práctica del profesor cuando el objetivo es promover el aprendizaje matemático entendido desde el modelo APOS, es decir, desde la perspectiva de la construcción de conocimiento matemático que se potencia en los estudiantes. Las dos fases del análisis permiten identificar los segmentos de enseñanza y sus coordinaciones. Este análisis hace operativo el elemento teórico «modelación de mecanismos constructivos» y nos puede ayudar a contestar a preguntas tales como:

– ¿Qué mecanismos de construcción de conocimiento modela el profesor en su práctica?

– ¿Qué formas de conocer potencia en sus estudiantes?

– ¿Qué relaciones establece el profesor entre los distintos mecanismos de construcción del conocimiento?

Esta aproximación es generalizable y puede permitir detectar y estudiar las relaciones entre modelaciones de mecanismos de construcción de diferentes conceptos involucrados en una noción matemática, e incluso entre diferentes nociones matemáticas. El estudio de estas relaciones en futuras investigaciones permitirá profundizar en la descripción y detectar nuevas características de la práctica del profesor que nos ayuden a explicarla. En este sentido empezamos a relacionar la práctica del profesor con el aprendizaje de los estudiantes, al menos en sentido de «aprendizaje potencial», en línea con las propuestas de algunos investigadores (Simon y Tzur, 1999; Boaler, 2006).

Esta relación entre la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes es una subproblemática en la investigación sobre la práctica del profesor que está siendo analizada por distintos investigadores. No todos los investigadores que se centran en el estudio de la práctica del profesor de matemáticas tienen en cuenta esta idea. Bartolini (2005), en relación con investigaciones apoyadas en la teoría de las situaciones didácticas, considera que no se tienen en cuenta aspectos cognitivos, ni herramientas de psicología. Además, sobre la investigación de Hersant y Perrin-Glorian (2005) indica que éstas «no consideran el efecto de la práctica del profesor sobre el aprendizaje de los estudiantes» (citado en Bartolini, 2005, p. 307). Sin embargo, Robert y Rogalsky (2005, p. 269) plantean como cuestión de investigación «qué conexiones pueden ser establecidas entre las prácticas de los profesores y la adquisición de conocimiento de los estudiantes», desde una visión cognitiva, y proponen un análisis de la práctica centrada en la «ruta cognitiva» organizada por el profesor. Esta ruta cognitiva puede llevar a un análisis del aprendizaje potencial de los estudiantes y por tanto está relacionada con la idea de «modelación de los mecanismos constructivos». Martín et al. (2005) proponen analizar las acciones del profesor y su impacto en las concepciones de los estudiantes sobre la demostración desde el modelo teórico propuesto por Harel y Sowder (1998). Desde este punto de vista las concepciones de los profesores ayudan a crear los «entornos de aprendizaje» para los alumnos. Para Martín y colaboradores, desde una perspectiva pedagógica, son relevantes los modelos de prácticas matemáticas y conceptos, que pueden ayudar a los estudiantes a aprender, y por tanto ponen de manifiesto relaciones entre la práctica del profesor y el desarrollo de la comprensión en los estudiantes. En esta misma problemática, Blanton y Kaput (2005, p. 414) proponen «identificar el tipo de prácticas de clase que favorecen el razonamiento algebraico» apoyándose en una descripción basada en competencias. En este contexto la idea de «modelación de mecanismos de construcción» permite establecer una relación entre la enseñanza de las matemáticas y el aprendizaje de los estudiantes, que por un lado puede ayudar a inferir la ruta de aprendizaje y por otro dar significado a la práctica del profesor mediante la noción de modelar.

Otras herramientas teóricas han sido propuestas para analizar la práctica del profesor. Así, Simon et al. (2000) proponen conjeturar un hipotético proceso de aprendizaje de los estudiantes y utilizan la idea de «trayectoria hipotética de aprendizaje» para generar el informe de la práctica del profesor. En esta misma línea, nuestra propuesta basada en la idea «construcción potencial de conocimiento por los estudiantes» posibilita el establecimiento de hipótesis sobre las trayectorias por las que puede discurrir el aprendizaje de los estudiantes. Por este motivo consideramos que mediante la «modelación de mecanismos de construcción» realizados por el profesor podemos disponer de información sobre las condiciones para generar una trayectoria de aprendizaje en el aula.
Por otra parte, la teoría de las funciones semióticas, que complementa la teoría antropológica de lo didáctico (Godino, 2003), proporciona otra perspectiva para analizar la práctica del profesor que permite buscar relaciones entre lo individual (las concepciones del profesor) y lo social (la gestión de los problemas y del contenido matemático). Al incorporarse las funciones semióticas se tiene en consideración la cognición individual y se supera el obstáculo relativo a centrarse únicamente en las prácticas públicas institucionalizadas. En esta teoría, el análisis de la práctica del profesor se basa en identificar las funciones semióticas presentes, y a través de ellas dar cuenta de la complejidad de los significados y de la construcción de los conceptos. Por ejemplo, Font (1999, p. 130) aborda una situación similar («El objetivo de la actividad siguiente es que los alumnos comprendan que las rectas secantes se aproximan a la recta tangente») a la descrita en la viñeta y da cuenta de la complejidad de ésta mediante la identificación de las funciones semióticas presentes. En este sentido, nuestro análisis usando «modelación de mecanismos constructivos» permite avanzar y dar cuenta de dicha complejidad a través de la identificación de la modelación y de cómo se llevó a cabo. En otro momento, Font (1999; 2005) trata el paso de $f'(a)$ a $f'(x)$ y señala las dificultades de dicho paso en función de la elección curricular, cuantificada de alguna manera por el número de funciones semióticas y su contenido. Nuestra propuesta de «modelación de mecanismos de construcción» puede dar cuenta de algunos aspectos de dicha complejidad de las relaciones entre las formas de conocer potenciadas para cada concepto ($f'(a)$ y $f'(x)$), y de las posibles relaciones entre las formas de conocer de los distintos conceptos.

Todo lo anterior sitúa nuestra propuesta «modelación de mecanismos de construcción» (y la forma de hacerla efectiva a través de las viñetas) en el ámbito específico de las investigaciones sobre la práctica del profesor en las que se relaciona la enseñanza y el aprendizaje. La forma de elaborar y hacer operativa la herramienta teórica y el medio de hacerlo a través de las «viñetas» posibilita una doble integración. Por un lado, de aspectos socioculturales y cognitivos en su elaboración, y por otro, permite considerar a través de su uso conjuntamente la enseñanza y el aprendizaje en el análisis de la práctica del profesor. Y éste es un objetivo relevante en las investigaciones sobre la práctica del profesor.

Terminamos haciendo una reflexión sobre la naturaleza de la integración de los referentes teóricos, socioculturales y del modelo de comprensión adoptado en la elaboración de la «modelación de mecanismos de construcción». Nuestra propuesta permite interpretar la práctica del profesor desde la perspectiva de la construcción de conocimiento matemático que se potencia en los estudiantes. En la idea «modelación de mecanismo de construcción» se considera el modelo APOS de construcción de conocimiento matemático, pero del mismo modo, puede caracterizarse en otro modelo teórico proceso-objeto. El aspecto de la elaboración de la herramienta teórica que no es intercambiable es el que hace «visible» la modelación del mecanismo de construcción, los instrumentos de la práctica y su uso por parte del profesor.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTZT, A.F. y ARMOUR-THOMAS, E. (1999). A Cognitive Model for Examining Teachers' Instructional Practice in Mathematics: a guide for facilitating teacher reflection. *Educational Studies in Mathematics*, 40(3), pp. 211-235.

ASIALA, M., BROWN, A., DEVRIES, D.J., DUBINSKY, E., MATHEWS, D. y THOMAS, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education, en Kaput, J., Schoenfeld, A. y Dubinsky, E. (eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education,* 6, pp. 1-32.

ASIALA, M., COTTRILL, J., DUBINSKY, E., y SCHWINGENDORF, K. (1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivative. *Journal of Mathematical Behaviour*, 16(4), pp 399-431.

BARBÉ, J., BOSH, M., ESPINOZA, L. y GASCÓN, J. (2005). Didactic Restrictions on the Teacher's Practice: The Case of Limits of Functions in Spanish High Schools. *Educational Studies in Mathematics*, 59(1-3), pp. 235-268.

BARTOLINI, M.G. (2005). When classroom situation is the Unit of Analysis: the Potential Impact on Research in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, 59(1-3), pp. 299-311.

BLANTON, M.L. y KAPUT, J.J. (2005). Characterizing a Classroom Practice that promotes Algebric Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education,* 36(5), pp. 412-446.

BOALER, J. (2006). Advancing Teacher Development and Mathematics Learning Through the Integration of Knowledge and Practice. Project description. Disponible en <http://www.stanford.edu/~joboaler/NSF_prop.doc>. Febrero de 2006.

BREIDENBACH, D., DUBINSKY, E., HAWKS, J. y NICHOLS, D. (1992). Development of the Process Conception of Function. *Educational Studies in Mathematic*s, 23(3), pp. 247-285.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), pp. 221-266.

COTTRIL, J., DUBINSKY, E., NICHOLS, D., SCHWINGENDORF, K., THOMAS, K. y VIDAKOVIC, D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme. *Journal of Mathematical Behavior*, 15(2), pp.167-192.

DUBINSKY, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 8(3), pp. 24-41.

ESCUDERO, I. (2003). «La relación entre el conocimietno profesional del profesor de matemáticas de enseñanza secundaria y su práctica. La semejanza como objeto de enseñanza-apendizaje». Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla.

ESPINOZA, L. y AZCÁRATE, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto «límite de función»: una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(3), pp. 355-368.

EVEN, R. y SCHWARZ, B.B. (2003). Implications of Competing Interprettations of Practice for Research and Theory in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, 54(2-3), pp. 283-313.

FONT, V. (1999). «Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades». Tesis doctoral. Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica. Universitat de Barcelona.

FONT, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada, en Maz, A., Gómez, B. y Torralbo, M. (eds.). *Investigación en Educación Matemática,* pp. 111-128. Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba y Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

GAVILÁN, J.M. (2005). «El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva». Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla.

GODINO, J.D. (2003). Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. Disponible en <http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf>. Marzo de 2006.

HAREL, G. y SOWDER, L. (1998). Students' Prof. Schemes: Results from Exploratory Studies, en Kaput, J., Schoenfeld, A. y Dubinsky, E. (eds.). *Research in Collegiate Mahemat-*

ics Education III, CBMS Issues in Mathematics Education, 7, pp. 234-283.

HERSANT, M. y PERRIN-GLORIAN, J.M. (2005). Characterization of an Ordinary Teaching Practice with the Help of the Theory of Didactic Situations. *Educational Studies in Mathematics*, 59(1-3), pp. 113-151.

HILLEL, J. (1993). Computer Algebra Systems as Cognitive Technologies: Implication for the Practice of Mathematics Education, en Keitel, C. y Ruthven, K. (eds.). *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*, pp. 18-47. Berlín: Springer-Verlag.

LEINHARDT, G. y GREENO, J.G. (1986). The Cognitive Skill of Teaching. *Journal of Educational Psychology*, 78(2), pp. 75-95.

LERMAN, S. (2001). Cultural, Discursive Psychology: a Sociocultural Approach to Studying the Teaching and Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 46(1-3), pp. 87-113.

LLINARES, S. (2000). Comprendiendo la práctica del profesor de matemáticas, en Ponte, J.P. y Sarrazina, L. (eds.). *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Italia*, *Actas da Escola de Verao-1999*, pp. 109-132. Lisboa: Sección de Educación Matemática Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educación/Sociedad de Educación y Matemática.

MARTIN, T.S., SOUCY, S.M., WALLACE, M.L. y DINDYAL, J. (2005). The Interplay of Teacher and Student Actions in the Teaching and Learning of Geometric Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 60(1), pp. 95-124.

PIAGET, J. y GARCÍA, R. (1983). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México: Siglo veintiuno editores.

POWELL, A.B., FRANCISCO, J.M. y MAHER, C.A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior*, 22(4), pp. 405-435.

ROBERT, A. y ROGALSKI, J. (2005). A Cross-Analysis of the Mathematics Teacher's Activity. An Example in a Frenc 10th-Grade Class. *Educational Studies in Mathematics*, 59(1-3), pp. 269-298.

SÁNCHEZ-MATAMOROS, G. (2004). «Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción de derivada (desarrollo del concepto)». Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla.

SÁNCHEZ-MATAMOROS, G., GARCIA, M. y LLINARES, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(1), pp. 85-98.

SCHOENFELD, A. (2000). Models of the Teaching Process. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(3), pp. 243-261.

SCHOENFELD, A. (2001). Purposes and Methods of Research in Mathematics Education, en Holton, D. (ed.). *The teaching and learning of Mathematics at University Level (An ICMMI Study)*, pp. 221-236. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

SENSEVY, G., SCHUBAUER-LEONI, M.L., MERCIER, A., LIGOZAT, F. y PERROT, G. (2005). An Attempt to Model the Teacher's Action in the Mathematics Class. *Educational Studies in Mathematics*, 59(1-3), pp. 153-181.

SIMON, M.A. y TZUR, R. (1999). Explicating the Teachers' Perspective from the Researchers' Perspectives: Generating Accounts of Mathematics Teachers' Practice. *Journal for Research in Mathematics Education,* 30(3), pp. 252-264.

SIMON, M. A., TZUR, R., HEINZ, K., KINZEL, M. y SMITH, M.S. (2000). Characterizing a Perspective Underlying the Practice of Mathematics Teachers in Transition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(5), pp. 579-601.

[Artículo recibido en mayo de 2006 y aceptado en febrero de 2007]