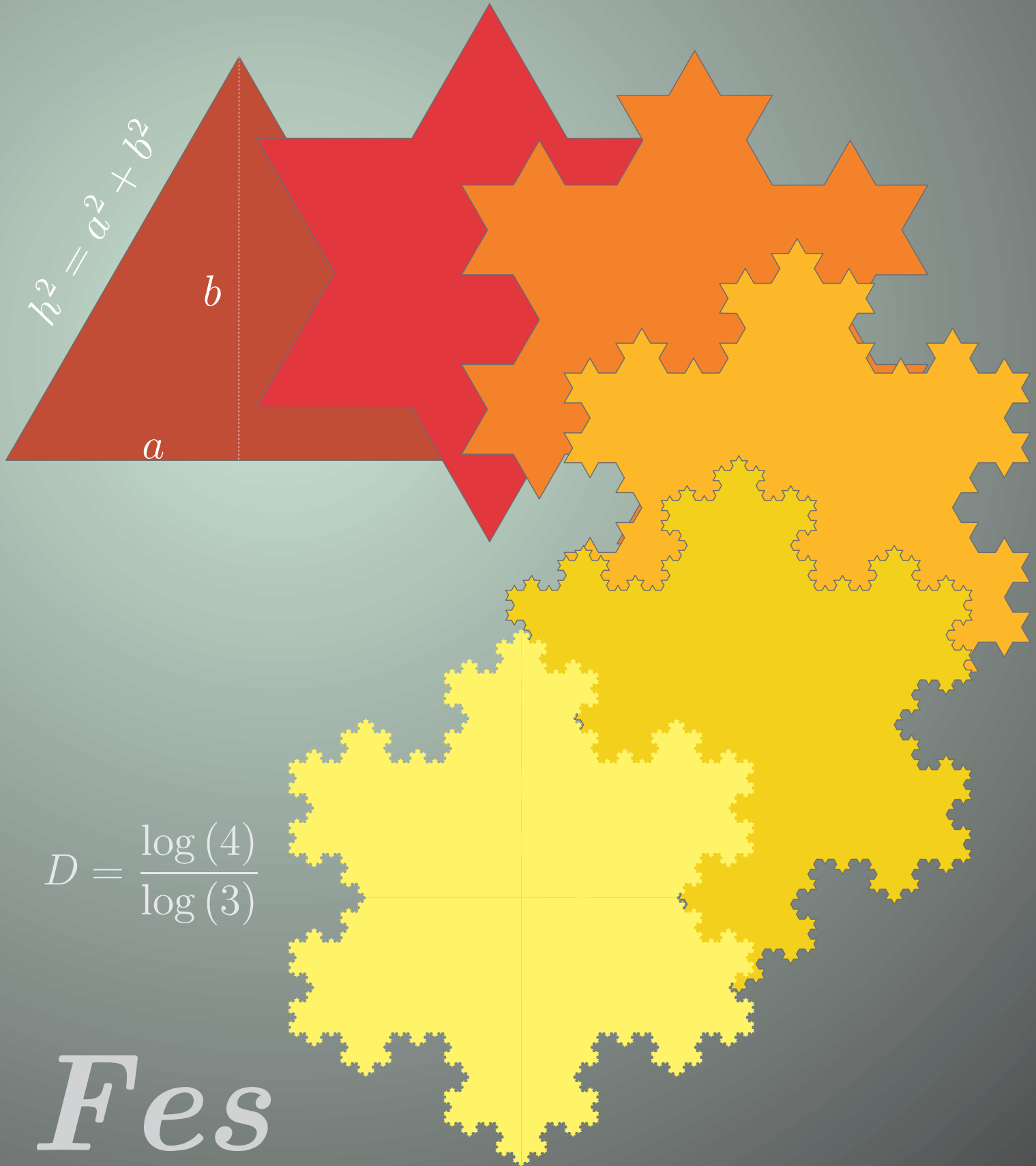




$$D = \frac{\log(4)}{\log(3)}$$

*Fes
Matemàtiques!*



*Ac lcotus oler frei*¹

¹Voleu saber a qui hem dedicat aquest llibre? Consulteu la subsecció “Xifrats de transposició”, a les pàgines 77 i 78.

Índex

1	Presentació	5
2	Alguns temes matemàtics	17
3	Problemes proposats	109
4	Passatemps matemàtics i altres divertiments	141
5	Notes històriques i citacions.	179

Capítol 1

Presentació

1.1 Objectiu del llibre

L'objectiu d'aquesta publicació és fer arribar als alumnes de batxillerat, a punt d'accedir als estudis universitaris, una pinzellada de les diverses cares de la matemàtica.

Tot i que un estudiant interessat pot recórrer els capítols pel seu compte, adrecem també aquest material als departaments de professorat de matemàtiques dels centres de secundària; amb la seva orientació la lectura serà molt més profitosa.

Amb aquest material pretenem, en primer lloc, canviar la percepció social del matemàtic, sovint identificat com a professor; avui en dia, el matemàtic és un professional també apreciat en el món empresarial i industrial, amb una tendència clarament creixent. També volem, en segon lloc, encoratjar els estudiants a orientar-se cap a aquesta disciplina, fonamental en la societat del nostre temps.

A continuació descriurem l'organització del llibre. El capítol 2 vol ser una mostra de les múltiples aplicacions de les matemàtiques; veureu que cobrim un ampli espectre que va de la música a les travesses, passant per aportacions als camps de la biologia o l'astronomia. Pensem que els temes d'aquest capítol poden servir de motivació per introduir certs conceptes o tècniques matemàtiques, o per estimular la realització de treballs de recerca en la matèria.

El capítol 3, potser el més acadèmic, conté problemes de deu especialitats matemàtiques diferents, com per exemple la topologia, l'experimentació numèrica, o l'estadística. Els han preparat professors del Departament de Matemàtiques de la UAB, experts de les diverses branques del coneixement matemàtic. Els problemes s'han catalogat segons el seu grau de dificultat. Creiem que es poden usar com a material complementari als textos, o bé suggerir-los als alumnes per a treballs individuals, etc. Les solucions dels problemes no figuren en el llibre, però els autors, via *e-mail*, telèfon o personalment, s'ofereixen a respondre consultes i rebre comentaris dels lectors interessats.

El capítol 4 és un recull d'entreteniments matemàtics, no per lúdic menys interessant. Pensem que una lectura activa pot estimular la percepció matemàtica, i que se'ls pot donar una utilitat didàctica similar als problemes del capítol anterior. La majoria de les qüestions plantejades s'acompanyen de la solució, al final del capítol.

Finalment, en el capítol 5 fem un petit viatge per la història de les matemàtiques, basant-nos en la biografia d'alguns matemàtics importants, i en un recull de citacions sobre ciència en general, i matemàtiques en particular.

Desitgem que la lectura d'aquest material incrementi l'interès del lector per les matemàtiques i les seves aplicacions.

1.2 Col·laboradors i agraïments

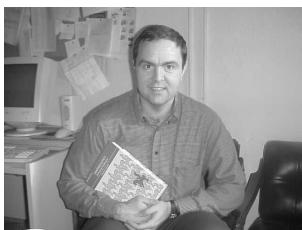
En la confecció d'aquest llibre han col·laborat moltes persones.

Són autors d'alguna part del text: Aureli Alabert, Joaquim Bruna, Rosa Camps, Àngel Calsina, Joan J. Carmona, Anna Cima, Ferran Cedó, Bartomeu Coll, Armengol Gasull, Gregori Guasp, Antoni Guillamon, Maria Jolis, Francesc Mañosas, Enric Nart, Pedro Puig, Agustí Reventós, Laia Saumell, Antonio Teruel, Joan Torregrosa, Frederic Utzet i Josep Vives.

També han ajudat de moltes formes diferents: Joan Carles Artés, Rosa Camps, Rosario Delgado, Joan del Castillo, Consuelo García, Joan Gasull, Joan Girbau, Gregori Guasp, Antoni Guillamon, Maria Jolis, Nati Jolis, Jaume Llibre, Rosa Rodríguez, Josep Vives i, de manera especial, Joan Torregrosa.

Finalment Maria Carme Boada, Joaquim Bruna, Mercè Farré, Gregori Guasp i Maria Jolis han tingut la paciència de llegir tot el material. Moltes gràcies pels seus suggeriments.

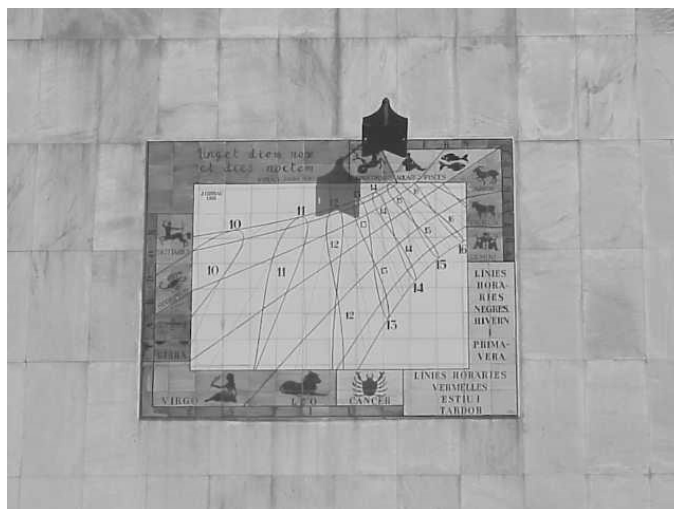
Cerdanyola, febrer de 2000,



Armengol Gasull i Embid
Coordinador de la Publicació

1.3 Matemàtiques i estadística a la UAB

Com veureu en aquesta publicació, les matemàtiques són una cosa i a la vegada moltes coses. En primer lloc, les matemàtiques constitueixen el llenguatge bàsic de la ciència i la tecnologia, un llenguatge universalment vàlid i sempre vigent sense el qual no seria possible cap dels avenços de la societat moderna. Això és particularment cert en el moment actual, quan assistim a una veritable explosió en l'aplicació de models matemàtics a nombrosos camps de la ciència, la tecnologia, les humanitats, etc. El paper de les matemàtiques en la societat de la comunicació i la informació, no cal dir-ho, és essencial. La importància del tractament de dades, l'estadística, en pràcticament tots els camps científics és evident. Però la matemàtica també és recerca, recerca que pot ser interdisciplinària i motivada per les aplicacions, o bé motivada per la matemàtica mateixa, amb una dinàmica pròpia que per si mateixa ja és un repte intentar comprendre. Com a activitat intel·lectual, la recerca en matemàtiques és també creació, descobriment, exploració, i pot esdevenir passió. L'exercici de l'activitat matemàtica estimula i potencia, és un fet comprovat i ha esdevingut ja un estereotip, qualitats intel·lectuals com ara la capacitat d'anàlisi, d'abstracció, d'assimilació i, en definitiva, de penetrar en l'estructura profunda de les coses i els problemes.



Rel·lotge de sol dissenyat per Joan Girbau, professor de matemàtiques de la UAB

Al Departament de Matemàtiques de la UAB tots aquests aspectes de la matemàtica hi són presents. A més de ser el responsable de les titulacions de Matemàtiques i d'Estadística, en què s'imparteix la formació bàsica i troncal indispensable i que us presentarem més endavant, al Departament hi ha estructures que permeten canalitzar l'activitat en tots aquests fronts.

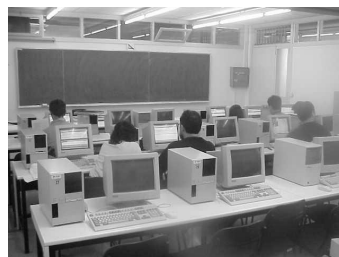
El nostre Departament consta actualment de 88 professors, dels quals 53 són fixos (catedràtics o titulars d'universitats) i la resta són contractats (professors ajudants o associats), dades que el fan un dels més grans de la UAB.

En l'àmbit de la docència, el Departament és el responsable d'impartir la docència en la pràctica totalitat d'assignatures de matemàtiques de les diverses titulacions que es poden cursar a la UAB, fins a un total de quinze, a part de les dues que, com ja hem dit, li són pròpies, la Llicenciatura de Matemàtiques i la Diplomatura d'Estadística. Això el fa que sigui el departament amb més presència als diversos centres i facultats de la UAB.

En recerca, al Departament hi ha un total de dotze grups de recerca que desenvolupen projectes d'investigació dins les cinc àrees de coneixement: Àlgebra i fonaments, Geometria

i Topologia, Anàlisi matemàtica, Estadística i Investigació operativa, i Matemàtica aplicada. Tots els grups gaudeixen de finançament obtingut en convocatòries públiques competitives. El Departament és també node de quatre xarxes europees finançades pel programa europeu *Training and Mobility*. Aquest fet, i els programes de mobilitat que es coordinen amb el Centre de Recerca Matemàtica (IEC) emplaçat al mateix edifici, fa que pel Departament hi passin contínuament destacats investigadors. El nivell de la recerca al Departament és alt i competitiu, els grups estan ben relacionats i generen un nivell d'activitat estable (seminaris, congressos, etc.). El Departament publica una revista periòdica (dos números l'any) especialitzada en recerca en matemàtiques, *Publicacions Matemàtiques*, amb un ampli comitè editorial i inclosa en els sistemes d'informació internacionals. Com a dada significativa, del Departament de Matemàtiques de la UAB han sortit un total de 228 publicacions en diverses especialitats en els darrers cinc anys. Aquestes xifres fan que sigui considerat un dels capdavaners en el conjunt de l'Estat espanyol.

Pel que fa als serveis, el Departament té en funcionament un Gabinet d'Assessorament amb dos àmbits d'actuació diferenciats: l'acadèmic, que dona suport als investigadors de grups de recerca d'altres disciplines; i el servei a empreses i indústries, que ofereix assessorament en les qüestions que poden tractar-se amb models matemàtics.



És important destacar que el caràcter unitari del Departament i la cohesió interna són el que fa possible oferir aquest tipus de servei, que en aquests moments està generant força activitat. En les feines del Gabinet hi participen sovint estudiants de les titulacions, que tenen així l'oportunitat de treballar en problemes interdisciplinaris i d'interès pràctic.

Una de les qüestions que més ha preocupat el Departament els darrers anys és establir ponts adequats entre les titulacions i el mercat laboral. Amb aquesta finalitat els estudis de tercer cicle contemplen les possibilitats següents:

1. **Programa de Doctorat en Matemàtiques**, adreçat als interessats en la recerca i l'elaboració d'una tesi doctoral.
2. **Mestratge de Matemàtiques per a Ensenyants**, integrat dins els estudis corresponents al Certificat de Qualificació Pedagògica, normatiu per als futurs professors d'ensenyament secundari.
3. **Mestratge de Matemàtiques per a l'Empresa i la Indústria**, destinat als llicenciats que volen integrar-se en el món empresarial i industrial. Aquest mestratge inclou pràctiques remunerades en empreses col·laboradores d'un mínim de tres mesos.
4. **Mestratge de Matemàtiques per als Instruments Financers**, que forma especialistes en els models matemàtics que s'utilitzen en diversos productes financers, com ara les opcions de compra, la cobertura de risc, la gestió de carteres, etc. Els especialistes que estem formant tenen avui en dia una gran acceptació en el mercat laboral. Aquest mestratge també inclou un període de pràctiques remunerades en bancs i caixes d'estalvi col·laboradores, així com a la Borsa de Barcelona.

Presentarem per acabar les titulacions de Matemàtiques i Estadística.

Llicenciatura de Matemàtiques

Hi ha moments a la vida en què hom pot decidir iniciar una trajectòria o una altra amb probabilitats molt semblants, mentre que l'elecció presa determinarà fortament el seu futur.

Molts estudiants de secundària us trobeu en aquesta situació a l'hora de decidir quins estudis escollir. Si les matemàtiques són una de les opcions que considereu, podeu assajar amb aquest material que us ofereix la UAB i que us permetrà “tastar-les delícies d'aquesta ciència.

Potser també us interessarà saber que aquests estudis van adreçats a gent curiosa, valenta, a la qual li agradi entendre les coses en tota la seva profunditat i que valori el fet de no trobar limitacions en el seu camp d'interès (les matemàtiques no te les acabes mai!).

La Llicenciatura de Matemàtiques és una carrera de quatre anys que té com a objectiu formar matemàtics generalistes. S'ofereix una formació bàsica en anàlisi matemàtica, àlgebra, topologia, estadística, geometria i càlcul numèric. Un 20% de les assignatures són optatives, la qual cosa permet a cada estudiant escollir les matèries en les quals està més interessat. A més, un 10% dels crèdits són dels anomenats de lliure elecció, que vol dir que es poden escollir d'entre totes les assignatures que s'imparteixen a la UAB, incloent-hi les anomenades de campus.

A la Llicenciatura de Matemàtiques de la UAB s'imparteixen uns crèdits de tipus pràctic, que corresponen a classes de problemes, pràctiques al laboratori informàtic i pràctiques d'aula, en què els estudiants treballen en grups reduïts amb l'assistència d'un professor. A més, l'alumne de primer curs disposa d'un professor tutor que l'ajuda a iniciar-se en el discurs matemàtic, l'orienta i l'ajuda a l'hora d'adquirir un mètode de treball.

A més, l'estructura de campus de la UAB contribueix a fer molt agradable la vida dels estudiants durant aquest període de formació.

El resultat final: el més rellevant és la “formació” del matemàtic. Persona amb capacitat de pensar, de resoldre problemes, d'entendre i implementar nous models, i tot amb una gran predisposició a fer les coses ben fetes, heretada del rigor que acompanya inexorablement el coneixement matemàtic.



Diplomatura d'Estadística

L'estadística és una disciplina científica que s'ocupa de l'anàlisi de dades i del tractament de la informació com a suport a la presa de decisions.

Avui dia, totes les disciplines científiques, tant les experimentals (física, biologia, etc.), com les humanes (sociologia, psicologia, etc.) generen dades provinents de l'experimentació i l'observació. L'anàlisi de dades és, doncs, imprescindible per avançar en aquestes disciplines.

D'altra banda, la presa de decisions en el món de l'empresa requereix una anàlisi acurada de la informació disponible, generalment de tipus quantitatiu. Això fa també imprescindible l'anàlisi de dades en el món industrial i empresarial en general.

Tot això, en un món en què cada cop és més fàcil l'accés a sofisticat *software* de tractament de dades i, per tant, on ningú no podrà prescindir de les tècniques estadístiques si vol mantenir un cert nivell de competitivitat.

La Diplomatura d'Estadística de la UAB és una carrera de tres anys que forma experts de grau mitjà en anàlisi de dades, en les especialitats d'Estadística general, Estadística aplicada a la indústria (Control de qualitat), Estadística aplicada a l'anàlisi de la realitat econòmica,

Estadística aplicada a les ciències de la salut, etc.

Algunes de les possibles sortides professionals de la titulació són les següents:

- Control de qualitat en indústries.
- Anàlisi de dades econòmiques i financeres en empreses o institucions públiques.
- Estudis de mercat (màrqueting)
- Disseny d'experiments i anàlisi dels resultats en epidemiologia i farmacologia, en hospitals o laboratoris farmacèutics.
- Sondejos preelectorals i postelectorals, enquestes d'opinió, seguiment d'audiències de mitjans de comunicació, etc., en empreses especialitzades.

La titulació és eminentment pràctica i enfocada a les aplicacions. Un important percentatge d'hores de classe són pràctiques amb ordinador. Les assignatures obligatòries són d'Informàtica, de Matemàtiques i en particular de Teoria de la probabilitat, i evidentment d'Estadística.

A més de l'accés al mercat laboral, la titulació permet també accedir fàcilment a titulacions de segon cicle.

D'altra banda, el campus de la Universitat Autònoma, a Bellaterra, és un entorn molt agradable per a aquests estudis. Precisament, el fet que la Universitat estigui concentrada en un campus fomenta la interdisciplinarietat. Les assignatures de lliure elecció poden ser escollides realment (facilitat d'horaris, absència de problemes de transport) entre totes les que ofereix la Universitat.

En resum, si tens un cert gust per interpretar i analitzar dades, o una certa seducció per l'atzar i les seves lleis, o si vols obrir-te camí en el món empresarial més modern i dinàmic, o també, si vols col·laborar en el progrés del coneixement científic, la Diplomatura d'Estadística que ofereix la Universitat Autònoma de Barcelona pot ser la carrera adequada.

Si voleu més informació d'ambdues titulacions, no dubteu a consultar les pàgines web:

<http://www.manwe.mat.uab.es/seccio> i <http://www.uab.es>.



Anna Cima i Mollet,
coordinadora de la Titulació de Matemàtiques de la UAB, tel.: 93 581 14 53.
e-mail: cima@mat.uab.es



Joaquim Bruna i Floris,
director del Departament de Matemàtiques de la UAB, tel.: 93 581 18 57.
e-mail: bruna@mat.uab.es.



Josep Vives i Santa-Eulalia,
coordinador de la Titulació d'Estadística de la UAB, tel.: 93 581 29 41.
e-mail: vives@mat.uab.es.

1.4 Beca Pere Menal

El Dr. Pere Menal i Brufal, nascut a Lleida l'any 1951, es va llicenciar en Matemàtiques per la Universitat de Barcelona l'any 1973 i des d'aleshores fou professor del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona, on va llegir la seva tesi doctoral el 1977. Va ser nomenat catedràtic d'Àlgebra l'any 1981. Gran autodidacte, va ser iniciador i impulsor de la recerca en àlgebra no commutativa entre nosaltres i també arreu de l'Estat.

La seva producció científica inclou gairebé quaranta treballs de recerca en revistes internacionals, alguns dels quals fets en col·laboració amb els millors especialistes mundials.

La seva sobtada mort en accident de circulació el dia 4 d'abril de 1991 va significar la pèrdua d'un gran matemàtic, d'un entranyable company i d'una excel·lent persona.



Beca Pere Menal

La Universitat Autònoma de Barcelona, a instància del Departament de Matemàtiques, convoca les beques anomenades "Pere Menal" per a tots els estudiants que, o bé, es matriculin al primer curs de la Llicenciatura de Matemàtiques, o bé, havent obtingut la beca en períodes anteriors, demostrin que compleixen els requisits per a renovar-la.

S'atorgaran quatre beques si els sol·licitants compleixen els requisits. Una de les quals serà per a un estudiant que es matriculi de primer curs de la Llicenciatura de Matemàtiques en el període 2000-2001.

Els sol·licitants de primer curs hauran de complir els requisits següents:

- Haver-se examinat de les PAAU.
- Haver-se matriculat de primer curs a la Llicenciatura de Matemàtiques de la UAB en el període 2000-2001.
- Sol·licitar la beca.

La beca de primer curs s'atorgarà al sol·licitant que tingui la nota més alta de l'examen de les PAAU entre tots els que tinguin una nota superior o igual a 7 de l'examen de Matemàtiques I de les dites PAAU. En cas d'empat entre dos o més sol·licitants, es tindrà en compte la mitjana de notes de BUP i de COU, i en cas de procedir d'estudis d'FP, REEM, es tindrà en compte la nota mitjana del currículum acadèmic. Les sol·licituds s'hauran de presentar a l'Àrea d'Alumnes (Beques) de la UAB de l'1 al 15 d'octubre del curs acadèmic en què se sol·licita la beca.

La borsa de la beca inclou la matrícula gratuïta de totes les assignatures de la carrera, si el sol·licitant en cada període compleix els requisits, a més d'una quantitat anual de 30 000 pessetes en concepte d'adquisició de llibres. En cas que l'estudiant que es matricula al primer curs hagi obtingut la qualificació de matrícula d'honor al curs d'orientació universitària, rebrà l'import que hauria d'haver abonat en concepte de taxes de matrícula, més les 30 000 pessetes.

Podeu trobar més informació a <http://mat.uab.es/seccio/Pere.htm>.

1.5 Universitat Autònoma de Barcelona

La Universitat Autònoma de Barcelona (UAB) és una institució pública, dedicada a la recerca i la docència.

La UAB es caracteritza per ser una universitat que aplega estudis i investigacions d'àmbits tan diversos com l'humanístic, social, el de la salut, les ciències experimentals i les tecnologies o les enginyeries. Això permet efectuar anàlisis multidisciplinàries de problemes complexos com, per exemple, els de medi ambient, camp en el qual disposem d'estudis homologats de nivell superior. L'emplaçament en el nostre campus de centres de recerca d'altres institucions, com el Centre Nacional de Microelectrònica, l'Institut de Ciència dels Materials o el d'Anàlisi Econòmica, tots aquests del Consell Superior d'Investigacions Científiques, o del Centre de Recerca Matemàtica, permet una forta interacció amb els diferents centres i departaments, que té com a conseqüència una docència sempre actualitzada. Al mateix temps, l'Autònoma ofereix els serveis de suport a l'estudi fonamentals per desenvolupar la vida universitària amb plenes garanties, en camps tan diversos com ara la consulta bibliogràfica, els idiomes, la informàtica o la inserció professional.

Els plans d'estudis s'estructuren en cicles i es divideixen en cursos. Els cursos són semestrals i la càrrega lectiva es mesura en crèdits. Un crèdit equival a deu hores de classe d'una assignatura.

La investigació constitueix un pilar fonamental de la vida universitària i de la projecció exterior de la Universitat Autònoma de Barcelona. Gràcies al reconegut prestigi assolit per la tasca investigadora a la UAB, tant en l'àmbit nacional com en l'internacional, juntament amb els importants llaços que manté amb els sectors productius més significatius, la recerca a la UAB defineix un paper prioritari pel que fa al servei de la universitat vers la societat.



Les columnes de la UAB
Obra d'Andreu Alfaro, 1999

Situada geogràficament en un dels pols de desenvolupament tecnològic més importants de Catalunya, la voluntat innovadora de la UAB li permet participar en importants projectes de recerca nacionals i internacionals, i mantenir d'aquesta manera una docència acadèmica sempre actualitzada i de qualitat.

La Universitat Autònoma de Barcelona, a més d'oferir tots els serveis propis d'un gran centre universitari, també posa a disposició d'estudiants i personal docent un ampli ventall de facilitats per tal de viure el campus i cobrir totes les necessitats tant de la seva vida acadèmica com del lleure i de la vida quotidiana.

El campus de la Universitat Autònoma de Barcelona constitueix una ciutat de prop de 40 000 persones, les quals, a més de desenvolupar plenament la seva vida universitària, gaudeixen d'uns equipaments que els permeten disposar de tots els serveis necessaris per viure en un entorn idoni.

Algunes dades del curs 1998-99 són les següents:

- 38 590 estudiants de 1r i 2n cicles, 11814 estudiants de 3r cicle i 1686 estudiants estrangers.
- 2 795 membres del personal acadèmic i investigador i 1 232 membres del personal d'administració i serveis.

- 35 llicenciatures, 15 diplomatures, 3 enginyeries superiors, 4 enginyeries tècniques, 4 graduats superiors (titulació pròpia) i 1 diploma (titulació pròpia).
- 76 programes de doctorat, 47 programes de mestratge, 83 programes i cursos de postgrau i 65 cursos d'especialització.
- 46 departaments, 12 facultats i ETS i 16 escoles universitàries (pròpies, adscrites o vinculades).
- 12 instituts i centres de recerca i estudi propis.
- 19 instituts de recerca adscrits o vinculats.
- 7 serveis tècnics generals de suport a la docència i a la recerca, 8 serveis científicotècnics de suport a la recerca i 19 laboratoris de prestació de serveis.
- 9 biblioteques, 1 hemeroteca, 1 cartoteca i 2 centres de documentació i arxius.

Trobareu més informació a la pàgina web de la UAB: <http://www.uab.es/>

1.6 Sobre la portada

Moltes vegades, quan m'han presentat a una persona i hem començat a parlar sobre les nostres respectives ocupacions, ha sorgit la mateixa pregunta ...

Què més es pot fer en matemàtiques?

La matemàtica és un dels molts mitjans de comunicació que crea l'home per a la seva relació amb el món que l'envolta, i com a tal es desenvolupa amb cada nova interpretació que fem del comportament de la natura. El més extraordinari, i que és comú a tots els àmbits del saber, és que la nostra manera d'interpretar els futurs fenòmens naturals depèn al seu torn dels elements dels quals ara disposem. Aquesta realimentació (*feedback*) és un dels factors que fa evolucionar la matemàtica, i això és el que hem pretès representar, tant pel que fa a la forma com al contingut, amb la imatge de la portada.

A la Grècia clàssica, una part del coneixement que tractava del que ara coneixem amb el nom de física, estava centrada en l'estudi de les lleis de l'estàtica (Arquímedes, 287-212 a.C.): les relacions entre les llargades dels braços d'una balança i els pesos que se situen a cadascun dels extrems per tal que es mantinguin en equilibri; les lleis de la palanca; etc. Les representacions geomètriques que aquests problemes involucraven eren circumferències, triangles i polígons en general, i les qüestions plantejades giraven entorn de les relacions entre el perímetre i el radi (en el cas de la circumferència), o entre dos o més costats (en el cas dels polígons). És per tots conegut el teorema de Pitàgores (569-470 a.C.) que relaciona la longitud de la hipotenusa d'un triangle rectangle amb la dels seus catets.

Des de la creació de la dinàmica moderna per Galileu (1564-1643), i la incorporació del temps en les equacions de la física, els objectes geomètrics a què han donat lloc els problemes plantejats han canviat. La geometria de la dinàmica ha generat corbes com la branquistocrona, la cicloide, etc., i més recentment objectes que avui coneixem amb el nom de fractals (Mandelbrot, 1975). Aquests objectes no admeten una definició "estàtica", com succeeix en el cas de la circumferència (el lloc geomètric dels punts que són a la mateixa distància d'un punt donat), el triangle rectangle (polígon de tres costats que té un angle recte), etc. La comprensió dels objectes fractals exigeix, en la seva versió més estesa, un procés iteratiu infinit. És a dir, únicament podem fer-nos una idea de l'objecte després d'un procés iteratiu, del qual només coneixem els primers estadis i del qual *mai no podem tenir una imatge completa*.

El floquet de neu de von Koch

Un exemple clàssic d'objecte fractal és la corba de von Koch (introduïda l'any 1904), l'interior de la qual es coneix com floquet de neu de von Koch. A la figura 1 representem els primers passos en la construcció d'un dels costats de la corba de von Koch.

La construcció comença amb un triangle equilàter de costat l igual a la unitat de mesura, per exemple metres, i per tant de perímetre p igual a 3 metres. A continuació, en el terç central de cadascun dels costats es col·loca un triangle equilàter, amb els costats de longitud $l = 1/3 m$, vegeu la figura 1.(b). D'aquesta manera s'obté una estrella de sis puntes. Notem que cadascun dels tres costats del triangle original s'ha substituït per quatre segments de longitud $1/3 m$, per la qual raó la figura actual consta de $12 = 3 \times 4$ costats i té un perímetre de $p = 12 \times 1/3 = 3 \times 4/3 m$. En el pas següent substituïm novament cada terç central dels dotze costats per un triangle equilàter de costat $l = 1/9 = 1/3^2 m$, vegeu la figura 1.(c). Això proporciona un polígon de $36 = 12 \times 3 = 3 \times 4^2$ costats i de perímetre $p = 36 \times 1/3^2 = 3 \times 4^2/3^2 m$.

Si repetim el procés n cops, és senzill concloure que la figura obtinguda és un polígon de 3×4^n costats i que la longitud de cada costat es $l = 1/3^n m$, i dona com a resultat que el perímetre és de $p = 3 \times (4/3)^n m$. Ni tan sols en aquest moment tenim una representació completa de la corba de von Koch. Per aconseguir això hem de fer el pas al límit quan n tendeix a infinit. D'aquí es dedueix que el perímetre del floquet de neu de von Koch té longitud infinita, $\lim_{n \nearrow +\infty} 3 \times (4/3)^n = +\infty$.

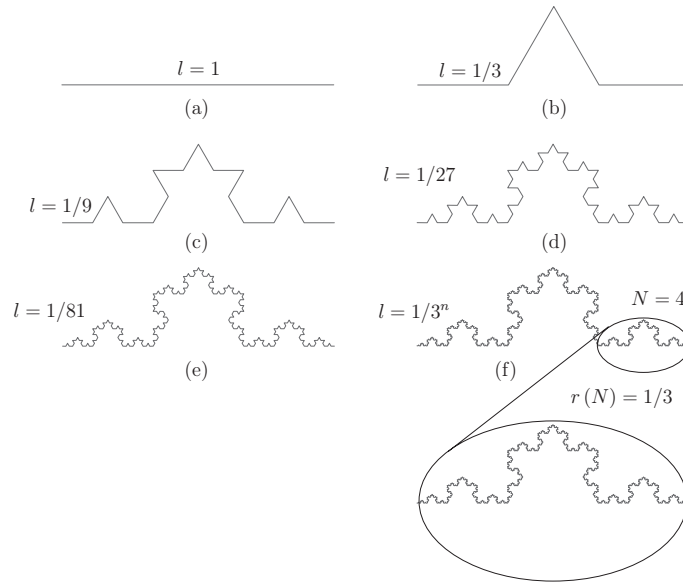


Figura 1. Construcció d'un dels costats de la corba de von Koch. (a) 1 costat de longitud 1; (b) 4 costats de longitud $1/3$; (c) 4^2 costats de longitud $1/3^2$; (d) 4^3 costats de longitud $1/3^3$; (e) 4^4 costats de longitud $1/3^4$; (f) 4^n costats de longitud $1/3^n$.

Hauríem canviat poc la nostra percepció del món si continuéssim contestant les mateixes preguntes que contestava Pitàgores en els seus resultats, el perímetre de la figura. És tanmateix ara la matemàtica la que qüestiona: quines propietats pot tenir una corba generada d'aquesta manera? La resposta, deguda a Hausdorff (1919) i elaborada per Besicovitch (1934) és el que s'anomena dimensió fractal o dimensió de Hausdorff-Besicovitch. El concepte de dimensió de Hausdorff-Besicovitch és prou complex per exigir un espai i unes eines que s'allunyen dels nostres propòsits. Tanmateix podem introduir aquí un concepte equivalent (útil en el cas de figures autosembants), la dimensió de semblança.

Diem que una figura (en el nostre cas una corba) és *autosembant* si es pot dividir en trossos de manera que cadascun sigui semblant al total. Per exemple, un segment de recta es pot dividir en N trossos, sent cadascun semblant a tot el segment amb raó de semblança $r(N) = 1/N$. En el cas d'un rectangle succeeix una cosa anàloga: podem dividir-lo en N rectangles de manera que cadascun sigui semblant al total amb una raó de semblança $r(N) = 1/N^{1/2}$. El mateix podem fer en el cas d'un paral·lelepípede rectangular i obtenim una raó de semblança $r(N) = 1/N^{1/3}$. Un examen detallat de l'anterior ens porta a pensar que si la raó de semblança d'un objecte s'expressa com $r(N) = 1/N^{1/D}$, llavors D és la dimensió euclidiana de l'objecte. En el cas del segment, $r(N) = 1/N^{1/1}$; així doncs; $D = 1$ i és cert que la dimensió euclidiana d'un segment és 1. El mateix succeeix en el cas d'un rectangle, per al qual $D = 2$ coincideix amb la dimensió euclidiana del rectangle, i en el cas

del paral·lelepípede $D = 3$. D'aquest raonament sorgeix el concepte de dimensió de semblança. Si la raó de semblança $r(N)$ d'una figura autosemblant s'expressa com

$$r(N) = \frac{1}{N^{1/D}},$$

diem que la *dimensió de semblança* de la figura és D . Prenent logaritmes i aïllant D s'obté

$$D = \frac{\log(1/N)}{\log(r(N))}.$$

En el cas particular de la corba de von Koch s'observa que cadascun dels costats es pot dividir en quatre parts ($N = 4$) semblants al costat sencer, amb una raó de semblança $r(N) = 1/3$, (vegeu la figura 1.(f)). Així doncs, la corba de von Koch té dimensió de semblança

$$D = \frac{\log(1/4)}{\log(1/3)} = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1.2618...$$

La dimensió fractal ha esdevingut en els darrers anys una eina molt útil en l'estudi de la natura i ha transformat la nostra manera d'entendre-la. Objectes com les costes marines, els núvols, els arbres, etc. exhibeixen un comportament fàcilment identificable amb un fractal, encara que parlant amb propietat el terme fractal no seria aplicable a cap d'aquestes coses (tampoc el concepte d'esfera és estrictament aplicable a la Terra i ningú no dubta respecte al canvi de pensament que va produir el fet de considerar-la com a tal).

Aquest no és un exemple isolat de la capacitat creadora de les matemàtiques / matemàtics. La matemàtica n'és plena, de fet, no conté res més que això.

Antonio Teruel Aguilar, professor de Matemàtica aplicada del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona. tel.: 93 581 18 86, e-mail: teruel@mat.uab.es.



Capítol 2

Alguns temes matemàtics

L'any 2000 fou proclamat Any Mundial de les Matemàtiques en la Declaració de Rio de Janeiro del 1992. Aquesta iniciativa va rebre el suport de la UNESCO en reunió plenària l'any 1997. Moltes associacions i institucions internacionals han expressat llur suport a aquesta celebració i hi col·laboren. També el Govern espanyol i el Parlament de Catalunya han mostrat el seu suport a la iniciativa.

En aquestes declaracions s'han fet les consideracions següents sobre les matemàtiques:

- Les matemàtiques són una de les màximes expressions de la intel·ligència humana i un magnífic exemple de bellesa de les creacions intel·lectuals.
- Constitueixen un eix central de la història de la cultura i de les idees.
- Gràcies a la seva universalitat, s'apliquen en les altres ciències, de la natura i socials, en les enginyeries, en les noves tecnologies, i en diferents branques del coneixement i en els diferents tipus d'activitat humana, de manera que resulten fonamentals en el desenvolupament dels pobles.
- Constitueixen una eina bàsica per a què la majoria de les persones puguin comprendre la societat de la informació en què vivim.
- Han tingut, i hauran de seguir tenint, un paper destacat en els sistemes educatius i en l'aprenentatge dels escolars.
- Es converteixen en un dels àmbits més adients per a la cooperació entre tots els pobles pel seu llenguatge i valor universals.

L'objectiu d'aquest capítol és donar exemples concrets en què pretenem il·lustrar alguns dels punts anteriors. Els autors d'aquestes seccions són:

- Secció 2.1 sobre la relació entre vots i escons, Aureli Alabert.
- Secció 2.4 sobre la prova χ^2 , Maria Jolis.
- Secció 2.5 sobre perspectives, Gregori Guasp.
- Secció 2.8 sobre geometria integral, Agustí Reventós.
- Secció 2.10 sobre tractament d'imatges, Bartomeu Coll, professor de la Universitat de les Illes Balears.
- Secció 2.22 sobre finances, Frederic Utzet.
- La resta dels temes han estat preparats per Armengol Gasull.

2.1 Democràcia: dels vots als escons

La democràcia parlamentària està basada en l'elecció justa d'un nombre petit d'individus (diputats) per representar un nombre molt més gran de ciutadans. És una idea ben clara, llevat que... què vol dir *justa*?

Al nostre país, els candidats a diputat es presenten a les eleccions agrupats en les anomenades *candidatures* o *l·listes*, que poden ser presentades per partits polítics o per coalicions de partits. Cada elector vota una de les l·listes. A partir del nombre de vots obtinguts, cada llista rep una certa quantitat d'escons.

La pregunta és, doncs, com determinar, a partir del nombre de vots que rep cada llista, la quantitat d'escons que li correspon. El sistema que s'utilitza a les eleccions al Parlament de Catalunya es coneix amb el nom de *lleï de d'Hondt*, i els càlculs que requereix són molt fàcils de fer. Prenguem com a exemple els resultats de les eleccions del 17 d'octubre de 1999 a la circumscripció de Lleida, on calia escollir 15 diputats.

Fem una taula amb una fila per a cada candidatura, i posem a la primera columna el nombre de vots v que ha obtingut cadascuna. La llista amb més vots (CiU) rep el primer escó. Hi fem una marca, i posem a la segona columna el nombre de vots dividit per 2.

	v	$v/2$		
CiU	•91199	45600		
PSC-CC-IC-V	55963			
ERC	22011			
PP	15121			

Entre tots els números de la taula que no estan marcats, escollim el més gran. La candidatura corresponent rep el segon escó. En aquest cas, és la coalició PSC-CC-IC-V. Marquem el número i posem també a la columna següent aquest número dividit per 2. El següent número més alt sense marcar és un altre cop el de CiU, que rep el tercer escó. Ara posem a la tercera columna el nombre de vots dividit per 3.

El procediment continua fins que s'han esgotat els 15 escons. A cada columna cal dividir els vots per 1, 2, 3, 4, ... La taula resultant, amb els escons e assignats finalment a cada candidatura és:

	v	$v/2$	$v/3$	$v/4$	$v/5$	$v/6$	$v/7$	$v/8$	$v/9$	e
CiU	•91199	•45600	•30400	•22800	•18240	•15200	•13028	•11400	10133	8
PSC-CC-IC-V	•55963	•27982	•18654	•13991	•11193					5
ERC	•22011	11006								1
PP	•15121	7561								1

La llei de d'Hondt és un algorisme, és a dir, un procediment que mena a la resolució d'un cert problema matemàtic. Per tant, és lògic demanar-se:

- Quin problema matemàtic resol la llei de d'Hondt?
- És aquest problema matemàtic un bon model per al repartiment just dels escons?

En principi, el que voldríem d'un *sistema electoral proporcional* és que la proporció d'escons de cada llista fos igual a la proporció de vots que ha obtingut. Veiem a la taula que ERC, per exemple, ha rebut 22 011 vots sobre un total de 184 294. Per conservar aquesta proporció, la *quota* d'escons q que li correspon es calcularia fent

$$\frac{22\,011}{184\,294} = \frac{q}{15}, \Rightarrow q = 1.79.$$

El mateix càlcul per a les altres llistes ens dona quotes de 7.42, 4.55 i 1.23. Atès que no podem assignar fraccions d'escó, hem de trobar una manera d'aproximar aquests valors de q per nombres enters. Examinarem tres possibilitats, entre les moltes que hi ha.

Suposem que hi ha n candidatures. Denotem per v_i , $i = 1, \dots, n$ la quantitat de vots aconseguits per la candidatura i . Si li assignem una quantitat e_i (entera) d'escons, aleshores el quocient v_i/e_i és el preu, en vots, de cada escó obtingut per i . La llista més afavorida és la que obté el preu $\min_{i=1, \dots, n} v_i/e_i$. Aquest mínim sempre està acotat superiorment (per V/E , on V és el nombre total de vots emesos i E és el nombre total d'escons per repartir). Per tant, si escollim els e_i de manera que el preu mínim sigui el màxim possible, estem uniformitzant el preu per escó de totes les candidatures.

En definitiva, obtenim el problema matemàtic de trobar les n quantitats $e_1, \dots, e_n$, enteres positives i de suma E , per a les quals s'obté el

$$\max \min_{i=1, \dots, n} \frac{v_i}{e_i}.$$

Aquest problema pertany a una classe de problemes d'optimització, anomenats de *programació entera*, que són en general molt difícils. Afortunadament, però, en aquest cas hi ha un algorisme molt eficient per resoldre'l. Es tracta precisament de la llei de d'Hondt. Això respon a la primera pregunta que formulàvem.

Com acabem de veure, el model matemàtic de “justícia electoral” que hi ha darrere de la llei de d'Hondt pretén uniformitzar els preus per escó “a l'alça”. També podem uniformitzar “a la baixa”: la llista menys afavorida és la que paga el preu $\max_{i=1, \dots, n} v_i/e_i$. Escollirem aleshores els e_i de forma que aquest preu sigui el mínim possible. S'obté el problema

$$\min \max_{i=1, \dots, n} \frac{v_i}{e_i}.$$

Aquest problema també té un algorisme de resolució eficient, similar al de la llei de d'Hondt. Només cal canviar els divisors de cada columna, que eren 1, 2, 3, 4, ... per la seqüència 0, 1, 2, 3, ... L'algorisme s'anomena *llei d'Adams* o *dels divisors més petits*. En el nostre exemple de Lleida obtindríem la taula següent, on el resultat de la divisió per 0 el representem amb el símbol ∞ , que cal interpretar en el sentit que totes les llistes reben un primer escó abans que cap d'elles en rebi el segon.

	$v/0$	$v/1$	$v/2$	$v/3$	$v/4$	$v/5$	$v/6$	$v/7$	e
CiU	• ∞	•91199	•45600	•30400	•22800	•18240	•15200	13028	7
PSC-CC-IC-V	• ∞	•55963	•27982	•18654	13991				4
ERC	• ∞	•22011	11006						2
PP	• ∞	•15121							2

Considerarem finalment el model següent: si E és el nombre total d'escons i V el nombre total de vots, és lògic demanar que cada elector tingui un “poder d'influència” sobre aproximadament E/V escons. Si vota la llista i , el seu poder d'influència ha estat realment de e_i/v_i , puix que e_i és el nombre d'escons assignats a la llista i . Les diferències $\frac{e_i}{v_i} - \frac{E}{V}$ es poden interpretar com una desviació de l'assignació ideal deguda a circumstàncies aleatòries. Una mesura habitual d'aquestes desviacions és l'error quadràtic. Si volem que aquest error quadràtic sigui mínim, haurem de trobar l'assignació $e_1, \dots, e_n$, que fa

$$\min \sum_{i=1}^n v_i \left(\frac{e_i}{v_i} - \frac{E}{V} \right)^2.$$

Aquest model està en certa manera a mig camí entre el corresponent a la llei de d'Hondt i el que dona lloc a la llei d'Adams, com es pot veure del fet que també és resoluble mitjançant una seqüència de divisors, que en aquest cas és 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, ... (equivalentment, es pot usar la seqüència 1, 3, 5, 7, ..., que dona el mateix resultat). L'algorisme es coneix amb el nom de *llei de Sainte-Laguë*. L'assignació d'escons resultant a Lleida és la següent:

	v	$v/3$	$v/5$	$v/7$	$v/9$	$v/11$	$v/13$	$v/15$	e
CiU	•91199	•30400	•18240	•13028	•10133	•8291	•7015	6080	7
PSC-CC-IC-V	•55963	•18654	•11193	•7995	•6218				5
ERC	•22011	•7337	4402						2
PP	•15121	7561							1

Observem que els resultats dels tres models matemàtics de “justícia electoral” que hem presentat són diferents. No obstant això, tots tres estan ben motivats en termes d'una funció objectiu que cal minimitzar o maximitzar i que representa una mesura de desproporcionalitat respecte a la quota. La conclusió és que no es pot parlar d'una única manera justa d'assignar escons. L'elecció del criteri a emprar és arbitrària i s'ha de fer a partir de consideracions polítiques. Un cop escollit el criteri, correspon a les matemàtiques trobar la manera adequada de representar-lo sense ambigüitats i proporcionar algun mètode eficient per obtenir els resultats. A la vegada, la simulació de resultats d'eleccions sota diferents criteris pot aportar idees per a l'adopció d'un sistema electoral, o per a la invenció de nous sistemes.

El lector pot dissenyar fàcilment altres mètodes a partir dels anteriors; de fet, se'n poden assajar infinits com a variants de les regles de divisors que hem vist aquí. Són possibles també altres criteris molt raonables de repartiment proporcional, i que no són resolubles mitjançant seqüències de divisors. La llei de d'Hondt deu el seu nom al jurista belga Victor d'Hondt, que el proposà el 1878, tot i que ja havia estat inventat anteriorment pel nord-americà Thomas Jefferson. S'utilitza, a més de Catalunya, a Espanya, Portugal i Finlàndia, entre d'altres. A Sainte-Laguë publicà el seu mètode el 1910, i és conegut a Amèrica del Nord amb el nom de llei de Webster. S'utilitza actualment, en forma pura, a Nova Zelanda i, amb certes modificacions, a molts altres llocs. La llei d'Adams està en desús.

Si bé els tres models vistos donen resultats diferents, que podrien certament conduir a molt diversos escenaris a l'hora de la cerca de l'estabilitat parlamentària i la formació de govern, és clar que les diferències són petites. Hi ha dos factors més del disseny d'un sistema electoral que solen tenir una influència més gran en la desproporció entre vots i escons que de vegades s'observa. El primer d'aquest factors és la *divisió en circumscripcions*; el segon és el *llindar inferior*.

La divisió en circumscripcions pretén que els futurs diputats representin també un territori, a més de representar a electors concrets. Si comparem la proporció d'electors a cadascuna de les quatre circumscripcions catalanes amb el nombre de diputats que escullen, veiem que la circumscripció de Barcelona està infrarepresentada en benefici de les altres tres.

Circumscripció	Electors	Quota	Escons
Barcelona	2376050	102.35	85
Tarragona	284221	12.24	18
Girona	283346	12.21	17
Lleida	190309	8.20	15
Totals	3133926	135	135

El terme *quota* vol dir aquí els escons teòrics que correspondrien a cada circumscripció si mantinguéssim la proporcionalitat estricta amb la població d'electors que contenen. Determinar aquesta assignació és un problema completament anàleg al de repartir escons entre candidatures. Per exemple, a les eleccions al Congrés dels Diputats espanyol, cada circumscripció (província) rep dos escons inicials i la resta es reparteix arrodonint cap amunt les quotes que tenen una part decimal més gran, i arrodonint cap avall la resta.

El segon factor que hem esmentat, el llindar inferior, estableix que una candidatura que no obtingui almenys el 3% dels vots en una circumscripció és automàticament eliminada, i els seus vots es perden. La justificació política d'aquesta norma és evitar que hi hagi una excessiva dispersió de partits en el Parlament.

En el nostre exemple de Lleida, hem descartat ja d'entrada les set llistes que no van arribar al llindar. De fet, en aquest cas concret, tampoc no haurien obtingut representació (amb la llei de d'Hondt) encara que no s'hagués establert el llindar. En efecte, la cinquena llista en nombre de vots, EV-CEC, n'obtingué 1232, que, com es comprova fàcilment a la taula, és insuficient per obtenir l'últim escó.

Examinarem la influència de la divisió en circumscripcions i del llindar inferior aplicant la llei de d'Hondt amb una sola circumscripció i sense imposar cap llindar mínim. En la taula següent, comparem els resultats que s'obtidrien amb aquest sistema (S_2) amb els resultats oficials del sistema actualment en vigor (S_1).

Llista	Vots	%	Quota	S_1	S_2
CiU	1178420	37.70	51.37	56	53
PSC-CIPC	948202	30.33	41.33	36	42
PSC-CC-IC-V	235097	7.52	10.25	16	10
PP	297265	9.51	12.96	12	13
ERC	271173	8.67	11.82	12	12
IC-V	78441	2.51	3.42	3	3
EUiA	44454	1.42	1.94	0	1
EV-CEC	22797	0.73	0.99	0	1
EV-AV	8254	0.26	0.36	0	0
POSI	2784	0.09	0.12	0	0
EC	1774	0.06	0.08	0	0
PHC	1327	0.04	0.06	0	0
FE-JONS	1281	0.04	0.06	0	0
UC-CDS	1161	0.04	0.05	0	0
PLN	1029	0.03	0.04	0	0
UNIC-FIC	881	0.03	0.04	0	0
TPR	833	0.03	0.04	0	0
PE	799	0.03	0.03	0	0
LI(LIT-CI)	485	0.02	0.02	0	0
UFD	447	0.01	0.02	0	0
CAM	110	0.00	0.00	0	0
PDEP	108	0.00	0.00	0	0

Dues curiositats de l'assignació S_2 : s'observa que els escons estan sempre a distància més petita que 1 de la quota, excepte en el cas de CiU, que sembla anormalment suprarepresentada. En canvi, EUiA sembla injustament infrarepresentada. De fet, aquests dos partits es disputen

l'últim escó en joc. Si 15 votants de CiU (curts de vista) confonguessin la seva papereta amb la de EUiA, l'escó canviaria de mans. D'altra banda, si les dues coalicions formades al voltant del PSC presentessin una única candidatura, obtindrien un escó més (53), en perjudici de CiU (52) i sense afectar la resta de llistes.

Les sigles que hem utilitzat corresponen a les candidatures següents:

CiU	Convergència i Unió
PSC-CIPC	PSC-Ciutadans pel Canvi
PSC-CC-IC-V	PSC-Ciutadans pel Canvi-IC-Verds
PP	Partit Popular
ERC	Esquerra Republicana de Catalunya
IC-V	Iniciativa per Catalunya-Verds
EUiA	Esquerra Unida i Alternativa
EV-CEC	Els Verds (Confederació Ecologista de Catalunya)
EV-AV	Els Verds-Alternativa Verda
POSI	Partit Obrer Socialista Internacionalista
EC	Estat Català
PHC	Partit Humanista de Catalunya
FE-JONS	Falange Española de las J.O.N.S.
UC-CDS	Unión Centrista-Centro Democrático y Social
PLN	Partit de la Llei Natural
UNIC-FIC	UNIC-FIC
TPR	Trabajadores Públicos Rebotados
PE	Partit Espinaltià
LI(LIT-CI)	Lluita Internacionalista
UFD	Unión Federal Democrática
CAM	Catalans al Món
PDEP	Partido Democrático del Pueblo

La llei que regula les eleccions a tot el territori espanyol és essencialment la Llei orgànica 5/1985, de 19 de juny, del règim electoral general (BOE núm. 147, de 20 de juny), amb algunes modificacions posteriors.

Els resultats complets, per circumscripcions, comarques, municipis i candidatura, de les eleccions al Parlament de Catalunya del 17 d'octubre de 1999 es poden trobar a les pàgines d'Internet de la Generalitat de Catalunya (<http://www.gencat.es>).

2.2 El número π . Diferents algorismes de càlcul

L'objectiu d'aquesta secció és donar diversos algorismes per a calcular π , comparant la seva velocitat de convergència.

El número π es defineix com el quocient entre la longitud d'una circumferència i el seu diàmetre. La notació π va ser usada per primer cop per William Oughtred (1574-1660) i pot provenir de la paraula grega $\pi\epsilon\rho\iota\mu\epsilon\tau\rho\omicron\xi$ (perímetre) usada per Arquimedes per a designar la longitud de la circumferència. La notació es va consolidar a partir dels treballs de Leonhard Euler de 1737.

Al llarg de la història hi ha hagut molts intents de calcular-lo. A continuació resumim alguns resultats d'aproximació; en cadascun subratllem els decimals correctes.

- Babilonis (2000 a.C.): $3 + \frac{1}{8} = \underline{3.125}$.
- Egipcis (2000 a.C.): $(\frac{16}{9})^2 = \underline{3.16} \dots$
- Xinesos (1200 a.C.) i a la Bíblia (550 a.C.): 3.
- Arquimedes (250 a.C.): 3.14185. També va provar que $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$.
- Tsu Txung Txih ($\simeq 480$): $\frac{355}{113} = \underline{3.1415929} \dots$
- Viète (1593): 3.1415926536.
- Euler (1707-1783): $\frac{103993}{33102} = \underline{3.1415926530} \dots$
- De Lagny (1719): 112 decimals exactes calculats.
- Rutherford (1824): 152 decimals exactes calculats.
- W. Shanks (1874): 527 decimals exactes calculats.
- Ramanujan¹: $\frac{9}{5} + \sqrt{\frac{9}{5}} = \underline{3.1416} \dots, (102 - \frac{2222}{22^2})^{1/4} = \underline{3.14159265} \dots$
- Kanada i Takahashi (1997): 51 539 600 000 decimals exactes calculats.

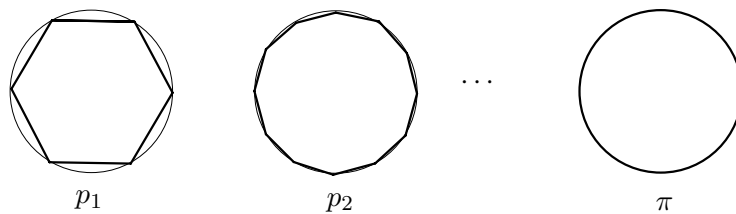
3.141592658209749
9375105835882096228834
36912647897932384626406
...430826899802682

¹Srivasva Ramanujan (1887-1920). Matemàtic hindú, autodidacte amb una gran intuïció per a trobar noves fórmules encara no ben entesa.

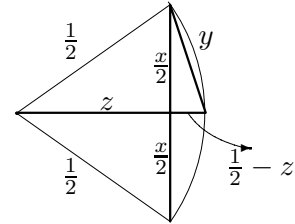
Donarem tres algorismes que permeten calcular π amb molts decimals. Observeu que cada algorisme és millor que l'anterior, en el sentit que amb menys operacions s'obtenen més decimals correctes. Vegeu també el problema 3.5.10 per a altres algorismes. Cal fer notar que π no és un nombre racional² i que no s'ha trobat cap regularitat a les xifres decimals de π . La bibliografia consultada és: *Dictionnaire de Mathématiques, fondements, probabilités, applications*, d'Albin Michel, Encyclopaedia Universalis, París, 1998 i *Le fascinant nombre π* de Jean-Paul Delahaye, Bibliothèque pour la Science, Diffusion Belin, París 1997.

Algorisme 1: l'aproximació d'Arquimedes

El mètode ideat per Arquimedes consisteix a aproximar π pel perímetre dels polígons inscrits a una circumferència de diàmetre 1, i cada cop més costats. Vegeu la figura següent:



Per a explicar els càlculs que farem, necessitem dues coses. La primera és el càlcul del perímetre de l'hexàgon p_1 . És fàcil veure que $p_1 = 3$. En segon lloc, si anomenem x el costat d'un polígon regular, volem saber quin serà el costat y del polígon regular que té el doble de costats. Per a calcular y en funció de x usarem la figura.



L'aplicació del teorema de Pitàgores dos cops ens diu que

$$\frac{x^2}{4} + z^2 = \frac{1}{4}, \quad \frac{x^2}{4} + \left(\frac{1}{2} - z\right)^2 = y^2.$$

Operant a la segona fórmula, $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} + z^2 - z = y^2$, i usant la primera, $\frac{1}{2} - z = y^2$. Com que $z = \sqrt{\frac{1-x^2}{4}}$, concloem que $y = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-x^2})}$.

Per tant, si anomenem p_n el perímetre d'un polígon regular de $6 \cdot 2^{n-1}$ costats i l_n el seu costat, tenim que

$$l_1 = \frac{1}{2}, \quad p_1 = 3$$

$$l_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-l_n^2})}, \quad p_{n+1} = 6 \cdot 2^n l_{n+1},$$

és una manera d'anar aproximant π , ja que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \pi$.

²De fet, π no és ni tan sols algebraic: és a dir, no és arrel de cap polinomi amb coeficients racionals.

El càlcul efectiu de l_{n+1} a partir de l_n produeix errors de càlcul, ja que en fer l'operació $\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - l_n^2})}$, amb l_n cada cop més petit, s'han de restar nombres molt propers. Per tant, és convenient desracionalitzar l'última expressió usant la igualtat:

$$(1 - \sqrt{1 - l_n^2}) \frac{1 + \sqrt{1 - l_n^2}}{1 + \sqrt{1 - l_n^2}} = \frac{l_n^2}{1 + \sqrt{1 - l_n^2}}.$$

L'algorisme final és

$$l_1 = \frac{1}{2}, \quad p_1 = 3$$

$$l_{n+1} = \frac{l_n}{\sqrt{2(1 + \sqrt{1 - l_n^2})}}, \quad p_{n+1} = 6 \cdot 2^n l_{n+1}.$$

Tenim que $p_1 = \underline{3}$, $p_2 = \underline{3.105}\dots$, $p_3 = \underline{3.132}\dots$, $p_4 = \underline{3.139}\dots$, $p_5 = \underline{3.14103}\dots$, $p_{15} = \underline{3.14159265305}\dots$

Algorisme 2: La funció arctangent

La segona via que descrivim per a calcular π es basa en la següent fórmula per a la funció arctangent

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1} x^{2i+1},$$

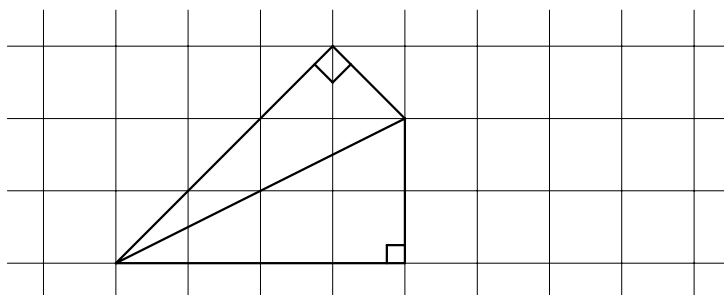
i en certes relacions trigonomètriques. Un primer intent seria a partir de la igualtat:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1}.$$

Ara bé, si denotem per $\arctan_n(x) := \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{2i+1} x^{2i+1}$, i considerem la successió de números

$$x_n = \arctan_n(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1},$$

després d'uns quants càlculs veiem que la successió x_n convergiria cap a $\pi/4$ més lentament que la que ens dóna el mètode proposat per Arquimedes. Per sort hi ha d'altres relacions entre π i la funció arctangent. Per exemple, tenim la fórmula $\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$. Una demostració gràfica d'aquesta darrera fórmula es pot deduir observant la figura següent, on s'han marcat els angles rectes.



Finalment, donarem un algorisme de càlcul de π basat en una fórmula similar

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right),$$

deduïda (i usada per a calcular π) per John Machin (1680-1752).

La demostració d'aquesta darrera fórmula es pot fer a partir de la fórmula de la tangent de la suma d'angles:

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}, \quad (*)$$

ja que com a conseqüència tenim que

$$\tan\left(4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}\right) = \frac{\tan(4 \arctan \frac{1}{5}) - \frac{1}{239}}{1 + \tan(4 \arctan \frac{1}{5}) \frac{1}{239}}.$$

D'altra banda, usant ara dos cops (*) obtenim

$$\tan(4 \arctan(x)) = \frac{4x(1-x^2)}{x^4 - 6x^2 + 1}.$$

Fent més operacions concloem que $\tan(4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}) = 1$. Per tant, hem provat la fórmula de Machin.

Si considerem la successió

$$y_n = 16 \arctan_n\left(\frac{1}{5}\right) - 4 \arctan_n\left(\frac{1}{239}\right),$$

s'obté $y_0 = 3.183\dots$, $y_1 = 3.1405\dots$, $y_2 = 3.14162\dots$, $y_3 = 3.1415917\dots$, $y_4 = 3.141592682\dots$, $y_5 = 3.1415926526\dots$, $y_6 = 3.14159265362\dots$. Observeu que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \pi$.

Algorisme 3: Un mètode amb velocitat quadràtica

El 1973, i de manera independent, Eugène Salamin i Richard Brent van trobar un mètode per a aproximar π amb gran velocitat. Aquest mètode és el que s'anomena un mètode amb velocitat quadràtica. Aquest nom prové del fet que l'error en cada pas de l'algorisme és aproximadament el quadrat de l'error comés en el pas anterior. Això fa que el nombre de xifres decimals exactes es dobli iteració per iteració. Així, per exemple, el mètode que presentarem és tal que després de vint-i-cinc passos ens dona uns 45 milions de xifres decimals exactes (suposant que tots els càlculs es fan amb aquest nombre de xifres decimals). Aquest mètode es basa en la mitjana aritmetico-geomètrica, que ja apareix en els treballs de Gauss del segle XVIII, i la demostració de la convergència està basada en la teoria de les integrals el·líptiques i és massa complicada per a ser inclosa aquí.

Es calcula la successió z_n , per a $n \geq 1$, a partir dels nombres $a_0, a_1, \dots, a_n$ i $b_0, b_1, \dots, b_n$ i aplicant la fórmula:

$$z_n = \frac{4a_n^2}{1 - 2 \sum_{i=1}^n 2^n (a_n^2 - b_n^2)},$$

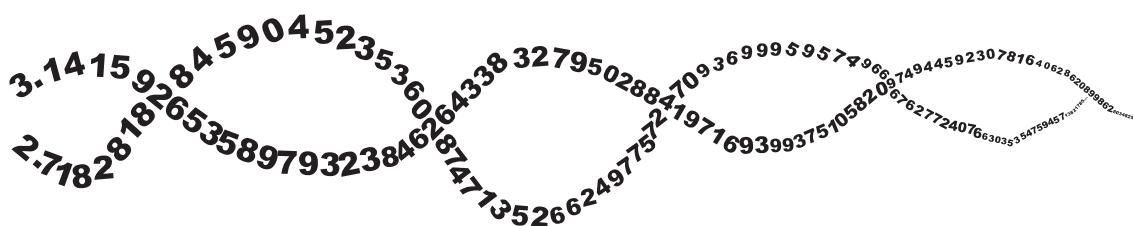
on els valors a_i i b_i s'obtenen de la recurrència:³

³De fet, es pot veure que $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i$ i $\lim_{i \rightarrow \infty} b_i$ existeixen i coincideixen. A aquest valor se l'anomena mitjana aritmetico-geomètrica de a_0 i b_0 .

$$a_0 = 1, \quad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a_{i+1} = \frac{a_i + b_i}{2}, \quad b_{i+1} = \sqrt{a_i b_i}.$$

Tenim que $z_1 = \underline{3.187}\dots$, $z_2 = \underline{3.14168}\dots$, $z_3 = \underline{3.14159265389}\dots$, $|z_4 - \pi| < 10^{-20}$, $|z_5 - \pi| < 10^{-42}$. Actualment es coneixen algorismes de càlcul encara molt més ràpids.



π i el seu amic e .

Acabarem aquesta secció amb un tema relacionat, les fraccions contínues.

Fracciones continuas

Un cop es coneixen tots els dígitos d'un cert nombre real x , ens podem preguntar quines són les fraccions que millor l'aproximen, en el sentit de buscar fraccions amb denominadors al més petits possible. La resposta a aquest problema ens la dona la teoria de les fraccions contínues. Es construeix una successió de fraccions de la forma

$$a_0, a_0 + \frac{1}{a_1}, a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}, a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}}, a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4}}}}, a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{a_5}}}}}, \dots$$

amb $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \mathbb{N}$ de manera que tendeixi a x .

Explicarem una forma de calcular $a_0, a_1, a_2, \dots$ per al cas $x = \pi$: a_0 és la part no decimal de π és a dir $a_0 = 3$; a_1 és la part no decimal de $\frac{1}{\pi - a_0} = \frac{1}{0.3159\dots} = 7.06\dots$, és a dir $a_1 = 7$; a_2 és la part no decimal de $\frac{1}{7.06\dots - 7} = 15.99\dots$, és a dir $a_2 = 15$; a_3 és la part no decimal de $\frac{1}{15.99\dots - 15} = 1.00\dots$ és a dir $a_3 = 1$; i així successivament. Per tant, la successió de fraccions contínues que tendeixen a π és

$$3, 3 + \frac{1}{7}, 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}}, 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}}, 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292}}}}, 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1}}}}}, \dots$$

Operant resulta

$$3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \dots$$

Observeu que aquesta successió conté les aproximacions racionals d'Arquimedes, Txu Txung Txih, i Euler, donades a la introducció d'aquesta secció, a més d'altres aproximacions racionals de π bastant bones.

Sembla que ja Arquimedes coneixia les fraccions contínues, perquè va provar que

$$\frac{1}{3} \left(5 + \frac{1}{5 + \frac{1}{10}} \right) < \sqrt{3} < \frac{1}{3} \left(5 + \frac{1}{5 + \frac{1}{10 + \frac{1}{5}}} \right).$$

Per a acabar, us proposem que trobeu alguna regularitat en l'aproximació per fraccions contínues del número e .

Apèndix: mil xifres decimals del número π .

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494
 4592307816406286208998628034825342117067982148086513282306647
 0938446095505822317253594081284811174502841027019385211055596
 4462294895493038196442881097566593344612847564823378678316527
 1201909145648566923460348610454326648213393607260249141273724
 5870066063155881748815209209628292540917153643678925903600113
 3053054882046652138414695194151160943305727036575959195309218
 6117381932611793105118548074462379962749567351885752724891227
 9381830119491298336733624406566430860213949463952247371907021
 7986094370277053921717629317675238467481846766940513200056812
 7145263560827785771342757789609173637178721468440901224953430
 1465495853710507922796892589235420199561121290219608640344181
 5981362977477130996051870721134999999837297804995105973173281
 6096318595024459455346908302642522308253344685035261931188171
 0100031378387528865875332083814206171776691473035982534904287
 5546873115956286388235378759375195778185778053217122680661300
 19278766111959092164201989...

2.3 La recta de mínims quadrats. Marques d'atletisme

Donats dos punts qualssevol del pla (x_1, y_1) i (x_2, y_2) sempre hi ha una recta $ax + by + c = 0$ que passa per ells. A més, si $x_1 \neq x_2$, l'equació de la recta es pot escriure com $y = mx + n$. Ara bé, és molt difícil, quan es pren una col·lecció de k punts al pla

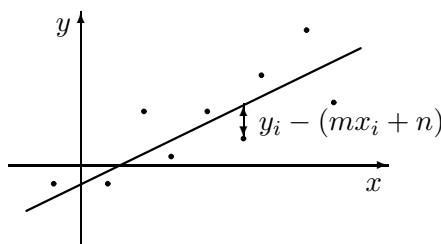
$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k),$$

que hi hagi una recta que passi per tots ells. En aquest context apareix la pregunta següent: quina és la recta $y = mx + n$ que aproxima millor tots els punts? Aquesta pregunta no està ben formulada matemàticament, ja que “millor” és un concepte no gaire clar.

Encara que no és l'única possibilitat, direm que la recta $y = \hat{m}x + \hat{n}$ és la que millor aproxima el núvol de punts (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, k$, si $\hat{m}$ i $\hat{n}$ són tals que la funció de dues variables

$$F(m, n) = (y_1 - (mx_1 + n))^2 + (y_2 - (mx_2 + n))^2 + \dots \\ \dots + (y_k - (mx_k + n))^2 = \sum_{i=1}^k (y_i - (mx_i + n))^2 \quad (*)$$

pren el seu valor més petit quan $m = \hat{m}$ i $n = \hat{n}$. A la figura següent s'il·lustra gràficament quins són els valors $y_i - (mx_i + n)$ que s'han d'eleva al quadrat i sumar per obtenir $F(m, n)$.



Una manera d'obtenir aquests valors $\hat{m}$ i $\hat{n}$ s'obté imposant condicions per tal que la funció F tingui un extrem. Ens limitarem aquí a donar el mètode per a calcular-los. El resultat és el següent:

Si prenem $\hat{m}$ i $\hat{n}$ com la solució del següent sistema lineal de dues equacions amb dues incògnites,

$$\begin{pmatrix} k & \sum_{i=1}^k x_i \\ \sum_{i=1}^k x_i & \sum_{i=1}^k x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{n} \\ \hat{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k y_i \\ \sum_{i=1}^k x_i y_i \end{pmatrix},$$

aleshores la recta $y = \hat{m}x + \hat{n}$ és la recta que millor aproxima el conjunt de punts (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, k$ en el sentit que la funció $F(m, n)$ donada a () pren el valor més petit possible quan $m = \hat{m}$, $n = \hat{n}$.*

La recta $y = \hat{m}x + \hat{n}$ s'anomena recta de mínims quadrats o aproximació mínima quadràtica del conjunt de punts (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, k$ o de la taula

x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_k
y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_k



La recta de mínims quadrats té múltiples utilitats a les ciències experimentals: física, química, biologia, ... Nosaltres donarem aquí una aplicació a l'estudi de les marques d'atletisme. A la taula següent figuren els rècords mundials de la prova de 1500 m des del 1912 fins al 1995.

Any	min	s	Any	min	s	Any	min	s
1912	3	55.8	1943	3	45	1967	3	33.1
1917	3	54.7	1944	3	43	1974	3	32.2
1924	3	52.6	1947	3	43	1979	3	32.11
1926	3	51	1952	3	43	1980	3	31.36
1930	3	49.2	1954	3	41.8	1983	3	30.77
1933	3	49	1955	3	40.8	1985	3	29.46
1934	3	48.8	1956	3	40.5	1992	3	28.86
1936	3	47.8	1957	3	38.1	1995	3	27.37
1941	3	47.6	1958	3	36			
1942	3	45.8	1960	3	35.6			

Ens preguntem si, a partir d'aquestes dades, podem tenir una idea de quin podria ser el rècord mundial de la prova l'any 1999. Per a això fem els càlculs següents. Busquem quina és la recta $y = \hat{m}x + \hat{n}$ que millor aproxima els punts de la taula. Per tal de fer menys càlculs pendrem com a variables x_i els anys 12, 17, 24, ..., 95, i com a marques només els segons 55.8, 54.7, 52.6, ..., 27.37. Aleshores, els valors $\hat{m}$ i $\hat{n}$ seran la solució del sistema d'equacions:

$$\begin{pmatrix} 28 & 1476 \\ 1476 & 91768 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{n} \\ \hat{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1153.53 \\ 55701.07 \end{pmatrix};$$

és a dir, $\hat{m} = -0.3657$, $\hat{n} = 60.4775$. Per tant, podem considerar com un possible rècord del món de 1999 la marca: 3 minuts més $-0.3657(99) + 60.4775$ segons, és a dir 3 min 24.27 s. Ara bé, si busquem quin és l'actual rècord del món, trobem que es va fer el juliol del 1998 i és de 3 min 26s. Per tant, hem obtingut una previsió que és bastant bona (tenint en compte, a més, que el rècord és de 1998 i, si haguéssim avaluat a $x = 98$, hauríem obtingut 3 min 24.64 s). Quina previsió de rècord del món podeu fer per a l'any 2010?

Per a acabar aquesta secció aplicarem la mateixa tècnica en una situació lleugerament diferent. A partir dels rècords del món actuals de 100 m, 200 m, 400 m, 800 m, 1500 m, 3000 m i 5000 m, intentarem deduir el de 10000 m. Fent els mateixos càlculs que a l'exemple anterior, a partir de les set primeres dades de la taula següent, obtenim que una aproximació del rècord del món de 10000 m fóra 25 min 22.44 s. Com podeu observar, el rècord real és de 26 min 22.75 s, és a dir que fem un error d'aproximadament 1 minut (de prop d'un 4%). Cal comentar que no sembla gaire bon model el fet de pensar que el rècord depèn linealment de la longitud de la prova, i és clar que no seria gens bona idea usar aquestes dades per a predir el rècord del món de la marató, per exemple.

Prova	min	s
100 m	0	9.79
200 m	0	19.32
400 m	0	43.18
800 m	1	41.11
1500 m	3	26.00
3000 m	7	20.67
5000 m	12	39.36
10000 m	26	22.75

Representeu gràficament els resultats de la taula anterior. A partir de la seva gràfica potser s'us acudirà intentar aproximar-los per una corba diferent a la línia recta.

Si esteu interessats a tenir dades d'altres proves, podeu visitar l'adreça d'Internet

<http://www.algonet.se/~pela2/mtrack.htm>,

on trobareu les millors marques mundials de moltes proves d'atletisme.

2.4 Dependència entre dos fets. Prova χ^2

Suposem que disposem de les històries clíniques de 5000 persones (ja mortes). Per a cada persona se sap si la mort va ser causada o no per càncer de pulmó i si l'individu era fumador o no. Es pot formar la taula següent amb aquests historials.

	Morts per càncer de pulmó	Morts per altres causes	Total
Fumadors	348	3152	3500
No fumadors	82	1418	1500
Total	430	4570	5000

(Encara que aquestes dades són hipotètiques, els registres reals dels hospitals presenten percentatges molt semblants.)

Es tracta de veure si hi ha relació entre el fet de ser fumador o no i el de morir per càncer de pulmó o altres causes. Per determinar si hi ha relació o no, s'efectua el que s'anomena “un test d'hipòtesis”. Concretament, en aquest cas, la prova χ^2 (khi quadrat) d'independència.

Aquesta prova es basa en una idea bastant simple. Es comença suposant que no hi ha cap relació entre els dos factors que estem considerant, és a dir, són factors independents l'un de l'altre. Si aquest fos el cas, com que els fumadors representen la fracció $\frac{3500}{5000} = \frac{7}{10}$ sobre la població de morts i els no fumadors el $\frac{1500}{5000} = \frac{3}{10}$, esperaríem que del total de 430 morts per càncer de pulmó els $\frac{7}{10}$ fossin fumadors, és a dir $\frac{7}{10} \cdot 430 = 301$.

Fixem-nos que a partir d'aquesta dada esperada a la primera casella, 301, podem construir una nova taula amb tots els valors esperats si realment no hi hagués cap relació, ja que tenim fixats els totals.

	Morts per càncer de pulmó	Morts per altres causes	Total
Fumadors	301	3199	3500
No fumadors	129	1371	1500
Total	430	4570	5000

Observem que hi ha unes diferències entre el que s'ha observat a la mostra (la qual suposem representativa d'alguna població) i les que s'esperarien si fos independent el fet de fumar o no amb morir de càncer de pulmó. El que s'ha de decidir és si aquestes diferències són degudes a l'atzar (quan hom recull dades mai no s'ajusten exactament als models teòrics) o bé al fet que realment hi ha relació entre els dos factors.

El pas següent consisteix a calcular l'anomenat estadístic χ^2 . Si anomenem O_i la freqüència observada a la mostra a la casella i -èsima i E_i la freqüència esperada (sota la hipòtesi d'independència) a la mateixa casella, calculem l'expressió següent:

$$V = \sum_i \frac{(E_i - O_i)^2}{E_i}.$$

El resultat matemàtic important (i difícil de demostrar!) en què està basada la prova, és que la distribució de la variable aleatòria V , si no hi ha realment relació entre les variables, és aproximadament (si la mostra és gran) una llei coneguda anomenada χ^2 amb un grau de llibertat. Això vol dir que es poden calcular les probabilitats que aquesta variable prengui determinats valors.

Fixem-nos que si no hi hagués relació entre les variables, tindríem que els $\frac{(E_i - O_i)^2}{E_i}$ haurien de donar números petits, i per tant V donarà un valor més aviat petit. En canvi, si hi ha relació entre les dues variables, V hauria de prendre valors més aviat grans.

Calculem el valor de V en el nostre cas particular

$$V = \frac{(301 - 348)^2}{301} + \frac{(129 - 82)^2}{129} + \frac{(3199 - 3152)^2}{3199} + \frac{(1371 - 1418)^2}{1371} = 26.765.$$

Si realment no hi hagués relació, podríem calcular la probabilitat d'haver obtingut un resultat tan gran com aquest, és a dir $P\{V \geq 26.765\}$, ja que la distribució χ^2 amb un grau de llibertat és perfectament coneguda (de fet, quan el número de graus de llibertat és 1, es tracta d'una variable normal estàndard elevada al quadrat). Aquesta probabilitat és menor que 0.0001.

Observem que, suposant que no hi havia relació, hem obtingut uns resultats a la nostra mostra amb una probabilitat pràcticament nul·la. Quan passa això, és perquè és “gairebé” segur que la hipòtesi d'independència és falsa. Per tant, afirmariem que aquestes dues variables estan relacionades.

Cal fer atenció al fet que només hem inferit una possible relació entre fumar i tenir càncer i no pas que el fet de fumar causi càncer. Podria ser que ambdues característiques estiguessin relacionades a causa d'una tercera variable no controlada que les influís alhora.

Si la taula té més de dues files o dues columnes aleshores s'han d'usar altres distribucions χ^2 .

Distribució χ^2 amb un grau de llibertat

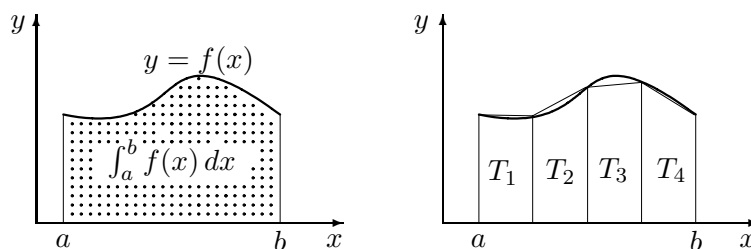
A la taula següent es donen les probabilitats que el valor de V obtingut seguint el procediment descrit anteriorment sigui més gran que uns certs números.

Valor de $V \geq$	1	2	3	4	5	10
Probabilitat $\leq$	0.318	0.159	0.084	0.046	0.025	0.002

La seva construcció es basa en el fet que per a una mostra prou gran es pot veure que

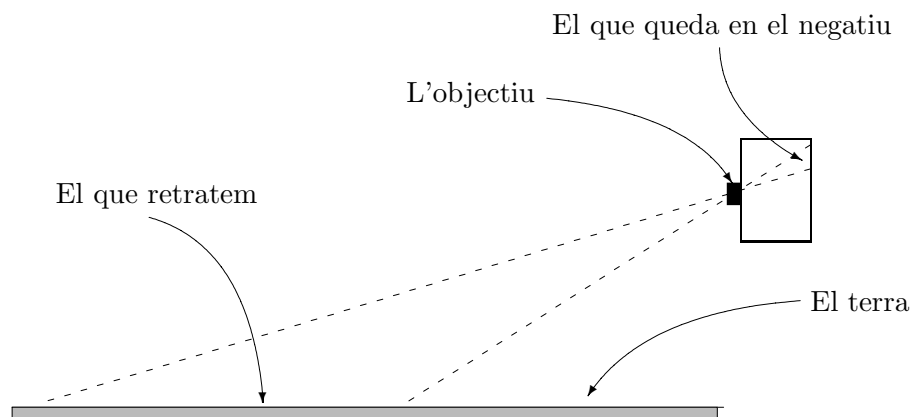
$$P\{V \geq v\} \simeq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{v}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx.$$

Aquesta última integral és difícil de calcular ja que es pot demostrar que la funció $e^{-x^2/2}$ no té cap primitiva (funció $g(x)$ tal que $g'(x) = e^{-x^2/2}$) expressable com una combinació finita d'operacions elementals, funcions trigonomètriques, logaritmes i exponencials, i per tant la regla de Barrow no és aplicable a la pràctica. En aquestes situacions el càlcul de l'àrea es fa per mètodes aproximats com el dels trapezis, basat en la idea següent: aproximar l'àrea real, $\int_a^b f(x) dx$, per la suma d'àrees de trapezis, $\sum_i \text{àrea}(T_i)$, amb els quals s'ha aproximat la figura real. Vegeu la figura:

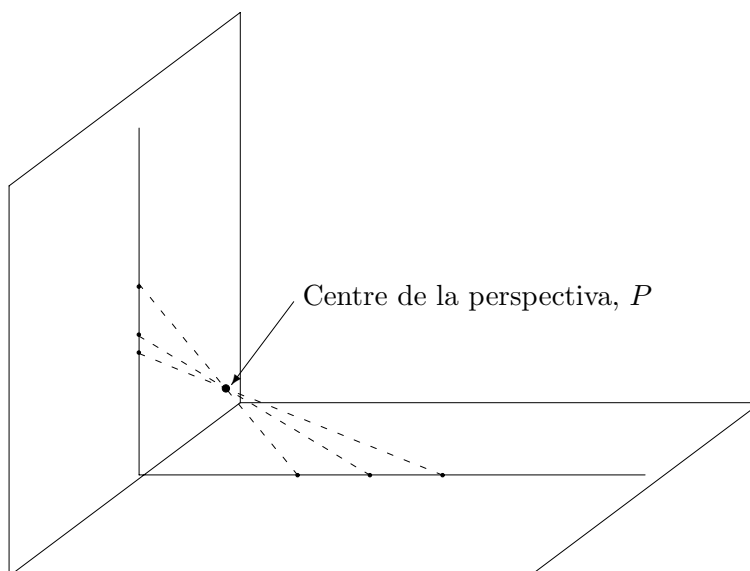


2.5 La geometria de les perspectives. La raó doble

Quan fem una fotografia podem pensar que el que queda en el negatiu no és altra cosa que la projecció sobre el pla de la pel·lícula, a través de l'objectiu de la càmera, del que hi ha sobre el terreny.



En aquest procés de projecció no només es perd la informació tridimensional dels objectes retratats (es passa de cossos a l'espai a figures sobre un pla), si no que fins i tot la informació bidimensional (les distàncies entre els punts sobre un pla fix) queden distorsionades. Per exemple, considerant els punts $X = (0, 2, 0)$, $Y = (0, 3, 0)$ i $Z = (0, 4, 0)$ del pla horitzontal $z = 0$ projectats sobre el pla vertical $y = 0$ a través del punt $P = (0, 1, 1)$, s'obtingran aquestes projeccions determinant els punts d'intersecció de les rectes PX , PY i PZ amb el pla $y = 0$ tal i com es veu en el dibuix.

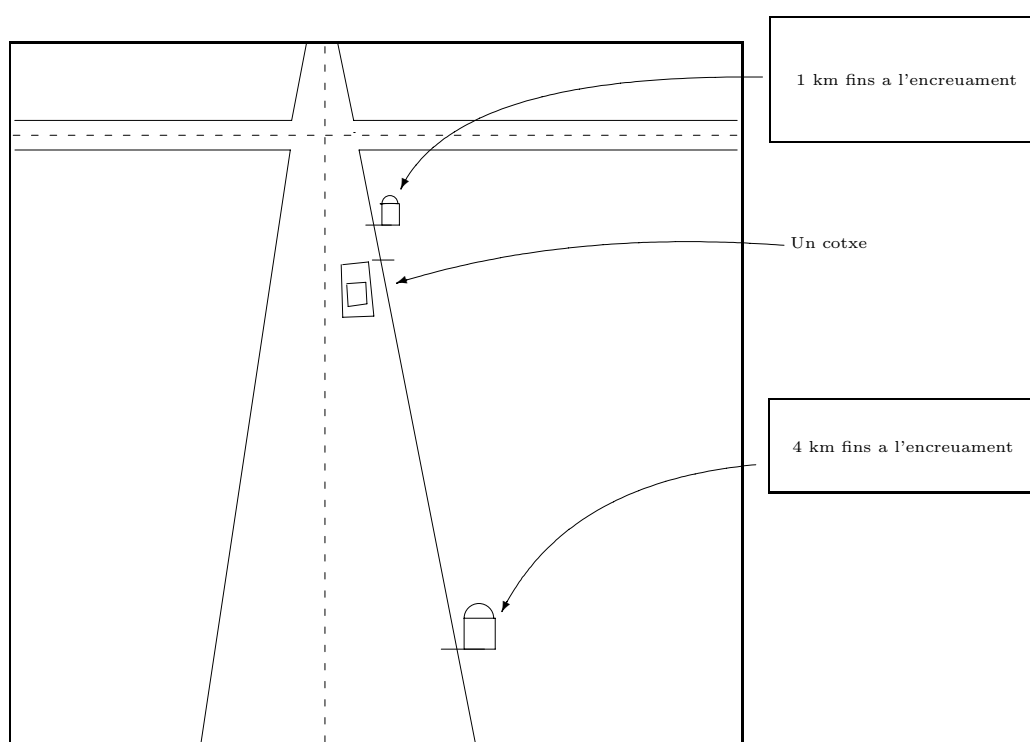


Aleshores aquests punts seran

$$X' = (0, 0, 2), Y' = (0, 0, 3/2) \text{ i } Z' = (0, 0, 4/3).$$

Es pot observar que, mentre la distància entre X' i Y' és la meitat de la distància entre X i Y , la distància entre Y' i Z' és $1/6$ de la distància entre Y i Z i la distància entre X' i Z' és $1/3$ de la distància entre X i Z . No es pot pensar, doncs, que la representació que s'obté sobre la fotografia és una representació *a escala* de la realitat. Tot i això, hi ha situacions en què les mesures realitzades sobre una fotografia poden donar prou informació per a poder calcular les distàncies *reals*. Un exemple d'això és el problema següent:

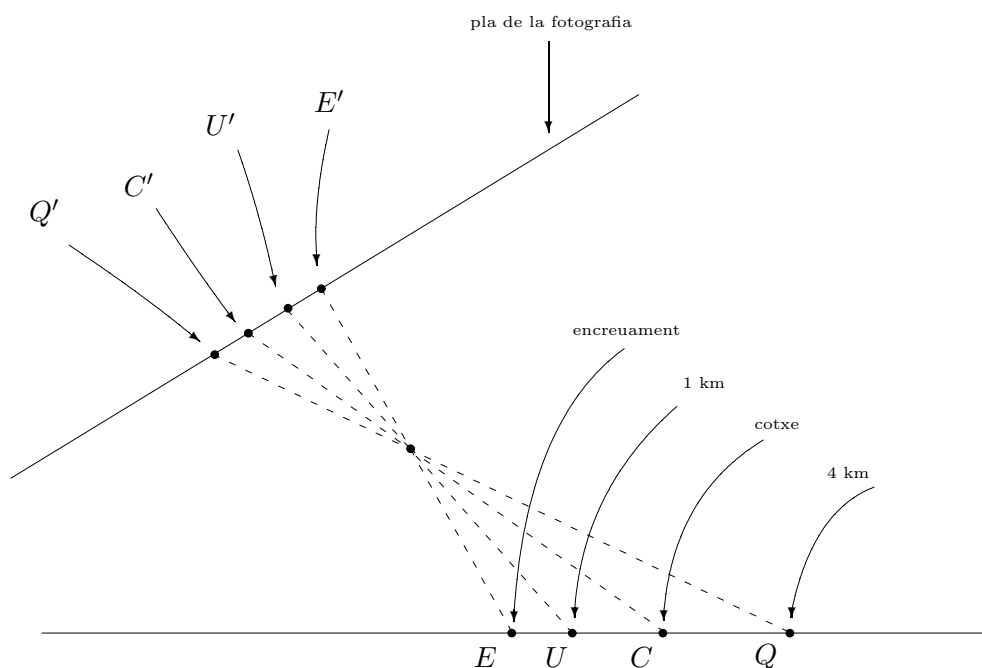
Tenim una fotografia en què s'observa l'encreuament de dues carreteres rectes sobre un lloc essencialment pla, dos senyals que marquen les distàncies sobre una de les carreteres fins a l'encreuament, i un cotxe circulant entre aquests dos senyals més o menys com en el dibuix següent (on s'han marcat els punts sobre la vora de la carretera que corresponen a cada un dels llocs mencionats)



A quina distància de l'encreuament es troba realment el cotxe?

Per a resoldre el problema notem primerament que l'alineament és una propietat que es conserva en les transformacions perspectives. En efecte, la imatge d'una recta que passi per dos punts donats és la intersecció del pla que conté aquests dos punts i el punt respecte al qual es fa la perspectiva amb el pla sobre el qual es realitza la projecció (la pel·lícula fotogràfica) i, com tothom sap, les interseccions de plans amb plans (dins l'espai tridimensional) normalment són rectes⁴. Tenint en compte això, el problema en realitat fa referència a punts que estan sobre una recta i les seves projeccions, des d'un punt desconegut, sobre una altra recta.

⁴Deixem a part els cas en què els plans resulten paral·lels. Correspon aquest cas als punts d'una recta *invisible* per a la projecció que estem realitzant, i podríem fer tota una altra exposició sobre aquest tema.



La *raó doble de quatre punts d'una recta* dóna una manera simple d'obtenir una solució. Donats quatre punts sobre una recta, es defineix la seva raó doble ρ com el quocient

$$\rho(A, B, C, D) = \frac{(AC)(BD)}{(BC)(AD)},$$

on (PQ) representa la distància del punt P al punt Q . La particularitat d'aquest nombre és que, si projectem els punts A, B, C i D sobre uns punts d'una altra recta A', B', C' i D' respectivament, el valor de $\rho(A', B', C', D')$ coincideix amb $\rho(A, B, C, D)$. Aquesta propietat és certament remarcable; ja hem dit abans que les proporcions entre les distàncies no es conservaven després de fer una projecció, i la raó doble no deixa de ser una mena de proporció entre distàncies. Un exemple concret⁵ en el qual es pot observar aquesta invariància i el tipus de càlcul que intervé per a arribar a aquest resultat és el següent:

Considerem la projecció de la recta $y = 0$ del pla sobre la recta $x = 0$ des del punt $P = (1, 1)$. Es pot comprovar que la projecció del punt $(x, 0)$ és el punt $(0, y)$ amb

$$y = \frac{x}{x-1}.$$

Si es tenen quatre punts de la forma $A = (x_1, 0)$, $B = (x_2, 0)$, $C = (x_3, 0)$ i $D = (x_4, 0)$, la seva raó doble serà

$$\rho = \frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)}$$

⁵De fet, la demostració general de la invariància de la raó doble consisteix essencialment a reduir el problema a la situació que analitzem.

i les seves projeccions seran

$$\begin{aligned} A' &= (0, \frac{x_1}{x_1 - 1}) \\ B' &= (0, \frac{x_2}{x_2 - 1}) \\ C' &= (0, \frac{x_3}{x_3 - 1}) \\ D' &= (0, \frac{x_4}{x_4 - 1}); \end{aligned}$$

de forma que la raó doble $\rho(A', B', C', D')$ serà

$$\begin{aligned} &\frac{(\frac{x_3}{x_3-1} - \frac{x_1}{x_1-1})(\frac{x_4}{x_4-1} - \frac{x_2}{x_2-1})}{(\frac{x_3}{x_3-1} - \frac{x_2}{x_2-1})(\frac{x_4}{x_4-1} - \frac{x_1}{x_1-1})} = \\ &\frac{(x_3(x_1 - 1) - x_1(x_3 - 1))(x_4(x_2 - 1) - x_2(x_4 - 1))}{(x_3(x_2 - 1) - x_2(x_3 - 1))(x_4(x_1 - 1) - x_1(x_4 - 1))} = \\ &\frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)}, \end{aligned}$$

que coincideix amb ρ .

La raó doble α dels punts de la fotografia que representen el punt de 4 km (Q'), la posició del cotxe (C'), el punt d'1 km (U') i l'encreuament (E') es pot calcular prenent les mesures corresponents directament sobre la fotografia i fent les operacions algebraiques necessàries. D'altra banda, la raó doble $\rho(Q, C, U, E)$ (que ha de coincidir amb α) no és calculable directament a partir de la informació que tenim, ja que es desconeixen les distàncies (CE) i (CU) . Ara bé, com que $(CU) = (CE) - 1$, podem fer

$$\alpha = \rho(Q, C, U, E) = \frac{(QU)(CE)}{(CU)(QE)} = \frac{3(CE)}{(CU)4} = \frac{3(CE)}{4((CE) - 1)},$$

de forma que

$$(CE) = \frac{4\alpha}{4\alpha - 3},$$

i ja tenim la dada que volíem saber. Fent aquests càlculs a partir del croquis sobre el qual hem plantejat el problema, a mi em surt que el cotxe es troba a uns 1375 m.

2.6 Detecció de malalties. Fórmula de Bayes

Crec que el problema que estudiarem ens fa veure que per a prendre certes decisions no n'hi ha prou de tenir bones intencions, sinó que s'ha d'entendre una mica de números.

Suposem que hi ha una certa malaltia greu que afecta al 2 per mil de la població i que si és detectada prou a temps és curable. Suposem, a més, que es disposa d'una certa prova per a detectar la malaltia amb les característiques següents:

- (i) Si una persona té la malaltia, en el 99% dels casos li detecta.
- (ii) Si una persona no té la malaltia, en un 99% dels casos la prova diu que no la té.

Cal comentar que la situació descrita abans és corrent, ja que normalment les proves sempre tenen un cert error.

Un cop plantejat el problema, la qüestió és: és útil sotmetre tota la població a aquesta prova per tal de detectar els casos de malaltia? O en altres paraules: Si a una certa persona la prova li surt positiva (és a dir, la prova diu que pot tenir la malaltia), en quin tant per cent dels casos és cert que la persona en qüestió té efectivament la malaltia? La solució correcta del problema passa per la traducció d'aquest en termes de probabilitats i en l'aplicació de l'anomenada fórmula de Bayes. Aquesta solució es donarà en segon lloc. Primer donarem una explicació simplificada i potser més intuïtiva:

Suposem que la nostra població té moltes persones (per exemple 1 000 000), aleshores podem construir la taula següent, que reflecteix la situació esperada de la població. La simplificació del problema rau en la construcció d'aquesta taula, que no té per què ser correcta. Quan es diu que la malaltia afecta a un 2 per mil de la població, no vol dir que sigui quin sigui el nombre de persones que agafem, exactament 2 de cada mil seran malaltes. I el mateix pel que fa a la fiabilitat de la prova.

	Població malalta	Població no malalta	Total
Prova surt positiva	1 980	9 980	11 960
Prova surt negativa	20	988 020	988 040
Total	2 000	998 000	1 000 000

Taula 1. Distribució esperada de la població

Usant les dades de la taula tenim que, del total de persones a les quals la prova surt positiva (11 960), només 1 980 estaven malaltes, mentre que 9 980 no ho estaven.

Així tenim que només en un $\frac{1980}{11960}100 \simeq 16.56\%$ dels casos en què la prova surt positiva, la persona en qüestió té la malaltia. Aquest fet desaconsella fortament l'ús massiu de la prova de detecció. Només es aconsellable fer-la a persones que tinguin algun indicatiu de tenir la malaltia.

En cas que la malaltia sigui molt comuna (per exemple que afecti un 10% dels individus), aleshores una prova amb les mateixes característiques sí que seria fiable (en un 91.7% dels casos en què la prova surt positiva la persona en qüestió té la malaltia).

Fem, per acabar, el mateix càlcul d'una manera rigorosa. La fórmula de Bayes serveix per a calcular la probabilitat d'un esdeveniment A sabent que se n'ha produït un altre B . Això es fa a partir de la probabilitat que es produeixi aquest últim esdeveniment B sabent que

s'ha produït A . És, doncs, una fórmula d'inversió dels condicionaments. La versió més simple d'aquesta fórmula és

$$P(A/B) = \frac{P(A)P(B/A)}{P(A)P(B/A) + P(A^c)P(B/A^c)},$$

on la notació $P(A/B)$ vol dir la probabilitat que es produeixi l'esdeveniment A , sabent que s'ha produït l'esdeveniment B . Naturalment $P(A)$ vol dir la probabilitat que es produeixi l'esdeveniment A i també estem denotant per A^c el complementari o contrari de l'esdeveniment A , que és aquell esdeveniment que ocorre sempre que no ocorre A .

Si apliquem la fórmula al nostre exemple, tenim que, posant

A = tenir la malaltia,

A^c = no tenir la malaltia,

B = donar la prova positiva,

B^c = donar la prova negativa,

ens estan dient que:

$P(A) = 0.002$, d'on es dedueix que $P(A^c) = 0.998$,

$P(B/A) = 0.99$ (probabilitat que la prova doni positiva si l'individu té la malaltia),

$P(B^c/A^c) = 0.99$ d'on es dedueix que $P(B/A^c) = 0.01$, i ens demanen $P(A/B)$.



Thomas Bayes (1702-1761)

Aplicant la fórmula tenim que

$$P(A/B) = \frac{P(A)P(B/A)}{P(A)P(B/A) + P(A^c)P(B/A^c)} = \frac{0.002 \times 0.99}{0.002 \times 0.99 + 0.998 \times 0.01} \simeq 0.1656,$$

resultat que coincideix amb la forma més intuïtiva de fer-ho.

2.7 Programació lineal i dietes

Segons l'OMS, una dieta equilibrada ha de contenir un 15% de proteïnes, un 30% de greixos i un 55% de glúcids. Si a més sabem que diàriament hem de prendre com a mínim 80 g de proteïnes, tenim que una bona dieta ha de tenir almenys 80, 160, i 290 g de proteïnes, greixos i glúcids respectivament.

Amb les dades anteriors intentarem plantejar el problema de quina és la dieta més barata i equilibrada que podem fer menjant només llegums, galetes, alvocats i olives.⁶ Tenim la següent taula de preus i composicions:

100 g	Proteïnes	Greixos	Glúcids	Preu de 100 g
Llegums	25	1	60	20
Galetes	11	9	72	30
Alvocats	2	26	6	60
Olives	1	20	10	25

Taula 2. Preu i composició de diversos aliments

A partir de la taula i anomenant x , y , z i t la quantitat (en unitats de 100 g) de llegums, galetes, alvocats i olives que té la dieta, tenim que la solució del problema següent:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{minimitzar} & 20x + 30y + 60z + 25t, \\ \text{sabent que} & x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, t \geq 0, \\ & 25x + 11y + 2z + t \geq 80, \\ & x + 9y + 26z + 20t \geq 160, \\ & 60x + 72y + 6z + 10t \geq 290, \end{array} \right.$$

ens donarà la dieta més barata.

Si canviem la funció que volem minimitzar per la funció

$$60x + 72y + 6z + 10t,$$

ens donarà la dieta amb menys glúcids.

La solució de qualsevol d'aquests dos problemes de manera sistemàtica passa pel que s'anomena mètode del símplex per a resoldre problemes de programació lineal. Com a curiositat direm que la dieta més barata consisteix a menjar 250'3, 90'4, 0 i 746'8 g de llegums, galetes, alvocats i olives, respectivament, cada dia. Una exposició detallada del mètode del símplex es pot trobar, per exemple, al llibre *Programación lineal*, de L. Peñafiel Millán, Biblioteca de Ciencias de la Administración, Ed. Trillas, 1976.

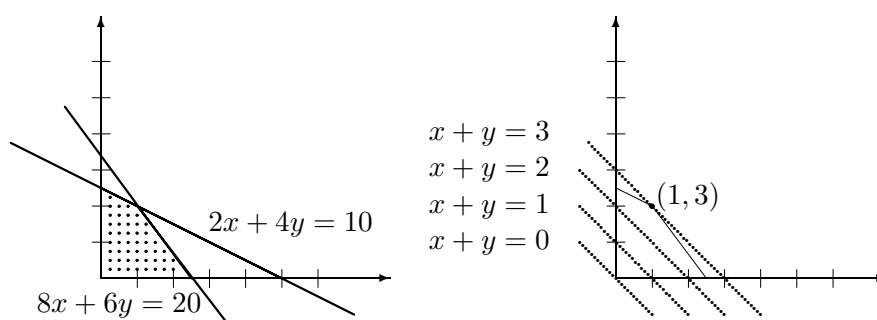
Seguidament explicarem un mètode més senzill (anomenat mètode gràfic) que ens permetrà resoldre problemes com el d'abans en el cas de només dues variables. Per al cas de tres variables també es podria usar; però, com es deduirà de l'explicació següent, costaria més d'aplicar.

⁶De fet, el 1945, l'economista G. J Stiger ja va plantejar aquest tipus de problema. Va prendre 77 aliments diferents i va considerar nou elements nutritius (proteïnes, glúcids, vitamines, etc.). Finalment va deduir que era possible mantenir una dieta adequada i amb cost mínim, menjant només farina de blat, col de cabdell i faves seques.

Considerem el problema següent:

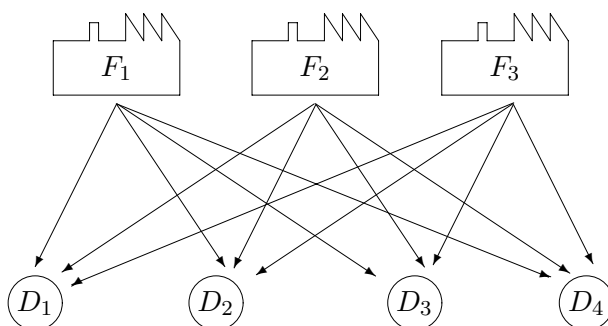
$$\begin{cases} \text{maximitzar} & x + y, \\ \text{sabent que} & x \geq 0, y \geq 0, \\ & 8x + 6y \leq 20, \\ & 2x + 4y \leq 10. \end{cases}$$

Per tal de trobar el punt (x, y) que faci màxima la funció $x + y$ d'entre tots els punts que compleixen les quatre inequacions, el primer que es fa es dibuixar la regió del pla limitada per aquestes.



Un cop dibuixada la regió de punts (x, y) que compleix les inequacions (vegeu la figura de l'esquerra), observem com són les gràfiques de $x + y = k$ variant el valor de k . Com podeu veure a la figura de la dreta, aquestes són rectes paral·leles que van pujant al mateix temps que k augmenta. Aleshores, si les anem movent augmentant k , l'últim punt on toquin la regió puntejada serà el punt (x, y) en el qual k (i, per tant, la funció $x + y$) pren el valor més gran. En el nostre cas aquest punt és $(1, 2)$ i el valor màxim de $x + y$ serà 3.

La programació lineal també és útil per a resoldre el conegut com *problema del transport*. Explicarem aquest problema amb un exemple. Suposem que una empresa té tres factories F_1, F_2 i F_3 que produeixen q_1, q_2 i q_3 unitats d'un mateix producte, respectivament. Suposem, a més, que ha de repartir tot el que produeix entre quatre consumidors D_1, D_2, D_3 i D_4 , que necessiten x_1, x_2, x_3 i x_4 unitats de producte, respectivament. Suposem que el cost d'enviar una unitat del producte, de la factoria i -èsima al consumidor j -èsim, és $p_{i,j}$. Com ho ha d'organitzar per tal de gastar el mínim possible?



2.8 Probabilitats geomètriques. Geometria integral

Mesura de punts. El problema de l'agulla de Buffon

L'origen de les probabilitats geomètriques es troba en l'anomenat *problema de l'agulla de Buffon*.

El comte de Buffon era un francès que es deia Georges Louis Leclerc, que va viure de 1707 a 1788 i va ser nomenat comte per Lluís XV. Va ser un gran naturalista i va escriure una *Història natural* de 36 volums. Va ingressar a l'Acadèmia de Ciències de París el 1734, com a cultivador de la mecànica racional.



L'any 1777, en el volum IV del *Suplement a la història natural* va incloure un treball titulat *Essai d'arithmétique morale*. En aquest article Buffon tracta d'adaptar la matemàtica a l'estudi de la realitat de l'home, procurant quantificar en la mesura del que sigui possible, les seves emocions, temors i esperances. Per a fer això necessita escollir una unitat de mesura de les emocions, a la qual poder referir quantitativament tota altra emoció. Agafa com a unitat el *temor a la mort*, que la pot considerar a la vegada mesura de temor i d'esperança sense més que canviar-la de signe.

En considerar les passions de l'home, Buffon assenyala la del joc com la més estesa i perniciosa. Es refereix als jocs d'atzar amb diners. Com coneix resultats de la teoria de probabilitats, que havia estat introduïda per J. Bernouilli el 1713, relaciona l'atzar amb els números i veu com aquests influeixen així en el comportament de les persones. Per això parla d'aritmètica moral.

Posteriorment reivindica la geometria com una eina eficaç en el càlcul de probabilitats. Diu:

L'anàlisi ha estat l'únic instrument que fins avui s'ha utilitzat en la ciència de les probabilitats, com si la geometria no fos adient per a aquests fins, quan en realitat n'hi ha prou amb una mica d'atenció per observar que l'avantatge de l'anàlisi sobre la geometria és tan sols accidental, i que l'atzar és tan propi de la geometria com de l'anàlisi.

També afegeix:

Per a posar la geometria en possessió dels seus drets sobre la ciència de l'atzar, n'hi haurà prou d'inventar jocs que es basin en l'extensió i en les seves relacions.

A continuació introdueix el seu famós problema de l'agulla, que nosaltres presentarem d'una manera lleugerament diferent.

Suposem que dos amics, per exemple en Sergi i la Sílvia, fan l'aposta següent: tiraran el llapis a terra, sense mirar. Un cop el llapis estigui ben quiet miraran si talla les línies horitzontals que formen les rajoles en el terra d'una habitació.

Si talla, guanya el Sergi, i si no talla, guanya la Sílvia. Les rajoles són grans i quadrades, de 40 cm per 40 cm, i el llapis, gairebé nou, fa uns 15 cm. Les preguntes són:

Q1. *Qui juga amb avantatge?*

Q2. *Quant hauria de mesurar el llapis per a què el joc fos equilibrat?*

Ara resoldrem matemàticament aquest problema i demostrarem que, en funció de la longitud del llapis i l'amplada de les rajoles, la probabilitat que el llapis talli les línies horitzontals determinades per les rajoles és

$$p = \frac{2l}{\pi a},$$

on l és la longitud del llapis i a l'amplada de les rajoles.

Per tant, en el nostre cas

$$p \simeq \frac{2 \cdot 15}{3.14 \cdot 40} = 0.23$$

que vol dir que, aproximadament, de cada 100 tirades 23 tallaran i 77 no tallaran. Per tant, la Sílvia té tots els trumfos! Això respon Q1.

La pregunta Q2 és ara fàcil ja que el joc és equilibrat quan tots dos jugadors tenen la mateixa probabilitat de guanyar. És a dir

$$p = \frac{2 \cdot l}{\pi \cdot 40} = \frac{1}{2};$$

per tant, per a què el joc fos equilibrat el llapis hauria de mesurar

$$l = 10\pi \simeq 31.4\text{cm},$$

un llapis certament molt llarg.

De manera general la relació entre la longitud del llapis i la separació de les línies horitzontals ha de ser de $\pi/4$ per a què el joc sigui equitatiu.

Es considera que amb aquest problema neix la teoria de les probabilitats geomètriques. Es tracta d'un joc d'atzar en el qual no podem aplicar la típica fórmula de

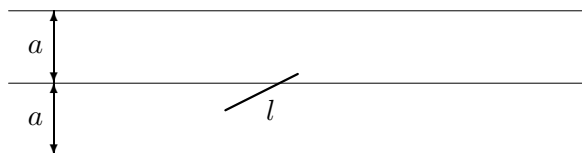
$$p = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos possibles}},$$

ja que no podem *comptar* aquests casos (n'hi ha infinites possibilitats), sinó que cal *mesurarlos*. Passem de l'aritmètica a la geometria.

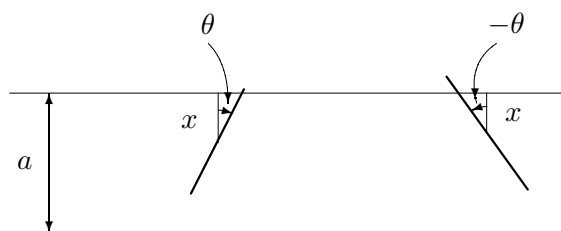
Càlcul de la probabilitat en el problema de l'agulla de Buffon

La versió abstracta del problema de Buffon es pot pensar així:

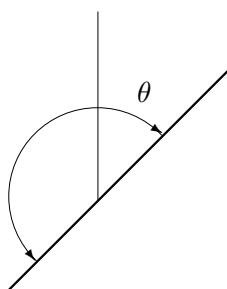
Suposem el pla dividit per rectes horitzontals separades entre elles una distància a , i llancem una agulla, o un llapis, com vulgueu, de longitud l que suposarem més petita que a .



La primera dificultat és poder descriure la posició en què ha caigut l'agulla. Això ho podem fer de diverses maneres però elegirem la següent, que ens anirà bé per als càlculs. Anomenarem x la distància entre el centre de l'agulla i la primera recta horitzontal que hi ha per sobre d'ell, i θ , l'angle entre aquesta semirecta vertical i l'agulla, mesurat des de la vertical. Si anem cap a la dreta, serà positiu, i si anem cap a l'esquerra, negatiu.

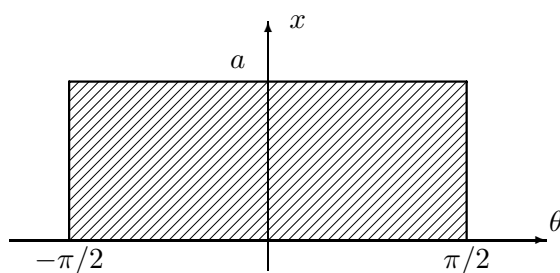


Per a evitar que una mateixa posició de l'agulla es pugui representar per dos angles (que serien suplementaris) restringirem els valors de θ a l'interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, és a dir $-\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$.



D'aquesta manera tenim tantes posicions possibles de l'agulla com parells (x, θ) amb $0 \leq x < a$ i $-\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Correspon al *nombre* de casos possibles; però, com hem dit abans, no els podem comptar i el que farem serà *mesurar-los*.

Representem els valors de x i θ en un sistema d'eixos cartesianes i diem que la mesura dels casos possibles és l'àrea de la regió que determinen.



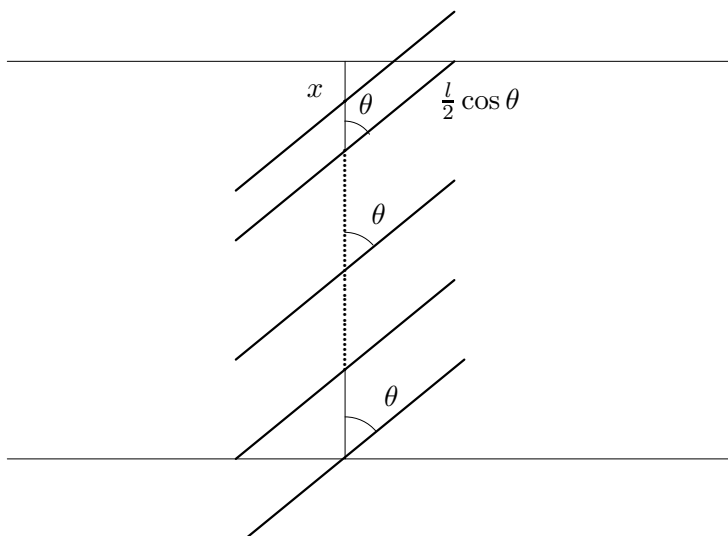
Així doncs,

$$m(\text{casos possibles}) = \pi \cdot a,$$

on posem m per “mesura”.

De manera semblant podem comptar, és a dir mesurar, els casos favorables.

Per a fer això fixem de moment un angle θ i anem desplaçant verticalment l'agulla sobre una banda d'amplitud a mantenint-la sempre formant un angle θ amb la vertical.



Ens adonem que, si

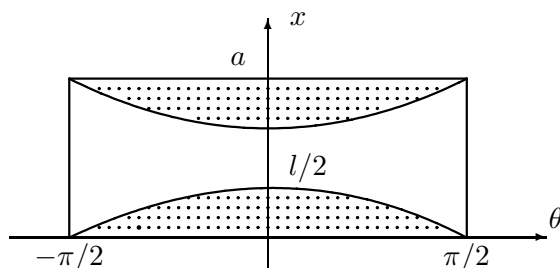
$$0 \leq x < \frac{l}{2} \cos \theta,$$

l'agulla talla la recta horitzontal superior, mentre que si

$$a - \frac{l}{2} \cos \theta < x < a,$$

l'agulla talla la recta horitzontal inferior de la banda.

Dibuixem els gràfics de les funcions $x = \frac{l}{2} \cos \theta$ i $x = a - \frac{l}{2} \cos \theta$



que són simètriques respecte a la recta horitzontal $x = \frac{a}{2}$.

Així doncs, les posicions de l'agulla descrites per parells (x, θ) , pertanyents a una d'aquestes regions ombrejades de la figura, corresponen a posicions de tall.

Per analogia amb el que hem fet abans, l'àrea d'aquesta figura ens dona una bona mesura de la *quantitat* de posicions de tall, és a dir dels casos favorables.

$$\begin{aligned} m(\text{casos favorables}) &= \text{àrea entre la gràfica de } x = \frac{l}{2} \cos \theta \text{ i l'eix } x = 0 \\ &+ \text{l'àrea entre la gràfica de } x = a - \frac{l}{2} \cos \theta \text{ i l'eix } x = a. \end{aligned}$$

Com que aquestes dues àrees són iguals, tenim

$$\begin{aligned} m(\text{casos favorables}) &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2} \cos \theta d\theta = \\ &= l[\sin \theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = l[1 - (-1)] = 2l \end{aligned}$$

Finalment, doncs, la probabilitat de tall buscada és

$$p = \frac{m(\text{casos favorables})}{m(\text{casos possibles})} = \frac{2l}{\pi a},$$

com havíem dit.

Una característica extraordinària d'aquest resultat és que ens permet obtenir bones aproximacions del número π simplement llançant llapis a terra durant una estona d'avorriments. En efecte, la probabilitat és una bona aproximació de la freqüència amb què un esdeveniment es dona, més bona com més gran sigui el nombre de tirades. Per exemple, si en Sergi tira 100 vegades el llapis i obté que el llapis talla 25 vegades, la freqüència de tall 25/100 és una aproximació de la probabilitat de tall p , de manera que tenim

$$\frac{25}{100} \sim \frac{2 \cdot 15}{\pi \cdot 40},$$

d'on $\pi \sim 3.1$.

El 1901, Lazzaroni va llançar l'agulla 34 080 vegades i va obtenir $\pi = 3.1415929$ (hi ha gent per a tot!).

Mètodes de teoria de probabilitat que no explicarem aquí permeten dir que les millors estimacions de π s'obtenen quan $l = a$, i també ens permeten dir quants llançaments s'han de fer per a obtenir, amb una probabilitat tan alta com vulguem, el valor de π amb un nombre determinat de xifres decimals exactes.

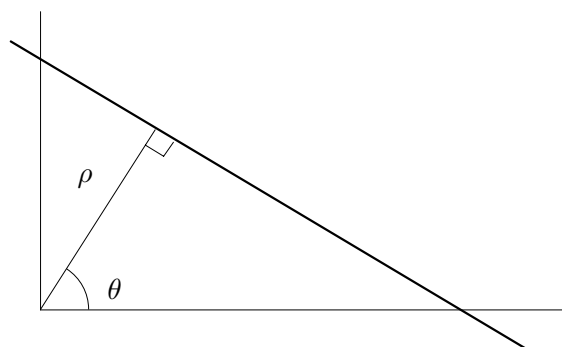
Mesura de rectes. Fórmula de Crofton

Ara ja hem vist que l'àrea ens serveix per a comptar el *nombre* de punts d'un conjunt. La pregunta ara és: *podem comptar el nombre de rectes?* Per exemple, quantes rectes tallen un segment donat? O, quantes rectes tallen una circumferència donada? Per a respondre a aquestes preguntes farem el següent:

Per a cada recta del pla considerarem dues quantitats (p, θ) definides de la manera següent:

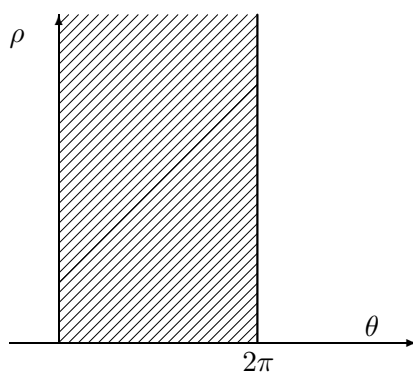
$$\begin{aligned} p &= \text{distància de la recta a l'origen de coordenades} \\ \theta &= \text{angle entre l'eix de les } x \text{ i la perpendicular a la recta per l'origen} \end{aligned}$$

Considerarem θ mesurat sempre des de la part positiva de l'eix de les x fins a la perpendicular per l'origen en sentit antihorari.



D'aquesta manera tenim tantes rectes en el pla com parells (p, θ) amb $0 \leq p < \infty$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Hi ha un petit problema amb $p = 0$, però que no afecta el raonament posterior.

Podem representar-les, doncs, com els punts d'una banda en el pla (p, θ) :



Observem que la recta que correspon al punt (p, θ) té equació cartesiana

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0$$

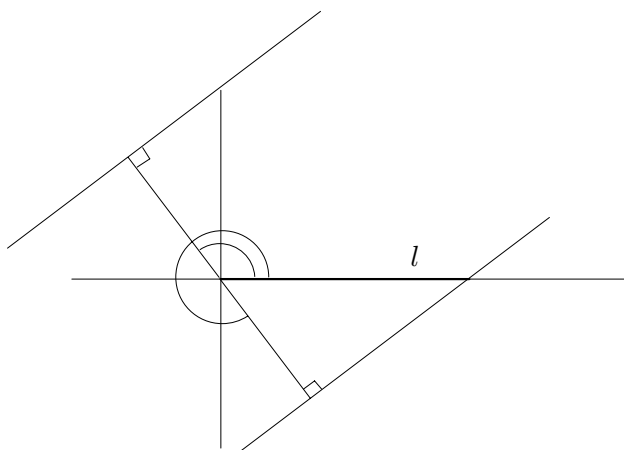
ja que passa pel punt $(x, y) = (p \cos \theta, p \sin \theta)$ i té pendent $-\cotg \theta$.

Aquesta interpretació ens permet respondre ja les preguntes abans considerades; concretament anem a calcular *quantes rectes tallen un segment de longitud l*.

Començarem estudiant el cas més senzill en què aquest segment està situat sobre l'eix de les x amb origen $(0, 0)$ i extrem $(l, 0)$. És a dir,

$$\text{segment} = \{(x, 0); 0 \leq x \leq l\}.$$

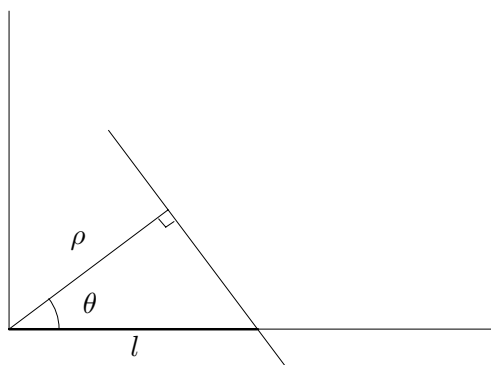
Observem primerament que hi ha valors de θ per als quals cap recta (p, θ) , sigui quin sigui el valor de p , talla el segment donat.



Concretament, si $\theta = \frac{\pi}{2}$, la recta és paral·lela a l'eix de les x i, per tant, no talla el segment. Si anem augmentant l'angle, és a dir per a $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$, tampoc cap recta no tallarà el segment. Quan $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$, ja hi ha valors de p per als quals la recta (p, θ) talla el segment.

Observem a continuació que per a un angle θ fixat, amb $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$, les rectes (p, θ) tallaran el segment si i només si

$$0 \leq p \leq l \cos \theta$$

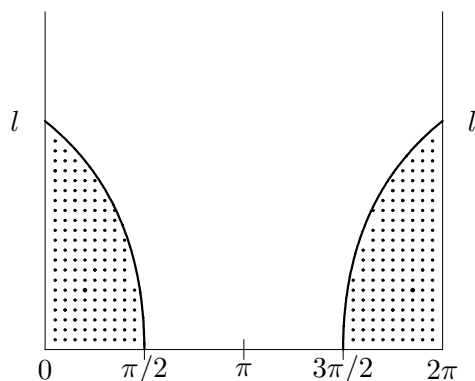


Resumint aquestes dues observacions, veiem que una recta (p, θ) talla el segment donat si

$$0 \leq p \leq l \cos \theta$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi.$$

Si dibuixem això a la banda del pla (p, θ) , tenim



L'àrea d'aquesta regió ens mesura la *quantitat* de rectes que tallen el segment.

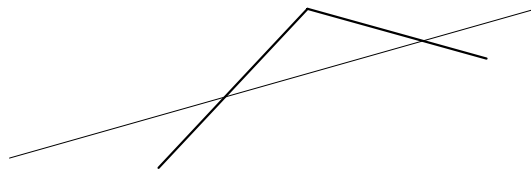
$$\begin{aligned} m(\text{rectes que tallen}) &= \int_0^{\pi/2} l \cos \theta d\theta + \int_{3\pi/2}^{2\pi} l \cos \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} l \cos \theta d\theta = 2l[\sin \theta]_0^{\pi/2} = 2l. \end{aligned}$$

Obtenim així un resultat realment remarcable: *La mesura de rectes que tallen un segment de longitud l és $2l$.*

Si el segment no es troba sobre l'eix de les x , sinó en una posició arbitrària, el càlcul és una mica més complicat però el resultat és el mateix. De fet estem fent les coses de manera que els resultats obtinguts siguin *invariants per moviments rígids*, és a dir girs i translacions. Això és una característica fonamental i molt natural, ja que les mesures que volem fer no han de dependre del lloc o posició en què les fem.

Així doncs, acceptarem sense demostració (per no perdre el fil) que independentment de quina sigui la posició del segment la mesura de les rectes que el tallen és igual a dues vegades la seva longitud.

Si en lloc de tenir un segment tenim la figura formada per dos segments consecutius, la mesura de rectes que tallen aquesta figura serà la mesura de les rectes que tallen el primer segment més la mesura de les rectes que tallen el segon segment. Però, atenció, perquè d'aquesta manera hi ha rectes que les estarem comptant dues vegades, les rectes que tallen els dos segments a la vegada.



El mateix passa si la figura està formada per la unió de diversos segments, és a dir per a qualsevol poligonal. Cada recta pot tallar diverses vegades la poligonal.

Per tant, si sumem les mesures de les rectes que tallen cada segment de la poligonal, el que obtindrem és que

la mesura de rectes que tallen una poligonal, comptades cadascuna d'elles tantes vegades com la talli, és igual a dues vegades la longitud d'aquesta poligonal.

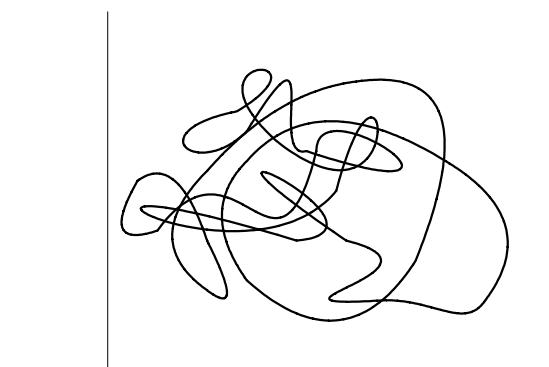
De manera general, per un procés de pas al límit, i a causa que tota corba (prou bona) es pot aproximar per una poligonal, tenim el resultat conegut amb el nom de fórmula de M.W. Crofton (1818), que diu

$$\int n(p, \theta) dp d\theta = 2l(C),$$

on la integral està estesa a aquells (p, θ) tals que la recta corresponent talla una corba donada C , de longitud $l(C)$, i $n(p, \theta)$ és el nombre de talls de la recta (p, θ) amb la corba. Es llegeix com abans dient que

la mesura de rectes que tallen una corba, comptades cadascuna d'elles tantes vegades com la talli, és igual a dues vegades la longitud d'aquesta corba.

Aquesta fórmula s'aplica amb èxit a calcular longituds de corbes complicades com ara la de la figura a base de comptar el número de talls d'aquesta corba amb *moltes* rectes de manera que s'obtingui una bona aproximació de la integral.



Per exemple, si agafem una família de rectes horitzontals separades entre elles una distància r i a continuació les fem girar angles de $\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$, obtenim un enreixat de rectes que tallaran la nostra corba en un nombre de punts que aproxima la integral de la fórmula de Crofton.

Concretament es pot veure que

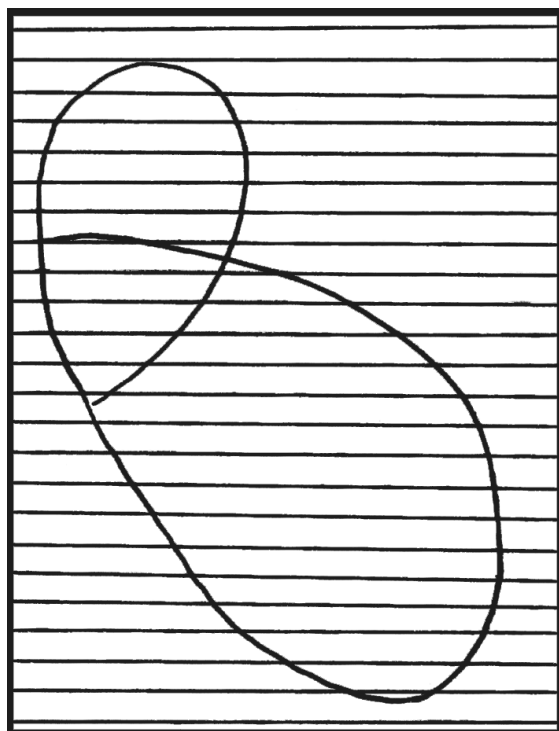
$$nr \frac{\pi}{4},$$

on n és el número de talls de l'enreixat amb la corba és una bastant bona aproximació de la integral.

Així doncs, podeu construir-vos amb paper transparent aquest enreixat, posar-lo al damunt de la figura anterior, comptar el nombre de talls d'aquestes rectes amb la corba, i tindreu una aproximació de la longitud de la corba per

$$l \sim \frac{1}{2} nr \frac{\pi}{4}.$$

La corba següent ha estat dibuixada desenrotllant un cordill de 30 cm sobre el paper.



Amb un enreixat com l'anterior, construït a partir de rectes horitzontals separades 0.4 cm s'obtenen aproximadament 180 punts de tall, de manera que

$$l \sim \frac{1}{2} 180 \cdot 4 \cdot \frac{3.14}{4} = 282.6 \text{ mm},$$

resultat força aproximat.

Posant aquests enreixats transparents en un microscopi electrònic s'ha aconseguit calcular longituds de molècules d'ADN.

Diguem finalment que aquests dos problemes explicats aquí formen part de la disciplina anomenada geometria integral, que té moltes aplicacions a la biologia i la medicina i que, potser per això, és avui un tema d'actualitat. De fet, hi ha tota una branca de la geometria integral, anomenada estereologia, on conflueixen l'estadística, la geometria i la medicina, que es dedica aquests temes.

El referent mundial de la geometria integral és en Lluís Antoni Santaló, matemàtic català nascut el 1911 a Girona, si bé establert a l'Argentina, on es va haver d'exiliar a causa de la guerra civil. El seu manual *Integral Geometry and Geometric Probability* és llibre de capçalera de tots els que es dediquen a la geometria integral o a la estereologia.

2.9 Solució d'equacions polinomials. Crèdits bancaris

La resolució d'equacions ha estat un dels problemes que ha fet evolucionar les matemàtiques al llarg de tota la seva història. Les equacions més senzilles

$$ax + b = 0, \quad a \neq 0$$

s'han pogut resoldre des de fa moltíssims anys. L'ús de la notació algebraica ens ha ajudat moltíssim. La solució de l'equació de dalt és $x = -b/a$.

La dificultat següent ens ve donada per a l'equació de segon grau

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

La seva solució es coneix des de més de quinze segles abans de Crist, i va ser trobada pels babilonis. Més tard, els grecs la van retrobar. Amb la notació moderna, és molt senzill veure com s'obté:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - c - \frac{b^2}{4a} &= 0 \\ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

L'equació de tercer grau

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a \neq 0$$

va haver d'esperar fins al segle XVI per ser resolta. La paternitat de la seva solució va ser molt disputada. No entrarem aquí a explicar les baralles que hi va haver. Tres matemàtics italians hi van estar involucrats: Scipione de Ferro, Niccolò Tartaglia i Gerolamo Cardano.

Els passos per a la seva solució són els següents:

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= 0, \\ x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} &= 0; \end{aligned}$$

prenem $x = y - \frac{b}{3a}$. Aleshores l'equació s'escriu com

$$y^3 + py + q = 0,$$

on

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \quad \text{i} \quad q = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}.$$

Resoldrem doncs l'equació amb incògnita y , i a partir de les y obtindrem directament les x . Per això busquem solucions de la forma $y = u + v$. Substituint tenim

$$\begin{aligned} (u + v)^3 + p(u + v) + q &= 0 \\ u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u + v) &= 0. \end{aligned}$$

Per a resoldre aquesta última equació busquem u i v que satisfacin

$$\begin{cases} u^3 + v^3 + q = 0, \\ 3uv + p = 0. \end{cases}$$

Clarament podem intentar resoldre el sistema

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}. \end{cases}$$

Com que $v^3 = -q - u^3$, tenim que

$$\begin{aligned} u^3(-q - u^3) &= -\frac{p^3}{27}, \\ (u^3)^2 + qu^3 - \frac{p^3}{27} &= 0. \end{aligned}$$

Observem, a més, que v^3 ha de complir la mateixa equació de segon grau $z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$. Usant les fórmules per a resoldre aquesta última equació arribem a

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Per tant, les solucions de

$$y^3 + py + q = 0$$

es poden trobar a partir de la fórmula

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Aquesta darrera fórmula necessita una mica més d'explicació. Observeu que s'han de fer arrels cúbiques de nombres que poden ser reals o complexos (ho seran si $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$). Recordeu que un número distint de zero té sempre tres arrels cúbiques. Per tant, la fórmula anterior dóna en general nou solucions. D'aquestes es pot veure que només tres poden ser solucions de l'equació original de grau 3. De fet s'han de prendre u i v tals que $uv = -p/3$.

La fórmula deduïda permet arribar a resultats curiosos. Per exemple, si prenem l'equació

$$y^3 - 6y - 40 = 0,$$

podem trobar per simple inspecció que $y = 4$ és una arrel. D'altra banda, tenim que les arrels són donades per la fórmula involucrant arrels quadrades i cúbiques. Així, es compleix que

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4.$$

Per a altres equacions la fórmula deduïda és l'única manera de trobar una solució exacta. Per exemple,

$$\sqrt[3]{-3 + \sqrt{10}} - \sqrt[3]{3 + \sqrt{10}}$$

és una solució de l'equació $y^3 + 3y + 6 = 0$.

L'equació de quart grau

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \quad a \neq 0$$

va ser resolta poc després de la de tercer grau per Ludovico Ferrari. Explicarem els passos per resoldre-la.

Dividint l'equació per a tenim

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = 0.$$

Completant quadrats,

$$\begin{aligned} x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{b^2}{4a^2}x^2 &= \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)x^2 - \frac{d}{a}x - \frac{e}{a}, \\ \left(x^2 + \frac{b}{2a}x\right)^2 &= \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)x^2 - \frac{d}{a}x - \frac{e}{a}. \end{aligned}$$

Tornem a intentar completar quadrats als dos costats afegint a les dues bandes $(x^2 + \frac{b}{2a}x)y + \frac{y^2}{4}$. És a dir, busquem una y de manera que

$$\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)x^2 - \frac{d}{a}x - \frac{e}{a} + \left(x^2 + \frac{b}{2a}x\right)y + \frac{y^2}{4}$$

sigui un quadrat perfecte en x . En altres paraules, busquem y tal que existeixin expressions α i β que compleixin

$$\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} + y\right)x^2 + \left(\frac{b}{2a}y - \frac{d}{a}\right)x + \left(\frac{y^2}{4} - \frac{e}{a}\right) = (\alpha x + \beta)^2. \quad (*)$$

Un cop trobades α i β tindríem que

$$\begin{aligned} \left(x^2 + \frac{b}{2a}x\right)^2 + \left(x^2 + \frac{b}{2a}x\right)y + \frac{y^2}{4} &= (\alpha x + \beta)^2, \\ \left(x^2 + \frac{b}{2a}x + \frac{y}{2}\right)^2 &= (\alpha x + \beta)^2, \end{aligned}$$

i, per tant, les solucions inicials s'obtidrien resolent les dues equacions de segon grau

$$x^2 + \frac{b}{2a}x + \frac{y}{2} = \alpha x + \beta, \quad x^2 + \frac{b}{2a}x + \frac{y}{2} = -\alpha x - \beta, \quad (**)$$

on y s'ha de buscar de forma que la relació $(*)$ es satisfaci. Ara bé, com s'assegura que una expressió

$$Ax^2 + Bx + C$$

és un quadrat perfecte? Doncs imposant que $B^2 - 4AC = 0$. En el nostre cas, tenim que y ha de ser tal que

$$\left(\frac{b}{2a}y - \frac{d}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} + y\right)\left(\frac{y^2}{4} - \frac{e}{a}\right) = 0. \quad (***)$$

Calculant arribem que y ha de satisfer una equació de tercer grau, que ja sabem resoldre.

Resumint, per a resoldre l'equació de quart grau, hem de buscar una solució y , de l'equació de tercer grau ($***$). A partir d'aquesta y podem buscar α i β que compleixin ($*$). Un cop obtingudes α , β i y , podem resoldre les dues equacions de segon grau ($**$) i obtindrem les solucions x de la primera equació.

A partir d'aquests dos èxits amb els graus 3 i 4, es va intentar resoldre les equacions de grau més elevat. Es va necessitar més de dos segles per aconseguir deduir que era impossible donar fórmules que permetessin resoldre les equacions generals de grau n , $n \geq 5$ usant només un nombre finit de sumes, restes, multiplicacions, divisions i càlculs amb radicals. Els matemàtics que van demostrar aquest resultat van ser J.L. Lagrange (1736-1813), N. Abel (1802-1829) i E. Galois (1811-1832).

Podeu consultar els tres llibres d'A.D. Aleksandrov *et al.* *La matemática: su contenido, métodos y significado*, Alianza Universidad, 1973, en els quals trobareu desenvolupat aquest tema i molts altres temes matemàtics.

Com veureu a l'exemple que segueix, la resolució d'equacions polinomials de grau més gran que 4 apareix en problemes pràctics. Els mètodes que s'han desenvolupat permeten trobar les solucions amb el nombre de xifres decimals correctes que es desitja. Un dels mètodes més útils va ser el descobert per Isaac Newton.

Quota d'amortització d'un crèdit a interès fix

Suposem que una entitat financera ens deixa $D = 7\,000\,000$ ptes. a un interès mensual fix⁷ del 0.5% ($r = 0.005$) i que podem pagar un màxim de $q = 90\,000$ ptes. al mes. Quant temps tardarem a cancel·lar el préstec?

En primer lloc recordem que un deute de c ptes. queda convertit en $c(1+r)^m$ ptes. després de m mesos. Tractem de relacionar totes les quantitats involucrades: el deute (D), l'interès mensual (r), la quota mensual (q) i el nombre de mesos (m). Una manera senzilla d'interpretar la situació és la següent.

Deute total: Si no paguéssim cap quota, la deuta inicial D es convertiria, després de m mesos, en

$$D(1+r)^m.$$

Cada cop que paguem una quota q podem pensar que aquesta queda dipositada a l'entitat i també produeix un interès r per cada un dels mesos restants; així:

La quota número 1 produeix un capital $q(1+r)^{m-1}$ (hi és $m-1$ mesos)

La quota número 2 produeix un capital $q(1+r)^{m-2}$ (hi és $m-2$ mesos)

⋮

La quota número $m-1$ produeix un capital $q(1+r)$ (hi és 1 mes)

La quota número m produeix un capital q .

S'ha de complir la igualtat:

$$D(1+r)^m = q(1+r)^{m-1} + q(1+r)^{m-2} + \cdots + q(1+r) + q.$$

⁷ Això normalment s'abreuja dient que l'interès anual és del 6%. Aquest interès no és ni de bon tros el famós T.A.E. El T.A.E. s'obté afegint a l'interès anual acumulat $6 \times (1.005)^{12}\% = 6.37\%$ les altres despeses per a obtenir el crèdit (comissions, estudi, etc.).

És a dir,

$$q = \frac{D(1+r)^m}{1 + (1+r) + (1+r)^2 + \dots + (1+r)^{m-1}}.$$

Per tal de trobar una fórmula més senzilla per a aquesta última expressió observem que si

$$S = 1 + x + x^2 + \dots + x^{m-1},$$

aleshores

$$xS = x + x^2 + x^3 + \dots + x^m.$$

Restant ambdues expressions tenim

$$(1-x)S = 1 - x^m,$$

d'on resulta

$$S = 1 + x + x^2 + \dots + x^{m-1} = \frac{1 - x^m}{1 - x}.$$

En el nostre cas, $x = 1 + r$, el denominador és

$$1 + (1+r) + (1+r)^2 + \dots + (1+r)^{m-1} = \frac{(1+r)^m - 1}{r},$$

i la relació final és

$$q = \frac{Dr(1+r)^m}{(1+r)^m - 1}. \quad (*)$$

Amb les dades concretes

$$90\,000 = \frac{7\,000\,000 \times 0.005 \times (1.005)^m}{(1.01)^m - 1} = \frac{35\,000 \times (1.005)^m}{(1.005)^m - 1}.$$

Operant

$$(1.005)^m = \frac{90\,000}{90\,000 - 35\,000} = \frac{18}{11}.$$

Aquesta última equació es pot resoldre fàcilment prenent logaritmes als dos costats:

$$\log(1.005)^m = \log \frac{18}{11},$$

d'on

$$m = \frac{\log 18/11}{\log 1.005} = 98.74 \dots$$

Per tant, necessitarem quasi 8 anys i 3 mesos per a liquidar el préstec.

El problema invers, és més difícil. Suposem que llegim l'oferta següent: Podem pagar un objecte que costa 14000 ptes. amb 12 quotes de 1400 ptes. A quin interès mensual (r) ens ofereixen el crèdit?

Aplicant la fórmula (*) obtinguda a l'apartat anterior obtenim que l'interès mensual r ha de complir

$$1400 = \frac{14000r(1+r)^{12}}{(1+r)^{12} - 1}.$$

Si anomenem x a $1 + r$, tenim

$$1400 = \frac{14000(x-1)x^{12}}{x^{12} - 1}.$$

Operant obtenim que x ha de complir (a més, ha d'estar entre 1 i 2)

$$14000x^{13} - 15400x^{12} + 1400 = 0,$$

o equivalentment $10x^{13} - 11x^{12} + 1$. Com ja hem comentat, la resolució d'aquesta equació de grau 13 en x no és possible de manera exacta. De tota manera, trobarem una solució de l'equació amb tants decimals correctes com vulguem utilitzant dos mètodes aproximats.

El primer d'ells, anomenat mètode de la bisecció, és el més senzill possible. Si anomenem

$$f(x) = 10x^{13} - 11x^{12} + 1,$$

observem que $f(1) = 0$, $f(1.01)$ és negatiu i $f(1.05)$ és positiu. Per tant una solució ha d'estar entre 1.01 i 1.05. Avaluant f a 1.03 deduïm que una solució està a l'interval $[1.01, 1.03]$. Continuant aquest procés sis cops més arribem a que la nostra solució ha d'estar a $[1.02905, 1.02935]$.

El mètode Newton (vegeu també la secció 2.19) consisteix a considerar la successió recurrent

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{10x_n^{13} - 11x_n^{12} + 1}{130x_n^{12} - 132x_n^{11}}, \\ x_0. \end{cases}$$

Aquest mètode té convergència quadràtica en molts casos i ens assegura que si la successió $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ s'acosta a un valor, aquest valor és una solució de $f(x) = 0$. Amb les nostres dades, si prenem x_0 com el punt intermedi de l'interval $[1.01, 1.05]$, obtenim que $x_0 = 1.03$, $x_1 = 1.029251963\dots$, $x_2 = 1.029228563\dots$, $x_3 = 1.029228540\dots$, $x_4 = 1.029228540\dots$ i per tant la solució és aproximadament 1.029228540. És a dir l'interès mensual és d'un 2.92%.

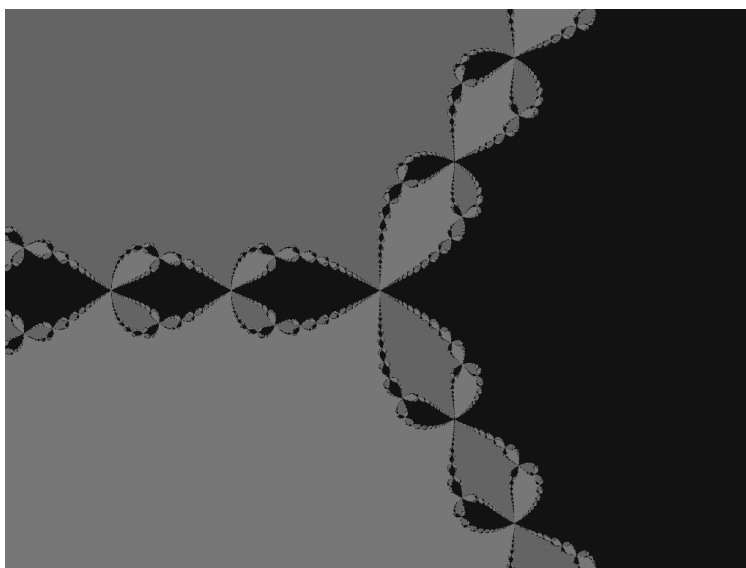


Figura obtinguda aplicant el mètode de Newton per a resoldre $z^3 - 1 = 0$, amb $z_0 \in \mathbb{C}$, i assignant a cada punt de $\mathbb{C}$ un color diferent en funció de la solució que trobem.

2.10 Les matemàtiques i les imatges

Dins el camp de la visió per ordinador, el tractament o l'anàlisi de les imatges és una de les tasques fonamentals. Moltes són les aplicacions on es té una base d'imatges, sobre les quals es necessita fer una anàlisi per a una posterior interpretació o per a poder extreure una informació que després podrem processar. En algunes aplicacions, com és el cas de les aplicacions industrials i mèdiques, s'obtenen seqüències d'imatges tridimensionals 3D. Pensem en el cas de la tomografia computaritzada (TAC), la qual ens dóna informació 3D de les estructures internes del cos humà. Poder entendre aquestes imatges requereix la identificació i modelització de les superfícies dels objectes que són presents en les estructures 3D. En el cas de les imatges satèl·lit, un dels problemes està donat pel soroll present en la imatge mateixa, a causa potser de problemes de captació o transmissió. En aquest cas s'intenta fer un filtratge o preprocessament, intentant eliminar aquest soroll i conservar la informació inherent a la mateixa imatge. Un problema semblant seria el de la restauració de pel·lícules antigues que estiguin deteriorades pel pas del temps. El reconeixement automàtic de les formes és també un dels camps de la visió on l'anàlisi de les imatges és una part fonamental. Pensem en el reconeixement de la signatura o la lectura automàtica de caràcters. En el cas de la videovigilància potser es tracta d'identificar els trets principals en la fisonomia d'una persona o bé d'analitzar algun objecte que hi apareix. I no oblidem el camp de la robòtica, on l'anàlisi de les imatges en temps real que s'obtenen de l'entorn 3D en què es mou el robot, és d'una gran importància en la reconstrucció del seu entorn físic. En aquest cas, l'anàlisi o processament de les imatges seria un exemple del que anomenem *visió de baix nivell*, mentre que el problema de la robòtica aniria lligat a la *visió d'alt nivell*.

Una imatge natural o una fotografia presa del món exterior, no és més que una projecció del món tridimensional 3D sobre el pla de la imatge. Aquest món exterior és complex a causa de la mateixa estructura dels objectes i la posició que ocupen dins l'escena, a més dels canvis d'il·luminació que hi pot haver dins la mateixa escena. Com a conseqüència, les imatges de la vida real o quotidiana que es projecten sobre la nostra retina esdevenen un puzzle a causa de les oclusions i ombres a què donen lloc.

La diferència entre una fotografia o imatge natural i una imatge digital, està donada pel tipus de codificació. Per posar una fotografia dins la memòria d'un ordinador, es divideix la imatge en petits trossos quadrats, que anomenarem píxels, i dins de cada un d'aquests quadrats o píxels, li associarem un número que representa la luminància, com si fos una matriu amb nombres.

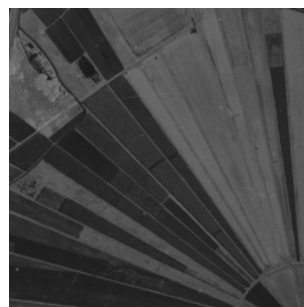
Matemàticament, una imatge o senyal, ho podem interpretar com a una funció $g(x, y)$, on (x, y) és un punt de coordenades qualsevol de la imatge i el valor $g(x, y)$ representa el nivell de gris associat al punt (x, y) . Per a la codificació, de manera semblant, cada nombre representa el nivell de gris associat al píxel (x, y) . Generalment, el negre està codificat pel zero, el 1 representa un color un poc menys negre, el 2 és encara un poc menys negre que l'1 i així. Dins la convenció que s'utilitza en el món de la informàtica, el 255 representa la codificació del color blanc.

Les matemàtiques dins el món de les imatges: modelització

Pensem per un moment en l'exemple del robot. El robot porta una càmera, la qual li dóna la informació del seu entorn, però aquesta informació no és més que diferents projeccions de l'entorn 3D sobre el pla de la càmera. Dins l'anàlisi d'aquesta seqüència d'imatges, hom intenta a partir d'aquestes projeccions trobar els objectes 3D que componen l'escena, com també

conèixer la seva profunditat o distància respecte al pla de la càmera, per a saber en quin ordre el robot els anirà trobant.

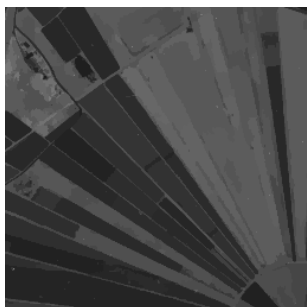
Dins un altre tipus d'aplicació, ja esmentada abans en la introducció, podem pensar en una fotografia que ens envia un satèl·lit (vegeu la imatge 1). Aquesta imatge pot tenir problemes en la mateixa captació, a causa potser del mateix moviment del satèl·lit, o bé en la transmissió (condicions atmosfèriques, etc.), incorporant una informació a la mateixa imatge, anomenada soroll, la qual és vol eliminar. Aquest soroll serà diferent (gaussiana, blanc, etc.) depenent de com s'ha produït. En aquest cas, el que s'intenta, abans de fer una anàlisi de la mateixa imatge, és un preprocessament o filtratge per a intentar separar el soroll del que es considera la informació rellevant de la imatge.



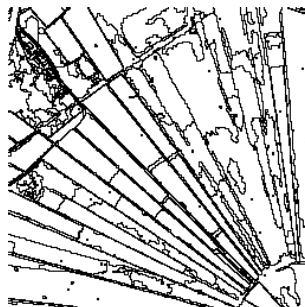
Imatge 1.

Però, quina és la informació rellevant de la imatge? Clàssicament, la detecció dels contorns, o de manera equivalent, la segmentació en regions més o menys homogènies, ha estat un dels problemes que apareixen dins la investigació de la visió per ordinador. Genèricament, les diferents regions homogènies que es poden trobar en una imatge es corresponen amb les projeccions de diferents objectes de l'escena 3D, encara que hem de tenir en compte els problemes afegits dels canvis d'il·luminació, oclusions, ombres, etc. D'aquesta forma, les regions homogènies se suposa que corresponen a parts senceres d'objectes del món real, i les fronteres als seus contorns aparents. Per regions homogènies d'una imatge, entenem regions que són uniformes respecte a alguna característica, per exemple el nivell de gris o les textures. Pensem, per exemple, en el cas de la imatge satèl·lit i posem el problema de distingir a partir d'aquesta imatge, de manera automàtica, les diferents classes de terreny que hi pugui haver: boscos, de conreu, etc. Fins i tot, ens podríem plantejar el problema de distingir entre els diferents tipus de plantacions o si dins una mateixa plantació hi ha una zona atacada per una plaga (diferent textura de les fulles).

Davant una imatge digital, un dels problemes que pretén resoldre el processament d'imatges és l'extracció automàtica de la informació de la imatge a partir dels algorismes o models existents. L'objectiu, esmentat anteriorment, seria la construcció de robots automàtics que poguessin interpretar aquesta informació, a més de millor comprendre la visió humana i animal, des d'un punt de vista biològic. Ara bé, quan volem tractar una imatge digital i per tal de definir un algorisme, com podem obtenir la informació dels contorns o fronteres de les regions homogènies? En general, els contorns que nosaltres veiem en una imatge es corresponen amb els canvis substancials en el nivell de gris (per exemple, una fotografia d'un objecte negre amb un fons blanc), és a dir, en els punts en què el valor absolut de la "derivada" sigui gran.



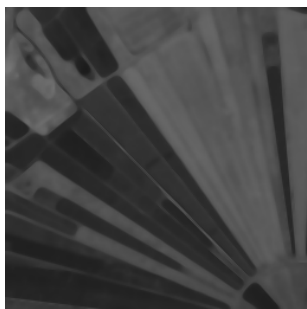
Imatge 2.



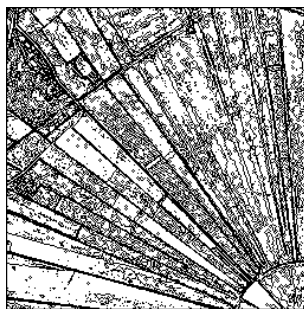
Imatge 3.

Des del punt de vista formal, la majoria dels algorismes de segmentació intenten minimitzar, per diferents camins, l'energia associada a la imatge, donada per una funció que té en compte la imatge que se segmenta i les fronteres de les regions. En l'àmbit algorísmic, la idea és ajuntar dues regions veïnes si difereixen poc respecte a la característica, nivell de gris o textura, i tenir en compte que l'energia associada a aquesta nova segmentació ha disminuït. En aquest cas la segmentació inicial seria considerar que tots els píxels són diferents (cada píxel és una regió diferent), i a partir d'aquest estat començar el procés d'ajuntar les regions. Com a exemple, la imatge 2 ens dóna la imatge final segmentada, amb les diferents regions homogènies, i la imatge 3 és la imatge de les fronteres d'aquestes regions, o contorns. Notem la diferència entre la imatge 1, la original, i la imatge 2, en què, per l'algorisme anterior, obtenim les regions que són semblants respecte al nivell de gris.

Tornem una altra vegada al problema de la imatge satèl·lit. En general, les zones de soroll estan associades a regions on el senyal o la imatge té freqüències altes, i en conseqüència el problema que es planteja és la seva eliminació sense destruir l'altra informació de la imatge. Dins la teoria clàssica, la imatge ha de ser filtrada (o "netejada") abans d'aplicar-li qualsevol algorisme de detecció de contorns o segmentació. En aquest cas, el que s'anomena filtratge lineal consisteix a fer una mitjana local ponderada per la funció gaussiana $G_\sigma(x) = \frac{1}{4\pi\sigma} \exp(-\frac{\|x\|^2}{4\sigma})$ o en termes més matemàtics, fer la convolució de la imatge amb la funció gaussiana. El resultat és una imatge una mica "difuminada" o filtrada, a causa de l'efecte d'aquesta mitjana ponderada. L'efecte és el mateix que el que es dóna en l'aplicació següent, coneguda com l'equació de la calor: Si injectam una font de calor en un punt d'una barra de ferro, en un instant donat, llavors al cap del temps aquesta font de calor es difon al llarg de tota la barra, suposant que el coeficient lligat a la difusió és constant, fins que en un temps "gran", la temperatura en qualsevol punt de la barra serà més o menys la mateixa (efecte de difusió). L'equació de la calor és un tipus d'equació anomenada en derivades parcials, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$, amb la condició inicial donada per la imatge inicial $u(x, 0) = u_0(x)$ al temps $t = 0$. Si pensam en l'efecte que tendria aquest model si ho aplicam a una imatge, llavors la imatge resultant serà més o menys difosa depenent del temps que evoluciona l'equació de la calor.



Imatge 4.



Imatge 5.

L'inconvenient d'aquest filtratge donat per l'equació de la calor, o de manera semblant per la mitjana ponderada, és el fet que quan filtram la imatge, en filtrar d'igual manera els punts de contorn i els punts que es troben dins una regió més o menys homogènia, no conservam la bona localització espacial dels punts frontera. Per a tenir en compte aquest fet, existeixen unes altres equacions en derivades parcials, del mateix tipus que l'equació de la calor, les quals sobre un punt de contorn "esmoreeixen" la difusió, provocant que les fronteres de les regions conservin la seva posició espacial. En canvi, a l'interior de les regions més o menys homogènies,

actuen fent la mitjana ponderada explicada anteriorment. La imatge 4 és un exemple d'aquest tipus de filtratge, en què es pot notar l'efecte de "neteja" de la imatge original.

Des d'un altre punt de vista, podríem pensar que si a cada punt de la imatge, li associem una alçada donada pel nivell de gris d'aquest punt, llavors ens podríem mirar la imatge com si fos una superfície i, per tant, la seva gràfica com un conjunt dins $\mathbb{R}^3$, on $\text{graf}(u) = \{(x, y, u(x, y)); (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$. Si tallam la superfície de la imatge u pels plans de la forma $u = k$, $k \in \mathbb{R}$, llavors tendrem la informació sobre el relleu de la imatge: els cims, les valls, els barrancs o canvis sobtats del terreny, etc. En aquest cas podem pensar les regions homogènies com els altiplans on l'alçada en mitjana no canvia gaire, i les fronteres d'aquestes regions o contorns serien els barrancs donats pels canvis bruscs del relleu. És a dir, podem descompondre una imatge $u(x)$ amb els seus conjunts de nivell k , $\{x \mid u(x) \geq k\}$, $k \in \mathbb{R}$, o bé també amb les fronteres d'aquests conjunts de nivell. En l'exemple de la imatge 5, podem veure les línies de nivell del mapa topogràfic de la imatge satèl·lit, que són múltiples de 10. Notem que, a partir d'aquesta informació, podem reconstruir la imatge. Intuïtivament, la interpretació d'un mapa que ens mostra la topografia d'una zona més o menys muntanyosa, amb les corbes de nivell a diferents alçades, ens permet anar d'excursió, sabent a quins indrets trobarem una vall, a quins un cim, etc.

Aquesta interpretació de la imatge en termes de l'estructura del mapa topogràfic, té una bona propietat en el món de la visió: la invariància per canvi de contrast. És a dir, si u és la imatge i g és una funció no decreixent, llavors u i la composició de u amb g , $g \circ u$, tenen els mateixos conjunts de nivell. En l'àmbit de la interpretació sobre la imatge, aquesta propietat ens diu que si tenim dues fotografies d'una mateixa escena, tan sols canviant una mica les condicions de lluminositat, llavors la informació que podem obtenir de les dues fotografies és la mateixa (hi trobarem els mateixos objectes).

Altres models

Pensem, per exemple, que per un problema de transmissió d'una imatge, la imatge, o el fitxer, no ens arriba sencer. Llavors el problema que se'ns planteja és a partir de quina informació podem recuperar tota la imatge. El mateix podem pensar amb el problema del *zoom*. És a dir, a partir d'una imatge de 64×64 píxels, per exemple, com podem aconseguir una de 512×512 píxels, sense pèrdua de "qualitat". Aquests dos problemes aplicats, que fins i tot interessin en gran manera a la indústria tecnològica, estan relacionats amb el problema matemàtic de la interpolació.

Un altre tipus de problema matemàtic relacionat amb el tema de les comunicacions i visió és el de la compressió. En aquest cas els algorismes de compressió transformen les dades de la imatge en una altra representació, de tal manera que aquesta nova representació requereix menys espai d'emmagatzematge de dades. Així, el JPEG és un algorisme de compressió basat en l'anomenada transformació discreta del cosinus. Una altra eina matemàtica que ha provocat una petita revolució dins el tractament del senyal i que té una especial aplicació al camp de la representació de funcions i en particular, en el de la compressió de senyals, són les anomenades ondetes.

Aquesta secció està basada en el treball *Un model matemàtic per a l'anàlisi d'imatges* de V. Caselles, B. Coll i J.M. Morel publicat al *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, vol. 14, núm. 1, 1999. pàg. 63-83, i en el llibre *Digital Image Processing* de R. Gonzalez i R. Woods, Addison-Wesley, 1992.

2.11 Jocs i estratègies guanyadores

En els exemples següents veurem que el coneixement de les matemàtiques ens pot servir per a entendre millor els jocs en general, i els jocs d'atzar, en particular.

Un joc de fira

Suposem que en una fira ens proposen el joc següent (conegut a les fires del Mig Oest dels EUA i Anglaterra amb el nom de *chuck-a-luck*):

Apostem 1 000 ptes. a un cert número entre 1 i 6 i tirem tres daus. Aleshores:

- (I) Si surt en un dels daus, guanyem 1 000 ptes.
- (II) Si surt a dos dels daus, guanyem 2 000 ptes.
- (III) Si surt als tres daus, guanyem 3 000 ptes.
- (IV) Si no surt a cap dau, perdem les 1 000 ptes.

La qüestió és saber si és un joc en el qual tenim més possibilitats de guanyar o de perdre.

Per sentit comú, tenim més probabilitats de perdre; ja que, si el senyor que ens proposa el joc perd sistemàticament diners, no s'entén que està fent a la fira. Intentarem justificar-ho, doncs, amb arguments matemàtics.

Suposem que hem triat el número al qual apostem (per exemple, l'1 per a fixar idees). Aleshores observem que quan tirem tres daus podem obtenir $6 \times 6 \times 6 = 216$ resultats. A més, d'aquests resultats:

- (I) Només $1 = \binom{3}{3}$ vegada surten tres uns.
- (II) $15 = \binom{3}{2} \cdot 5$ vegades surten dos uns.
- (III) $75 = \binom{3}{1} \cdot 5^2$ vegades surt un u.
- (IV) Els $125 = \binom{3}{0} \cdot 5^3$ vegades restants no surt cap u.

A partir d'aquests resultats, raonant (per simplicitat) com en el problema de la secció 2.6, si suposem que juguem molts cops (per exemple 216 000 cops), tenim:

- (i) Traient 3 uns, guanyem $1\,000 \text{ cops} \times 3\,000 \text{ ptes.} = 3\,000\,000 \text{ ptes.}$
 - (ii) Traient 2 uns, guanyem $15\,000 \text{ cops} \times 2\,000 \text{ ptes.} = 30\,000\,000 \text{ ptes.}$
 - (iii) Traient 1 u, guanyem $75\,000 \text{ cops} \times 1\,000 \text{ ptes.} = 75\,000\,000 \text{ ptes.}$
 - (iv) Traient cap u, perdem $125\,000 \text{ cops} \times (1\,000 \text{ ptes.}) = -125\,000\,000 \text{ ptes.}$
-
- 17 000 000 ptes.

Per tant, en resum, perdem 17 000 000 ptes. quan apostem $216\,000 \times 1\,000$ ptes., és a dir, perdem el $\frac{17\,000\,000}{216\,000\,000} 100 \simeq 7.9\%$ de tot el que apostem. La matematització de si un joc

d'apostes és just o no es basa en la idea d'esperança matemàtica i es pot trobar a qualsevol llibre de probabilitats, per exemple el llibre de K.L. Chung, *Teoría elemental de la probabilidad y de los procesos estocásticos*, Ed. Reverté, 1983.

Una manera de tenir una estimació de quant guanya el senyor que ens proposa el joc durant un dia (suposant que té la parada posada durant cinc hores i que cada hora hi juguen vint persones) és

$$5 \times 20 \times \frac{7.9}{100} \times 1\,000 \text{ ptes.} = 7\,900 \text{ ptes.}$$

El nim

Aquest conegut joc consisteix en el següent: Es posen unes quantes piles d'objectes, per exemple escuradents. Dos jugadors van traient, per torns, un cert nombre d'objectes. L'única regla és que tots els objectes retirats han de ser de la mateixa pila i com a mínim se n'ha de retirar un. Guanya el joc el jugador que agafa l'últim (o últims) objectes.

Una partida típica podria ser

PILA 1									
PILA 2									
PILA 3									
PILA 4									

Representem la situació per $(1, 2, 3, 4)$. El jugador A retira un objecte de la PILA 4 i obtenim $(1, 2, 3, 3)$. El jugador B retira 3 objectes de la PILA 3 i tenim $(1, 2, 0, 3)$ i continuant

$(1, 2, 0, 3)$	jugador B
$(1, 2, 0, 1)$	jugador A
$(1, 0, 0, 1)$	jugador B
$(1, 0, 0, 0)$	jugador A
$(0, 0, 0, 0)$	jugador B guanya.

Encara que sembla un joc en el qual és difícil saber com guanyar, usant eines matemàtiques es pot obtenir una estratègia guanyadora.

L'estratègia és la següent: s'escriuen els números en base dos i se sumen per columnes (sense emportar i com si estiguessin escrits en base 10). Un jugador pot assegurar que guanyarà la partida si aconsegueix que quan ell retira els objectes la suma de cada una de les columnes sigui parell o zero. Al nostre exemple la posició inicial és

0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	2	2

Si el jugador A retirés els quatre objectes de la quarta pila tindria una posició guanyadora. En canvi, el que ha fet és

0	0	1
0	1	0
0	1	1
0	1	1
0	3	3

que no és una posició guanyadora. El jugador B deixa

0	0	1
0	1	0
0	1	1
0	2	2

que ja és posició guanyadora. A partir d'aquí, A ja no podrà fer res. La partida evoluciona

0	0	1		0	0	1		0	0	1		0	0	0	
0	1	0		0	0	1		0	0	1		0	0	0	
0	0	1		0	0	1		0	0	1		0	0	0	
0	1	2	A	0	0	2	B	0	0	1	A	0	0	0	B

i el jugador B guanya. Penseu per què l'estratègia proposada és guanyadora.

Els dos jocs següents admeten estratègies guanyadores. Penseu-les o consulteu el llibre *La mathématique des jeux*, Bibliothèque pour la science, París 1977-1990.

La presa de xocolata

Aquest és un joc per a dos jugadors. Es comença amb una rajola de xocolata amb una presa d'una cantonada marcada, vegeu la figura següent:

Els dos jugadors, per torns, agafen una o més preses de la rajola. L'única regla és que han de trencar la rajola seguint una línia sencera. Perd el jugador que es queda la presa marcada.

Una partida curtíssima és:

No passis de 31

Aquest és també un joc per a dos jugadors. Les regles són les següents:

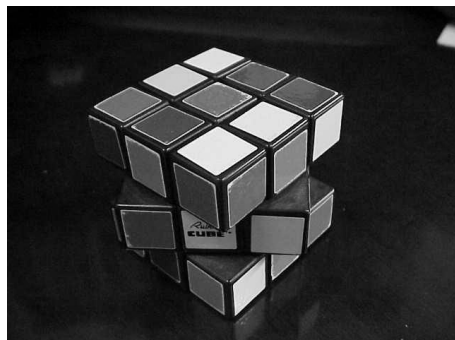
El primer jugador posa sobre la taula un dau amb les cares marcades de l'1 al 6. La seva puntuació és el nombre que hi ha a la cara superior del dau.

L'altre jugador ha de fer girar el dau sobre la taula un quart de volta (la cara superior del dau serà una de les quatre cares que abans estaven en posició vertical). La seva puntuació és la suma de la puntuació anterior i el nombre que ha posat a la cara superior.

A partir d'aquí els jugadors van fent, alternativament, el mateix que ha fet el segon jugador. Perd el jugador que obtingui una puntuació superior a 31 (o qualsevol altre nombre que es fixi des del principi).

2.12 El cub de Rubik i la teoria de grups

Fa uns quants anys es va posar molt de moda jugar a l'anomenat cub de Rubik. Aquest cub està format (vist des de fora) per 26 cubs més petits; vegeu la figura següent:



Direm que el cub està ben muntat quan els sis quadradets de cada una de les sis cares són del mateix color (cada cara té un color diferent). Els moviments que permet fer el mecanisme interior del cub són: Girar cada una de les sis cares rígidament 90, 180, 270 o 360 graus (en aquests moviments el quadrat del mig de la cara sembla immòbil). L'objectiu general del joc és muntar el cub a partir d'una situació qualsevol (obtinguda girant unes quantes cares prèviament). Aquí no tractarem d'aquest problema, si no que donarem una explicació d'un fet molt curiós que s'observa a partir del cub muntat:

Prenem el cub muntat i fem una successió de moviments, per exemple:

“Movem la cara de dalt 180°, la de la dreta 180° i la de darrere 180°.”

Aleshores observem que després de repetir aquest moviment un cert nombre de cops (en aquest cas dotze) el cub es torna a muntar.

La qüestió és que quan es repeteix el mateix moviment inicial, començant d'un cub muntat, després d'un cert nombre de repeticions (de vegades aquest nombre ha de ser gran) el cub es torna a muntar de manera sorprenent.

Donarem una explicació d'aquest fet usant la teoria de grups. Necessitem saber en primer lloc que és un grup. Per a més detalls podeu consultar, per exemple, el llibre de S. Lang, *Àlgebra*, Ed. Aguilar, 1971.

Donat un conjunt G , denotem per f, g i h elements qualssevol de G . Suposem a més que els elements de G es poden operar entre ells donant un altre element de G . Denotem per $f * g \in G$ el resultat d'operar f amb g . Direm que el conjunt G amb l'operació $*$ és un grup si es compleixen les tres propietats següents:

- ASSOCIATIVA:

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

- EXISTÈNCIA D'ELEMENT NEUTRE: Existeix un element de G que denotem $u \in G$, i anomenarem element neutre, tal que

$$f * u = u * f = f$$

per a qualsevol element f de G .

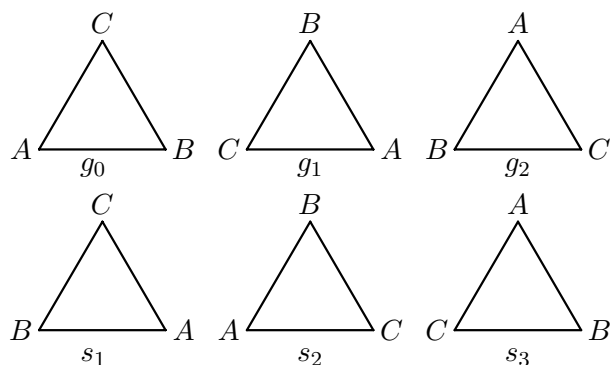
- EXISTÈNCIA D'ELEMENT INVERS: Donat qualsevol element de G , f n'existeix un altre a G , que es denota per $f^{-1} \in G$ de manera que

$$f * f^{-1} = f^{-1} * f = u.$$

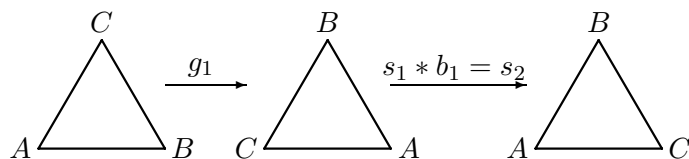
Hi ha molts exemples de conjunts amb una operació que tenen estructura de grup. Per exemple els nombres enters $\mathbb{Z}$ amb l'operació $+$, els nombres reals $\mathbb{R}$ amb l'operació $+$, els nombres $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ amb l'operació $\times, \dots$

Donarem també un exemple més geomètric. Considerem un triangle equilàter. Els elements del nostre grup seran els moviments que deixen invariant la posició del triangle (vegeu també la figura adjunta):

- $g_0 = u$, deixar el triangle immòbil,
- g_1 , girar el triangle 120° cap a l'esquerra,
- g_2 , girar el triangle 240° cap a l'esquerra,
- s_1 , fer simetria respecte a l'altura vertical,
- s_2 , fer simetria respecte a l'altura inclinada cap a la dreta,
- s_3 , fer simetria respecte a l'altura inclinada cap a l'esquerra.



L'operació $*$ consisteix a fer un moviment rere l'altre, així per exemple $s_1 * g_1$ vol dir agafar el triangle, fer-li el moviment g_1 i al triangle resultant fer-li el moviment s_1 . Obtenim que $s_1 * g_1 = s_2$; vegeu la figura següent:



Es pot veure que aquest conjunt de sis elements amb l'operació $*$ és un grup.

Veurem a continuació que si $(G, *)$ és un grup amb un nombre finit d'elements, s'agafa un element qualsevol g i es va operant amb ell mateix

$$g, g * g, g * g * g, \dots, g * \overset{m)}{\dots} * g, \dots$$

arriba un moment k en què $g^k = g * \overset{k)}{\dots} * g = u$, on recordem que u és l'element neutre de $(G, *)$.

Demostrem, doncs, l'existència d'aquest k . Considerem els elements de $G, g, g^2, \dots, g^m, \dots$. Com que G és un conjunt finit i el conjunt anterior és infinit, i tots els seus elements són de

G , ha d'haver-hi almenys dos elements que coincideixin. Els anomenem g^m i g^l i suposem que $m < l$. Tenim, doncs, que $g^m = g^l$.

Ara bé g ha de tenir un invers g^{-1} tal que $g^{-1} * g = u$. Per tant si operem als dos costats la igualtat $g^m = g^l$ amb g^{-1} tenim:

$$\begin{aligned} g^{-1} * g^m &= g^{-1} * g^l, \\ g^{-1} * g * \overset{m)}{\dots} * g &= g^{-1} * g * \overset{l)}{\dots} * g, \\ u * g * \overset{m-1)}{\dots} * g &= u * g * \overset{l-1)}{\dots} * g, \\ g^{m-1} &= g^{l-1}. \end{aligned}$$

Si repetim el procés $m - 1$ vegades, resulta

$$u = g^{l-m},$$

com volíem veure.

De manera una mica més complicada que en el cas dels moviments que deixen invariant el triangle equilàter, també es pot veure que el conjunt de tots els moviments que es poden fer al cub de Rubik té també estructura de grup G . Aquest grup té $2^{27} \times 3^{14} \times 5^3 \times 7^2 \times 11 = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000$ elements, i l'operació $*$ és la composició de moviments.

Per tant, en el nostre cas, si es pren un moviment qualsevol (g del grup G) i es repeteix k cops (l'operació $*$), s'obté l'element neutre del grup de moviments u (que ha de ser el moviment que no canvia cap de les cares del cub).

Així hem trobat una explicació matemàtica d'un fet molt curiós, que sense usar la teoria de grups costaria molt més d'explicar.

2.13 Travesses i transmissió d'informació

D'entre els jocs d'apostes, les travesses és un dels que crida més l'atenció dels matemàtics. La raó potser és que mentre que a la loteria clàssica o a la Loto 6-49 l'únic que intervé és l'atzar, en les travesses també intervé la informació prèvia que es té sobre cada partit. Així quan dos equips s'enfronten es poden fer moltes consideracions que permetin concloure que potser els tres resultats possibles 1, x i 2 no són igualment probables. A partir d'aquesta informació, tots els resultats que poden sortir en una travessa (3^{14} sense tenir en compte el partit complementari) han deixat de ser equiprobables, i és aquí on poden intervenir les matemàtiques per racionalitzar les apostes que es fan.

S'han desenvolupat molts mètodes que permeten aprofitar el màxim les apostes: reduccions, teoria d'errors, nombre màxim i mínim de x i 2, mètodes probabilístics, mètodes mixtes, etc. Aquests mètodes poden donar bons resultats si es fan moltes apostes. En aquestes notes explicarem un dels casos més senzills del mètode anomenat de reduccions al 13.

Ens ocupem d'un grup de set partits pels quals els nostres experts en futbol han predit que només sortirà 1 o x . Aleshores, per a assegurar que sigui quin sigui el resultat dels set partits l'encertem (recordem que suposem que només pot sortir 1 o x), necessitem fer $2^7 = 128$ apostes. Decidim que això és massa car. La qüestió és: podem aprofitar la informació que tenim sense gastar tant? La idea de la reducció al 13 és la següent: En lloc de fer les 128 apostes, farem un nombre molt menor d'apostes de manera que siguin quins siguin els resultats dels set partits (sempre que surti 1 o x) en el nostre conjunt d'apostes sempre encertem com a mínim sis dels set resultats. Aquesta reducció al 13 de set partits amb pronòstic doble és molt coneguda i està donada en la taula 3. Observi's que el nom de reducció al 13 està donat pel fet que, si encertem els altres set partits, i en els set partits en els que hem predit 1 o x això es compleix, en les nostres setze apostes hi haurà un 13 (o un 14).

x	x	x	x	x	x	x	x	1	1	1	1	1	1	1	1
x	x	x	x	1	1	1	1	x	x	x	x	1	1	1	1
x	x	1	1	x	x	1	1	x	x	1	1	x	x	1	1
x	1	x	1	x	1	x	1	x	1	x	1	x	1	x	1
x	x	1	1	1	1	x	x	1	1	x	x	x	x	1	1
x	1	x	1	1	x	1	x	1	x	1	x	x	1	x	1
x	1	1	x	x	1	1	x	1	x	x	1	1	x	x	1

Taula 3. Reducció al 13 de set dobles

Una prova de les afirmacions anteriors és la següent: Notem que per a cada una de les apostes hi ha vuit conjunts de resultats que tenen exactament cap error o un respecte de l'aposta. Com que cada una de les 16 columnes de la taula 3 es diferencia com a mínim en tres resultats amb cada una de les 15 columnes restants, tenim que quan apostem les 16 columnes de la taula cobrim 16×8 resultats (amb cap error o un), i $16 \times 8 = 128$, que és el conjunt de totes les apostes possibles.

Observem quina és la filosofia general dels mètodes aplicats a les travesses en el cas concret de set partits. Si no en tenim cap informació, fem $3^7 = 2187$ apostes i cobrim tots els resultats (és molt car). Si uns experts en futbol ens eliminen un resultat de cada partit, el nombre d'apostes que necessitem és només $2^7 = 128$ per a cobrir els resultats predits. Si ens conformem d'encertar només sis partits (suposant que els experts no s'hagin equivocat), en tenim prou fent 16 apostes. En resum, els mètodes permeten racionalitzar les apostes perquè gastant el mínim possible "cobrim" el màxim nombre de resultats.

Ara explicarem com la mateixa idea que permet fer les reduccions al 13 per set dobles és utilitzada en un context totalment diferent. Això ens pot fer reflexionar sobre el fet que de vegades es poden estar desenvolupant problemes que des d'un punt de vista són lúdics (com a l'exemple) o pertanyen a la matemàtica anomenada teòrica i, finalment, els resultats que s'obtenen són utilitzats a la tècnica, o en altres contextos totalment diferents.

Considerem la taula 3 però substituint les x per 0. Fixem-nos que les quatre primeres files corresponen a l'expressió en base dos de tots els nombres naturals entre 0 i 15. Així, per exemple, la columna corresponent al 13 és 1101010, ja que $13 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 = 1101_2$.

Abans de continuar, recordem que qualsevol informació es pot digitalitzar (és a dir, com en el cas dels nombres se li pot associar una successió única de zeros i uns de manera que donada la informació obtinguem la successió de zeros i uns (codificació), i donada la successió obtinguem la informació (descodificació)). Veurem ara que la taula 3 (canviant x per 0 coneguda com codi de Hamming de longitud 7) ens serveix per a minimitzar els errors en la transmissió d'informació.

Suposem que hi ha un emissor i un receptor que es volen enviar una informació codificada (per a simplificar suposarem que es volen enviar un nombre natural entre 0 i 15). A més, suposem que el mecanisme de transmissió digital comet molt pocs errors (per exemple, té un error d'un 1%, és a dir, en mitjana canvia un de cada 100 dígit enviat).

Opció 1: *transmissió sense usar cap prevenció per errors.*

$$\begin{array}{ccccc}
 13 & \xleftrightarrow{\text{codificar}} & 1101 & \xrightarrow{\text{enviar}} & \left\{ \begin{array}{l} 1101, \left(\frac{99}{100}\right)^4 \% = 96.06\% \text{ dels casos} \\ \text{almenys un error, } 3.94\% \text{ dels casos} \end{array} \right. \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & \left\{ \begin{array}{l} 13, 96.06\% \text{ dels casos} \\ \text{error, } 3.94\% \text{ dels casos} \end{array} \right. \\
 & & & & \xleftarrow{\text{descodificar}}
 \end{array}$$

Suposem ara que, com a prevenció per a evitar errors, usem la idea següent: en lloc d'enviar els quatre dígit en base 2, n'enviem set (els tres últims són els tres corresponents a la columna del codi de Hamming). Aleshores, quan el receptor rebí els set dígit, si no hi ha hagut cap error serà una de les setze columnes, però si hi ha hagut només un error se'n podrà adonar i el podrà corregir (observi's què de la manera en que s'ha construït la taula 3 cada successió de set dígit té cap o un error només respecte a una de les columnes). Per tant, es pot considerar que la informació arribarà malament si es produeixen almenys dos errors. Il·lustrem-ho amb l'exemple de la transmissió del 13.

Opció 2 *transmissió usant prevenció d'un error.*

$$\begin{array}{ccccc}
 13 & \xleftrightarrow{\text{codificar}} & 1101 & \xrightarrow{\text{afegir control}} & 1101010 \\
 & & \xrightarrow{\text{enviar}} & \left\{ \begin{array}{l} \text{cap o un error}^8, 99.8\% \text{ dels casos} \\ \text{més d'un error, } 0.2\% \text{ dels casos} \end{array} \right. & \xrightarrow{\text{Codi Hamming}} \left\{ \begin{array}{l} 1101010 \\ \text{error} \end{array} \right. \\
 & & \xleftrightarrow{\text{descodificació}} & \left\{ \begin{array}{l} 1101 \\ \text{error} \end{array} \right. & \xleftrightarrow{\text{descodificació}} \left\{ \begin{array}{l} 13, 99.8\% \text{ dels casos} \\ \text{error, } 0.2\% \text{ dels casos} \end{array} \right.
 \end{array}$$

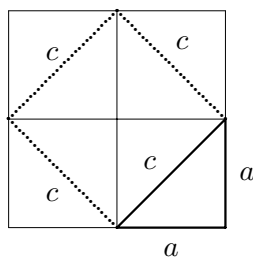
Observem així que usant aquesta última idea podem assegurar que en un 99.8% dels casos es rep el que s'envia, mentre que si no s'uses cap control de l'error, només es podia assegurar en un 96.06% dels casos. Versions més complicades d'aquesta idea inicial de Hamming són utilitzades actualment. Podeu consultar, per exemple, la traducció de la revista *Unizürich* feta per la Societat Catalana de Matemàtiques, *La matematització del món* (1994).

⁸ "Cap error" es calcula com $100 \left(\frac{99}{100}\right)^7 \%$. "Un error," com $100 \left(7 \left(\frac{99}{100}\right)^6 \frac{1}{100}\right) \%$. Així cap error o un es dona en el $\frac{99^7 + 7 \times 99^6}{100^6} \% = 99.8\%$ dels casos.

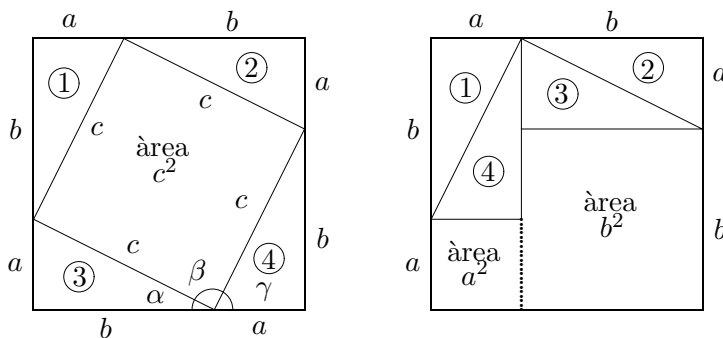
2.14 El teorema de Pitàgores

Recordem el que diu el famós teorema de Pitàgores: *En un triangle rectangle la suma dels quadrats dels catets és igual al quadrat de la seva hipotenusa*. Aquest resultat és conegut per la humanitat —almenys per alguns triangles rectangles concrets— des de fa uns 1500 anys abans de Crist a Babilònia. Pel que es coneix, la primera demostració la va donar en Pitàgores uns 500 anys abans de Crist. Des d'aleshores han aparegut moltíssimes altres demostracions (hi ha un llibre que en recopila més de tres-centes). En aquest text, basat essencialment en els llibres *Meu Professor de Matemática*, de E. Lages Lima, Coleção Do Professor de Matemática, Soc. Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1991 i *Comunicación Extraterrestre*, de M. Gardner, Colección Teorema, Catedra 1986, Madrid, en recordarem unes quantes.

La primera prova que donem també és atribuïda als grecs i demostra el teorema només per a triangles rectangles equilàters (és a dir, triangles rectangles amb els dos catets iguals). Aquesta prova es basa en la figura següent:



Observeu que el quadrat tort té àrea c^2 ; però per altra banda la seva àrea està formada per quatre triangles d'àrea $\frac{a^2}{2}$ és a dir $c^2 = 2a^2 = a^2 + a^2$. Una demostració també de l'escola grega, que és potser la més senzilla i popular, és la basada en les figures següents:



De fet, no calen gaires explicacions. Potser només cal comentar que la figura de l'esquerra amb els quatre costats de mida c és un quadrat i no un rombe. Això és a causa que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ radians i que $\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}$ radians per ser els dos angles no rectes d'un triangle rectangle; per tant, $\beta = \frac{\pi}{2}$ radians.

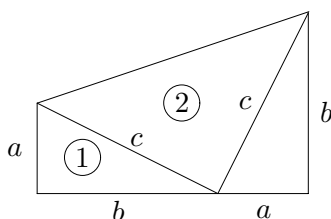
A partir de només la figura de l'esquerra i amb càlculs elementals, també s'obté una demostració usant que

$$\begin{aligned} \text{ÀREA DE QUADRAT TOTAL} &= 4 \cdot (\text{ÀREA D'UN DELS 4 TRIANGLES}) + \\ &\quad + \text{ÀREA QUADRAT INTERIOR} \end{aligned}$$

és a dir

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= 4 \cdot \left(\frac{ab}{2}\right) + c^2, \\ a^2 + b^2 + 2ab &= 2ab + c^2, \\ a^2 + b^2 &= c^2.\end{aligned}$$

Una variació d'aquesta última prova, que s'atribueix a l'expresident dels EUA, J.A. Gardfield, es basa en la figura següent (que, com podem observar, és la meitat de la figura de l'esquerra anterior).



Si usem que

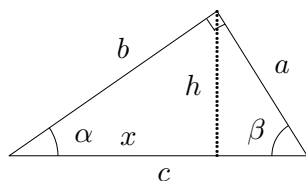
$$\text{ÀREA DEL TRAPECI} = 2 \cdot (\text{ÀREA DEL TRIANGLE 1}) + \text{ÀREA DEL TRIANGLE 2},$$

és a dir,

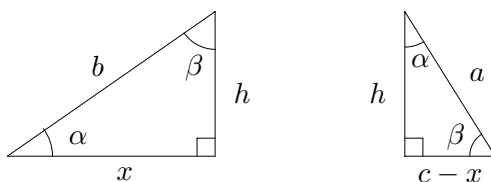
$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2}(a+b) &= 2 \left(\frac{a \cdot b}{2}\right) + \frac{c^2}{2} \\ \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{2} &= \frac{2ab + c^2}{2}, \\ a^2 + b^2 &= c^2,\end{aligned}$$

on hem usat que l'àrea d'un trapezi és el producte de la semisuma de les seves bases per la seva altura.

Una demostració essencialment diferent es basa en la semblança de triangles. La detallem a continuació. Prenem un triangle rectangle com el de la figura



Observem que aquest triangle determina dos altres triangles rectangles amb els mateixos angles, i per tant semblants. Aquests són



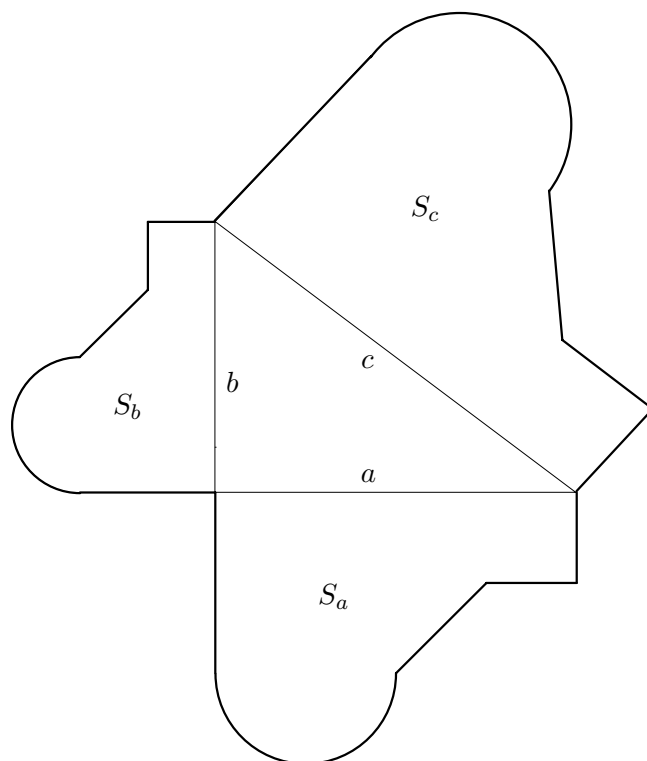
Recordem que, pel teorema de Tales (vegeu la secció d'història 5.1), els costats de triangles semblants han de mantenir les mateixes proporcions. Per tant, prenent el triangle gran i el de l'esquerra tenim $\frac{c}{b} = \frac{b}{x}$. Prenent el triangle gran i el de la dreta arribem que $\frac{c}{a} = \frac{a}{c-x}$. Aquestes dues expressions s'escriuen com

$$b^2 = cx \quad \text{i} \quad a^2 = c(c-x).$$

Si les sumem, tenim de nou el teorema de Pitàgores, és a dir

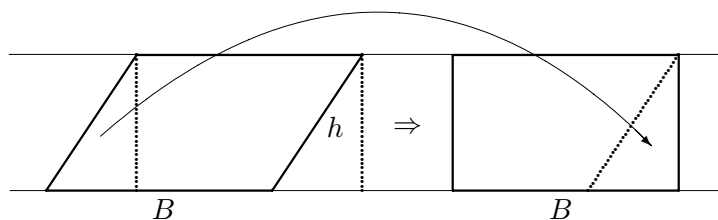
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

No és difícil veure que el teorema de Pitàgores és cert en una situació molt més general. El seu enunciat és degut al matemàtic hongarès G. Polya i ens diu: *Si sobre cada un dels costats d'un triangle rectangle hi posem figures semblants (seguint la raó de semblança donada pels costats respectius), aleshores la suma de l'àrea de les figures que es recolzen sobre els catets és igual a l'àrea de la figura que es recolza sobre la hipotenusa.* La figura següent il·lustra el teorema de Polya, $S_a + S_b = S_c$,

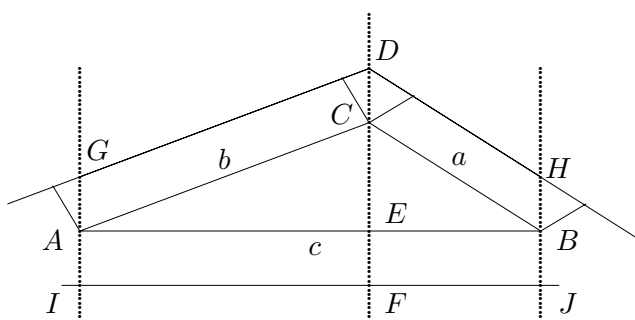


Hi ha un teorema similar al de Pitàgores, però per a triangles qualssevol, anomenat teorema de Pappus i que enunciaré tot seguit. La prova que presentem està basada en la següent propietat dels paral·lelograms:

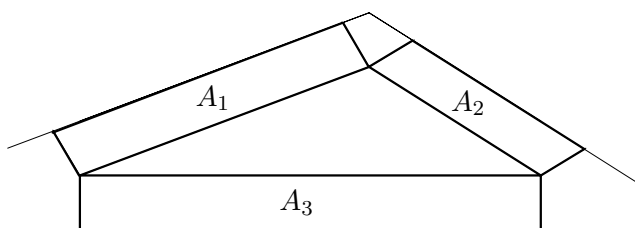
Tots els paral·lelograms amb la mateixa base B i altura h tenen la mateixa àrea Bh. Aquesta propietat es mostra a la figura següent:



El teorema de Pappus es basa en la següent construcció sobre un triangle qualsevol ABC il·lustrada a la figura següent. Es dibuixen dues línies paral·leles a AC i a BC . Suposem que es tallen a D . Dibuixem la recta que passa per DC , tracem una paral·lela a AB de manera que la distància EF sigui igual a DC . Ara tracem línies paral·leles a DC que passin per A i B



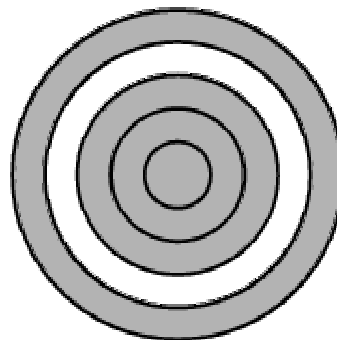
Aleshores, si es prenen paral·lelograms sobre AC i CB , les seves àrees seran iguals a les dels paral·lelograms $AGDC$ i $CDHB$ respectivament. Ara bé, aquestes àrees coincideixen amb la del paral·lelogram basat en c , $ABJI$. Resumint, el teorema de Pappus ens diu que $A_1 + A_2 = A_3$, on:



Per a acabar, parlarem una mica dels triangles rectangles amb costats de mida entera. El més senzill és el de costats 3, 4 i 5. És clar que a partir d'aquest se'n poden construir molts més: els de mides $3k$, $4k$ i $5k$, on k és un nombre natural qualsevol. Un triangle rectangle es diu *pitagòric primitiu* si els seus costats són nombres naturals sense cap divisor comú als tres. Es pot veure que tots els triangles pitagòrics primitius tenen costats a , b , c que compleixen

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

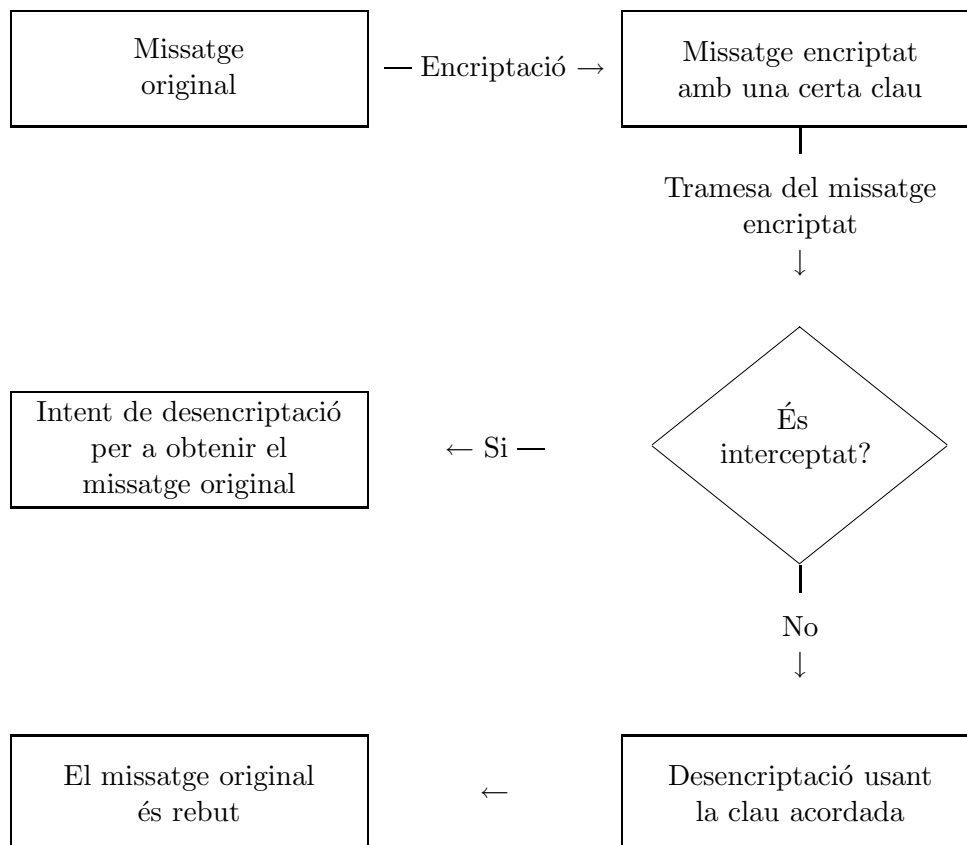
amb m i n naturals, primers entre si, i $m > n$.



Són les dues àrees fosques iguals?

2.15 Codis secrets

La transmissió de missatges entre dues persones, de manera que no puguin ser entesos per una tercera persona, és una pràctica que ha estat usada per la humanitat des de fa més de dos mil anys. Es tenen notícies de missatges encriptats de l'època de la Grècia clàssica. Un esquema del mètode general que és el següent



Encara que durant la història hi ha hagut nombrosos xifrats (mètodes d'encriptació de missatges), hi ha dues famílies de xifrats clarament diferents: Els xifrats de substitució i els de transposició. A continuació parlarem una mica de cadascun d'aquests tipus.

Xifrats de substitució

Un dels xifrats més antics és atribuït a Juli Cèsar i ens donarà una primera idea del que són aquests tipus de xifrats. Consisteix en el següent:

Donat un missatge substituïm cadascuna de les seves lletres per la lletra situada quatre llocs més endavant en l'ordre alfabètic (quan s'acaben les lletres tornem a començar per la A). Així, per exemple, la codificació de CADA seria FDHD. En general, cada lletra es substituiria per la de sota de la següent llista.

A	B	C	Ç	D	E	...	V	W	X	Y	Z
D	E	F	G	H	I	...	Z	A	B	C	Ç

De seguida els desencriptadors (persones especialitzades a tractar de veure quin és el missatge original a partir del missatge codificat) van ser capaços de desencriptar missatges

encriptats per aquest mètode. Observem que descriptant una lletra, se'n dedueixen totes les altres.

Al segle XV, L.B. Alberti va començar a perfeccionar el xifrat de J. Cèsar. La millora va consistir a prendre a la segona fila una permutació (reordenació) qualsevol de totes les lletres de l'alfabet. Per exemple,

A	B	C	Ç	D	E	...	X	Y	Z
H	L	A	W	T	S	...	I	U	B

D'aquesta manera s'havien de descriptar totes les lletres una per una. Els descriptadors ho tenien una mica més difícil, però van ser capaços de nou de trobar un sistema per a obtenir el missatge original. Aquest es basava en estudis estadístics sobre quines eren les lletres que sortien més sovint, els grups de dues lletres que sortien més sovint, els de tres lletres, etc. A partir d'aquí, i si el missatge era una mica llarg, podien “traduir-lo”. Per exemple en català tenim:

- lletres més freqüents per ordre: E, A, S, R, I, N, T, O, ..., K, W.
- grups de dues lletres més freqüents: ES, AR, EN, RE, RA, SS, RI, EM, ...

i en castellà:

- lletres més freqüents per ordre: E, A, O, S, R, I, N, ..., Z, K, W, X.
- grups de dues lletres més freqüents: ES, EN, EL, DE, LA, ...

Per tant, en un text que prové del castellà, per exemple, és molt possible que la lletra que surti més sovint sigui la que correspon a la E. A partir d'aquesta, tenim lletres candidates a ser la S, la N o la L i així successivament.

Al segle XVI va haver-hi una millora important deguda a B. Vigenère. Aquesta consisteix en la introducció d'una paraula clau i de considerar tants codis de Cèsar com lletres té l'alfabet. És a dir,

A	B	C	Ç	D	...	X	Y	Z
B	C	Ç	D	E	...	Y	Z	A
C	Ç	D	E	F	...	Z	A	B
:								
Z	A	B	C	Ç	...	W	X	Y

Si volem codificar una frase com

BADA A CADA CAÇADA

i la paraula clau és CAZ, fem el següent:

B	A	D	A	A	C	A	D	A	C	A	Ç	A	D	A
C	A	Z	C	A	Z	C	A	Z	C	A	Z	C	A	Z

i la codificació de cada lletra s'obté buscant la lletra que hi ha sota de la lletra del missatge original que és a la fila que comença per la lletra corresponent de la paraula clau. A l'exemple l'encriptació de la B segons la fila que comença per C és Ç, i la de tot el missatge és:

ÇAÇC A BCDZ DACCDZ

La descodificació es fa usant la mateixa paraula clau i la taula en sentit contrari.

Aquest darrer mètode és molt més difícil de forçar (desencriptar) i és tan més complicat com més llarga és la paraula clau. L'encriptació perfecta, segons va provar C. Shannon, durant aquest segle s'aconsegueix quan la paraula clau té la mateixa longitud que el missatge que volem codificar i, a més, aquesta paraula clau està generada totalment a l'atzar. Això vol dir que la paraula clau es forma, per exemple, tirant un dau amb tantes cares com lletres té l'alfabet. Amb altres paraules, Shannon va provar que si s'utilitza una paraula clau aleatòria i de la mateixa mida que la frase que es vol codificar, la frase codificada és totalment aleatòria i per tant no ofereix cap informació sobre el missatge inicial, llevat que es conegui la clau de xifrat.

El problema d'aquest darrer sistema és evident: el receptor ha de conèixer una paraula clau tan llarga com el missatge, i aquesta paraula és difícil de canviar. Aquest problema és resol substituint la paraula clau totalment aleatòria pel que s'anomena una paraula pseudoaleatòria. Hi ha molts mètodes per aconseguir paraules pseudoaleatòries; només n'explicarem un de molt senzill:

Considerem el número π :

3.141592653 5897932384 6264338327 95 ...

En els decimals de π no s'ha trobat cap regularitat i es poden considerar pseudoaleatoris. Una bona clau d'encriptació seria la següent: Prenem les deu primeres files de la taula d'encriptació deguda a Vigenère i les numerem del 0 al 9

0	A	B	C	Ç	D	...	Z
1	B	C	Ç	D	E	...	A
2	C	Ç	D	E	F	...	B
3	Ç	D	E	F	G	...	C
:							
9	I	J	K	L	M	...	H

Una clau d'encriptació de mida 100 pot ser els decimals de π des del 15 fins al 114.

Per tant, la frase i la clau d'encriptació serien

BADA A CADA CAÇADA
3 2 3 8 4 6 2 6 4 3 3 8 3 2 7

i s'encriptaria com DCGH...

Amb aquest últim mètode ja hem arribat als nostres dies. De fet, el sistema DES (Data Encryption Standard) de IBM es basa en aquestes idees. L'única diferència important és que es treballa amb un altre alfabet més senzill: l'alfabet amb només dues "lletres": 0 i 1.

Un primer pas consisteix a traduir l'alfabet usual a zeros i uns; això s'anomena ASCII (American Standard Code of Information Interchange) i és l'usat pels ordinadors. En aquest codi:

A	és	01000001
B	és	01000010
C	és	01000011
Ç	és	10000000
D	és	01000100
:		

Aleshores, la paraula BADA en ASCII és

01000010 01000001 01000100 01000001.

Com a clau de codificació seguirem prenent els decimals de π entre 15 i 114, però convertits en una seqüència de cent zeros i uns amb la regla: una xifra parell dóna lloc a un 0, i una xifra senar dóna lloc a un 1. La clau corresponent a 323846... seria, per tant, 101000...

La taula de conversió en aquest cas segueix les mateixes regles i és molt senzilla (l'alfabet només té dues lletres). La podem escriure així:

El missatge té:	0	1
Clau 0	0	1
Clau 1	1	0

Per tant, la nostra paraula

01000010 01000001 01...

amb clau

10100000 01101011 10...

es codifica com

11100010 00101010 11...

Existeixen altres xifrats de substitució basats en idees diferents. A bastants d'aquests xifrats el coneixement de nombres primers⁹ grans és molt important.

Xifrats de transposició

Parlarem ara d'una família de xifrats que no gaire cosa a veure amb l'anterior. En aquests xifrats, els valors de les lletres no varia mai. Pel que es coneix, també provenen de la Grècia clàssica. El mètode que explicarem s'atribueix a G. Cardano (segle XVI), encara que s'ha popularitzat per l'obra de Jules Verne *Mathias Sandorf*.

Els mètodes estan basats en una plantilla (nosaltres considerarem plantilles de 4×4) construïdes de la manera següent:

1	2	3	1
3	4	4	2
2	4	4	3
1	3	2	1

⁹L'estudi dels nombres primers ha estat una constant al llarg de la història de les matemàtiques. Potser en aquest llibre hi falta alguna secció dedicada a ells. No podem evitar comentar un parell de curiositats:

- No es coneix cap fórmula que ens doni sempre nombres primers. Euler va trobar el següent resultat sorprenent: la funció $f(n) = n^2 + n + 41$ dóna sempre un nombre primer quan l'avaluem a $n = 0, 1, 2, \dots, 39$. Malauradament, $f(40) = 41^2$.
- Dos números primers $p < q$ es diuen bessons si $q - p = 2$. Per exemple, 3 i 5, 29 i 31, 149 i 151, 7949 i 7951, 104849 i 104851... són parells de nombres primers bessons. Avui en dia no se sap si hi ha o no infinits parells de primers bessons.

Observi's que el que s'ha fet és omplir el quadrat 2×2 de dalt a l'esquerra amb els números de l'1 al 4. Els altres 3 quadrats 2×2 s'omplen girant el quadrat gran 90, 180 i 270 graus en el sentit de les agulles del rellotge i posant als quadradets buits els nombres que van passant per sobre. Un cop fet això, es foraden quatre (o menys) quadradets respectant la regla següent: no es poden foradar quadrats amb nombres repetits.

Triem la plantilla següent

■		■	
	■		
		■	

Aleshores el mètode d'enciptació funciona així: Donada una frase a encriptar com, per exemple,

LES MATEMÀTIQUES

es comença a escriure sobre un paper la frase usant només els forats de la plantilla. Un cop acabats els forats, es gira 90 graus la plantilla (en el sentit de les agulles del rellotge) i es continua escrivint i així dos cops més. El mètode seguit per a fer la plantilla ens garanteix que mai no haurem de sobreposar lletres. Obtenim

<u>L</u>	A	<u>E</u>	A
U	T	T	E
E	<u>S</u>	S	M
B	I	<u>M</u>	Q

on hem subratllat les quatre primeres lletres. Afegim una B o qualsevol altra lletra per a completar el quadrat de lletres. Per a acabar, les podem escriure com una frase

LAEA UT TEESS MBIMQ

Per a veure si el mètode és bo o no, el que hauria de passar és que encara que una persona l'interceptes no fos capaç de desxifrar-lo tot i sabent que s'ha usat el mètode de les plantilles. Per tant, la seguretat del mètode depèn del nombre diferent de plantilles que es puguin construir. En el cas 4×4 observeu que se'n poden construir 4^4 (triem un número 1 d'entre 4 per al primer forat, un 2 d'entre 4 per al segon, i així successivament). Si prenguéssim plantilles 6×6 o 8×8 , el nombre possible de plantilles seria 4^9 o 4^{16} , i per tant el mètode seria molt més segur.

Tota l'exposició d'aquest tema esta basada en el llibre: *Códigos secretos*, de Andrea Sgamo, Ed. Pirámide SA, Madrid 1990.

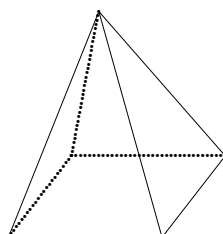
2.16 La característica d'Euler. La fórmula de Pick

Hi ha un resultat d'Euler, provat el 1758, que se sol incloure a tots els llibres elementals de matemàtiques ja que és molt bàsic i senzill d'enunciar. Aquest resultat l'anomenarem en aquestes notes teorema d'Euler i ens diu que si considerem un políedre (amb unes certes propietats que especificarem tot seguit) i denotem per

c , el número de cares que té,
 a , el número d'arestes que té,
 v , el número de vèrtexs que té,

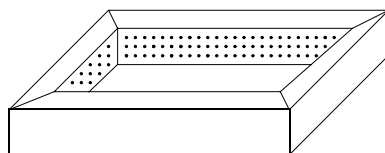
aleshores $c - a + v = 2$.

Per exemple, si prenem la piràmide següent



$c = 5$, $a = 8$, $v = 5$, i per tant $c - a + v = 5 - 8 + 5 = 2$, tal com diu la fórmula d'Euler.

En canvi, si prenem la figura



$c = 16$, $a = 32$, $v = 16$ i per tant $c - a + v = 16 - 32 + 16 = 0$.

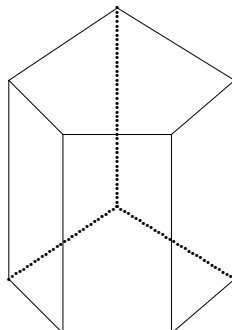
Anem, doncs, en primer lloc, a fixar el tipus de políedres que considerarem i, en segon lloc, a veure per què per a aquests políedres es compleix la fórmula

$$c - a + v = 2.$$

Normalment, donat un políedre P , el nombre $c - a + v$ s'anomena la característica d'Euler de P i es denota per $\chi(P)$. Així, en altres paraules, veurem per què $\chi(P) = 2$ sempre que P sigui un políedre amb les propietats següents:

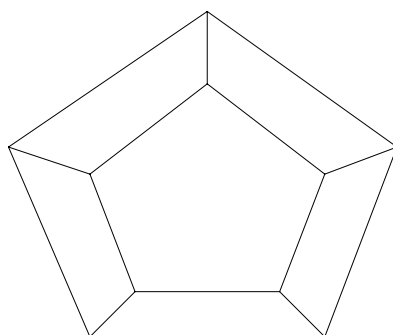
1. El políedre és tal que si les cares fossin de goma i el poguéssim inflar es tornaria com una pilota. Tècnicament es diu que és un políedre homeomorf a una esfera. Observeu que el segon políedre un cop inflat es convertiria en un "dònut" en lloc d'una pilota.
2. Cada una de les cares del políedre són polígons sense forats: és a dir, la vora del polígon és una única corba tancada.
3. Cada aresta és comuna a només dues cares.

Seguirem les idees de la demostració que va donar Cauchy a 1813, per a un políedre concret. Pendrem un prisma pentagonal



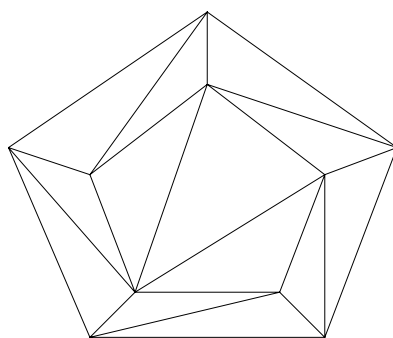
Pas 1

Traiem una cara, per exemple la tapa superior. La figura resultant hauria de complir que $c - a + v = 1$ (n'hem tret una cara). Representem el resultat aplanat com la figura següent (això es pot fer pel fet que P compleix la propietat 1).



Pas 2

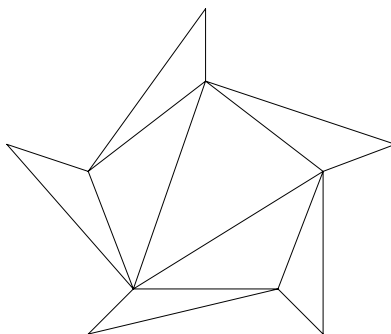
Triangulem totes les cares sense afegir-hi cap vèrtex nou. Observeu que si es triangula qualsevol polígon, sense afegir-hi vèrtexs, un polígon de k costats queda dividit en $k - 2$ triangles (augmentant $k - 3$ cares), afegint 0 vèrtexs i $k - 3$ arestes (aquí s'usa la propietat 2). Per tant, el nombre total $c - a + v$ no variarà.



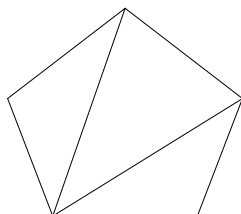
Pas 3

Ara anem eliminant triangles de la figura, prenent-los de la seva vora. Observem que podem eliminar dos tipus de triangles.

- Eliminem una aresta, i un triangle desapareix. En aquest cas, cada eliminació esborra una cara i una aresta; per tant, $c - a + v$ no varia. A la figura veiem com queda el nostre polígon aplanat i triangularitzat un cop hem eliminat cinc d'aquests triangles



- Eliminem dues arestes, i el triangle desapareix. En aquest cas cada triangle eliminat esborra una cara, dues arestes i un vèrtex. De nou $c - a + v$ no varia. La figura anterior, després de cinc eliminacions, queda com la figura següent:

**Pas 4**

Un cop fetes les eliminacions, queda un sol triangle (en aquest cas ens faltaria fer dues eliminacions). Per a aquest triangle final, $c = 1$, $a = 3$, $v = 3$ i per tant $c - a + v = 1$ com volíem veure. Per tant, hem vist per què el teorema d'Euler que ens assegura que $\chi(P) = 2$ és cert per als prismes que considerem.

Aquesta exposició està basada en el llibre *Meu Professor de Matemática*, d'E. Lages Lima, Coleção do Professor de Matemática, Soc. Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1991.

La fórmula de Pick

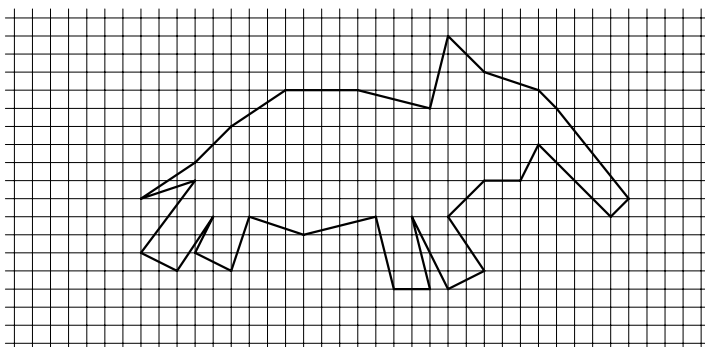
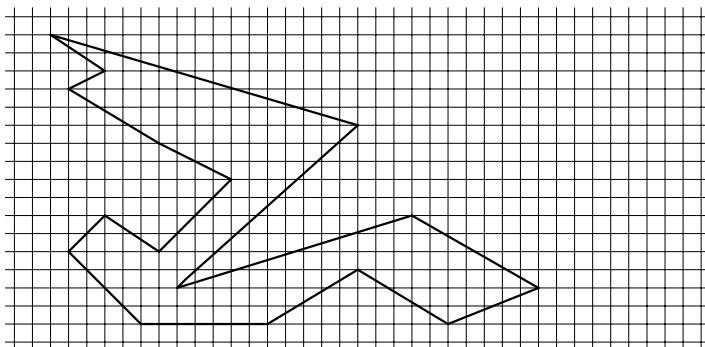
Acabarem aquesta secció amb un resultat curiós. Aquest resultat, provat pel matemàtic txec G. Pick el 1899, i conegut amb el nom de fórmula de Pick, ens proporciona una manera útil per a calcular àrees de polígons P amb vèrtexs en una quadrícula i per als quals la seva vora és una única corba tancada. El seu enunciat recorda en certa manera la fórmula de la característica d'Euler.

Sigui P un d'aquests polígons. Aleshores la fórmula de Pick ens diu que l'àrea que envolta, $A(P)$ es pot calcular com

$$A(P) = \frac{a(P)}{2} + c(P) - 1,$$

on $a(P)$ és el número de punts de la quadrícula que són a la vora de P , i $c(P)$ és el número de punts de la quadrícula que són a l'interior de P .

Vegeu dues figures per a les quals la fórmula es pot aplicar. Per exemple, a la figura inferior, $a(P) = 42$, $c(P) = 146$, i per tant $A(P) = 21 + 146 - 1 = 166$.



Intenteu fer una demostració d'aquesta fórmula basada en una triangularització de P i en el fet que un triangle ple, tal que només té com a punts de la quadrícula els vèrtexs, té sempre àrea $1/2$.

2.17 La llei de Titius-Bode

L'objectiu d'aquesta secció és presentar la llei coneguda com llei límit de Titius-Bode.

Hem consultat el llibre *Els amants de l'astronomia* de C.A. Ronan, Editorial Blume 1982 i l'article dels professors de la Universitat Autònoma Jaume Llibre i Conxita Pinyol, "A gravitational approach to the Titius-Bode law", *The Astronomical Journal* 93 (1987), 1272-1279.

Introduïm en primer lloc la llei de Titius-Bode.

El 1756, el científic alemany Johann Daniel Titius va establir una relació que ens dona la distància dels planetes del nostre sistema al Sol. Només ho va observar com una nota en un peu de pàgina d'un llibre que havia traduït. Va ser Johann Elert Bode qui el 1772 va difondre més àmpliament el que avui en dia es coneix com la llei de Titius-Bode.

Per aquella època només es coneixien Mercuri, Venus, la Terra, Mart, Júpiter i Saturn. El fenomen que Titius va observar és que si considerem els números següents (observeu, que tret del 0, cadascun és el doble de l'anterior)

0, 0.3, 0.6, 1.2, 2.4, 4.8, 9.6

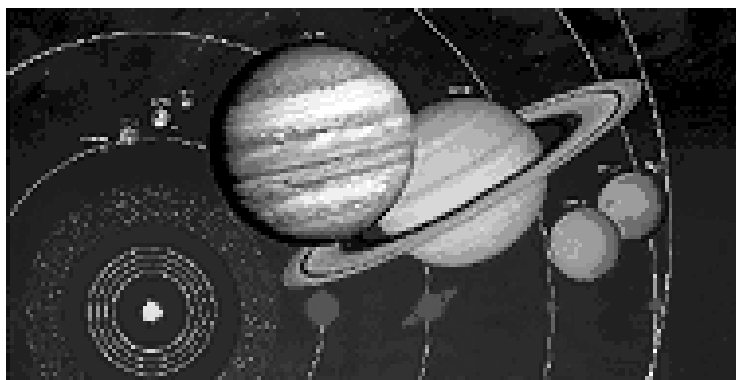
i els sumem 0.4, obtenim

0.4, 0.7, 1.0, 1.6, 2.8, 5.2, 10.0

que són aproximadament les distàncies mitjanes¹⁰, en unitats astronòmiques¹¹, dels planetes al Sol, excepte pel que fa al 2.8 (vegeu la taula següent).

Mercuri	Venus	La Terra	Mart	Júpiter	Saturn
0.39	0.72	1.00	1.52	5.20	9.55

Distàncies mitjanes al Sol observades.



Sistema Solar.

Els astrònoms d'aquella època van trobar misteriosa la gran concordança dels números obtinguts matemàticament i les distàncies reals dels planetes al Sol, excepte pel que fa al 2.8.

¹⁰Les òrbites dels planetes són aproximadament el·lipses, i la distància mitjana d'un planeta al Sol pot pensar-se com el semieix major d'aquestes el·lipses.

¹¹En unitats astronòmiques (u.a.) la distància mitjana de la Terra al Sol es 1. Una u.a. és aproximadament 150 milions de km.

Quan William Herschel va descobrir Urà el 1781, la llei de Titius-Bode va semblar confirmar-se, ja que la seva distància mitjana al Sol és 19.18 u.a., valor proper al que es dedueix per la regla (19.6). Per això el 1800 van organitzar una recerca del *planeta perdut*. Durant un any van estar buscant algun planeta a una distància mitjana aproximada de 2.8 u.a. però sense èxit, fins que de manera independent i accidentalment, l'1 de gener de 1801, un astrònom sicilià, Guiseppe Piazzi, va descobrir el primer planeta menor. Aquest cos es va batejar amb el nom de Ceres i és situat a una distància mitjana de 2.76 u.a. (!). El 1807 ja s'havien localitzat quatre planetes petits. Avui en dia es coneix l'òrbita de milers d'aquests planetes, i el conjunt que formen s'anomena *cinturó d'asteroides*.

Quan Le Verrier va emprendre la recerca d'un nou planeta per a explicar les anomalies observades a l'òrbita d'Urà, va utilitzar la llei de Titius-Bode per a calcular la seva distància aproximada, que havia de ser de 38.8 u.a. No obstant això, quan va aparèixer Neptú,¹² va resultar estar molt més a prop, a 30.05 u.a., de manera que la llei sembla deixar d'aplicar-se més enllà d'Urà. Més endavant comentarem una possible explicació d'aquest fet. Plutó, descobert el 1930, en canvi, es mou a una distància mitjana de 39.52 u.a. del Sol, que sí que s'aproxima a 38.8.

Si expressem amb una fórmula la successió de números obtinguda per Titius, tenim

$$d_k = 0.4 + 0.3 \times 2^k.$$

Aquesta fórmula s'ha d'entendre de la manera següent: El número d_k obtingut en substituir k a l'expressió de la dreta representa la distància mitjana d'un planeta al Sol, amb la relació següent: $k = -\infty, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ correspon, respectivament, a Mercuri, Venus, la Terra, Mart, asteroides, Júpiter, Saturn, Urà i Plutó. La distància al Sol del planeta Neptú no figura a la successió de números donada per la llei de Titius-Bode.

	k	d_k	Dist. mitjana observada
Mercuri	$-\infty$	0.4	0.39
Venus	0	0.7	0.72
La Terra	1	1.0	1.00
Mart	2	1.6	1.52
Asteroides	3	2.8	2.2 a 3.3
Júpiter	4	5.2	5.20
Saturn	5	10.0	9.55
Urà	6	19.6	19.18
Neptú			30.05
Plutó	7	38.8	39.52

Taula 1.

La llei límit de Titius-Bode és menys general que la llei de Titius-Bode. Aquesta afirma que si prenem dos planetes consecutius del sistema solar, bastant allunyats del Sol, aleshores la distància mitjana al Sol del més allunyat és aproximadament el doble de la distància mitjana al Sol del més proper.

¹²El descobriment de Neptú el 23 de setembre de 1846 va ser un dels grans èxits de la matemàtica, ja que la seva posició va ser predita teòricament per Urbain Jean Joseph Le Verrier i confirmada per Johan Gottfried Galle, de l'observatori de Berlín, després de només una hora de recerca i només a un grau de distància del punt predit teòricament.

Clarament, si la llei de Titius-Bode és certa, també ho serà la llei límit, ja que si prenem dos planetes consecutius del sistema solar, prou allunyats del Sol, aleshores (i ja que k és gran)

$$\frac{d_{k+1}}{d_k} = \frac{0.4 + 0.3 \times 2^{k+1}}{0.4 + 0.3 \times 2^k} = \frac{\frac{0.4}{2^k} + 0.3 \times 2}{\frac{0.4}{2^k} + 0.3} \approx \frac{0.3 \times 2}{0.3} = 2.$$

Per tant, si k és gran, $d_{k+1} \approx 2d_k$ (per exemple, si $k = 5$, tenim que $d_{k+1} \approx 1.96d_k$).

Si usem les distàncies mitjanes observades donades a la taula 1, obtenim els resultats següents (no tenim en compte Neptú)

$$\frac{0.72}{0.39} \approx 1.85, \frac{1.00}{0.72} \approx 1.39, \frac{1.52}{1.00} \approx 1.52, \frac{2.90}{1.52} \approx 1.91, \frac{5.20}{2.90} \approx 1.79, \frac{9.55}{5.20} \approx 1.84, \frac{19.18}{9.55} \approx 2.01, \frac{39.52}{19.18} \approx 2.06.$$

Per tant, tenim la successió 1.85, 1.39, 1.52, 1.91, 1.79, 1.84, 2.01, 2.06, que corrobora les afirmacions de la llei límit de Titius-Bode (si la distància mitjana d'un planeta al Sol fos exactament el doble que la de l'anterior, els elements d'aquesta successió foren tots el número 2).

Per donar una explicació matemàtica de la llei, necessitem tenir dues coses: un model teòric aproximat del sistema solar i unes lleis de moviment que ens permetin decidir a partir de una posició dels planetes i el Sol en un instant quina serà la seva posició després d'un cert temps. La formulació del model teòric depèn essencialment del problema concret a estudiar. Normalment és una simplificació de la realitat. Deixarem aquesta part per al final d'aquesta secció.



Saturn.

La llei que ens permet predir el moviment dels cossos és la coneguda amb el nom de *llei de la gravitació* i va ser formulada pel físic i matemàtic Isaac Newton (1642-1727). Aquesta llei ens diu que dos punts materials qualssevol s'atreuen mútuament amb una força directament proporcional al producte de les seves masses i inversament proporcional al quadrat de la distància entre ells. Si ho expressem con una fórmula, tenim que la força F entre dos cossos de masses m i M , que estan a distància d és

$$F = G \frac{mM}{d^2},$$

on G es una constant ($G = 6.67 \times 10^{-8}$ dines·cm² · g⁻²).

Aquesta fórmula ens permet mesurar la força que exerceix la Terra sobre cossos tan variats com els éssers humans o com la Lluna.

Així, com la massa de la Terra és $M = 5.98 \times 10^{27}$ g, la força que exerceix la Terra sobre una massa $m = 100$ Kg situada sobre la superfície terrestre (és a dir, a $(40 \times 10^6)/(2\pi)$ m del centre d'aquesta) és de

$$6.67 \times 10^{-8} \frac{(100 \times 10^3)(5.98 \times 10^{27})}{((4000 \times 10^6)/2\pi)^2} = 98416241 \text{ dines},$$

que en unitats més usals és d'uns 100 kp, i és el que anomenem *pes* de l'objecte de massa m a la Terra.¹³ Com la distància de la Lluna al centre de la Terra és aproximadament seixanta

¹³Aquest mateix objecte a la Lluna pesaria unes sis vegades menys (és a dir, la Lluna l'atrauria amb una força 6.064 vegades menor que la Terra), ja que la massa de la Lluna és de 7.35×10^{25} g i el seu radi mitjà de 1.738×10^6 m.

cops el radi de la Terra, i la massa de la Lluna és de 7.35×10^{25} g, tenim que la força amb què la Terra atreu el seu satèl·lit és de 20.09×10^{24} dines.

De la llei de la gravitació de Newton se'n poden deduir les següents propietats sobre el moviment dels planetes al voltant del Sol. Aquestes són les lleis de Kepler (1571-1630):

- (1) Els planetes descriuen el·lipses al voltant del Sol, estant aquest situat en un dels seus focus.
- (2) Les àrees escombrades pel vector posició d'un planeta respecte del Sol són iguals en temps iguals.
- (3) El quadrat del període de revolució d'un planeta és proporcional al cub del semieix major de l'el·lipse que aquest descriu.



Un segell hongarès dedicat a Kepler.

En realitat, les lleis de Kepler són anteriors a la formulació de Newton de la llei de gravitació. És més, Newton va deduir la llei de la gravitació a partir de les lleis de Kepler. Aquestes lleis van ser obtingudes per Kepler després del redescobriment¹⁴ de Copèrnic (1473-1543) del fet que la Terra girava al voltant del Sol i de les meticuloses mesures sobre la posició d'uns quants planetes realitzades per Tycho Brahe (1546-1601) (aquest va realitzar aquestes mesures sense telescopi i amb una precisió de dos minuts d'arc).

Una cop es coneixen totes les forces que actuen sobre un cos en moviment, ja es pot determinar mitjançant una relació matemàtica quina serà la seva trajectòria futura. Així, a partir de la llei de gravitació ja podem predir, almenys teòricament, el moviment futur dels cossos espacials.

Vegem ara el model simplificat del sistema solar que considerarem. Aquest estarà format pel Sol, dos planetes girant al voltant del Sol i el centre de masses (c.d.m.) de la Galàxia. Suposarem, a més, que les òrbites dels dos planetes són en un mateix pla i que giren en el mateix sentit.

Aquests tipus de problemes són coneguts a mecànica celest amb el nom de problemes de quatre cossos (en aquest cas, el c.d.m. de la Galàxia, el Sol i els dos planetes). A partir de la llei de la gravitació es coneixen les equacions que regiran el moviment d'aquests quatre cossos, però no és coneguda la solució d'aquestes equacions. Per tant, per a tenir una idea de com és el moviment dels quatre cossos, necessitarem encara més simplificacions.

El camí usual és suposar que tres d'aquests cossos es mouen d'una manera preestablerta i el quart (que es considera que no afecta el moviment dels altres tres), seguint la llei de Newton de la gravitació. Aquesta manera preestablerta de moure's serà al més semblant possible al moviment real observat.

En el nostre cas, suposarem que el c.d.m. del Sol-planeta interior es mou en una òrbita circular al voltant del c.d.m. de la Galàxia, i que el Sol i el planeta interior es mouen també

¹⁴Ja alguns astrònoms grecs, com Aristarc de Samos (310-230 a.C.), creien que era la Terra la que feia voltes al Sol.

en òrbites circulars al voltant del seu centre de masses. El pla descrit pel c.d.m. del Sol-planeta interior és aproximadament el pla galàctic, i aquest està inclinat un angle d'uns 60 graus respecte al pla que conté l'òrbita del Sol i el planeta interior (aproximadament, el pla de l'eclíptica).

Després d'un estudi detallat de les equacions diferencials corresponents a aquest últim model, s'obté una possible explicació del per què es compleix la llei límit de Titius-Bode: *D'entre totes les trajectòries tancades que podria seguir el planeta exterior, se'n troba una família d'aquestes entre les quals la més estable¹⁵ correspon a una òrbita aproximadament circular i amb un radi proper a uns $3^{\frac{2}{3}} \approx 2.08$ cops el radi de l'òrbita circular del planeta interior.*

Observem que en aquest model s'ha considerat que el planeta exterior no influeix en el moviment dels altres tres cossos. Això mai no és cert, però és raonable suposar-ho si la seva massa és bastant més petita que la d'aquests. Si prenem com a referència la massa de la Terra (és a dir, aquesta massa igual a 1) las masses de Júpiter, Saturn, Urà, Neptú i Plutó són respectivament 317.8, 95.1, 14.5, 17.2, 0.1. Per tant, és raonable que el model matemàtic simplificat estudiat modeli la realitat en considerar Júpiter i Saturn, o Saturn i Urà, però no és raonable per a Urà i Neptú (la massa de Neptú és més gran que la d'Urà). Aquesta és, doncs, una possible explicació de per què la llei de Titius-Bode no s'aplica a Neptú.

Per a acabar, comentarem que la llei límit de Titius-Bode es formula de vegades en termes dels períodes de translació dels planetes al voltant del Sol (no s'inclouen en aquest cas els asteroides). La llei límit pot enunciar-se dient que el període de translació d'un planeta al voltant del Sol és aproximadament el triple que el del planeta anterior. Així, per exemple, (si no tenim en compte Neptú) sabem que els períodes dels planetes Júpiter, Saturn, Urà i Plutó són respectivament (en anys terrestres) 11.86, 29.46, 84.02 i 247.70. L'equivalència entre aquesta formulació i l'explicada anteriorment ens la dóna la tercera llei de Kepler.

¹⁵Podem entendre el fet que una trajectòria és la més estable, com també el fet que aquesta trajectòria és la que és més probable que segueixi existint encara que el model que tinguem sofreixi petits canvis. No oblidem que hem estudiat un model aproximat del sistema solar real, i que creiem que el model real és proper a aquest.

2.18 Les lleis de Mendel

El treball de Johann Gregor Mendel (1822-1884), publicat el 1866, en què estudiava com es transmetien diferents característiques de les plantes de pèsol a les generacions successives després de diversos entrecreuaments, va ser molt valuós per a la ciència des de molts punts de vista:

- En part, el seu èxit va ser degut al bon disseny dels seus experiments i a l'enfocament analític dels resultats.
- Va fer proves durant vuit anys. Això ens demostra que la pressa no és una bona aliada de la ciència.
- Un dels biòlegs més importants de l'època, Karl Nägeli, li va dir que els seus resultats no tenien realment valor científic. Això ens mostra que, en qualsevol moment, una determinada persona pot fer una aportació important i aquesta pot no ser valorada.



No va ser fins el 1900 (setze anys després de la seva mort) que Hugo De Vries va retrobar el seu escrit i el va fer conèixer. Els seus resultats es coneixen actualment com a “lleis de l’herència de Mendel”. Abans de començar a explicar les seves lleis i donar alguns exemples ben coneguts de les seves implicacions, volem comentar que quan es van formular no es coneixia en absolut com es transmetien els caràcters hereditaris d’una generació a la següent. Mendel va deduir els seus resultats a partir de l’observació i el recull de dades. En altres paraules, avui diríem que va obtenir els seus resultats fent anàlisis estadístiques de dades experimentals. Actualment, hi ha una explicació de les lleis de Mendel basada en la teoria cromosòmica de l’herència.

Començarem amb l’exemple més típic, ja considerat per Mendel. Entre altres característiques, la superfície dels pèsols pot ser llisa o rugosa. Aquest fet està controlat per un gen que presenta dos al·lels¹⁶. Aquests dos al·lels són L , que porta la informació per a la superfície llisa, i l , que porta la informació per a la superfície rugosa. Així, hi ha tres tipus de llavors de pèsol (tenint en compte només el caràcter de ser llisos o rugosos), que són els següents:

- Pèsols amb dos al·lels LL que són llisos.
- Pèsols amb dos al·lels Ll que són llisos.
- Pèsols amb dos al·lels ll que són rugosos.

Com s’observa de la classificació anterior, un pèsol que té un al·lel llis (L) sempre és llis. Per aquest motiu es diu que ser llis és una característica dominant i per conveni es denota amb una lletra majúscula. Tanmateix, l’única manera de ser rugós és tenir els dos al·lels de tipus rugós ll . Es diu que ser rugós és una característica recessiva.

Ara estem en condicions d’enunciar la primera llei de Mendel:

¹⁶ Al·lel és cada una de les possibles variacions en la informació que té un gen.

1a llei. Quan s'encreuen¹⁷ dues races pures diferents¹⁸ (és a dir, pèsols que tenen dos al·lels LL i pèsols que tenen dos al·lels ll) tots els descendents són del mateix tipus Ll . Com que L és un caràcter dominant, tots els descendents es veuen llisos.

2a llei. Quan s'encreuen dos descendents de l'encreuament de dues races pures (és a dir, pèsols amb al·lels Ll), s'obtenen descendents de la forma LL , Ll i ll amb proporcions $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ i $\frac{1}{4}$ respectivament. Aquests descendents són la segona generació de l'entrecreuament de dues races pures. A més, el seu aspecte és $\frac{3}{4}$ de llisos i $\frac{1}{4}$ de rugosos.

La tercera llei fa referència a la primera i segona generacions quan s'entrecreuen races pures amb dos caràcters diferents. Per exemple, pèsols grocs llisos $LLGG$, amb ambdós caràcters dominants, amb pèsols verds rugosos $llgg$, amb ambdós caràcters recessius.

3a llei. Quan s'encreuen races pures amb dos caràcters dominants independents $LLGG$ amb races pures amb dos caràcters recessius $llgg$ independents, aleshores els dos caràcters es combinen d'una manera independent. Més concretament:

- (1) Tots els descendents de la primera generació són del mateix tipus $LlGg$.
- (2) Quan s'encreuen dos descendents de la primera generació s'obtenen descendents de la forma $LLGG$, $LlGG$, $LLGg$, $LlGg$, $LLgg$, $Llgg$, $llGG$, $llGg$ i $llgg$ amb proporcions $\frac{1}{16}$, $\frac{2}{16}$, $\frac{2}{16}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{2}{16}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{2}{16}$ i $\frac{1}{16}$ respectivament. L'aspecte d'aquests és groc llis, verd llis, groc rugós i verd rugós, amb proporcions $\frac{9}{16}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{3}{16}$ i $\frac{1}{16}$ respectivament.

Noteu que a la segona generació s'observen combinacions diferents a les paternes.

A continuació veurem com es poden interpretar les lleis de Mendel a partir del producte cartesià de conjunts, que recordem que es defineix com

$$A \times B = \{(a, b) \text{ tals que } a \in A, b \in B\}.$$

Considerem el conjunt $\{L, l\} \times \{L, l\} = \{(L, L), (L, l), (l, L), (l, l)\}$, i el conjunt $\{L, l\} \times \{L, l\} = \{(L, L), (L, l), (l, L), (l, l)\}$. Observeu que els resultats dels productes coincideixen amb les proporcions que diuen les dues primeres lleis de Mendel, si no tenim en compte l'ordre de les lletres.

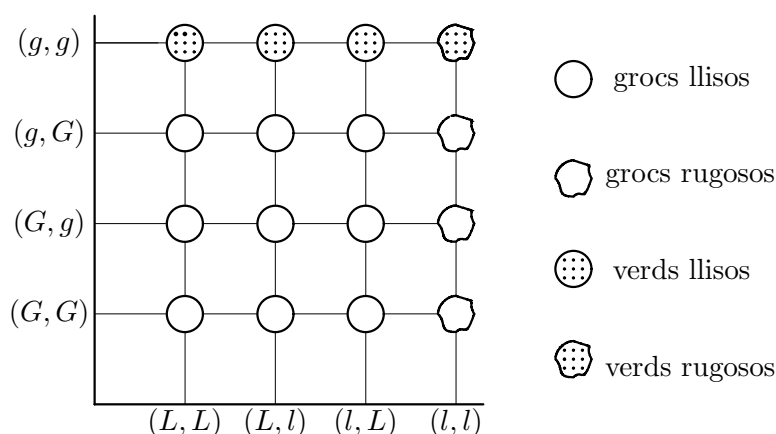
Pel que fa a la tercera llei de Mendel, si considerem cada caràcter per separat, tenim que tots els elements de

$$\begin{aligned} & (\{L, l\} \times \{L, l\}) \times (\{G, g\} \times \{G, g\}) = \\ & = \{(L, L), (L, l), (l, L), (l, l)\} \times \{(G, G), (G, g), (g, G), (g, g)\} = \\ & = \{(L, L, G, G), (L, L, G, g), (L, L, g, G), (L, L, g, g), \\ & \quad (L, l, G, G), (L, l, G, g), (L, l, g, G), (L, l, g, g), \\ & \quad (l, L, G, G), (l, L, G, g), (l, L, g, G), (l, L, g, g), \\ & \quad (l, l, G, G), (l, l, G, g), (l, l, g, G), (l, l, g, g)\}, \end{aligned}$$

que són, si no tenim en compte de nou l'ordre, els resultats predits per la 3a llei de Mendel; vegeu també la taula 1.

¹⁷Cada parell d'al·lels se separa durant la formació dels gàmetes. Quan dos gàmetes (cèl·lules sexuals) s'uneixen en la fecundació, la descendència rep un al·lel de cada parell, un procedent del pare i l'altre de la mare.

¹⁸Un individu és raça pura o homozigot per a un determinat caràcter si presenta els dos al·lels iguals.



Taula 1. Tercera llei de Mendel.

Aquesta manera conjuntista d'interpretar les lleis de Mendel ens permet de forma sistemàtica veure què passaria, per exemple, si estudiem l'entrecreuament de races pures que difereixen en tres caràcters independents. Si anomenem, per exemple x , X els al·lels recessiu i dominant, respectivament, d'un nou caràcter, aleshores les proporcions de la segona generació es calcularien fent el producte

$$(\{L, l\} \times \{L, l\}) \times (\{G, g\} \times \{G, g\}) \times (\{X, x\} \times \{X, x\}).$$

Obtindríem els pèsols amb aspectes LGX , LGx , LgX , lGX , lgX , lGx , Lgx i lgx , amb proporcions $\frac{27}{64}$, $\frac{9}{64}$, $\frac{9}{64}$, $\frac{9}{64}$, $\frac{3}{64}$, $\frac{3}{64}$, $\frac{3}{64}$ i $\frac{1}{64}$ respectivament.

Voldríem comentar també dues coses: la primera és que no tots els caràcters són independents i que, per tant, la tercera llei de Mendel no sempre es pot aplicar. La segona és que no sempre hi ha només dos al·lels per a cada caràcter, i a més, en cas d'haver-n'hi només dos, no tenen per què ser un dominant i l'altre recessiu. De vegades hi ha al·lels que es manifesten els dos igual i s'anomenen codominants. Acabarem amb un exemple: la sang humana que té aquests dos caràcters independents:

- (1) El grup sanguini, que presenta els al·lels següents: A , B i 0 . D'aquests A i B dominen sobre 0 , però entre ells són codominants (és a dir, es manifesten tots dos).
- (2) El factor Rh , que té dos al·lels $+$ i $-$, essent el $+$ dominant.

A partir d'aquestes dades, podem aplicar les lleis de Mendel per a tenir informació del tipus de sang del fill a partir de la sang dels pares. Així, un pare del grup AB^+ i una mare del grup 0^- , que han de tenir al·lels $AB++$ o $AB+-$ (el pare) i $00--$ la mare, tindran fills

$$(\{A, B\} \times \{0, 0\}) \times (\{+, +\} \times \{-, -\})$$

o bé

$$(\{A, B\} \times \{0, 0\}) \times (\{+, -\} \times \{-, -\}),$$

és a dir que la seva sang serà d'un dels tipus següents: A^+ , B^+ , A^- o B^- .

Les lleis de Mendel han estat també usades per a fer proves de paternitat. Per exemple si una parella té fills del grup AB i 0 , forçosament els seus pares han de tenir sang dels tipus: un A i l'altre B .

Per a escriure aquesta secció s'ha consultat el llibre *Invitación a la biología*, de H. Curtis i N.S. Barnes, Ed. Panamericana, 1995.

2.19 Iteració d'aplicacions. Caos

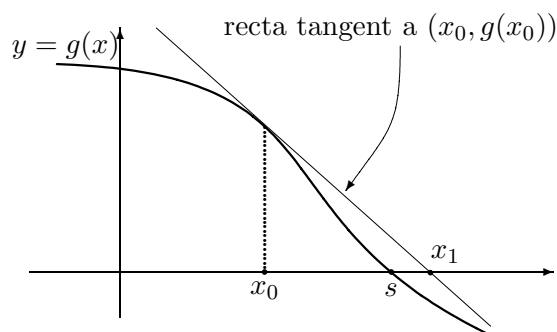
Donada una aplicació $f : X \rightarrow X$ i un punt $x_0 \in X$, s'anomena iteració de f amb inici a x_0 a la successió definida per la recurrència

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n), \\ x_0 \in X. \end{cases} \quad (*)$$

La iteració d'aplicacions té utilitat en diversos camps: resolució d'equacions, física, economia, dinàmica de poblacions, ... L'objectiu general sol ser calcular cap a on s'acosta la successió $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ en funció del valor inicial x_0 . En aquesta secció estudiarem uns quants exemples de (*), variant f , x_0 i l'espai X .

El mètode de Newton

Una de les maneres més efectives de resoldre equacions $g(x) = 0$ ens la dona el mètode de Newton. La idea d'aquest mètode és molt senzilla. Anomenem s una solució de $g(x) = 0$. Aleshores, donat $x_0 \in \mathbb{R}$, volem calcular un x_1 més proper a s que x_0 . La figura següent ens il·lustra la idea geomètrica.



Per a calcular x_1 , busquem la recta tangent a $y = g(x)$ que passa per $(x_0, g(x_0))$. Aquesta recta és

$$y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0).$$

El valor de x_1 es calcula buscant el valor de x que fa zero l'expressió anterior. Tenim que

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)}.$$

En general, el mètode de Newton està donat per

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}, \\ x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

i és molt usat per a resoldre equacions. Es pot veure que per a x_0 molt proper a s i per a moltes g la successió $x_0, x_1, x_2, \dots$ convergeix cap a s i ho fa de manera que d'un pas al següent, el nombre de xifres decimals correctes de s que anem trobant es dobla aproximadament.

Per exemple, si volem trobar una solució de

$$\cos x - x = 0$$

i considerem

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n}{-\sin x_n - 1} = \frac{\cos x_n + x_n \sin x_n}{1 + \sin x_n} \\ x_0 = 0.5 \end{cases}$$

tenim que

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.7552\dots, & x_2 &= 0.739141\dots, \\ x_3 &= 0.7390851339\dots, & x_4 &\simeq x_5 \simeq s = 0.7390851332\dots \end{aligned}$$

Una aplicació caòtica

Un dels exemples més senzills per als quals els iterats d'una aplicació es comporten de manera quasi aleatòria és el donat per l'aplicació logística¹⁹

$$\begin{cases} x_{n+1} = Kx_n(1 - x_n) \\ x_0 \in [0, 1]. \end{cases}$$

Aquesta aplicació depèn d'un paràmetre $K \in \mathbb{R}$. Es pot veure que presenta un fenomen anomenat “caos” per a certs valors del paràmetre. Queda fora de l'abast d'aquest llibre donar una definició concreta del que és el caos i veure per què es dona per a l'aplicació logística. Només comentarem que una característica que presenten tots els sistemes caòtics és el que s'anomena *dependència sensible respecte a les condicions inicials*. Aquesta propietat ens diu que petits canvis en la condició inicial tenen una repercussió gran en els valors donats per la iteració. De fet, aquesta propietat s'ha popularitzat amb el nom d'*efecte papallona*. Aquest nom prové del fet que en l'estudi dels sistemes meteorològics es presenta la dependència sensible respecte a les condicions inicials i es diu (exagerant) que una papallona que mou les ales a l'Amazònia (i, per tant, canvia una mica l'estat inicial de l'atmosfera) podria provocar un huracà a l'altre cap del món.

Per a acabar proposem un experiment musical que ens pot servir per a entendre el que és el caos. Prepareu un programa d'ordinador que faci el següent:

Donat un valor de $K \in [0, 4]$ i un valor de $x_0 \in [0, 1]$, calculi la successió

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$$

fins a un cert n prou gran (200 o 300 per exemple). Al mateix temps que es va calculant cada x_i , fem que se senti durant $\frac{1}{2}$ segon una nota musical amb la regla següent:

Si $x_i \in [0, \frac{1}{7})$, aleshores la nota és do

Si $x_i \in [\frac{1}{7}, \frac{2}{7})$, aleshores la nota és re

Si $x_i \in [\frac{2}{7}, \frac{3}{7})$, aleshores la nota és mi

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

Si $x_i \in [\frac{6}{7}, \frac{7}{7}]$, aleshores la nota és si

¹⁹Aquesta aplicació ens dona també un model d'evolució de la població d'una espècie; vegeu, per exemple, el llibre de J. D. Murray, *Mathematical Biology*, Springer, 1993.

Si experimenteu amb aquest programa, observareu que per a valors de K petits (< 3) obtenim, en augmentar n , una melodia monòtona. En augmentar K , la melodia que es repeteix té un període més llarg. Per a $3.83 < K < 4$, la melodia ja no segueix cap regla. Hem pogut “escollar” el caos.

Un problema obert: la conjectura $3x + 1$

Una conjectura és una afirmació de la qual no se sap si és certa o falsa, encara que hi ha indicis que pot ser certa. Presentarem una conjectura molt famosa. Aquesta conjectura té molts noms: conjectura $3x + 1$, conjectura de Collatz, de Kakutani, de Ulam, etc. Diu el següent:

Considerem l'aplicació següent de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x+1}{2}, & \text{si } x \text{ és senar,} \\ \frac{x}{2}, & \text{si } x \text{ és parell.} \end{cases}$$

Conjectura $3x + 1$. Donat un $x_0 \in \mathbb{N}$ positiu qualsevol si considerem la iteració de f amb inici x_0 , és a dir,

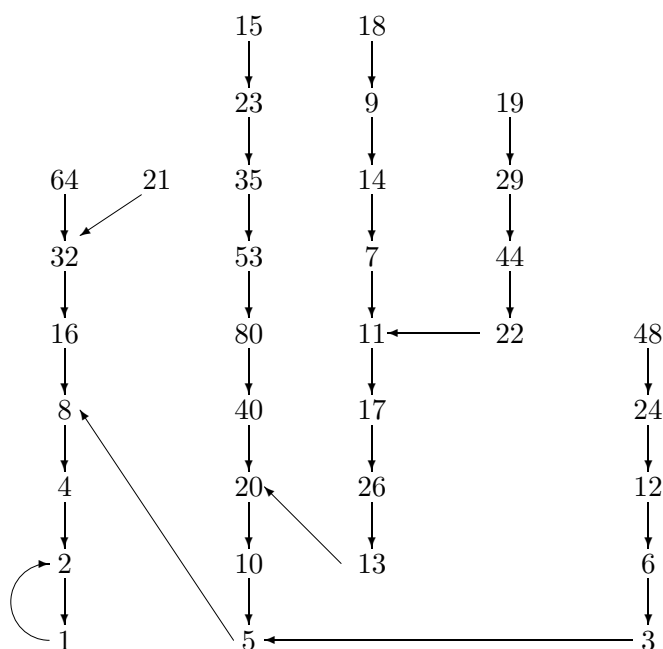
$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n), \\ x_0, \end{cases} \quad (**)$$

existeix un valor m prou gran (dependent de x_0) de manera que $x_m = 1$.

En altres paraules, independentment de x_0 , els iterats per a $(**)$ són

$$x_0, x_1, x_2, \dots, 4, 2, 1, 2, 1, 2, 1, \dots$$

La figura següent il·lustra els iterats per als valors de x_0 més petits que 25, entre d'altres.



Hi ha matemàtics a tot el món intentant saber si la *conjectura* $3x + 1$ és certa o falsa. Recentment, a l'agost del 1999 hi ha hagut un Congrés internacional a Alemanya per a discutir els avenços que s'han fet. Per exemple, se sap que és certa per a x_0 menor que $3 \times 2^{53} \simeq 2.702 \times 10^{16}$. També se sap que si existís una solució amb nombres naturals diferent de $(n, m) = (2, 1)$ per a l'equació

$$2^n = 3^m + 1,$$

aleshores la conjectura seria falsa. Una referència actual sobre el tema és el llibre de G. J. Wirsching, *The dynamical system generated by the $3n + 1$ function*, Lecture Notes in Mathematics **1681**, Springer-Verlag, Berlín, 1998. També podem consultar l'adreça

<http://mathworld.wolfram.com/CollatzProblem.html>

És fàcil veure que la *conjectura* $3x + 1$ no és certa si es considera $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. Busqueu valors de x_0 negatius per als quals la successió d'iterats no acabi fent $2, 1, 2, 1, 2, 1, \dots$

Exemples bidimensionals

Considerem la funció f de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ coneguda com funció de Lyness donada per

$$f_a(x, y) = \left(y, \frac{a + y}{x} \right),$$

amb a un paràmetre positiu.

Agafeu un $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ qualsevol i fixeu $a = 1$. Calculeu els seus iterats i trobareu una propietat curiosa. Comproveu que aquesta propietat ja no es compleix per a altres valors d' $a \in \mathbb{R}^+$.

Com a últim exemple, considerarem una aplicació del tipus anomenat Twist pertorbat. S'ha pogut demostrar que els iterats d'aquest tipus d'aplicacions presenten comportament caòtic. Considerarem

$$f_a(x, y) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} & \sin(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \\ -\sin(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} & \cos(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A l'esquerra de la figura següent representem els primers 4000 iterats prenent $(x_0, y_0) = (0.3, 0)$ i $a = 1.3$; a la dreta prenem $(x_0, y_0) = (0.8, 0)$ i $a = 1.273$. Com podeu veure, el comportament dels iterats en ambdós casos és bastant imprevisible. Aquest tipus d'aplicacions apareixen quan s'estudia el moviment dels planetes.

2.20 Models de poblacions

La dinàmica de poblacions intenta conèixer com evoluciona la població d'una o varies espècies, en passar el temps.

Considerarem, en primer lloc, el cas d'una sola espècie. Si anomenem $p(t)$ a la població a l'instant t , la llei de Malthus formulada el 1798 ens diu que el canvi de població (mesurat per la derivada de $p(t)$) és proporcional a la població que hi ha. Aquesta llei, escrita sota formulació matemàtica (que en aquest cas pren la forma d'una equació diferencial), ens diu que

$$\frac{dp(t)}{dt} = p'(t) = ap(t), \quad (*)$$

on a és una constant positiva de proporcionalitat. Si suposem que la població en un cert instant de temps t_0 és p_0 , tenim la dada

$$p(t_0) = p_0. \quad (**)$$

No és difícil comprovar que la funció

$$p(t) = p_0 e^{a(t-t_0)}$$

és solució de (*) i compleix (**). Per tant, hem assolit el nostre objectiu de predir quina serà la població per a instants de temps futurs $t > t_0$.

Anem a aplicar aquest model a un cas concret: l'evolució del nombre d'habitants de la Terra. Segons els estudis fets als EUA durant 1960-70 es va estimar que la constant de proporcionalitat per a la població humana era $a = 0.02$. Sabem que el 1965 la població del món era d'uns 3340 milions de persones. Quan podríem dir que aquesta població es doblarà?

Usant la fórmula obtinguda per a $p(t)$, obtenim que

$$p(t) = 3.34 \times 10^9 e^{0.02(t-1965)}.$$

Volem calcular t per tal que $p(t) = 6.68 \times 10^9$. Això ens porta a l'equació per a t

$$e^{0.02(t-1965)} = 2,$$

és a dir,

$$t = 1965 + \frac{\ln 2}{0.02} \simeq 1965 + 34.7 \simeq 2000.$$

Per tant, la llei de Malthus preveu (a partir de les dades del 1965) una població d'uns 6680 milions de persones a la Terra per l'any 2000. Com haureu llegit als diaris, al final de 1999 la Terra ha arribat al seu habitant 6000 milions. No gaire lluny de les previsions teòriques!

De totes maneres, el model estudiat preveu que la població de la Terra creixerà indefinidament. Encara que només sigui per problemes d'espai físic, és clar que això no pot passar.

A 1836, Verhulst va proposar un model que ja tenia en compte la saturació i la limitació dels recursos. L'expressió matemàtica del model també és una equació diferencial:

$$\frac{dp(t)}{dt} = p'(t) = ap(t) - bp^2(t), \quad (***)$$

amb a i b constants positives.

Encara que amb una mica més de dificultat que per a la llei de Malthus, també en aquest cas es pot resoldre l'equació (***) amb la condició (**). La solució és

$$p(t) = \frac{ap_0}{bp_0 + (a - bp_0)e^{-a(t-t_0)}}.$$

Un cop fixats els valors d' a , b , p_0 i t_0 , la gràfica de la funció $p(t)$ s'anomena corba logística i és un bon model per a estudiar l'evolució de moltes poblacions. Per exemple, s'ha comprovat que la corba logística s'ajusta a la població que han tingut els EUA del 1790 al 1950, amb un error de menys d'un 3%.

Quan s'intenta modelar l'evolució de dues poblacions que interactuen, la situació és molt més complexa. Només comentarem un exemple que ha esdevingut clàssic: el model de Volterra per a sistemes depredador-presa.

El biòleg italià Umberto d'Ancona, va observar que la quantitat de selacis (taurons, rajades, etc.) capturats accidentalment en un port d'Itàlia del 1914 al 1923 seguia els percentatges següents:

1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
11.9%	21.4%	22.1%	21.2%	36.4%	27.3%	16.0%	15.9%	14.8%	10.7%

Com que els selacis no són peixos comestibles, volia trobar un motiu de per què havia augmentat la seva proporció. Una diferència entre els anys amb més tant per cent de selacis podia ser el fet que s'havia produït durant aquells anys la Primera Guerra Mundial, però no trobava cap explicació convincent.

Va ser el matemàtic Vito Volterra qui va pensar a fer un model matemàtic de la situació:

- Va anomenar $p(t)$ a la quantitat de peixos comestibles, que a més eren preses dels selacis.
- Va anomenar $q(t)$ a la quantitat de selacis, que eren depredadors dels peixos comestibles.
- Va donar unes equacions diferencials semblants a les de Verhulst que donaven l'evolució de $p(t)$ i $q(t)$:

$$\begin{cases} \frac{dp(t)}{dt} = p'(t) = ap(t) - bp(t)q(t), \\ \frac{dq(t)}{dt} = q'(t) = -cq(t) + dp(t)q(t), \end{cases}$$

on a , b , c , d són constant positives.

No podem entrar aquí en un estudi del sistema d'equacions diferencials de Volterra, però sí que voldríem dir que aquest estudi li va permetre donar una explicació del fenomen observat i que avui en dia es coneix com principi de Volterra. Aquest ens diu que si en un sistema depredador-presa des de fora del sistema augmentem la quantitat d'ambdues espècies (per exemple, amb menys pesca), aleshores la proporció de depredadors creix i la de preses decreix. També va donar el principi equivalent quan disminueix la quantitat d'ambdues espècies.

Aquest principi té importants aplicacions ecològiques. Una il·lustració és la següent: Als EUA hi havia un pugó dels cítrics (molt dolent per a les collites) que era menjat per un tipus de marieta. Quan es va descobrir el DDT, es va decidir fumigar les plantacions. Si els autors de la fumigació haguessin conegut el principi de Volterra no ho haurien fet, ja que podien haver pensat el següent:

- *Les marietes són els depredadors.*
- *Els pugons són les preses.*
- *El DDT mata marietes i pugons indiscriminadament; per tant, fa l'efecte d'augmentar la "pesca".*

Per consegüent, l'efecte serà el contrari del que passa en disminuir la pesca, és a dir que els depredadors decreixeran i les preses (que són la plaga dolenta) creixeran.

L'efecte del DDT va ser desastrós, ja que va augmentar la plaga de pugons!

Tots els exemples d'aquesta secció han estat trets del llibre de M. Braun *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*, Grupo Ed. Iberoamérica, 1990.

2.21 Matemàtiques i música

Tothom ha sentit a dir que les matemàtiques i la música estan molt relacionades. Per a alguna gent aquesta relació es queda en un nivell descriptiu. Per exemple, si diem 1 al temps de durada d'una negra, aleshores tenim

NOTA	TEMPS
Rodona	4
Blanca	2
Negra	1
Corxera	$1/2$
Semicorxera	$1/4$
Fusa	$1/8$
Semifusa	$1/16$
$\vdots$	$\vdots$



Si considerem les notes amb punt, tenim que la durada d'una nota amb punt és igual a $\frac{3}{2}$ de la durada de la mateixa nota sense punt. Un altre exemple de relació podria ser el següent. Posem les notes blanques del piano i la seva separació en nombre de tons:

$$\dots \text{SI} \xleftrightarrow{\frac{1}{2}} \text{DO} \xleftrightarrow{1} \text{RE} \xleftrightarrow{1} \text{MI} \xleftrightarrow{\frac{1}{2}} \text{FA} \xleftrightarrow{1} \text{SOL} \xleftrightarrow{1} \text{LA} \xleftrightarrow{1} \text{SI} \xleftrightarrow{\frac{1}{2}} \text{DO} \xleftrightarrow{1} \text{RE} \xleftrightarrow{1} \text{MI} \dots$$

Si prenem només de DO a DO, tenim la successió de semitons: $1, 1, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, \frac{1}{2}$. Donada una nota X recordem que $X^\#$ denota la nota que té un semitò més que X , i $X^\flat$ la nota que té un semitò menys que X . Per exemple, $\text{SI}^\# = \text{DO}$, $\text{FA}^\flat = \text{MI}$, $\text{RE}^\# = \text{MI}^\flat$.

Ara, si prenem qualsevol nota i busquem les set notes següents seguint els increments de tons $1, 1, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, \frac{1}{2}$, obtindrem vuit notes (la primera igual a l'última), que sonaran de manera similar a les tecles blanques del piano, però amb una tonalitat diferent. Si prenem SOL per a començar, tenim

$$\text{SOL} \xleftrightarrow{1} \text{LA} \xleftrightarrow{1} \text{SI} \xleftrightarrow{\frac{1}{2}} \text{DO} \xleftrightarrow{1} \text{RE} \xleftrightarrow{1} \text{MI} \xleftrightarrow{1} \text{FA}^\# \xleftrightarrow{\frac{1}{2}} \text{SOL}.$$

És a dir, que tenim les notes de l'anomenada tonalitat de Sol Major.

L'objectiu d'aquesta secció és intentar aprofundir una mica més en aquesta relació entre música i matemàtiques. Més concretament, donarem dues possibles explicacions de per què la base de la música que escoltem és la divisió d'una octava en dotze intervals, és a dir, considerar les notes:

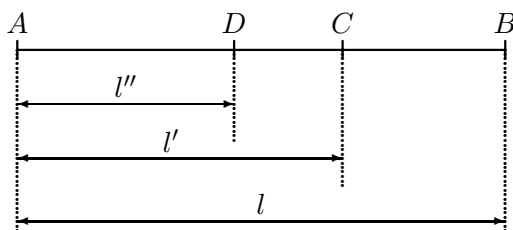
$$\text{DO}, \text{DO}^\#, \text{RE}, \text{RE}^\#, \text{MI}, \text{FA}, \text{FA}^\#, \text{SOL}, \text{SOL}^\#, \text{LA}, \text{LA}^\#, \text{SI}, \text{DO}.$$

Aquestes explicacions s'han tret del treball de Joan Girbau, professor del Departament de Matemàtiques de la UAB, "Les matemàtiques i les escales musicals", *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques* 18 (1985), 3-27.

Començarem amb unes consideracions preliminars. Identificarem un so amb la seva freqüència, és a dir, el seu nombre de vibracions per segon.

Si prenem una corda de guitarra de longitud l , aquesta emet un so de freqüència $\frac{C}{l}$, on C és una certa constant real que depèn del material de la corda.

Si ara prenem dos punts més a la corda, com a la figura



complint $\frac{l}{l'} = \frac{l'}{l''}$ observarem que si anem fent sonar la corda a l'aire, la corda de longitud l' posant el dit a C i la corda de longitud l'' posant el dit a D , consecutivament sembla que la distància musical entre el primer so i el segon coincideix amb la distància entre el segon i el tercer. És per això que quan vulguem comparar dos sons, el que farem serà dividir les seves freqüències, en lloc de restar-les.²⁰

De fet, donats dos sons u i v tals que $\frac{u}{v}$ ó $\frac{v}{u}$ és un nombre natural de la forma 2^k (és a dir, la freqüència d'una d'elles és 2^k cops la freqüència de l'altra), es diu que els dos sons corresponen a la mateixa nota, però que una és k octaves més alta que l'altra.

Donat un conjunt de sons $S \subset \mathbb{R}$, per tal de fer música, és raonable imposar que si $u \in S$, aleshores $2u$ i $\frac{u}{2}$ també pertanyen a S . Una altra condició que també seria raonable²¹ és que $3u$ i $\frac{u}{3}$ també fossin elements de S . Malauradament, no és difícil veure que si mirem quants sons hi hauria entre u i $2u$ imposant les dues condicions esmentades, veuríem que haurien de ser infinits sons (!). És per això que, encara que musicalment serien desitjables, a la pràctica és impossible compaginar les dues condicions. Les dues explicacions donades al treball citat consideren dues maneres diferents d'imposar condicions semblants a la segona condició esmentada.

Primera explicació: escales cromàtiques temperades

Considerem una nota base u . En quants intervals iguals²² hem de dividir $[u, 2u]$ per tal que $\frac{3u}{2}$ sigui al més proper possible a un dels sons que apareixen a la partició?

En altres paraules: dividim $[u, 2u]$ en m intervals iguals:

$$u < 2^{\frac{1}{m}}u < 2^{\frac{2}{m}}u < 2^{\frac{3}{m}}u < \dots < 2^{\frac{m-1}{m}}u < 2u.$$

Per a quins valors de m existeix un valor n tal que $2^{\frac{n}{m}}$ sigui una bona aproximació de $\frac{3}{2}$?

Una resposta a l'anterior qüestió és la següent: Prenem x com la solució de l'equació $2^x = \frac{3}{2}$.

Obtenim que $x = \frac{\ln \frac{3}{2}}{\ln 2} = 0.584962500721\dots$. El que hem de buscar són nombres racionals que aproximïn bé a x i considerar els seus denominadors. Ja hem abordat aquest problema a la secció 2.2. Si calculem la successió de fraccions contínues que tendeixen a x , obtenim

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \frac{24}{41}, \frac{31}{53}, \frac{179}{306}, \frac{389}{665}, \frac{9126}{15601}, \dots$$

²⁰Des d'un punt de vista més tècnic, podríem definir la distància entre dos sons de freqüències u i v com $d(u, v) := |\log(\frac{v}{u})|$. Aquesta noció es correspon amb una noció més matemàtica de distància. Per exemple, si $u = v$ aleshores $d(u, v) = 0$.

²¹Per a fixar idees, suposem que $u = 300$ vibracions per segon (v/s). Aleshores, si es compleixen les dues condicions imposades, els sons de $\dots, 100, 150, 200, 300, 400, 450, \dots v/s$ (i molts més) serien de S i tots alhora sonarien bé. Hi ha una explicació més tècnica basada en el fet que tot so de freqüència u , segons la teoria de Fourier, descompon en sons sinusoidals de freqüències $u, 2u, 3u, 4u, 5u, \dots$ i si es complissin les dues condicions, els quatre primers harmònics serien a S .

²²Iguals en el sentit de distància que hem donat. Així, per exemple, v divideix l'interval $[u, 2u]$ en dues parts iguals si $\frac{v}{u} = \frac{2u}{v}$, és a dir $v = \sqrt{2}u$.

D'aquesta successió concloem que si hem de dividir l'interval de freqüències u i $2u$ amb sons equidistants (aquesta és la definició d'escala cromàtica temperada), que tingui un so proper a $3\frac{u}{2}$, i amb un nombre no gaire gran ni gaire petit de sons, potser triaríem $m = 12$. Aquest és precisament el número d'interval·ls en què es divideix una octava per a fer música.

La divisió en dos interval·ls o en cinc interval·ls donaria música més senzilla (però diferent). La divisió en 41, 53, 306, ... donaria lloc a música molt més complexa. Per a acabar, voldríem comentar que al treball de J. Girbau en què ens basem també es donen dues aproximacions de x , que no surten en usar la tècnica de les fraccions contínues: $\frac{4}{7} = 0.571\dots$ i $\frac{17}{29} = 0.5862\dots$ que donarien lloc a altres solucions del problema.

Segona explicació: escala pitagòrica cromàtica

Un segon intent d'aconseguir que donat un so $u \in S$, també siguin a S , $3u, 9u, \dots, 3^l u, \dots$ per a tota u és el següent: Fixem un so u i imposem que siguin de S els sons següents: $u, 3u, 9u, \dots, 3^k u$ i tots els seus dobles i meitats.

A la taula següent posem quins sons estarien entre u i $2u$ en funció del valor de k que considerem. També diem quina és la distància màxima i mínima entre els sons en funció de k . Noteu que per a aquestes distàncies es compleix $\frac{3}{2} > \frac{2^2}{3} > \frac{3^2}{2^3} > \frac{2^5}{3^3} > \frac{2^8}{3^5} > \frac{3^7}{2^{11}}$.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
$3^7/2^{11}$							•	•	•	•	•
$3^2/2^3$		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
$3^9/2^{14}$									•	•	•
$3^4/2^6$				•	•	•	•	•	•	•	•
$3^{11}/2^{17}$											•
$3^6/2^9$						•	•	•	•	•	•
$3/2$	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
$3^8/2^{12}$								•	•	•	•
$3^3/2^4$			•	•	•	•	•	•	•	•	•
$3^{10}/2^{15}$										•	•
$3^5/2^7$					•	•	•	•	•	•	•
2	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
Distància mínima	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^8}{3^5}$
Distància màxima	$\frac{3}{2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^7}{2^{11}}$

Sons entre u i $2u$, ometent la u multiplicat.

Com podem observar, hi ha uns valors concrets de $k \leq 11$ per als quals els sons s'espesseixen més (la distància màxima disminueix) aquests són $k = 2, 4, 6$ i $k = 11$. De nou la divisió de $[u, 2u]$ en dotze interval·ls (correspon a $k = 11$) apareix com un cas especial. De fet, per a $k = 11$ l'escala s'uniformitza, ja que la distància màxima i la distància mínima són quasi iguals: $2^8/3^5 \simeq 1.053$ i $3^7/2^{11} \simeq 1.068$.

Comparació de les dues escales

Veurem que els sons corresponents a $k = 11$ de la secció anterior són (aproximadament) els mateixos sons que s'obtenen en considerar l'escala cromàtica temperada de dotze intervals.

Per tal de comparar les dues escales fixarem u per a fer que la nota que s'anomena LA (tercera) tingui 440 vibracions per segon.²³ A l'escala temperada això es fa prenent u (v/s del DO) per tal que $\frac{3^3}{2^4}u = 440$. A l'escala cromàtica s'ha de prendre u tal que compleixi $2^{\frac{9}{12}}u = 440$. Com es pot veure, les diferències de v/s en les dues escales són molt petites.

	E. temperada	E. cromàtica
DO	261.6	260.7
DO [#]	277.2	278.4
RE	293.7	293.3
RE [#]	311.1	313.2
MI	329.6	330
FA	349.2	347.6
FA [#]	370	371.2
SOL	392	391.1
SOL [#]	415.3	417.7
LA	440	440
LA [#]	466.2	469.9
SI	493.9	495
DO	523.2	521.5

Vibracions per segon prenent u en cada cas
per a obtenir 440 v/s pel LA

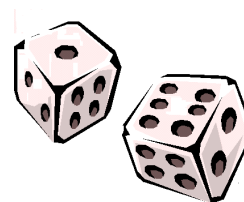
²³El primer diapasó que es va utilitzar a l'Òpera de París el 1699 donava una nota de freqüència de 404 vibracions per segon. Durant el segle XVIII va haver-hi grans diferències i es va tendir a anar elevat la freqüència del LA tercera. El 1879 es va fixar aquesta nota en 435 v/s. El 1939 es va tornar a pujar a 440 v/s. Durant alguns anys van anar convivint les 435 v/s amb les 440 v/s, encara que aquesta última xifra s'ha imposat definitivament.

2.22 Matemàtiques i finances: el descobriment d'un nou món

Jocs justos

Abans de parlar de finances repassarem la noció de joc just. Per a començar, cal dir que tots els jocs del casino (excepte el BlackJack si s'hi sap jugar bé) són –lleugerament– favorables al casino: en un sol dia passen molts jugadors; alguns guanyen, altres perden, però el casino aprofita el seu petit avantatge per a anar guanyant diners, de forma lenta però segura (en cas contrari, qui voldria instal·lar un casino?). S'explica la següent anècdota del propietari d'un casino que es deia Blanc; com sabeu tots, a la ruleta la jugada més típica és apostar que sortirà un nombre negre o un nombre vermell. Diuen que el Sr. Blanc es passejava entre les taules de la ruleta i mentre feia una rialleta murmurava “Jugueu negre, jugueu vermell, que Blanc sempre guanya”.

Des de l'altre punt de vista, un jugador al casino pot tenir molt bona sort un dia, però si insisteix i juga un dia i un altre i un altre... segur que acaba arruïnat. Un exemple extrem d'aquesta situació és la història d'un jugador japonès, el Sr. Akio Kashiwaki, que tenia fama d'anar a un casino, seure en una ruleta i estar apostant cada vegada 200 000 dòlars al mateix color fins que feia saltar la banca; sembla que mentre durava el joc anava prenent notes dels resultats com si estigués fent un estudi experimental. En l'argot, aquesta mena de jugadors se'ls anomena *balenes*. La balena japonesa Kashiwaki va anunciar al desembre del 1989 que aniria a jugar a un casino d'Atlantic City. Els encarregats del casino, preocupats, van consultar el matemàtic Sr. Jess Marcum sobre què havien de fer. De les informacions disponibles es desprèn que el matemàtic els va aconsellar que la banca mai no es retirés del joc; que a la llarga el jugador acabaria perdent i que les probabilitats de perdre del jugador anaven augmentant com més durava el joc. Els del casino varen seguir el consell; en acabar el tercer dia de joc el jugador japonès anava guanyant 5 milions de dòlars; després les coses es varen començar a anivellar i, finalment, després 5 066 jugades en 70 hores de joc, el jugador japonès es va retirar perdent més de 9 milions de dòlars. (Podeu llegir els detalls dels càlculs sobre aquesta partida a l'article de C. A. Coyle i C. Wang, *Wanna Bet? On gambling strategies that may or may not work in a casino*, The American Statistician, Maig del 1993, vol. 47, núm. 2, pp. 108-111).



Per a formalitzar la idea de l'avantatge del casino, analitzarem un joc ben senzill. Suposem que participem en un joc a cara i creu i que apostem 10 ptes. de la manera següent:

- Si surt cara, guanyem 15 ptes. (és a dir, ens tornen les 10 ptes. i 15 ptes. més)
- Si surt creu, perdem les 10 ptes.

Si la moneda no està trucada, la probabilitat de cara i de creu són la mateixa i igual a $1/2$; és a dir, si tirem molts cops la moneda, aproximadament la meitat de les vegades guanyarem i l'altra meitat perdrem. En resum, si per exemple juguem 1000 cops

$$\text{Guany} \approx 500 \times 15 = 7500 \text{ ptes.}$$

$$\text{Pèrdues} \approx 500 \times 10 = 5000 \text{ ptes.}$$

De manera que el guany total serà, aproximadament,

$$\text{Guany total} \approx 500 \times 15 - 500 \times 10 = 2500 \text{ ptes.}$$

i el guany mitjà per jugada serà

$$\text{guany mitjà per jugada} \approx \frac{2500 \text{ ptes.}}{1000 \text{ jugades}} = 2.5 \text{ ptes/jugada.}$$

Notem que

$$\text{Guany mitjà per jugada} \approx \frac{5000 \times 15 + 500 \times (-10)}{1000} = 15 \frac{1}{2} + (-10) \frac{1}{2},$$

és a dir, 15 per la probabilitat de guanyar sumat amb -10 per la probabilitat de perdre. Aquesta expressió de la dreta s'anomena ***l'esperança matemàtica*** del joc. Aquest joc que estem analitzant ens és favorable: si juguem un cop o dos, podem tenir mala sort i perdre; però si hi juguem molt, a la llarga acabarem guanyant, en mitjana 2.5 ptes. per jugada. Però si ens és favorable a nosaltres, serà desfavorable a l'altre jugador. Un joc es diu ***just*** si l'esperança del joc és 0. Per exemple, el joc a cara o creu però amb guanys 10 i -10 és un joc just: avui puc guanyar jo i demà també, però si hi juguem molt sovint, en mitjana ni jo ni el meu contrincant hi haurem guanyat ni perdut res (haurem passat l'estona!).

També és important observar que un joc injust es pot convertir en joc just fent pagar una quantitat per a participar-hi. Així, al joc del principi amb la moneda on guanyava 15 o perdia 10 podria fer pagar 2.5 ptes. per a jugar una partida. Llavors el resultat seria

$\begin{aligned} 15 - 2.5 &= 12.5 \text{ ptes. amb probabilitat } 1/2, \\ -10 - 2.5 &= -12.5 \text{ ptes. amb probabilitat } 1/2. \end{aligned}$
--

que és un joc just.

Si es calcula l'esperança matemàtica de les apostes de la ruleta, etc. donen totes favorables al casino. El fet que als casinos facin pagar entrada per a participar en un joc injust és allò que els clàssics en deien *cornuts i pagar el beure*.

Parlem de finances. Comencem amb uns exemples

Suposem que al mes de març decideixes que al mes de juliol aniràs dues setmanes als Estats Units i t'han dit que l'estada et costarà 500 dòlars. Suposem també que tens els diners estalviats per al viatge; un dòlar a Barcelona costa al mes de març 170 ptes. (arrodoneixo les quantitats per a fer càlculs més fàcils) i sembla que la tendència del dòlar és anar pujant; per tant, seria prudent canviar avui les pessetes per dòlars i guardar-los per a l'estiu. Però com que res no és segur, també podria ocórrer que el dòlar baixés d'aquí a l'estiu i que t'anés millor esperar al juliol per a comprar els dòlars. Què fer? Estàs en una situació dominada per la incertesa: com en un joc d'atzar! Pots prendre una decisió –comprar ara els dòlars o esperar a l'estiu– i hi ha unes expectatives de guanys o pèrdues.

En la mateixa situació, però de manera molt més greu i seriosa, es troben totes les empreses i negocis. Considerem, per exemple, una fàbrica que produeix ordinadors i unes peces les compra al Japó, de les quals en necessitarà un nombre determinat d'aquí a tres mesos. Si creu que les peces pujaran de preu, podria comprar-les ara i emmagatzemar-les; però podria ser que baixessin de preu o fins i tot que canviés la tecnologia i quedessin obsoletes. Què ha de fer?



Canvi dòlar/PTA durant l'any 1999

Introduïm les probabilitats

Els exemples anteriors tenen en comú, entre altres coses, l'ambient d'incertesa i la manera habitual de tractar-la és mitjançant les probabilitats. Retornem a l'exemple del viatge als Estats Units. Per a simplificar l'exposició, suposem que del març al juliol el preu del dòlar només canviarà pujant 30 ptes. o baixant-ne 20. Així, el preu que tindrà el dòlar al juliol serà 200 ptes. o 150 ptes. Ara podríem intentar quantificar la incertesa associada amb l'evolució futura del dòlar mitjançant una probabilitat: posem que la probabilitat que el dòlar pugi és p i la probabilitat que baixi és $1 - p$ ($0 \leq p \leq 1$). Tenim, així,

Preu d'un dòlar	
Març:	170 ptes.
Juliol:	$\begin{cases} 200 & \text{ptes. amb probabilitat } p, \\ 150 & \text{ptes. amb probabilitat } 1 - p. \end{cases}$

Aquest plantejament, tot i la seva simplicitat, és molt important i s'anomena model de Cox-Ross-Rubinstein.

En lloc de decidir ara si canviar o no les pessetes en dòlars pots comprar una **opció de compra** (en anglès es diu un *call*), que consisteix a adquirir el dret, però no l'obligació, de comprar dòlars l'1 de juliol a un preu que es fixa avui: posem 180 ptes. per dòlar (s'anomena *preu d'exercici*).

- Si al juliol el dòlar puja, tancaràs el tracte (exercint el dret) i compraràs els dòlars a 180 ptes.
- Si el dòlar baixa, compraràs directament els dòlars a un altre venedor.

Però per a adquirir una opció de compra de dòlars cal pagar alguna cosa, ja que, en cas contrari, ningú no voldria participar venent l'opció: tu tindries tots els avantatges i el venedor tots els inconvenients. La quantitat que cal pagar s'anomena la **prima**. El problema que ens plantegem és com calcular aquesta quantitat.

Una mica d'història

A l'edat mitjana els agricultors i comerciants van començar a utilitzar els *contractes de futurs*, que consisteixen (encara s'utilitzen) en un acord de compra o venda d'un producte a un preu determinat en una data; per aquests contractes no cal pagar res, però l'acord és ferm: el comprador i venedor han de fer l'operació pactada sigui quin sigui el preu del mercat. Per a continuar amb l'exemple, tu podries fer al març un contracte de futurs amb un venedor de dòlars acordant la compra de 500 dòlars a 190 ptes. l'1 de juliol. Arribats a l'1 de juliol, l'operació s'hauria de fer i comprar els dòlars al preu estipulat, de manera que si el dòlar baixés a 150 ptes., hi perdries diners respecte al preu de mercat; si el dòlar pugés a 200 ptes., compraries els dòlars a un bon preu.

Al segle XVII a Holanda es varen començar a fer opcions (de compra o venda) de bulbs de tulipa, amb la diferència respecte als futurs que el comprador de l'opció té un dret però no pas un deure. De seguida es van començar a fer opcions sobre accions d'empreses i, a través d'una història no sempre fàcil, les opcions s'han anat consolidant com un producte financer d'extrema importància. Actualment hi ha opcions de moltes menes i sobre tota mena de productes, i aquesta tendència va a més. A les pàgines econòmiques de qualsevol diari hi ha informació sobre els diferents mercats d'opcions.

Un salt qualitatiu absolutament fonamental en el mercat d'opcions va ser quan els economistes americans F. Black i M. Scholes van proposar el 1973 un mètode racional per a calcular la prima de les opcions (el preu a pagar). Scholes va rebre, juntament amb Merton, el 1997 el premi Nobel d'economia per aquest descobriment (Black va morir el 1995). La conclusió d'aquest mètode és l'anomenada fórmula de Black-Scholes, d'ús constant als mercats d'opcions, als bancs, etc. Tot i que la fórmula final és molt senzilla, la demostració utilitza mètodes sofisticats de processos estocàstics (que tracten de modelitzar fenòmens que evolucionen en el temps segons les lleis de l'atzar —és a dir, fenòmens aleatoris o estocàstics). A partir de l'any 1973, una branca de les matemàtiques que s'havia anat desenvolupant —l'Anàlisi Estocàstica— va trobar una nova i importantíssima font d'aplicacions, i molts matemàtics purs varen ser captivats per la possibilitat d'aplicar la teoria ja feta i de desenvolupar noves teories per als problemes que la realitat suggeria: va ser el descobriment d'un nou món per als matemàtics.

Però, com es valora una opció?

Per a valorar una opció, primerament cal notar que el valor d'una opció es basa en el preu del producte al que fa referència (en el nostre exemple, en el canvi dòlar/pesseta) i en les probabilitats d'aquest preu al moment d'executar l'opció (la p d'abans). Però, com calcular aquesta probabilitat? En principi, cada persona pot considerar la probabilitat que cregui convenient; així hom pot pensar que la probabilitat que el dòlar pugi és 0.9, i un altre que és 0.3; es tracta de probabilitats subjectives. La idea —genial— és que cal buscar les probabilitats que fan que comprar i vendre dòlars sigui un joc just. El mercat sempre es comporta per a la majoria de gent (després comentarem la minoria) com un joc just, ja que altrament no hi hauria participants: a la borsa uns hi guanyen perquè altres hi perden, i els guanyadors i perdedors no poden ser sempre els mateixos (això és, de fet, més complex, ja que cal tenir en compte l'evolució al llarg del temps, l'increment del preu del diner, i altres factors). Aplicat al nostre problema, és tracta de la manera següent: algú compra un dòlar al més de març. El resultat del joc serà el valor del dòlar l'1 de juliol, que hem quedat que és

200	ptes. amb probabilitat p ,
150	ptes. amb probabilitat $1 - p$.

L'esperança matemàtica d'aquest joc és

$$\text{Esperança} = 200p + 150(1 - p).$$

El preu al qual es compraria el dòlar al març, posem 170 ptes., és el preu per a participar en el joc. Així, per a què el joc sigui just cal que

$$200p + 150(1 - p) = 170.$$

La solució és

$$p = 0.4.$$

Cal remarcar que aquest mètode és una manera objectiva de calcular les probabilitats i que, per tant, el comprador i el venedor de l'opció poden estar d'acord; però no representa la probabilitat d'evolució futura. Ara tornem a l'opció. També el comprador i el venedor de l'opció han de participar en un joc just. Això vol dir que el preu per a participar en el joc ha de ser igual a l'esperança matemàtica del joc; concretament, la prima, P , ha de ser

$$P = (500 \times (200 - 180)) \times 0.4 + 0 \times 0.6 = 4000 \text{ ptes.}$$

D'aquesta manera, el resultat de l'opció l'1 de juliol serà:

- Si el dòlar puja, l'opció s'executa i en total hauràs pagat

$$500 \times 180 + 4000 = 94000 \text{ ptes.}$$
- Si el dòlar baixa, aleshores compres directament els dòlars, i en total hauràs gastat

$$500 \times 150 + 4000 = 79000 \text{ ptes.}$$

Comparem en el quadre següent la diferència entre comprar dòlars al juliol amb opció o sense:

	Sense opció	Amb opció	Diferència
El dòlar puja	100 000	94 000	6 000
El dòlar baixa	75 000	79 000	-4 000
Variació	25 000	15 000	

Per tant, amb l'opció de compra aconseguim que la variació entre els possibles diners que haurem de pagar sigui menor; concretament, hem reduït la diferència entre els preus quan puja o baixa el dòlar en un 40% (10 000 ptes. sobre 25 000). Aquest mateix raonament el podem fer per a una empresa que sap que haurà de pagar una factura d'un milió de dòlars al cap de tres mesos i amb les opcions aconseguim reduir la incertesa de la factura que haurà de pagar.

D'altra banda, el venedor de l'opció pot utilitzar hàbilment les 4 000 ptes. de la prima per a no guanyar-hi ni perdre-hi res, vagin com vagin les coses; això s'anomena una cobertura.

A més d'adquirir una opció per necessitat, com seria el cas del teu viatge, o el d'una empresa d'ordinadors que ha comprar peces al Japó o pagar una factura en dòlars al cap d'uns quants mesos, també es pot adquirir una opció per a especular: algú que intueix que el dòlar pujarà a l'estiu pot adquirir una opció de compra de dòlars; si el dòlar puja, llavors executa l'opció, compra els dòlars a 180 ptes. i els torna a vendre immediatament a 200 ptes. Si el dòlar baixa, llavors naturalment no exerceix l'opció ni compra dòlars; en total, haurà perdut la prima: ha fet una aposta i ha perdut. També cal dir que si el dòlar pugés, al mercat d'opcions li farien tota l'operació sense haver de comprar i vendre els dòlars: directament li abonarien la diferència.

Les opcions tenen molts avantatges. En la meua opinió, el més important és el següent: hem vist que al mercat d'opcions hi participen tres classes de persones, les unes per necessitat (tu o la fàbrica d'ordinadors), unes altres com a intermediaris –que hi guanyen unes comissions– i finalment els especuladors. Les opcions permeten una transferència de risc entre qui té necessitat de prendre una decisió en un ambient d'incertesa i els que participen a la borsa per tal de guanyar diners i que estan disposats a córrer un risc.

La borsa és justa per a tothom?

Aquesta és la qüestió més interessant de totes. La borsa és justa per a la majoria perquè hi ha una minoria que intenta aprofitar el moment en què és injusta. Per exemple, una persona pot estar molt atenta al preu d'unes accions de, per exemple, l'empresa Bayer, a la borsa de Madrid i a la de Frankfurt. De tant en tant, els preus es descompensen i pot haver-hi a Frankfurt algú que vol comprar accions de Bayer a un preu més car del que es venen a Madrid. Llavors, en qüestió de minuts es podria (de fet, sempre hi ha algú que ho aprofita) comprar a Madrid i vendre a Frankfurt. Sense cap risc –llevat que algú més ràpid s'interposi en l'operació– s'haurien guanyat diners. D'aquesta operació se'n diu fer un *arbitratge* o guanyar-se un dinar de franc (*free lunch*).

Aquesta idea, que per a què la borsa funcioni bé cal que hi hagi uns individus dedicats a localitzar i aprofitar oportunitats d'arbitratge, és realment profunda i es dona en moltes situacions de la vida. Als antípodes del món de les finances, al signe del *ying* i del *yan*, a la meitat blanca hi ha una taqueta negra i a la meitat negra una taqueta blanca, per a indicar que una cosa no és tota blanca o negra, bona o dolenta,... A la borsa, els arbitratgistes són la petita taca negra de la meitat blanca.

2.23 Humor matemàtic

- Una persona és dalt d'un globus i no sap a quin lloc ha anat a parar. De sobte veu algú i li pregunta: "On sóc?"
 - A dalt d'un globus– contesta l'altre, després de pensar una estona.
 - Moltes gràcies. Vostè és matemàtic, oi?
 - Sí, com ho ha sabut?
 - Molt fàcil, per tres motius: el primer és que ha pensat molt la resposta, el segon és que el que ha dit és rigorosament cert i l'últim és que no em serveix de res.
- Un metge, un advocat i un matemàtic discuteixen sobre què és millor, tenir esposa o amant.

El metge diu: "És millor tenir una esposa, és molt més segur, des del punt de vista sanitari."

L'advocat diu: "És millor tenir una amant. Signar contractes, encara que sigui un casament, sempre pot portar problemes."

El matemàtic diu: "El millor és tenir esposa i amant. A l'esposa li diem que estem amb l'amant i a l'amant que estem amb l'esposa i així tenim més temps per a fer matemàtiques."
- S'explica que una persona sempre viatjava en avió amb una bomba a la maleta. El motiu és que havia llegit que la probabilitat que hi haguessin dues bombes al mateix avió era molt més petita que la probabilitat que n'hi hagués només una.
- Tres alumnes de la Llicenciatura de matemàtiques, un de primer curs un de segon i un de tercer, viatgen junts per un país estranger en tren. Mirant per la finestra veuen una ovella blanca.

L'alumne de primer curs comenta: "En aquest país les ovelles són blanques."

L'alumne de segon diu: "T'equivoques, el que pots dir és que en aquest país hi ha una ovella blanca."

L'alumne de tercer replica: "El que podem assegurar és que en aquest país hi ha almenys una ovella, i a més que aquesta ovella té un costat que és de color blanc."
- Anem de compres per un mercat una mica estrany (un mercat a un planeta caníbal). Veiem la següent oferta: "cervell d'alumne de primer curs de matemàtiques a 10 000 ptes el kg; cervell de Llicenciat en matemàtiques a 1000 ptes el kg; cervell de Doctor en matemàtiques a 100 ptes el kg." Aleshores preguntem estranyats sobre la gran diferència de preus. El botiguer ens contesta: "el cervell d'alumne de primer curs és gairebé nou, el de llicenciat està una mica atrotinat, mentre que el de doctor ja no és pot aprofitar per a res."
- Aquest últim acudit s'ha d'explicar en castellà.
 - ¿Sabes cuál es el animal que tiene entre tres y cuatro ojos?
 - El piojo.

Capítol 3

Problemes proposats

L'objectiu d'aquesta secció és posar en contacte els alumnes de secundària amb diversos temes de matemàtiques i estadística.

Per a intentar aconseguir-ho, es presenten problemes agrupats en deu temes diferents. Aquests problemes han estat preparats per professors del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona, especialistes en diversos vessants de les matemàtiques. Presentem problemes de Geometria, Anàlisi, Optimització, Probabilitats, Experimentació numèrica, Àlgebra, Modelització matemàtica, Topologia, Aritmètica i Estadística.

La seva dificultat és variable. Al text s'han marcat amb un (*) els problemes que requereixen un cert esforç per a ser resolts. Els problemes marcats amb (**) són encara més difícils. Finalment, els problemes sense cap senyal són els problemes que creiem que són més a l'abast dels alumnes d'ensenyament secundari interessats per les matemàtiques.

Animem als lectors d'aquests problemes a pensar-los, a dedicar-hi un cert temps. Tots els autors han inclòs la seva adreça d'Internet i el seu telèfon i estaran encantats de contestar les preguntes que puguin sorgir de l'estudi d'aquest material.

Creiem que aquesta col·lecció de problemes ajudarà a veure que les matemàtiques i l'estadística cobreixen un gran espectre de qüestions. Entre aquests problemes hi ha moltes diferències. De tota manera, tots tenen una cosa en comú, que és potser una de les característiques que més apreciem la gent que estimem les matemàtiques: *tots ens fan pensar*.

3.1 Geometria

Selecció de problemes preparada per Gregori Guasp i Balaguer, professor de Geometria i Topologia del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona. tel.: 93 581 15 05, e-mail: gguasp@mat.uab.es.

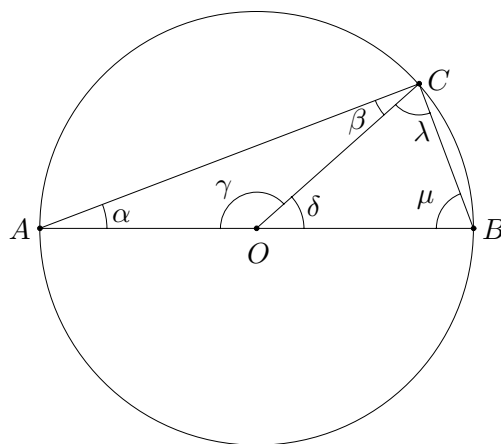


- 3.1.1.** Quina és la proporció que hi ha entre els costats d'un rectangle tal, que el rectangle que queda, quan es treu el quadrat determinat pel costat més petit (mireu el dibuix), segueix tenint la mateixa proporció entre els seus costats?



Nota: Aquesta proporció s'anomena la *raó d'or*.

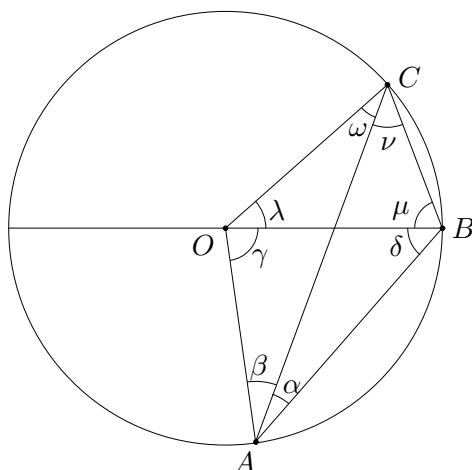
- 3.1.2.** En la figura següent, A i B representen punts diametralment oposats d'una circumferència de centre O , i C és un altre punt de la mateixa circumferència. Els angles dels triangles OAC i OBC estan marcats amb les lletres α , β , γ , δ , λ i μ .



- Demostreu que la suma dels angles β i λ és un angle recte.
- Quina relació hi ha entre els angles α i δ ?

(Ind: Alguns dels triangles són isòsceles.)

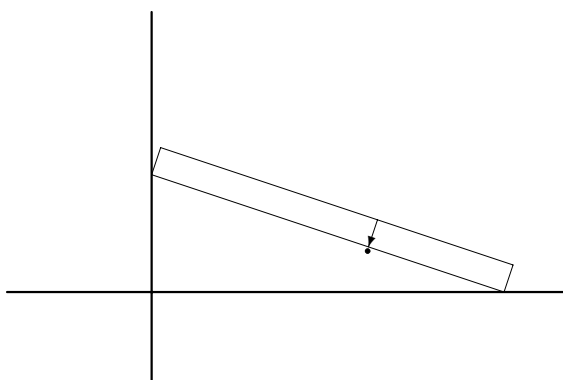
- 3.1.3.** (*) Siguin A , B i C punts d'una circumferència de centre O representats en la figura següent:



- (a) Quants triangles isòsceles es poden trobar en la figura?
- (b) Quina relació hi ha entre l'angle α i l'angle λ ?
- (c) Si considerem un altre punt qualsevol D de la mateixa circumferència, quina relació hi haurà entre l'angle que determinen les cordes DC i DB i l'angle α ?

3.1.4. (*) Abans de contestar cap pregunta, realitzeu l'experiment següent:

Retalleu una tira de paper d'uns 10 cm de longitud i sobre un dels costats feu un senyal. Sobre un full de paper dibuixeu un parell de rectes perpendiculars i, posant cada un dels extrems de la tira de paper en un d'aquests eixos, marqueu el lloc on queda el senyal que heu fet com es mostra en el dibuix següent:



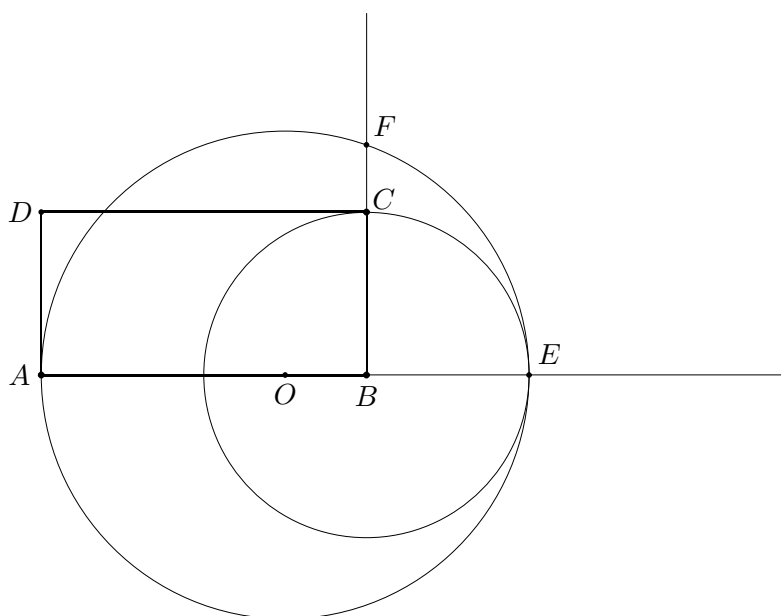
Aneu movent la tira de paper procurant mantenir els extrems sobre els eixos i apareixerà una certa corba.

- (a) Quin tipus de corba és la corba que apareix? Què passarà si el punt que marquem és el punt mig de la tira de paper?
- (b) Si la marca que heu fet divideix la tira de paper en dues parts de longituds a i b i considerem que les dues rectes que hem dibuixat són els eixos de coordenades, quina és, en funció de a i b , l'equació de la corba que apareix?

- 3.1.5.** (**) Considereu la circumferència de radi 1 centrada en el punt $(0, 1)$, que és la que té per equació $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, i determineu l'equació dels punts $P = (x, y)$ tals que la distància que hi ha de P a l'eix de les x és igual a la distància que hi ha entre P i la circumferència.

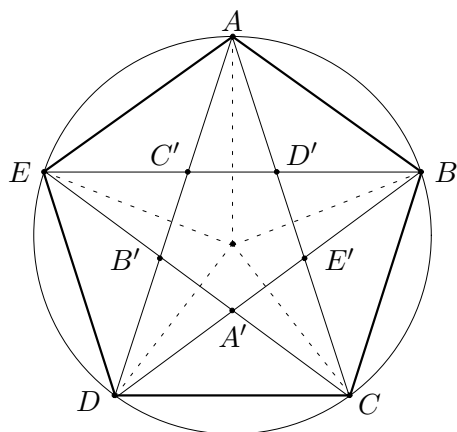
Quin tipus de corba apareix si es consideren els punts equidistants d'una circumferència i una recta qualsevol?

- 3.1.6.** Dibuixeu un rectangle de 9 cm per 4 cm. Marqueu els vèrtexs amb les lletres A , B , C i D de tal forma que AB i CD siguin els costats de 9 cm i BC i AD els de 4 cm. Allargueu per B el costat AB i per C el costat BC . Amb el compàs, dibuixeu la circumferència de centre B i radi BC i marqueu com E el punt d'intersecció, que queda fora del rectangle, d'aquesta circumferència amb la recta AB . Sigui O el punt mig del segment AE . Ara dibuixeu la circumferència de centre O i radi OA . Marqueu com F el punt d'intersecció de la semirecta BC amb aquesta nova circumferència. Quina és la longitud de BF ? Quina relació trobeu que hi ha entre aquesta longitud i l'àrea del rectangle?



Si us fixeu, l'angle entre AF i EF és un angle recte. Utilitzeu el teorema de Pitàgores per a veure que fent aquesta construcció sempre tindrem l'alçada BF igual a l'arrel quadrada de l'àrea del rectangle.

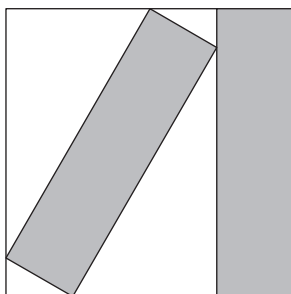
- 3.1.7.** (**) Siguin A , B , C , D i E els vèrtexs d'un pentàgon regular tal com està representat en el dibuix següent:



Els segments AB , BC , CD , DE i EA són els *costats* del pentàgon, mentre que els segments AC , CE , EB , BD i DA són les *diagonals*.

- Quina és la mesura de l'angle que formen dos costats consecutius? (per exemple, l'angle entre AB i AE).
- Quina és la mesura de l'angle que formen les diagonals amb els costats? (per exemple, l'angle entre AB i AC).
- Quina és la mesura de l'angle entre les dues diagonals que arriben a cada vèrtex? (per exemple, l'angle entre AC i AD).
- Comproveu que els triangles ADC i DCE' són triangles semblants, és a dir, tenen els mateixos angles.
- Comproveu que la raó que hi ha entre la longitud de la diagonal i la longitud del costat és la raó d'or.
- Quin és el valor de $\cos(\pi/5)$ i $\sin(\pi/5)$? (els angles en radians!)

3.1.8. (*) En la figura següent, el quadrat exterior té costat 1 i els dos rectangles grisos són iguals.



Quina és l'àrea d'aquests rectangles?

3.2 Anàlisi

Selecció de problemes preparada per Joan J. Carmona, Armen-
gol Gasull i Francesc Mañosas, professors del Departament de
Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona. Per
a comentar sobre els problemes podeu contactar amb Francesc
Mañosas, tel.: 93 581 26 06, e-mail: manyosas@mat.uab.es.



- 3.2.1.** Considereu l'equació recíproca de quart grau $x^4 + 2x^3 - 13x^2 + 2x + 1 = 0$. Trobeu les seves quatre solucions fent el canvi de variable $y = x + \frac{1}{x}$. Compareu el mètode proposat amb el mètode general explicat a la secció 2.9.

- 3.2.2.** Demostreu que

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} = \dots = \frac{1+3+5+\dots}{\dots} = \dots$$

Interpreteu aquest resultat geomètricament.

- 3.2.3.** (*) Demostreu que

$$x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} = \left(x - \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) \left(x - \frac{1-\sqrt{5}+\sqrt{14+6\sqrt{5}}}{8}\right) \left(x - \frac{1-\sqrt{5}-\sqrt{14+6\sqrt{5}}}{8}\right).$$

Useu que $\cos \frac{\pi}{10} = \sin \frac{4\pi}{10}$ i la descomposició anterior per a calcular $\sin \frac{\pi}{10}$.

- 3.2.4.** (**) Com ja sabeu, al Brasil hi ha molta inflació. El 1985, el seu Govern va decidir que la manera mensual d'ajustar els salaris i els interessos bancaris seria la següent: *Si x_1, x_2 i x_3 són les inflacions mensuals dels tres mesos anteriors, aleshores els salaris i els comptes corrents augmentarien aquell mes un interès*

$$x = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3},$$

és a dir la mitjana geomètrica de les tres inflacions.

Demostreu que per a $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ sempre es compleix

$$\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

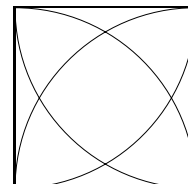
i així entendreu per què el Govern va pendre la mitjana geomètrica en lloc de l'aritmètica.

- 3.2.5.** (*) Siguin x, y, z, t números reals arbitraris. Escriviu la funció

$$f(x, y, z, t) = x^4 + y^4 + z^4 + t^4 - 4xyzt$$

com a suma de quadrats d'expressions involucrant x, y, z, t . Per tant, haureu demostrat que $f(x, y, z, t) \geq 0$ per a tot x, y, z, t . Relacioneu aquest resultat amb el problema anterior.

- 3.2.6.** Considereu un quadrat de costat $a > 0$. Amb centre a cada un dels seus vèrtexs, dibuixem una circumferència que passi pels altres dos vèrtexs. El quadrat queda dividit en nou zones com a la figura. Calculeu l'àrea de cadascuna d'elles.

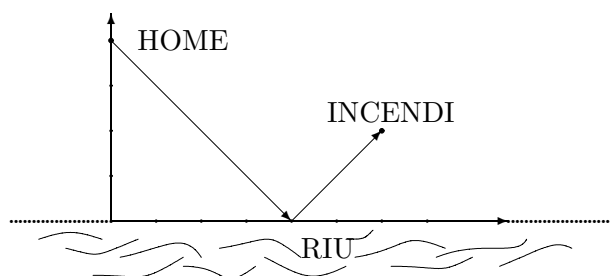


- 3.2.7.** En un desert, i situats a cada un dels vèrtexs d'un triangle equilàter de 1000 km de costat hi ha tres vehicles. Les seves velocitats màximes són de 40 km/h, 60 km/h i 100 km/h. De sobte reben l'ordre per ràdio que s'han de trobar el més aviat possible. Quant tardaran a trobar-se i quin camí hauran de seguir? Suposem que cada conductor sap exactament on es troba cadascun dels altres dos vehicles, que els conductors son intel·ligents i que el seus vehicles poden agafar la seva velocitat màxima instantàniament. Fins a quin valor pot disminuir la velocitat màxima del vehicle més ràpid de forma que el punt de trobada no canviï.
- 3.2.8.** (**) Un camió pot carregar combustible per a recórrer una distància màxima de 900 km. També disposa i pot transportar bidons buits de totes les mides. Ha de travessar un desert que fa d'ample 1500 km. Com podria fer-ho per a travessar-lo, suposant que al punt de sortida té tant de combustible com necessiti?

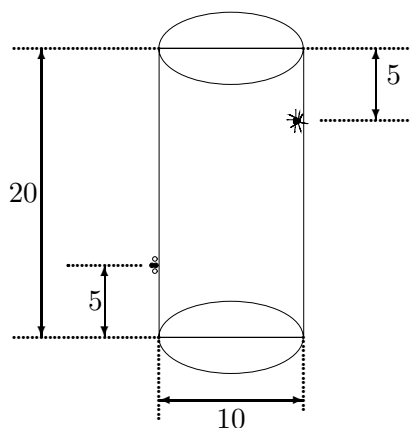
Explicarem, com a pista, com ho podria fer per a travessar un desert d'una amplada de 1200 km: ompliria el camió de combustible i s'endinsaria 300 km en el desert; deixaria un dipòsit per a recórrer 300 km i tornaria enrere amb el combustible restant. Ompliria de nou el camió. Quan arribés al lloc del dipòsit, podria tornar a omplir el camió i podria fer 900 km més. En total, els 1200 km que mesura el desert.

Quina és l'amplada màxima de desert que podria travessar el camió sense preocupar-se del temps que tardés? I suposant que anés sempre a 60 km/h, quina és l'amplada màxima que podria travessar en una setmana?

- 3.2.9.** Hi ha un incendi en el punt del pla (30,10). Hi ha un home amb una galleda situat en el punt (0,20). L'eix de les x és un riu. L'home ha d'anar fins al riu, omplir la galleda i apagar l'incendi. Quin és el camí més curt? Vegeu també el problema 3.3.3. Indicació: podeu plantejar el problema com un problema de màxims i mínims, però hi ha un argument geomètric que fa la solució evident.

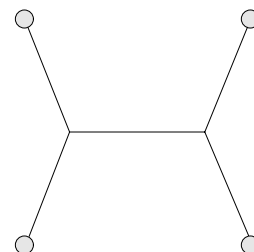


- 3.2.10.** (*) En un got cilíndric d'alçada 20 cm i radi 5 cm hi ha una aranya al seu interior a 5 cm de la boca del got. A 5 cm de la base, però a la part exterior del got hi ha una mosca que no es pot desplaçar. A més, la mosca i l'aranya són a generatrius oposades del got. Quin és el camí més curt que ha de seguir l'aranya (i, de fet, segueix) per a arribar a la mosca? Quina serà la longitud del camí recorregut?



- 3.2.11.** (*) Un excursionista amic nostre ens explicava entusiasmat que l'altre dia va pujar al Puigmal. Ens deia que va sortir a les 8 del matí de Ripoll i que arribava a dalt exactament a les 8 del vespre. Després de descansar 12 hores va fer el camí de baixada pel mateix lloc, tardant també 12 hores. Avui encara està rumiant el que li vaig dir: *Segur que hi ha d'haver un instant entre les 8 del matí i les 8 de la tarda en el qual eres al mateix lloc en pujar que en baixar.* El pots ajudar a aclarir per què?

- 3.2.12.** (*) Es vol construir una interconnexió viària entre quatre ciutats col·locades als vèrtexs d'un quadrat de costat 100 km. Quin és el disseny de carreteres que fa mínima la longitud total dissenyada? Ajuda't de la figura adjunta.



- 3.2.13.** (*) Diem que una recta d'equació $y = r(x)$ és una asímptota obliqua d'una funció $f(x)$ quan $x \rightarrow \infty$ si $\lim_{x \rightarrow \infty} (r(x) - f(x)) = 0$. Demostreu que el pendent de l'asímtota es pot calcular fent $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$. Supposeu que f és derivable a tot punt i que el $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ existeix, aleshores demostreu que el pendent també es pot calcular fent $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$. Doneu un exemple en el que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ existeixi, i en canvi $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ no existeixi.

- 3.2.14.** (*) Demostreu que el volum d'una esfera de radi R és $\frac{4}{3}\pi R^3$.

- 3.2.15.** D'entre tots els triangles rectangles de perímetre $8 + 4\sqrt{2}$, trobeu el d'àrea màxima.

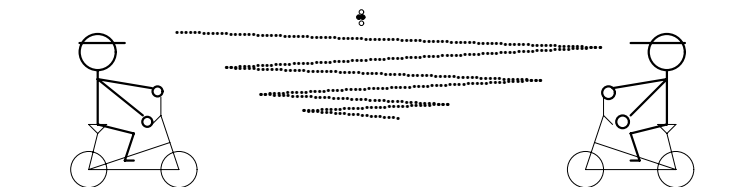
- 3.2.16.** (**) Demostreu que per a tot $n \in \mathbb{N}$, $\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2$.

- 3.2.17.** (**) Trobeu tots els polinomis amb coeficients reals $P(x)$, que compleixin

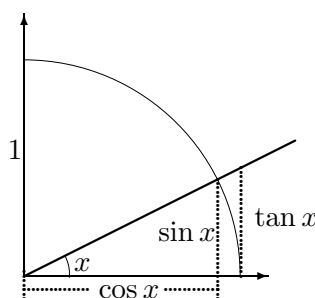
$$P(x^2) = P(x)P(x-1),$$

per a tot $x \in \mathbb{C}$.

- 3.2.18.** Dos ciclistes, separats 50 km, van en línia recta l'un cap a l'altre, a una velocitat constant de 25 km/h cadascun. Una mosca, que vola a 35 km/h, decideix anar volant d'un ciclista a l'altre, des que comencen a moure's fins que es troben. Quina distància total ha recorregut la mosca? Suposem que no perd gens de temps cada cop que canvia de sentit.



- 3.2.19.** (*) Demostreu que si $0 < x < \pi/2$, aleshores $\sin x < x < \tan x$ (vegeu la figura adjunta). Apliqueu aquestes acotacions per veure que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Utilitzeu aquest darrer resultat i el fet de que $\cos x = 1 - 2\sin^2(\frac{x}{2})$ per a provar que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$. Demostreu també que $(\sin x)' = \cos x$. Finalment, sense fer cap càlcul més, digueu quant val $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$.



- 3.2.20.** Demostreu que per a tot $x > 0$, $x^e \leq e^x$. Aquí $e = \exp 1 = 2.718 \dots$
- 3.2.21.** (*) Sigui $p(x) = (x^2 - x - 1)^{1999} + (x^2 - x - 1)^{1980}$. Considereu el polinomi derivat $p'(x)$. Calculeu la suma de tots els seus coeficients.
- 3.2.22.** Una partícula es mou al pla. La seva posició en cada instant t està donada per $(x(t), y(t))$. Suposeu que a l'instant $t = 0$ està situada a l'origen de coordenades, que té una velocitat inicial $v_0 = (a_0, b_0)$ i que la seva acceleració depèn proporcionalment del temps, és a dir $a(t) = (a_1 t, b_1 t)$. Trobeu explícitament $(x(t), y(t))$.
- 3.2.23.** (*) A la secció 2.2 s'explica el que són les fraccions contínues i com es calculen. Demostreu que

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}, \quad \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}.$$

3.3 Optimització

Selecció de problemes preparada per Aureli Alabert i Romero, professor d'Estadística i Investigació Operativa del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona. tel.: 93 581 29 41, e-mail: alabert@mat.uab.es.



- 3.3.1.** Els carrers de Barcelona que suporten un volum considerable de trànsit rodat solen tenir els semàfors sincronitzats en “ona verda”. Volem calcular l’interval de temps òptim entre la posada en verd d’un semàfor i la del següent per tal que el carrer pugui absorbir el major volum possible de vehicles (nombre de vehicles per unitat de temps). Per això suposarem:
- Distància de seguretat: Per tal que el risc d’accidents sigui prou baix, s’admet que la separació entre vehicles ha de ser de $v^2/100$ metres, si v és la velocitat expressada en km/h. Suposarem que els automobilistes respecten aquesta norma.
 - Longitud dels vehicles: en mitjana, podem suposar que és de 4 metres.
 - Separació entre semàfors: 100 metres (la de l’Eixample de Barcelona).
- 3.3.2.** (*) Es vol construir una escola nova que ha de donar servei a dos pobles units per una carretera de 3 quilòmetres de longitud. Dos polítics discuteixen sobre el millor lloc per a situar-la. L’escola pot estar en un dels dos pobles, o a qualsevol lloc al llarg de la carretera. El poble A té n nens, i el poble B té m nens. Un dels polítics proposa situar l’escola en el punt que faci mínima la suma dels quadrats de les distàncies que hauran de recórrer tots els nens per arribar-hi. Busqueu aquest punt. L’altre polític no veu per què tanta complicació amb elevar al quadrat les distàncies i proposa posar l’escola en el punt que faci mínima la suma de les distàncies, simplement. Busqueu el punt en aquest cas. Quina de les alternatives sembla més justa?
- 3.3.3.** (*) Prop dels dos pobles del problema 3.3.2 es vol construir una estació de tren. La via és una recta que no passa per cap dels dos pobles, i que els deixa a la mateixa banda. Es tracta de buscar el punt de la via on cal posar l’estació de manera que cap dels dos pobles es pugui queixar. Els dos pobles tenen un nombre similar d’habitants, de manera que per a calcular aquest punt equitatiu només cal considerar les distàncies dels pobles al punt de la via on es construirà l’estació. Quin és el punt òptim si el que es vol es fer mínima la suma dels quadrats de les distàncies de cada poble a l’estació? Suposem ara que volem fer mínima la suma de les distàncies (sense quadrats). El punt òptim es pot obtenir de la manera següent: Anomenem A i B els punts on es troben els pobles. Dibuixem el punt B_1 simètric de B respecte la via. Tracem la recta AB_1 . El punt D que busquem és el punt d’aquesta recta que cau sobre la via. Demostreu això considerant un altre punt D' sobre la via i veient que $|AD'| + |D'B| > |AD| + |DB|$.
- 3.3.4.** (*) Dues persones juguen al joc següent: Hi ha sobre la taula dues piles de monedes. Se sap la quantitat de monedes de cada pila. El jugador, per torn, escullen una pila, i en retiren la quantitat de monedes que desitgin (almenys una). Perd la partida el jugador que retira l’última moneda de la taula. És clar que el joc s’acaba en algun moment o altre i que no hi ha mai empat (un

jugador perd i l'altre guanya). Es tracta d'esbrinar l'estratègia òptima per a guanyar, i determinar si té importància o no ser el primer jugador que agafa monedes. Per a fer això seguim els passos següents:

0. (Notacions.) Escriurem (n, m) per a indicar que en un moment determinat hi ha n monedes a la primera pila, i m a la segona. Aquests parells de nombres representaran una *posició* durant la partida. Si podem assegurar que en una determinada posició (n, m) el jugador que té el torn perdrà la partida (suposant que el contrincant no s'equivoca), direm que (n, m) és una *posició perdedora*; si, al contrari, podem assegurar que el que té el torn guanyarà (si juga sense equivocar-se) direm que (n, m) és una *posició guanyadora*.
1. Observeu que $(1, 0)$ i $(0, 1)$ són posicions perdedores.
2. Deduïu que $(n, 0)$, $(0, n)$ per a $n \geq 2$, i $(n, 1)$, $(1, n)$ per a $n \geq 1$, són posicions guanyadores.
3. Deduïu que $(2, 2)$ és una posició perdedora.
4. Continueu aquesta anàlisi per a trobar totes les posicions guanyadores i perdedores d'aquest joc. Deduïu quina estratègia cal seguir per a guanyar. Determineu si és important o no ser el jugador que comença, i, en cas afirmatiu, què preferiríeu.

3.3.5. (*) Entre tots els polígons regulars amb una superfície fixada, trobeu el que té perímetre màxim.

3.3.6. (*) Volem trobar dues quantitats positives x_1 i x_2 de forma que el valor de $x_1 + x_2$ sigui al més gran possible, però respectant les desigualtats $2x_1 + 3x_2 \leq 12$ i $7x_1 + 4x_2 \leq 28$. Això es pot fer gràficament:

Traceu les rectes $2x_1 + 3x_2 = 12$ i $7x_1 + 4x_2 = 28$ sobre uns eixos coordenats. Els valors de (x_1, x_2) que satisfan totes les condicions estan representats pels punts a l'interior del quadrilàter determinat per les rectes dibuixades i els eixos coordenats. Dibuixeu també unes quantes rectes del tipus $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 + x_2 = 2$, ... Totes elles són paral·leles, i es desplacen cap a la dreta i amunt quan augmentem el terme independent. D'aquí deduïm que el màxim valor de la suma $x_1 + x_2$ dins del quadrilàter s'obté en el punt intersecció de les rectes $2x_1 + 3x_2 = 12$ i $7x_1 + 4x_2 = 28$, que és $x_1 = 36/13$ i $x_2 = 84/39$. El valor de la suma és $x_1 + x_2 = 192/39$. Consulteu també la secció 2.7.

Apliqueu aquest mètode a la situació següent: una fusteria fabrica cadires i taules. Per cada cadira obté un benefici de 100 euros; per cada taula, 200 euros. Cada cadira ocupa 1 hora de màquina i 3 hores de personal; cada taula ocupa 3 hores de màquina i 2 hores de personal. Es disposa de 40 hores setmanals de màquina i de 80 hores setmanals de personal. Quantes taules i cadires cal fabricar setmanalment per tal que el benefici de la fusteria sigui màxim?

(Encara que el resultat sigui un número fraccionari de taules i cadires, es pot interpretar com un "ritme de producció setmanal".)

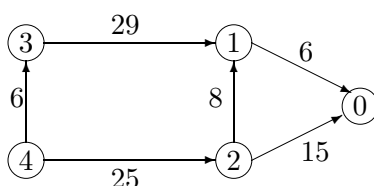
3.3.7. (*) Apliqueu la tècnica del problema 3.3.6 per a resoldre la qüestió següent:

Un granger vol que cadascuna de les seves vaques rebi diàriament com a màxim 18 quilocalories (kcal), almenys 2 quilograms de proteïnes, i almenys 2.8 grams de vitamines. Disposa de dos tipus de pinso que pot barrejar en qualsevol proporció, amb les característiques que s'indiquen a continuació (per quilogram).

Pinso	Cost (eu)	kcal	Proteïnes (kg)	Vitamines (g)
1	0.8	3.6	0.25	0.7
2	0.6	2	0.40	0.4

El granger vol fer mínim el cost d'alimentació de les vaques tot mantenint les condicions anteriors. Quina quantitat de pinso de cada tipus cal donar a les vaques cada dia?

- 3.3.8.** (*) Observeu l'esquema següent. Les fletxes representen camins a través d'un bosc, que uneixen diverses cases, representades per cercles. Els números sobre les fletxes indiquen els minuts estimats per a fer cada camí. Volem anar de la casa 4 a la casa 0 en el mínim temps possible.



Per obtenir el recorregut òptim, dividirem el problema en diverses etapes, que numerarem 1,2,3,4. A l'etapa n , calcularem el recorregut òptim des de la casa n fins a la casa 0. A l'etapa 4, doncs, trobarem el que busquem.

A l'etapa 1 no cal decidir res, perquè només hi ha un camí possible, i el temps que emprarem és de 6 minuts. Escrivem que $t_1 = 6$.

A l'etapa 2, mirem si és millor anar de la casa 2 a la casa 1 i d'allà a la 0, o bé anar directament a la casa 0. Veiem que és millor el recorregut $2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$, amb 14 minuts. Escrivem $t_2 = 14$.

A l'etapa 3 no hi ha res a decidir: Obtenim $t_3 = 35$, amb el recorregut $3 \rightarrow 1 \rightarrow 0$.

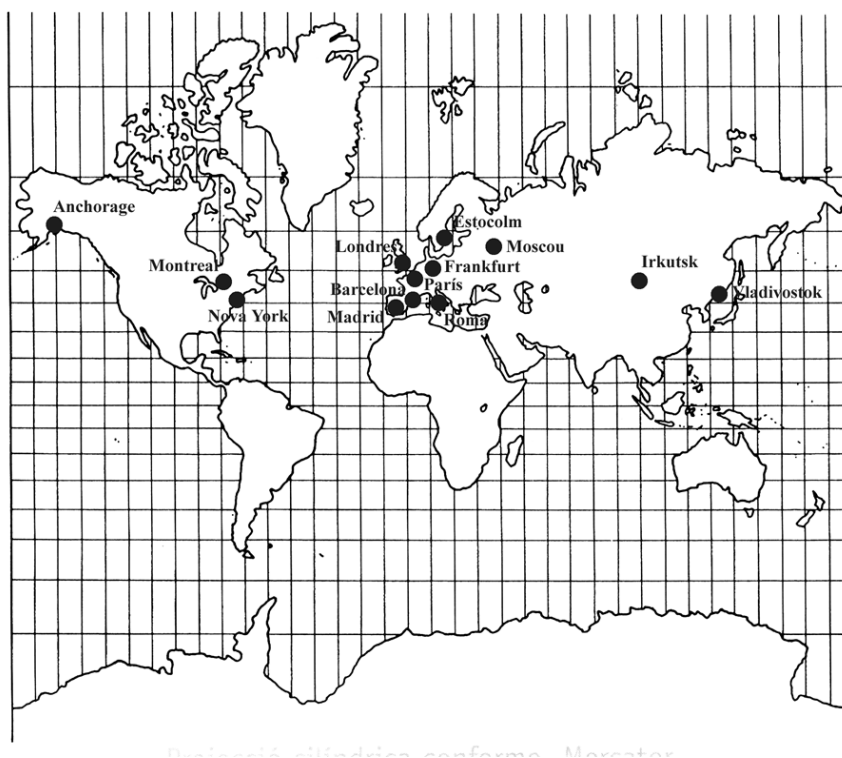
A l'etapa 4, finalment, mirem si és millor anar de la casa 4 a la 3 (6 minuts + $t_3 = 41$) o bé anar de la 4 a la 2 (25 minuts + $t_2 = 39$). És millor aquesta última opció. El recorregut òptim que buscàvem és doncs $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$.

Apliquem ara aquest mètode a un problema més complicat: som a Vladivostok i hem de retornar amb urgència a casa, a Barcelona. A l'aeroport ens informen de les rutes que podem seguir, amb el preu de cada trajecte. La nostra prioritat és que el preu total sigui al més petit possible. Aquestes són les dades, amb els preus en euros:

Vladivostok $\rightarrow$ Irkutsk: 100
 Vladivostok $\rightarrow$ Anchorage: 180
 Irkutsk $\rightarrow$ Moscou: 120
 Anchorage $\rightarrow$ Montreal: 220
 Anchorage $\rightarrow$ Nova York: 200
 Moscou $\rightarrow$ Roma: 300
 Moscou $\rightarrow$ Frankfurt: 250
 Moscou $\rightarrow$ Estocolm: 250
 Montreal $\rightarrow$ Estocolm: 200
 Montreal $\rightarrow$ Londres: 300
 Nova York $\rightarrow$ Londres: 250
 Nova York $\rightarrow$ París: 270

Nova York $\rightarrow$ Madrid: 290
 Estocolm $\rightarrow$ París: 200
 Roma $\rightarrow$ Barcelona: 150
 Frankfurt $\rightarrow$ Barcelona: 180
 Londres $\rightarrow$ Barcelona: 160
 París $\rightarrow$ Barcelona: 140
 Madrid $\rightarrow$ Barcelona: 100

Feu un esquema com abans i busqueu la ruta més econòmica.



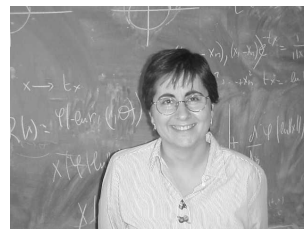
3.3.9. ()** Un professor planteja les tres preguntes següents en un examen:

1. Entre tots els triangles rectangles amb la suma de les longituds dels catets fixada, busca el que té àrea màxima.
2. Entre tots els rectangles inscrits en una circumferència, busca el que té àrea màxima.
3. La nota d'aquest examen serà la mitjana de les puntuacions a i b del problema 1 i el problema 2. Escull quina mitjana vols que et faci: La *mitjana aritmètica* $(a + b)/2$, la *mitjana geomètrica* $\sqrt{ab}$, o la *mitjana quadràtica* $\sqrt{(a^2 + b^2)/2}$.

A partir del resultat de la pregunta 1, dedueix que la mitjana geomètrica és sempre més petita o igual que la mitjana aritmètica. A partir del resultat de la pregunta 2, dedueix que la mitjana aritmètica és sempre més petita o igual que la mitjana quadràtica. La pregunta 3 queda, doncs, “contestada”. Comproveu també que si obteniu la mateixa nota en els dos problemes, us és ben igual quina mitjana faci el professor.

3.4 Probabilitats

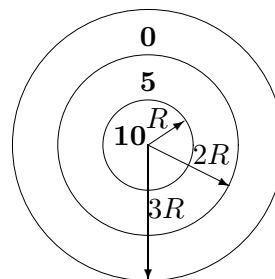
Selecció de problemes preparada per Maria Jolis i Giménez, professora d'Estadística i Investigació Operativa del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona. tel.: 93 581 30 94, e-mail: mjolis@mat.uab.es.



- 3.4.1.** Suposem que la probabilitat que, en el naixement d'un infant, aquest sigui un nen és de 0.5. Quina és la probabilitat que en una família de quatre germans, com a mínim n'hi hagi tres del mateix sexe? (Contràriament al que es podria pensar en un principi, aquesta probabilitat és bastant més gran que la probabilitat que n'hi hagi dos de cada sexe.)
- 3.4.2.** (*) Un home que era molt despistat sovint portava els dos mitjons diferents. Supposeu que aquest home cada matí, en vestir-se, obria un calaix on guardava n parells diferents de mitjons desaparellats i n'agafava a l'atzar 4 mitjons. Quina és la probabilitat que no n'hi hagués cap parell del mateix model?

Suposem que aquest home també triava de la mateixa manera els guants que es posava, i que tenia un altre calaix amb m parells de guants. (Suposeu que en els seus models de guants, el guant de la dreta és diferent del de l'esquerra.) Quina és la probabilitat que es pugui posar un parell de guants (encara que siguin de diferent model)? Quina és la probabilitat que es pugui posar dos guants del mateix model?

- 3.4.3.** Quina és la probabilitat que en llançar un dard contra una diana com la del dibuix, obtinguem cadascuna de les tres possibles puntuacions? (Suposem que no tenim gens de punteria però que mai no surt fora de la diana, és a dir, que el llançament és totalment a l'atzar dins la diana.)



- 3.4.4.** Suposem que en una certa població en què hi ha la mateixa quantitat d'homes que de dones, es té que la proporció de daltonians entre els homes és del 5%, mentre que la proporció de daltonianes entre les dones és del 0.25%. En un experiment mèdic s'ha triat un individu d'aquesta població i ha resultat que era daltonià, però la persona que va seleccionar aquest individu no va anotar quin era el seu sexe. Quina és la probabilitat que es tractés d'un home? Vegeu la secció 2.6.
- 3.4.5.** S'instal·la un programa antivirus en un ordinador. La probabilitat que l'ordinador tingui el virus detectable per l'antivirus és 0.2. Si l'ordinador té el virus, la probabilitat que l'antivirus el detecti val 0.9. Si l'ordinador no té el virus, la probabilitat que l'antivirus doni un missatge d'existència de virus és 0.02. Es vol conèixer:
1. La probabilitat que, si ha aparegut un missatge d'existència de virus, l'ordinador no tingui el virus.
 2. La probabilitat que l'ordinador tingui el virus i l'antivirus no el detecti.

3. La probabilitat que, si no ha sortit cap missatge d'existència de virus, l'ordinador tingui el virus.

3.4.6. Quina és la probabilitat que entre n persones n'hi hagi dues (com a mínim) amb el mateix dia d'aniversari? Comproveu que aquesta probabilitat és d'aproximadament 0.12 per a $n = 10$, 0.51 per a $n = 23$, i 0.99 per a $n = 55$ (!).

Calculeu també quina és la probabilitat que entre n persones n'hi hagi dues (com a mínim) amb el mateix signe del zodíac (suposeu per a simplificar que els dotze signes comprenen el mateix nombre de dies). Quin ha de ser el nombre de persones per tal que aquesta probabilitat superi el 0.75? Fixeu-vos que si volguéssim que la probabilitat valgués 1, es necessitarien $n = 13$ persones.

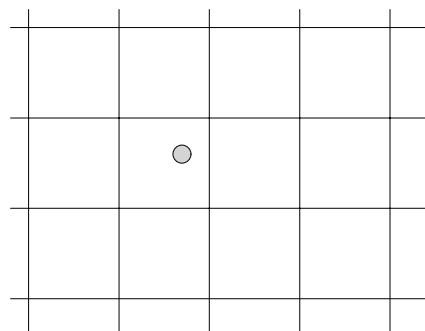
3.4.7. (**) En molts esports (per exemple el bàsquet i el beisbol professionals dels EUA) el campió de la lliga es decideix en una sèrie d'un màxim de set partits que enfronta els dos equips millor classificats al final de la lliga, essent el campió el primer equip que guanya quatre partits. Suposeu que els dos equips que arriben a la final són igual de bons (és a dir, a cada partit cada equip té probabilitat $1/2$ de guanyar). Quina és la probabilitat que es necessitin jugar per a saber el campió:

- quatre partits?
- cinc partits?
- sis partits?
- set partits?

Vegeu també que si es juguessin moltes d'aquestes sèries, en mitjana aquestes sèries serien de prop de sis partits.

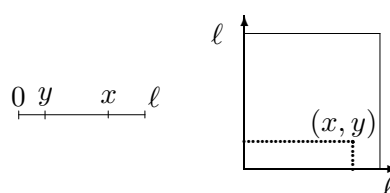
Per a fer aquests dos darrers problemes, vegeu també la secció 2.8.

3.4.8. (**) Suposem que sobre un terra enrajolat amb rajoles quadrades de costat $\ell = 20$ cm llancem a l'atzar una moneda de 4 cm de diàmetre. Quina és la probabilitat que la moneda no toqui la vora de cap rajola? Quina mida hauria de tenir la moneda per tal que la probabilitat anterior valgui $1/2$?



3.4.9. (**) Suposeu que trenquem un pal de longitud ℓ per dos punts escollits a l'atzar. Quina és la probabilitat que, amb els tres palets resultants, es pugui construir un triangle que els tingui per costats?

Indicació: Si diem x i y les distàncies a un dels extrems del pal dels punts de trencament, es pot suposar que el punt (x, y) del pla és un punt triat totalment a l'atzar dins del quadrat $[0, \ell] \times [0, \ell]$. Vegeu la figura.



3.5 Experimentació numèrica

Selecció de problemes preparada per Joan Torregrosa i Arús, professor de Matemàtica Aplicada del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona. tel.: 93 581 19 36, e-mail: torre@mat.uab.es.



- 3.5.1.** El professor ens demana les arrels de l'equació $x^2 - 2000x + 1 = 0$ amb totes les xifres correctes que ens permeti la nostra calculadora. Comproveu que l'expressió

$$1000 \pm \sqrt{1000^2 - 1}$$

no és una manera efectiva de calcular l'arrel corresponent al signe menys. Trobeu una expressió equivalent, però que doni menys error de càlcul.

Resposta: $5.00000125E - 04$, $1.9999995E + 03$

- 3.5.2.** Hi ha diversos mètodes per a calcular l'arrel quadrada d'un nombre. Comproveu que, si teniu una calculadora que només pot sumar, multiplicar i dividir, podeu usar la successió definida per l'expressió recurrent

$$x_0 = c, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{c}{x_n} \right)$$

per a calcular $\sqrt{c}$, per a qualsevol número c positiu. Useu aquest mètode per a trobar $\sqrt{2}$. Quants passos heu de fer per a què x_{n+1} i x_n coincideixin, almenys per a tots els dígitos que us dona la vostra calculadora?

- 3.5.3.** (*) Un amic nostre s'acaba de comprar una calculadora nova, i ens diu que

$$\sqrt{2.15283} - \sqrt{2.15263} = 0.00006815617645 = 6.815617645E - 05.$$

Ens ho podem creure?

Com podríeu calcular

$$\sqrt[k]{2.15283} - \sqrt[k]{2.15263}$$

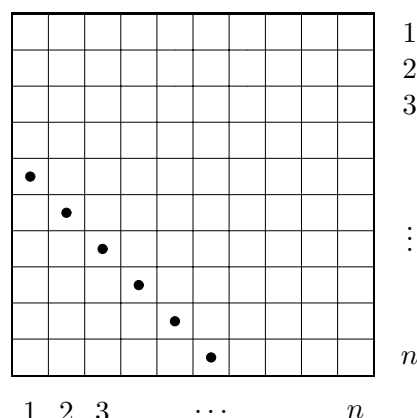
per a $k = 3, 4$?

- 3.5.4.** Leonard Euler (1707-1783) va provar que els nombres primers que s'escrivien de la forma $4n + 1$ s'escrivien com a suma de dos quadrats. És a dir, que existeixen $x, y \in \mathbb{N}$ tals que $4n + 1 = x^2 + y^2$. Comprova-ho per als primers menors que 100, trobant el parell (x, y) corresponent a cada primer.

- 3.5.5.** (*) Fullejant un llibre antic de la biblioteca hem trobat la fórmula següent:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1).$$

És certa? Comproveu-la per a uns quants valors de n . Demostreu-la a partir de comptar el nombre total de quadradets de mida unitat d'un quadrat de mida $n \times n$ de dues formes: una com n^2 i l'altres comptant els quadradets que hi ha a cada diagonal.



Noteu que no deixa de ser curiós que, en aquesta fórmula, hi hagi un polinomi de segon grau en n :

$$\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = a_2n^2 + a_1n + a_0.$$

Amb aquesta fórmula podrem sumar els primers n nombres naturals, però com ens ho podríem fer obtenir una fórmula per a calcular

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2?$$

En el mateix llibre ens diu que en aquest cas la fórmula que hem de buscar ha de ser un polinomi de grau 3. Però, per més que l'hem buscat no l'hem trobada; sabríeu trobar-la?

Podríeu fer el mateix per a sumar

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3?$$

3.5.6. ()** Per a obtenir el valor de

$$I_k = \int_0^1 x^k \sin(\pi x) dx$$

per a tots els valors parells de $k \in \mathbb{N}$ proveu, fent servir la fórmula d'integració per parts, que es pot usar la fórmula recurrent següent:

$$I_0 = \frac{2}{\pi}, \quad I_k = \frac{1}{\pi} - \frac{k(k-1)}{\pi^2} I_{k-2}.$$

Calculeu fent servir una calculadora el valor de I_k per $k = 2, 4, 6, 8, 10$. Quin valor s'obté per a I_{20} ? S'assembla al valor correcte, que és $6.68022456848E - 03$? Quina explicació hi trobeu?

D'altra banda, considerem la mateixa recurrència que abans, però escrita al revés:

$$I_{k-2} = (\pi - \pi^2 I_k) \frac{1}{k(k-1)}.$$

Prenem ara un valor erroni de I_{40} , per exemple $\hat{I}_{40} = 0$. A partir d'aquest valor, si substituïm a la fórmula fins a obtenir $\hat{I}_{20}$, arribem ara a un resultat correcte. Podries dir que està passant?

3.5.7. (*) Per a quins $n \in \mathbb{N}$ les solucions de l'equació

$$nt^2 + (n+1)t - (n+2) = 0$$

són nombres racionals? Feu-ho per a alguns valors de n petits.

3.5.8. (*) Donada la funció $f(x) = x^2 + x$, hi ha algun parell (a, b) de nombres enters tal que $4f(a) = f(b)$?

3.5.9. (*) Existeixen (a, b, c) nombres enters, de forma que siguin solucions del sistema d'equacions següent?

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 - c^3 &= 3abc \\ a^2 &= 2(b+c) \end{aligned}$$

3.5.10. (*) A partir de l'expressió

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1} x^{2i+1},$$

es pot obtenir una expressió per a π usant la igualtat

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3.1415926535897932385\dots}{4} = \arctan(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1}.$$

Quants termes us cal sumar per obtenir π amb 2 xifres decimals correctes?

Com es millora el càlcul si, en lloc d'aquesta, usem que $\frac{\pi}{4} = 2 \arctan(\frac{1}{3}) + \arctan(\frac{1}{7})$.

Hi ha altres maneres d'obtenir π . Proveu d'usar les expressions següents, i discutiu quina és la que creieu la millor:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{6}{5} \frac{6}{7} \frac{8}{7} \frac{8}{9} \frac{10}{9} \frac{10}{11} \dots,$$

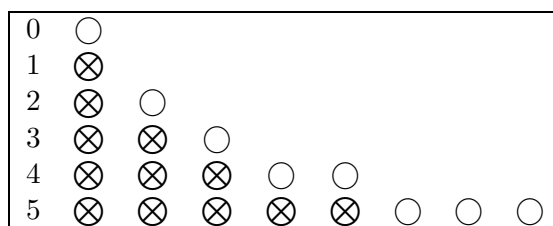
$$1 + \frac{4}{\pi} = 2 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \dots}}},$$

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{3 + \frac{2^2}{5 + \frac{3^2}{7 + \dots}}},$$

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

3.5.11. (**) Una parella de conills joves tarden un mes a fer-se adults, és a dir, a estar en condicions de poder-se reproduir. Si suposem que una parella de conills adults té una parella de conillets cada mes, quants conills tindrem al cap d'un any, si inicialment només tenim una parella de conills joves?

Per a poder respondre a aquesta pregunta, podem plantejar la taula següent:



on el símbol $\bigcirc$ representa una parella de conills joves, i $\otimes$ una parella de conills adults. Així, al cap d'un més la parella jove s'ha convertit en adulta, i al cap de dos mesos la parella adulta ha tingut descendència, i amb això tenim ja dues parelles, i així successivament. D'aquesta manera podem construir la successió de números següent:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

Una manera de d'escriure el que està passant, consisteix a considerar la successió recurrent següent:

$$u_0 = 1, u_1 = 1, u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \text{ per a } n \geq 2.$$

Aquesta successió es coneix amb el nom de successió de Fibonacci.

Comproveu que es compleixen les propietats següents:

- (a) $u_n^2 + u_{n+1}^2 = u_{2n+1}$ si $n \geq 1$.
- (b) $u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$ si $n \geq 2$.
- (c) Si m divideix a n , llavors u_m divideix a u_n .

3.5.12. (**) Si definim la successió de polinomis següent en la variable t ,

$$u_0(t) = 0, u_1(t) = 1, u_n(t) = tu_{n-1}(t) - u_{n-2}(t),$$

comproveu, per a alguns valors de n , que

- (a) $u_1(t) + u_3(t) + \dots + u_{2n-1}(t) = u_n(t)^2$,
- (b) $u_n(t)^2 = u_{n-1}(t)u_{n+1}(t) + 1$.

3.5.13. (**) Siguin n_0, n_1, n_2 , tres números enters tals que $n_0 < n_1 < n_2$. Comproveu que l'expressió

$$\frac{n_2 - n_0}{2 - 0} \cdot \frac{n_2 - n_1}{2 - 1} \cdot \frac{n_1 - n_0}{1 - 0}$$

també és un enter.

Si considerem ara que en tenim quatre, n_0, n_1, n_2, n_3 , de manera que $n_0 < n_1 < n_2 < n_3$, comproveu que, també en aquest cas, l'expressió

$$\frac{n_3 - n_0}{3 - 0} \cdot \frac{n_3 - n_1}{3 - 1} \cdot \frac{n_3 - n_2}{3 - 2} \cdot \frac{n_2 - n_0}{2 - 0} \cdot \frac{n_2 - n_1}{2 - 1} \cdot \frac{n_1 - n_0}{1 - 0}$$

és un enter.

En general, si considerem $k + 1$ enters tals que $n_0 < n_1 < \dots < n_k$, l'expressió

$$\prod_{0 \leq i < j \leq k} \frac{n_j - n_i}{j - i}$$

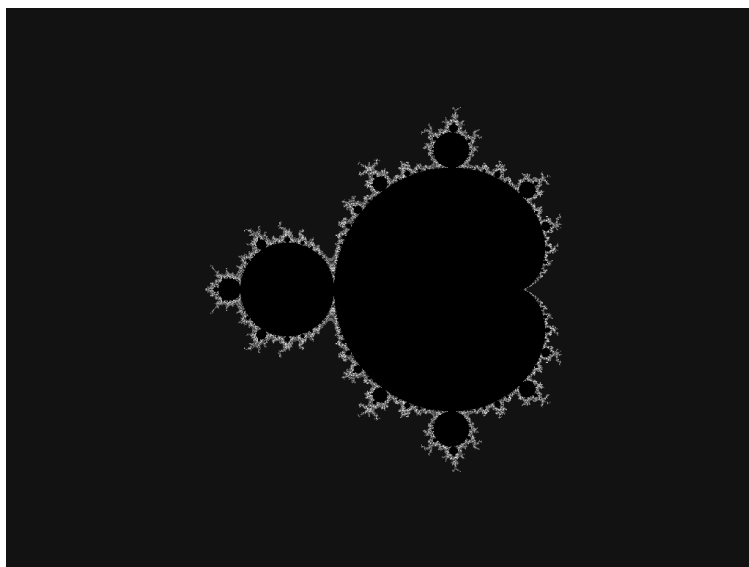
també és un enter.

- 3.5.14.** (**) Siguin a, b, c arrels de l'equació $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$. Comproveu que són diferents. Comproveu donant valors a $n \in \mathbb{N}$ que

$$\frac{b^n - c^n}{b - c} + \frac{c^n - a^n}{c - a} + \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

és un nombre enter.

S'ha consultat el llibre *Polynomials* de E.J. Barbeau, Springer-Verlag, 1989.



Conjunt fractal de Mandelbrot.

3.6 Àlgebra

Selecció de problemes preparada per Rosa Camps i Camprubí, professora d'Àlgebra del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona. tel.: 93 581 29 41, e-mail: rcamps@mat.uab.es.



- 3.6.1.** Amb quants zeros acaba el producte $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 100$?
- 3.6.2.** Usant cinc números x_1, x_2, x_3, x_4 i x_5 i agafant-los per parells podem fer deu sumes $a_1, a_2, \dots, a_{10}$. Demostra que si coneixem els resultats $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ podem saber els números inicials x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 .
- 3.6.3.** Troba deu números naturals consecutius que no siguin primers.
- 3.6.4.** Busca el nombre natural positiu més petit que compleix les condicions següents:
- si el dividim per 2, dóna resta 1;
 - si el dividim per 3, dóna resta 2;
 - si el dividim per 4, dóna resta 3;
 - si el dividim per 5, dóna resta 4;
 - i si el dividim per 6, dóna resta 5.
- 3.6.5.** Agafa un nombre qualsevol de tres xifres i permuta-les cíclicament de les dues maneres possibles (és a dir, considera els números xyz, yzx i zxy). Demostra que la suma dels tres nombres és sempre divisible per 37.
- Què passa si en comptes de realitzar dues permutacions cícliques en fas dues de qualsevol? Demostra que si sumes el número de 3 xifres amb els cinc números obtinguts aplicant al número totes les permutacions possibles obtens un nombre divisible per 37.
- 3.6.6.** “Tenia n anys l’any n^2 ”, va dir en Pere Casabona l’any 1971. Quan va néixer?
- 3.6.7.** Dos amics es troben després de molt de temps i un li pregunta a l’altre,
- Quants fills tens i quina edat tenen?
 - Tinc tres filles, el producte de les seves edats és 36 i la suma és el número d’aquesta casa– li contesta l’altre.
 - Em falta una dada – diu el primer.
 - Ah! bé –contesta– la gran toca el piano.
- Quines són les edats de les filles?
- 3.6.8.** (*) Demostra que la suma dels quadrats de dos enters senars no és el quadrat de cap enter.

- 3.6.9.** (*) Demana a una persona que multipliqui el dia del mes que va néixer per 12, el nombre del mes per 31 i que us doni el resultat de sumar aquestes dues quantitats. Endevina-li la data exacta del seu naixement.

Sabries donar un mètode per a endevinar també l'any de naixement amb una sola dada?

- 3.6.10.** (*) Donada una matriu A de mida 2×2 no invertible, demostra que hi ha infinites matrius X que compleixen $AXA = A$. I si la matriu és invertible?
- 3.6.11.** (**) Sabent que els últims tres dígit a la representació decimal de 7^{400} són 0, 0, 1, troba els últims tres dígit de la representació decimal de 7^{9999} .
- 3.6.12.** (**) Considera una paraula P de n lletres. Tria una permutació f de les n posicions. Ara aplica la permutació f a la paraula P . A la paraula resultant torna a aplicar-hi la mateixa permutació f i així successivament fins a aplicar en total $n!$ cops la permutació f . Demostra que la paraula resultant és la paraula P .
- 3.6.13.** (**) Si tenim la successió de matrius

$$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{pmatrix}, \dots$$

troba la fórmula de la suma dels elements de la diagonal principal de la matriu n -èssima en funció de n .

- 3.6.14.** (*) Els vèrtexs d'un polígon regular de 37 costats es numeren de l'1 a l'11. Qualsevol línia de simetria del polígon divideix els nombres que no estan en la línia de simetria en dos subconjunts.

Diem que una numeració dels vèrtexs és “bona” respecte una línia de simetria si cada un dels nombres d'un dels dos subgrups és més gran que el seu simètric.

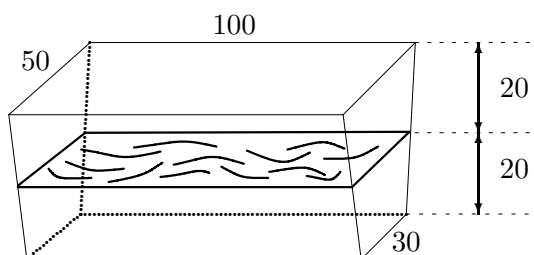
Hi ha alguna manera de numerar els vèrtexs que sigui “bona” respecte a qualsevol línia de simetria?

3.7 Modelització matemàtica

Selecció de problemes preparada per Àngel Calsina i Ballesta, professor de Matemàtica Aplicada del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona i del Departament d'Informàtica i Matemàtica Aplicada de la Universitat de Girona. tel.: 93 581 29 06 i 972 41 89 42, e-mail: calsina@mat.uab.es, i acalsina@ima.udg.es.



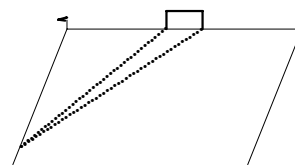
- 3.7.1.** En un cultiu cel·lular, el nombre de divisions per unitat de temps és proporcional al nombre de cèl·lules presents. Un cultiu que conté inicialment 10 000 individus per ml dobla la seva població en sis hores. Quantes cèl·lules hi haurà al cap de dos dies?
- 3.7.2.** Un model de dinàmica de poblacions estableix que la densitat de població d'una espècie d'insectes l'any $n + 1$ depèn de la densitat de població l'any anterior en la forma $p_{n+1} = r(1 - p_n)p_n$, on r és un coeficient positiu i menor que 4. Per a diferents valors del paràmetre r i mitjançant experimentació numèrica, detecteu comportaments de la successió de densitats any rere any de tendència a l'extinció, de tendència a un equilibri de la població i de comportament asimptòticament periòdic.
- 3.7.3.** (*) El pes aproximat de l'atmosfera terrestre és de $5 \cdot 10^{18}$ kilos. Podríeu arribar a aquest resultat calculant mentalment?
- 3.7.4.** S'ha observat que la densitat de població d'una espècie de peixos en un riu de 200 km de longitud decreix al llarg del seu curs de manera lineal des dels 150 individus per km prop del naixement fins a només 10 peixos per km prop de la desembocadura. Calculeu quina és la població total de peixos d'aquesta espècie en el riu.
- 3.7.5.** En una reacció química del tipus $A + B \rightarrow C$ (una molècula de A i una de B es combinen per a formar-ne una de C), es disposa inicialment de a mols de les substàncies A i B , mentre que C és absent. El temps que tarden a formar-se c mols de C està donat per $t = \frac{1}{k} \int_0^c \frac{dx}{(a-x)^2}$, on k s'anomena la constant de la reacció. Calculeu quant de temps és necessari per a la formació de $a/2$ mols de C i quant tardaria la reacció a acabar-se.
- 3.7.6.** (*) Un dipòsit conté inicialment 50 kg de sal dissolts en 1 000 l d'aigua. Entra al dipòsit un cabal d'aigua pura de 2 l per min i en surt un cabal igual de dissolució. Calculeu la concentració de la dissolució passades dues hores.
- 3.7.7.** (*) Els extrems d'un abeurador horitzontal d'un metre de llarg i 40 cm d'alçada són trapezis isòsceles la base inferior dels quals mesura 30 cm i la superior 50. En un instant determinat observem que el nivell de l'aigua és de 20 cm i està pujant a raó d'un cm per minut. Quant tardarà l'abeurador a ser ple si sabem que el cabal d'entrada és constant?



- 3.7.8.** (*) El consum de combustible d'un cotxe per unitat de temps és, essencialment, la suma de dos termes, un d'independent de la velocitat i que correspon al manteniment del motor en marxa, i un altre que és proporcional a la potència que el motor entrega i que es dedica (en un trajecte pla) bàsicament a vèncer el fregament amb l'aire. La força de fregament amb l'aire és aproximadament proporcional al quadrat de la velocitat. Això fa que el consum per unitat de temps depengui de la velocitat en la forma $g(v) = a + bv^3$. Per què?

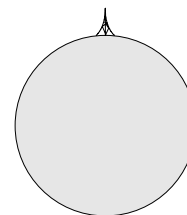
Quina és la velocitat més econòmica d'un vehicle amb motor diesel que gasta 4 litres per hora al ralenti i 6 litres per hora circulant a 100 km/h? Quin és el consum òptim?

- 3.7.9.** Un extrem corre per la banda en un camp de futbol que fa 50 metres d'ample i té unes porteries de 7 metres d'ample. Veu el porter avançat i decideix xutar a porta. A quina distància del banderí de córner ha de fer-ho per a tenir l'angle més gran possible?

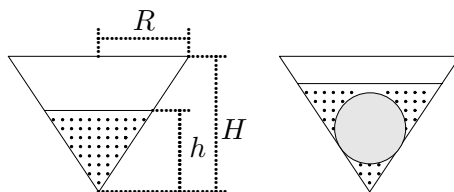


- 3.7.10.** (**) Se sap que una corda de 18 m té una característica d'allargament tal que la tensió en kp és funció de l'allargament en metres en la forma $T(x) = 100x + 10x/(6 - x)$ per a un allargament menor que 5.8 metres i que es trenca quan s'arriba a aquest. Calculeu el pes màxim d'una persona que vulgui fer "ponting" amb aquesta corda. (Adaptat del llibre *Càlcul Infinitesimal*, de C. Perelló, Biblioteca Universitària 21, Enciclopèdia Catalana, 1994.)

- 3.7.11.** (**) Es vol construir (l'any 2664) una torre de comunicacions de 20 km d'altura amb una massa de 10 tones per metre lineal al pol nord d'un asteroide esfèric de 100 km de radi on la gravetat a la superfície és la cinquantesena part de la terrestre. Quin serà el pes total d'aquesta torre? Quant pesaria si fos infinitament alta? Serien iguals els resultats si la construïssin a l'equador de l'asteroide? Faltaria en aquest cas alguna dada?



- 3.7.12.** (**) Un dipòsit amb forma de con invertit de radi R i altura H conté aigua fins a un nivell h . Calculeu el màxim valor de h que garanteixi que s'hi pot introduir una bola més densa que l'aigua sense que se'n vessi gens.

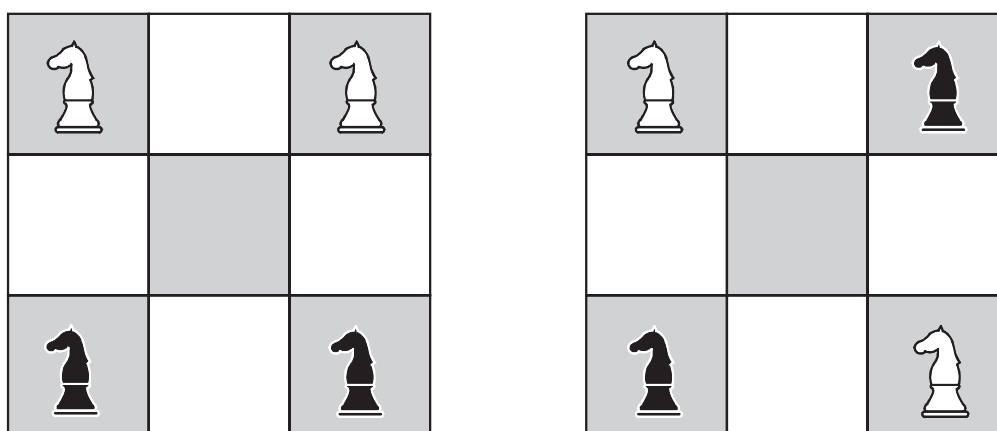


3.8 Topologia

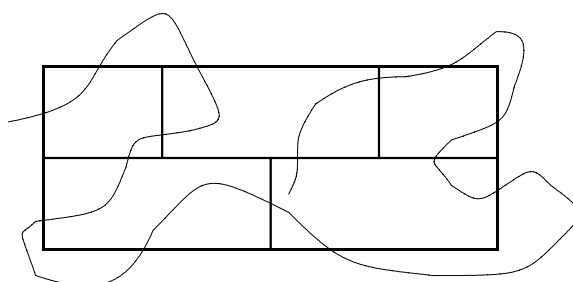
Selecció de problemes preparada per Laia Saumell i Ariño, professora de Geometria i Topologia del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona. tel.: 93 581 24 13, e-mail: laia@mat.uab.es.



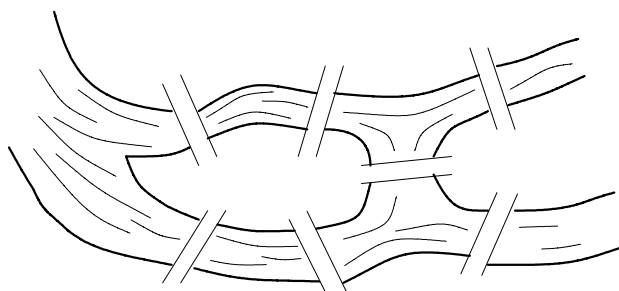
- 3.8.1.** (*) Quatre cavalls estan situats en un tauler d'escacs 3×3 com en la figura de l'esquerra. Es poden moure, utilitzant els moviments del cavall, a la posició indicada en la figura de la dreta?



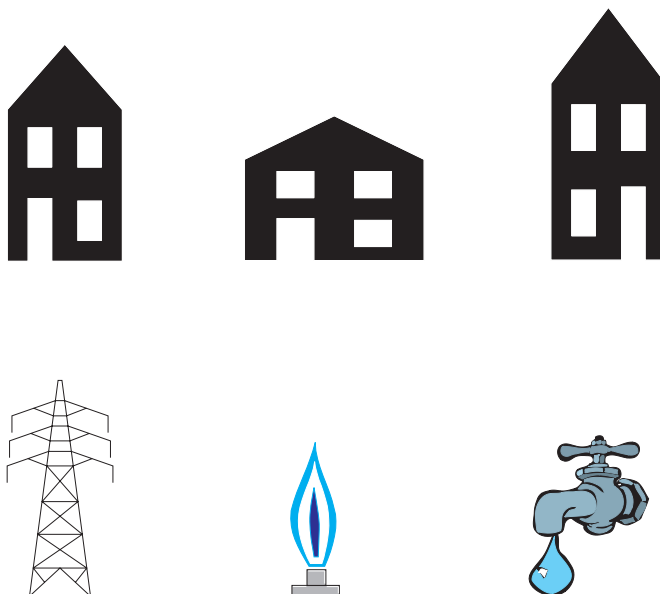
- 3.8.2.** (*) En aquest problema es tracta de veure que és impossible dibuixar una línia contínua i que no es talli a si mateixa, de manera que aquesta talli una vegada i només una vegada a cada un dels 16 segments que formen la xarxa de la figura següent. Evidentment, la línia dibuixada a la figura no és una solució del problema ja que deixa un dels segments sense tallar.



- 3.8.3.** (*) A Königsberg hi ha una illa anomenada Kuiphof. El riu que l'envolta es divideix en dos braços i sobre ells, en el temps en què vivia Euler, hi havia set ponts com s'indica a la figura. Per als habitants del lloc, era un tema de distracció descobrir un itinerari per a passejar que tornés al punt de partida després d'haver creuat tot els ponts, però passant solament una vegada per cada pont. Existeix aquest itinerari?



- 3.8.4.** (**) Hi ha un vell trencaclosques en què apareixen tres cases, cadascuna de les quals ha de ser connectada al subministrament d'aigua, gas i electricitat.



Poden fer-se les connexions de manera que ni es tallin ni passin a través de les cases ni de les fonts de subministrament?

(*) I si les tres cases i les tres fonts de subministrament són en un planeta en forma de tor (“donut”)?

- 3.8.5.** Se sap des de fa uns dos mil anys que sols existeixen cinc políedres regulars (totes les cares estan formades pel mateix polígon i a cada vèrtex concorren el mateix nombre d'arestes), els cinc sòlids platònics: el tetràedre regular, el cub, l'octàedre, el dodecàedre i l'icosàedre. Demostreu-ho utilitzant que en qualsevol políedre la seva característica d'Euler χ val 2. Vegeu la secció 2.16.

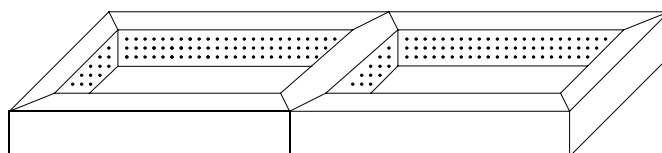
$$\chi = \text{el nombre de cares} - \text{el nombre d'arestes} + \text{el nombre de vèrtexs}.$$

- 3.8.6.** Demostreu que no és possible construir una pilota sols amb hexàgons de tal forma que dos hexàgons diferents tinguin com a molt un costat en comú. (Indicació: utilitzeu també que la característica d'Euler val 2.)

3.8.7. Les pilotes de futbol estan formades per pentàgons i hexàgons cosits de manera que a cada vèrtex hi concorren dos hexàgons i un pentàgon. Quants pentàgons i quants hexàgons hi ha en una pilota de futbol? (Indicació: utilitzeu la característica d'Euler.)

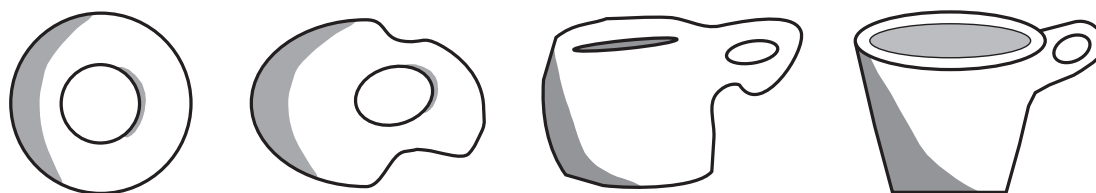


3.8.8. Calculeu la característica d'Euler de la figura següent:



(*) Com ho faríeu per a construir figures amb característica d'Euler un nombre parell i negatiu arbitrari?

3.8.9. Es diu que dos espais són topològicament equivalents si es pot passar de l'un a l'altre de manera contínua, i es pot retornar al primer de manera contínua. Com, per exemple,



Classifiqueu els espais següents en tipus topològicament equivalents.



3.9 Aritmètica

Selecció de problemes preparada per Enric Nart i Viñals, professor d'Àlgebra del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona. tel.: 93 581 14 53, e-mail: nart@mat.uab.es.



- 3.9.1.** Trobeu dos nombres naturals que sumen 5 264 i el seu mcm és 200 340.
- 3.9.2.** Trobeu l'únic nombre natural que té 8 divisors positius que sumen 320.
- 3.9.3.** (*) Proveu que $18! + 1$ és múltiple de 437.
- 3.9.4.** Proveu que el nombre de divisors positius d'un nombre natural n és senar si i només si n és un quadrat perfecte.
- 3.9.5.** Considerem la successió de nombres naturals:
- $$49, 4489, 444889, 44448889, \dots,$$
- obtinguda intercalant en cada nombre un 48 al centre del nombre anterior.
- Proveu que tots aquests nombres són quadrats perfectes i calculeu la seva arrel quadrada.
- 3.9.6.** Proveu que un nombre natural és múltiple de 9 si i només si la suma de les seves xifres és múltiple de 9.
- 3.9.7.** (*) Sigui N la suma de les xifres del número 6666^{6666} i sigui M la suma de les xifres del número N . Calculeu el valor de la suma de les xifres de M .
- 3.9.8.** En un institut de secundària hi ha matriculats 486 alumnes. Un cert dia el conserge observa que el $36.3636\dots\%$ dels que assisteixen a classe duen ulleres i que el $67.567567\dots\%$ duen texans. Quants alumnes van faltar a classe aquell dia?
- 3.9.9.** (*) Quines són les dues últimes xifres de $1147^{1628^{111}}$?
- 3.9.10.** Una banda de 17 pirates s'apodera d'un botí de monedes d'or, totes d'igual valor. Decideixen repartir-les a parts iguals, donant les 3 peces que sobren al seu cuiner xinès. Després d'una baralla entre ells, moren 6 pirates i els sobrevivents decideixen tornar a repartir-se les monedes (incloses les 3 del cuiner) a parts iguals, donant les 4 que sobren al cuiner. En el viatge de tornada, el vaixell s'enfonsa i només se salven el botí, 6 pirates i el cuiner. Tornen a repartir tot el botí i sobren 5 monedes per al cuiner. Quan el cuiner mata tots els pirates i es queda el botí sencer, amb quina fortuna mínima estimeu que enceta una nova vida?
- 3.9.11.** La Carme treballa quatre dies seguits i en descansa un. La Norma en treballa dos i en descansa un. Només es veuen els dies de lluna plena (un de cada vint-i-vuit). La Norma va tenir dia lliure ahir, la Carme el tindrà demà passat i fa 10 dies que era lluna plena. Quants dies falten per a què es vegin?

- 3.9.12.** Proveu que si a, b, c són tres nombres enters senars, l'equació $ax^2 + bx + c = 0$ no té cap solució racional.
- 3.9.13.** Considerem un polinomi $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, amb els coeficients $a_0, \dots, a_n$ enters. Proveu que si x és un nombre racional que és arrel del polinomi i escrivim x com una fracció irreductible: $x = \frac{p}{q}$, amb numerador i denominador enters sense factors en comú, aleshores forçosament:

$$a_0 \text{ és múltiple de } p \text{ i } a_n \text{ és múltiple de } q.$$

Utilitzeu aquest fet per a dissenyar i programar un algoritme que trobi totes les arrels racionals d'un polinomi amb coeficients enters.

Il·lustreu el mètode calculant totes les arrels racionals del polinomi: $6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4$.

- 3.9.14.** En un triangle rectangle amb costats de longitud entera, el producte de les longituds dels catets és múltiple de 12, i la longitud d'algun dels costats és múltiple de 5.
- 3.9.15.** (*) Trobeu tots els parells n, m de nombres naturals diferents que satisfan: $n^m = m^n$.
Indicació: estudeu la gràfica de la funció $f(x) = \frac{x}{\log(x)}$.

- 3.9.16.** La Lliga de futbol professional ha estimat en 260 700 milions de pessetes el valor total en el mercat del conjunt de futbolistes professionals que juguen a primera divisió. L'estimació s'ha fet classificant els jugadors en quatre categories: “cracs”, “figures”, “bons” i “mediocres”, amb un valor de mercat de 3 825, 1 260, 700 i 300 milions de pessetes per a cada jugador de la categoria corresponent.

Sabent que 359 jugadors han estat declarats com a mediocres i que Dani, del Barça, ha estat classificat com a figura, trobeu quants cracs hi ha a la lliga.

3.10 Estadística

Selecció de problemes preparada per Pedro Puig Casado, professor d'Estadística i Investigació Operativa del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona. tel.: 93 581 13 02, e-mail: ppuig@mat.uab.es.



Pollastres, mitjos pollastres i empreses igualitàries. Una de les crítiques de l'estadística que més sovint es veu als mitjans de comunicació està relacionada amb l'ús incorrecte de la mitjana aritmètica. Un d'aquests comentaris que podeu trobar és que si un individu es menja cada dia dos pollastres i un altre no se'n menja cap, de mitjana cadascun es menja un pollastre diari! Això el que ens diu és que la mitjana aritmètica només ens dóna una informació parcial del conjunt de dades. Aquesta informació pot ampliar-se utilitzant altres mesures (estadístics descriptius), com per exemple la desviació tipus, els quartils, etc. Podeu veure alguna d'aquestes coses amb l'exercici següent,

- 3.10.1.** Tenim dues petites empreses cadascuna de les quals està formada pel director i nou treballadors. Fixeu vosaltres mateixos els sous de tots, de manera que el sou mitjà sigui el mateix per a cada empresa, però que en una d'elles el repartiment sigui menys igualitari que en l'altre.

Calculeu ara les desviacions tipus i els quartils i compareu-los.

Criptografia, què hi diu aquí? Edgard A. Poe en un conte titulat "L'enigma de l'escarbat d'or", descriu com el protagonista va desxifrar un text (escrit per un pirata) aparentment incompreensible fent servir un mètode estadístic. El pirata havia fet servir un sistema molt simple per a xifrar el seu missatge, consistent a substituir cada lletra de l'alfabet per un signe arbitrari. Per exemple, la A podria ser canviada per un *, la B per un {, etc. El protagonista de la nostra història tenia, doncs, un text ple de signes estranys amb un significat totalment desconegut. El que va fer per a desxifrar-lo és el mateix que us proposem en l'exercici següent,

- 3.10.2.** Digueu a un amic que us escrigui un missatge fent servir el mètode de xifratge descrit anteriorment, sense dir-vos quina és la clau però sí en quin idioma està escrit. A continuació feu una llista dels signes que surten en aquest text amb el nombre de vegades que apareix cadascun (això s'anomena distribució de freqüències). Tot seguit agafeu un text qualsevol d'una novel·la, diari, etc. escrits en el mateix idioma que el missatge xifrat, i feu també una distribució de freqüències de les lletres del text. Podem pensar que les proporcions d'aparició de cada lletra de l'alfabet són una característica a cada idioma. Per exemple, tant en català com en castellà la lletra més freqüent és la E, seguida de la A, etc. Fent servir aquesta informació i una mica d'enginy, tracteu de desxifrar el missatge. Com més llarg sigui el missatge, més fàcil serà desxifrar-lo! Consulteu també la secció 2.15.

El protagonista del conte de Poe ja sabia que el seu missatge xifrat estava escrit en anglès perquè coneixia la identitat del pirata. Si no sabem en quin idioma està escrit el missatge, podem deduir-lo a partir del mateix text en clau? En aquest proper exercici us proposem com fer-ho.

- 3.10.3.** Agafeu un text llarg qualsevol escrit en català, un altre en castellà, un altre en anglès, etc. i per a cadascun calculeu la mitjana i la desviació tipus del nombre de lletres que té cada paraula. Podem pensar que també aquestes dues quantitats són una característica de cada idioma. Si agafem el missatge en clau del nostre amic, que ara no ens ha dit en quin idioma ho ha escrit, encara que d'entrada no sapiguem el seu significat, sí que podem comptar el nombre de lletres que té cada paraula i calcular la mitjana i la desviació tipus. Amb aquesta informació podem deduir en quin idioma ha estat escrit.

Captura i recaptura, dels peixos als drogotes. Tenim una població d'un cert tipus de peix que viu dins d'un estany. Volem conèixer el nombre de peixos que té aquesta població. Com podem “estimar” aquesta quantitat? Una idea molt simple és capturar uns quants peixos, marcar-los amb una tinta que no marxi amb l'aigua, deixar-los anar dins de l'estany i, passat un quant temps, tornar-ne a capturar.

Mirant el nombre de peixos d'aquesta segona captura que ja han estat marcats a la primera (individus recapturats), podem conèixer de manera aproximada el nombre total de peixos de l'estany. El següent exercici és un exemple de càlcul.

- 3.10.4.** A la primera captura hem agafat 24 peixos, els marquem i els tornem a l'estany. A la segona captura hem agafat 32 peixos, dels quals trobem cinc marcats anteriorment (aquests són els recapturats). Quin és el nombre aproximat de peixos que té l'estany? (Nota: us ha de donar 154.)

Aquesta metodologia la podem aplicar a diversos problemes canviant la idea de “marcatge”. Vegeu l'exemple següent.

Estimació del nombre d'individus que realment habiten en una ciutat o un país (Laplace, s. XVIII).

Si disposem del cens oficial, això pot constituir la primera captura. Una enquesta adient ens donarà la segona. Els enquestats que també apareguin al cens seran els recapturats.

Estimació del nombre de consumidors d'una certa droga en una ciutat o un país.

El conjunt d'individus que fan una determinada teràpia de desintoxicació pot constituir la primera captura. Els detinguts posteriorment durant un cert període de temps poden ser la segona. Els repetits a les dues “lístes” seran els recapturats.

Cal no perdre amb les dades perdudes. Moltes vegades, revisant qüestionaris procedents d'enquestes, podem constatar que ens falten algunes dades de certs individus. Per exemple, d'un d'ells ens pot faltar l'edat, d'un altre el nombre de germans, etc. Si suposem que l'omissió es deguda a l'atzar i que no hi ha cap raó relacionada amb la natura de les mateixes dades, com per exemple seria el cas d'un que amaga el seu sou perquè és molt elevat, com podem recuperar d'alguna manera aquesta dada perduda o faltant? Una manera és substituint la dada faltant per la mitjana dels valors que tenim dels altres individus. Així, per exemple, si ens falta l'edat d'un d'ells, calcularem la mitjana de les edats dels altres i utilitzarem aquest valor en el seu lloc. A continuació veurem una propietat interessant d'aquesta manera de procedir en forma d'exercici.

- 3.10.5.** Tenim $n - 1$ dades i calculem la seva mitjana. Afegim aquest nou valor als $n - 1$ anteriors i així aconseguim un conjunt amb n dades. Quina serà la nova mitjana per a aquestes n dades?

Un dels exemples més antics de dades faltants apareix a l'Antic Testament, Nom. 1, on es fa l'anomenat cens d'Aaron. Es tracta d'un cens militar en què es compten el nombre de mascles, més grans de vint anys per a cadascuna de les dotze tribus d'Israel excepte per a la tribu de Levi (dada faltant). El motiu és que la tribu de Levi estava exclosa d'utilitzar armes perquè eren els encarregats dels serveis religiosos.

De l'avinguda Meridiana a Dunkerque (passant per París). El 1791, l'Assemblea Nacional francesa va decidir establir un sistema universal de mesures, anomenant "metre" a la unitat de longitud. Es va decidir definir-lo com $1/10\,000\,000$ de la distància entre el pol nord i l'equador mesurat en el meridià que passa per París. Per a portar a terme aquest projecte l'Assemblea va nomenar Delambre i Méchain com a responsables de mesurar la distància entre Dunquerque i Barcelona, amb el qual s'abastava uns 10^0 del meridià. Méchain va ser l'encarregat de realitzar les mesures a Catalunya, on va ser molt ben acollit pels intel·lectuals de l'època. A la plaça de les Glòries Catalanes hi ha un monument commemoratiu d'aquest afer i, de fet, l'avinguda Meridiana de Barcelona és el lloc per on passa el meridià Dunquerque-París-Barcelona.

Les dades procedents d'aquestes mesures van ser analitzades per Legendre fent servir un mètode que posteriorment ha tingut moltes aplicacions pràctiques; es tracta del mètode de mínims quadrats. L'exercici següent pot il·lustrar el procediment.

Les dades reportades per Delambre i Méchain al 1799, presentades per Laplace en el seu *Traité de Mécanique Céleste*, es poden observar a la següent taula,

Longituds dels arcs sobre el meridià de París.

Lloc	Latitud	Dist. des de Barcelona
Barcelona	45.958281	
Carcassonne	48.016790	52749.48
Évaux	51.309414	137174.03
París	54.274614	213319.77
Dunquerque	56.706944	275792.36

Les distàncies estan expressades en mòduls (1 mòdul=2 toeses, 1 toesa = 1.949 metres) i les latituds en graus centesimals.

- 3.10.6.** Anoteu en un paper els pesos i les alçades dels companys de classe i representeu-los en un gràfic cartesià. Observeu la tendència lineal del núvol de punts. Consulteu la secció 2.3. Calculeu la recta de millor ajustament al núvol de punts pel mètode dels mínims quadrats. Interpreteu-ne els resultats.

Una polèmica científica que s'ha fet famosa és la paternitat del mètode dels mínims quadrats. Si bé la primera publicació respecte a aquesta qüestió va ser deguda a Legendre en el context de la determinació del metre, Gauss va afirmar que ell havia fet servir el mètode uns quants anys abans...

Capítol 4

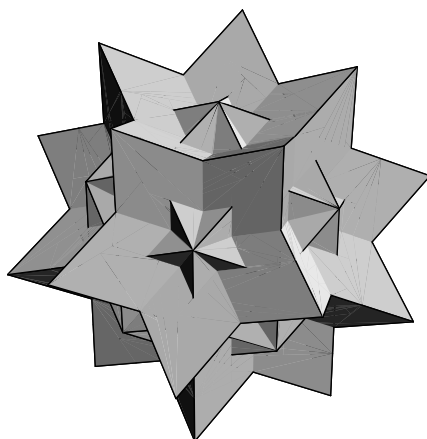
Passatemps matemàtics i altres divertiments

En aquest capítol s'han inclòs diversos temes de matemàtiques que tenen una part lúdica. Creiem que la matemàtica recreativa és també una bona manera de consolidar els conceptes matemàtics i d'entrenar la ment en el pensament lògic.

Dels quatre primers temes, “Passatemps matemàtics”, “Demostracions errònies”, “Lògica” i “Màgia matemàtica”, s'inclouen les solucions dels tres últims. Aconsellem no mirar-les gaire de pressa. El primer tema segueix el mateix esperit que els de la secció anterior. Qualsevol qüestió sobre aquests temes la podeu consultar a l'autor per e-mail o telèfon.

L'última secció barreja matemàtiques i llengua. Veureu que no són temes tan llunyans.

Al final del capítol s'inclou la bibliografia consultada per a preparar-lo.



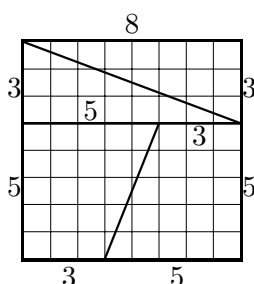
Icosàedre estrellat.

4.1 Passatempo matemàtics

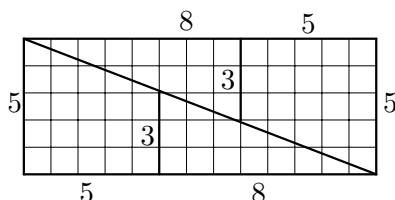
Aquesta selecció de problemes i els tres temes següents han estat preparats per Armengol Gasull i Embid, professor de Matemàtica Aplicada del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona. tel.: 93 581 29 09, e-mail: gasull@mat.uab.es.



4.1.1. Quadrat perdut. Considerem un quadrat 8×8 i el dividim en quatre trossos com a la figura:



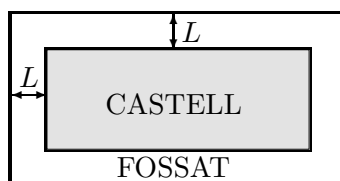
Aquests trossos es tornen a muntar fent un rectangle de 5×13



Ha aparegut un quadrat nou! D'on ha sortit?

Fes una construcció semblant partint d'un quadrat 13×13 fent les divisions de 5 i 8. Observeu que els números 3, 5, 8, 13 que surten en aquestes construccions són els que s'estudien al problema 3.5.11 i estan donats per la recurrència $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$ amb $X_0 = X_1 = 1$. Relacionem el quadrat aparegut amb la propietat $X_{n+1}^2 - X_n X_{n+2} = (-1)^{n+1}$.

4.1.2. Saltar un fossat. Hi ha un castell rectangular, envoltat per un fossat d'amplada L com a la figura:



Si disposeu de dos taulons d'una longitud de 10 metres cadascun, quina és la màxima L de manera que pugueu passar el fossat usant els taulons? I si disposeu de cinc taulons de la mateixa longitud?

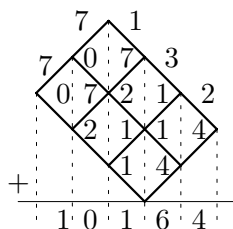
4.1.3. Una altra manera de multiplicar. Per a molts de nosaltres multiplicar està associat a saber les taules de l'1 al 9 i a conèixer com ordenar els càlculs d'una certa manera. És sorprenent adonar-se que es pot multiplicar dos números qualssevol només sabent fer dobles, meitats i sumes. Vegem com fer-ho amb un exemple.

Multiplicació de $77 \times 132 = 10\,164$

77*	132	132
38	264	_____
19*	528	528
9*	1 056	1 056
4	2 112	_____
2	4 224	_____
1*	8 448	+8 448
		10 164

Observeu que el mètode consisteix a fer dues columnes: l'una de meitats sense decimals (normalment la del nombre més petit), i l'altra de dobles. El resultat s'obté sumant els dobles corresponents als nombres senars de la primera columna. Per què funciona el mètode? Per cert, aquest mètode ha estat usat a diferents llocs del món, en particular a l'antic Egipte.

Hi ha una altra manera de multiplicar, encara avui usada a alguns llocs d'Àfrica, que té un fonament similar a la que nosaltres usem i que il·lustrem a la figura següent:



4.1.4. Problemes de pesos i mesures. Un problema clàssic (que ha sortit fa poc en una pel·lícula d'acció nord-americana) és el següent: tenim tres recipients de 8, 5 i 3 litres, el primer, ple de líquid, i els altres dos, buits. Com omplir els dos recipients grans amb 4 litres cadascun sense utilitzar cap altre recipient? Una solució és la següent:

8 l	5 l	3 l
8	0	0
5	0	3
5	3	0
2	3	3
2	5	1
7	0	1
7	1	0
4	1	3
4	4	0

Busqueu una solució amb menys moviments.

Podeu fer el mateix amb els recipients següents:

12 l, 7 l i 5 l ?

10 l, 6 l i 4 l ?

Alguns problemes relacionats són els següents:

- Us trobeu a la vora d'un riu amb dues galledes, una de 5 l i una altra de 3 l. Com aconseguiríeu 1 l, 2 l, 3 l, 4 l, 5 l, 6 l, 7 l i 8 l exactament?
- Com mesuraríeu 9 minuts amb dos rellotges de sorra, un de 7 minuts i un altre de 4 minuts?
- Una companyia d'autobusos té la norma següent: els paquets que no sobrepassin els 4 metres de longitud no paguen suplement. Com aconseguiríeu pujar a un autobús d'aquesta companyia amb una canya de pescar (rígida i no desmuntable) de 5 metres de llarg, sense pagar suplement?
- 3 botigues s'han de repartir 21 barrils de vi, dels quals 7 són plens, 7 mig plens i 7 buits. Com faríeu la repartició de manera que cada botiga tingués el mateix nombre de barrils i la mateixa quantitat de vi?
- Tenim deu piles amb deu monedes cada pila. Totes les monedes són indistingibles externament. Hi ha una pila on cada moneda pesa 9 grams, mentre que cada una de les altres 90 monedes pesa 10 grams. Com identificaríeu quina és la pila en què les monedes pesen menys fent una sola pesada en una bàscula?
- Com ho faríeu per a pesar exactament qualsevol quantitat entera entre 1 kg i 27 kg usant una balança amb 2 plats i només 4 pesos, els d'1kg, 3 kg, 9 kg i 27 kg? Es poden posar pesos als dos costats de la balança.
Amb només 3 pesos, de 2 kg, 6 kg i 18 kg, també es pot determinar quant pesa un objecte que té un pes enter entre 1 kg i 27 kg. Com ho faríeu?

4.1.5. Estratègia sorprenent. Explicarem un joc que apareix en diferents llocs (al carrer, als concursos de TV, etc.) amb diferents presentacions i que té una estratègia sorprenent. Suposem que tenim tres gobelets de cap per avall en un dels quals hi ha amagat un premi. Ens demanen que triem un d'ells. Un cop l'hem triat la persona que ha amagat el premi ens diu el següent: "Jo sé en quin dels tres gobelets hi ha el premi i per a facilitar-te la tria et destaparé un dels dos gobelets que no has triat (i en destapa un dels dos, evidentment un sense premi)". Aleshores et pregunta si vols canviar la teva tria de gobelet.

Explica per què et convé més canviar de gobelet que no mantenir-te amb el que haves triat de bon començament. De fet, raona per què amb aquesta estratègia jugant moltes partides guanyaràs el doble de premis que sense canviar de gobelet. Si no hi trobes cap explicació, fes primer unes quantes partides amb un company per a convence't.

4.1.6. Quadrats màgics. Un quadrat màgic és una col·lecció de n^2 nombres naturals diferents posats en un quadrat de manera que la suma de totes les columnes, la de totes les files i la suma de les dues diagonals és un valor constant K , anomenat la constant del quadrat.

Un dels més antics que es coneix (construït segles abans de Crist a Xina i a l'Índia) és el següent d'ordre 3, amb constant $K = 15$

8	3	4
1	5	9
6	7	2

De fet, l'estructura general d'un quadrat màgic de mida 3 amb constant $K = 3x$ és

$x + y$	$x - (y + z)$	$x + z$
$x - (y - z)$	x	$x + (y - z)$
$x - z$	$x + y + z$	$x - y$

on x , y i z són nombres naturals tals que tots els resultats del quadrat siguin positius. Intenteu construir un quadrat màgic 3×3 de forma que tots els seus nombres siguin primers. Com a pista direm que hi ha un quadrat màgic d'aquest tipus amb constant 177, en el qual el primer més petit és 5 i el més gran 113.

Un quadrat famós, que apareix al gravat d'Albert Durer, *La Melencolia I*, és

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Les dues caselles centrals de l'última fila indiquen l'any 1514, en el qual l'obra va ser gravada. La constant d'aquest quadrat és $K = 34$.



Fragment de l'obra de Durer.

Expliqueu com aconseguir un quadrat màgic de mida 4 amb constant K qualsevol nombre més gran que 34 fent modificacions al quadrat de Durer (si $K - 34$ no és múltiple de 4, els quadrats màgics obtinguts poden tenir alguna xifra repetida).

Observeu que el quadrat màgic de Durer té moltes altres propietats: 34 surt com a suma de les 4 caselles centrals, com a suma dels quadrats 2×2 de les cantonades, etc.

Descobreix quina propietat fa especial el següent quadrat màgic de constant 264

96	11	89	68
88	69	91	16
61	86	18	99
19	98	66	81

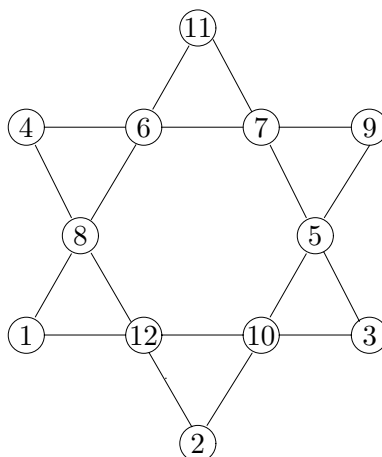
No es coneix cap mètode per a construir quadrats màgics per a qualsevol n parell, però si que n'hi ha per a n senar. A la figura següent s'il·lustra una construcció per a $n = 5$.

				<u>5</u>				
			<u>4</u>		<u>10</u>			
		3		9		15		
	2		8		14		20	
1		7		13		19		25
	6		12		18		24	
		11		17		23		
		<u>16</u>		<u>22</u>				
		<u>21</u>						

3	<u>16</u>	9	<u>22</u>	15
20	8	<u>21</u>	14	2
7	25	13	1	19
24	12	<u>5</u>	18	6
11	<u>4</u>	17	<u>10</u>	23

Construïu un quadrat màgic 7×7 .

Hi ha molts d'altres problemes similars als dels quadrats màgics. Per exemple, a la figura següent hi ha una estrella màgica amb els números $1, 2, 3, \dots, 12$.



Observa que la suma de tots els nombres alineats és 26. Sabries construir una estrella màgica amb els mateixos nombres però de manera que la suma de les 6 puntes de l'estrella també fos 26?

4.1.7. Al voltant del tres en ratlla. Ens proposen el següent joc: Tenim una llista dels números de l'1 al 9. Hi ha dos jugadors, l'un amb fitxes blanques i l'altre amb fitxes negres. Els jugadors van cobrint alternativament els nombres amb les seves fitxes. Quan un nombre és cobert, ja no es pot tornar a cobrir. Guanya el primer jugador que obtingui exactament 15 amb tres fitxes (no val obtenir 15 amb només dues fitxes).

Expliqueu com el quadrat màgic 3×3 donat al problema anterior pot ser utilitzat per a obtenir una bona estratègia de joc.

Un joc semblant és el següent: de la llista de paraules

PALS, BATA, TRES, PRIOR, MÚSIC, BIT, CAMARA, MELÓ, PEU

dos jugadors van triant alternativament una paraula cada un. Guanya el primer jugador que tingui tres paraules amb la mateixa lletra.

Expliqueu com dissenyar una bona estratègia de joc a partir d'un joc de tres en ratlla associat. Inventeu grups diferents de nou paraules amb propietats semblants.

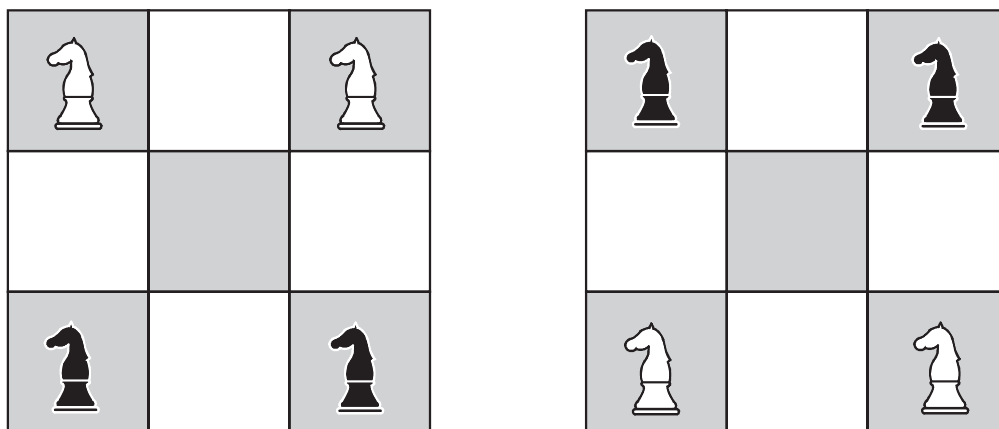
4.1.8. Creuament d'un riu. Els tres problemes següents són coneguts des de fa molt temps.

- Un barquer vol passar a l'altra banda d'un riu a un llop, una cabra i un sac de cols, però la seva barca és tan petita que només l'admet a ell i una de les tres coses. Com pot fer-ho sense deixar en cap moment soles les parelles: llop-cabra, cabra-sac de cols?
- Un regiment vol passar un riu molt profund, però no hi ha pont. De cop veuen dos nens jugant amb una barca molt petita. Com ho faran per a passar el riu utilitzant aquesta barca, si sabem que la barca només pot aguantar el pes dels dos nens o d'un sol soldat?

-

- Tres marits gelosos es troben amb les seves mullers a una banda d'un riu. Volen passar a l'altra banda i disposen d'una barca en la qual només hi caben dues persones. Com s'ho faran per a passar els sis a l'altra banda del riu amb la condició que cap dona es quedi mai en companyia d'un altre home sense la presència del seu marit.

4.1.9. Cavalls d'escacs. Tenim situats quatre cavalls d'escacs (dos de blancs i dos de negres) en un taulell 3×3 com a la figura. Quin és el nombre mínim de moviments, seguint les regles dels escacs, per tal de que els blancs i els negres intercanviïn les seves posicions?



I si el taulell és de mida 3×4 i hi ha tres cavalls blancs i tres cavalls negres a les bandes d'amplada 3?

4.1.10. Herència conflictiva. Un pastor en morir posseïa un ramat de 23 ovelles. El seu testament especificava que deixava tots els seus bens als seus tres fills de la manera següent: la meitat de tots els seus bens per al fill gran, la tercera part per al fill mitjà i la vuitena part per al fill petit. Els germans no es posaven gens d'acord en com repartir-se les ovelles, ja que no en volien matar i trossejar cap. La solució els la va donar un amic seu que passava per allà amb un ramat d'ovelles. Els va dir: "Jo us regalo una de les meves ovelles. Així en teniu 24. Si us les repartiu d'acord amb els desitjos del vostre pare, en tindreu $24/2 = 12$, $24/3 = 8$ i $24/8 = 3$. Com veieu, heu agafat $12 + 8 + 3 = 23$ ovelles; per tant, en sobra una que és la meva." Se la va tornar a emportar i tots tan contents. Què ha passat?

4.2 Demostracions errònies

A tots els problemes següents hi ha una errada. L'heu de trobar. Al final hi trobareu les explicacions dels errors comesos.

4.2.1. Prenem dos números iguals a i b .

$$\begin{array}{ll}
 a = b, & \\
 ab = b^2 & \text{(multiplicant per } b), \\
 a^2 - ab = a^2 - b^2 & \text{(canviant de signe i sumant } a^2), \\
 a(a - b) = (a + b)(a - b) & \text{(traient factors comuns),} \\
 a = a + b & \text{(eliminant } a - b \text{ als dos costats),} \\
 a = 2a & \text{(recordem que } a = b), \\
 1 = 2 !! & \text{(eliminant } a).
 \end{array}$$

4.2.2.

$$\begin{array}{ll}
 4 - 10 = 9 - 15, & \text{(claríssim),} \\
 4 - 10 + \frac{25}{4} = 9 - 15 + \frac{25}{4} & \text{(sumant } \frac{25}{4} \text{ als dos costats),} \\
 \left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2 & \text{(usant } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2), \\
 2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2} & \text{(prenent arrels quadrades),} \\
 2 = 3 !! & \text{(eliminat el } \frac{5}{2}).
 \end{array}$$

4.2.3. És fàcil deduir que, si $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ amb $qs \neq 0$, aleshores, quan $q \neq s$ tenim

$$\frac{p - r}{q - s} = \frac{p}{q}.$$

Això és així perquè $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ si i només si $ps = rq$ i $\frac{p-r}{q-s} = \frac{p}{q}$ si i només si $(p-r)q = p(q-s)$.

Prenem ara x i y tals que

$$\frac{3x - 5}{3x - 1} = \frac{3y - 8}{3y - 4};$$

aleshores, usant el resultat anterior tenim

$$\frac{3x - 5}{3x - 1} = \frac{3y - 8}{3y - 4} = \frac{3x - 5 - (3y - 8)}{3x - 1 - (3y - 4)} = \frac{3x - 3y + 3}{3x - 3y + 3} = 1.$$

Si substituïm $x = 1$ tenim

$$\frac{-2}{2} = 1 !!$$

4.2.4. Tenim que

$$\begin{aligned}\frac{1}{8} &< \frac{1}{4} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^3 &< \left(\frac{1}{2}\right)^2 && \text{(equivalent a l'expressió anterior)} \\ \log\left(\frac{1}{2}\right)^3 &< \log\left(\frac{1}{2}\right)^2 && \text{(el log és una funció creixent)} \\ 3\log\left(\frac{1}{2}\right) &< 2\log\left(\frac{1}{2}\right) && \text{(usant } \log x^a = a \log x) \\ 3 &< 2 !! && \text{(cancel·lant als dos costats } \log\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0\text{).}\end{aligned}$$

4.2.5. Volem calcular la integral definida

$$\begin{aligned}I(A) &= \int_{2\cos A}^1 \frac{a \, dx}{\sqrt{1-a^2x^2}} = \arcsin(ax) \Big|_{x=2\cos A}^1 = \\ &= \arcsin a - \arcsin(2a \cos A).\end{aligned}$$

Observeu que hem usat que $(\arcsin(ax))' = \frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$.

Si prenem $a = \sin A$, aleshores tenim que

$$\begin{aligned}I(A) &= I(\arcsin A) = \\ &= \arcsin(\sin A) - \arcsin(2 \sin A \cos A) = A - \arcsin(\sin 2A) = \\ &= A - 2A = -A,\end{aligned}$$

on hem usat que $\arcsin$ és la funció inversa de $\sin$, i que $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$.

Ara fixem $A = \frac{\pi}{3}$, $\cos A = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, i per tant

$$I\left(\frac{\pi}{3}\right) = \int_1^1 \frac{a \, dx}{\sqrt{1-a^2x^2}} = 0 \quad \text{(integrem en un interval de mida 0),}$$

però, per altra banda, $I\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$ i, per tant,

$$0 = -\frac{\pi}{3} !!$$

4.2.6. Volem calcular una primitiva $f(\theta)$ de $\sin \theta \cos \theta$, és a dir una funció $f(\theta)$ tal que $f'(\theta) = \sin \theta \cos \theta$. Ja sabem que

$$f(\theta) = \int \sin \theta \cos \theta \, d\theta.$$

Calcularem $f(\theta)$ de dues maneres diferents i igualarem el resultat

Forma 1:

$$f(\theta) = \int \sin \theta \cos \theta \, d\theta = \int \sin \theta \frac{d \sin \theta}{d\theta} \, d\theta = \frac{\sin^2 \theta}{2}.$$

Forma 2:

$$f(\theta) = \int \sin \theta \cos \theta \, d\theta = - \int \frac{d \cos \theta}{d\theta} \cos \theta \, d\theta = -\frac{\cos^2 \theta}{2}.$$

Observeu que les dues expressions de $f(\theta)$ són correctes ja que

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\sin^2 \theta}{2} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{-\cos^2 \theta}{2} \right) = \sin \theta \cos \theta.$$

Iguplant ambdues expressions,

$$f(\theta) = \frac{\sin^2 \theta}{2} = \frac{-\cos^2 \theta}{2},$$

i per tant

$$\frac{\sin^2 \theta}{2} + \frac{\cos^2 \theta}{2} = 0.$$

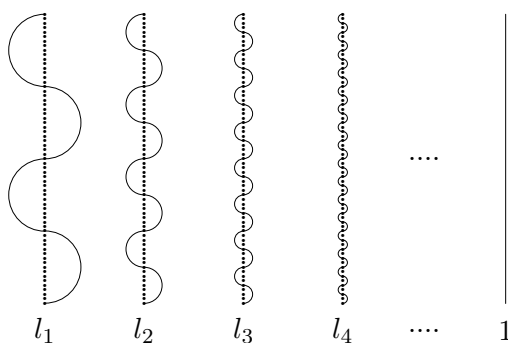
Com que $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, obtenim

$$\frac{1}{2} = 0 !!$$

4.2.7. Recordeu que $i = \sqrt{-1}$ i per tant $i^2 = -1$. Aleshores, tenim que

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = ii = i^2 = -1 !!$$

4.2.8. Prenen les corbes formades per mitges circumferències, com a la figura següent, de manera que la línia puntejada tingui longitud 1. Anomenen l_n per $n = 1, 2, 3, \dots$ les longituds de les corbes que anem obtenint. Com que les corbes s'aproximen al segment vertical de mida 1, les seves longituds l_n s'hauran d'aproximar a 1. Per exemple $l_1 = 2(2\pi\frac{1}{8}) = \frac{\pi}{2}$. És fàcil veure que $l_1 = l_2 = l_3 = \dots = l_n = \dots = \frac{\pi}{2}$. Per tant, $\frac{\pi}{2} = 1 !!$



4.2.9. Volem sumar els infinits números

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \dots$$

Anomenem S la seva suma. D'una banda, tenim que

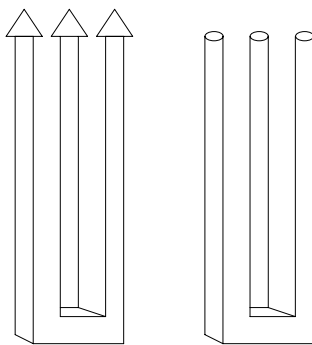
$$\begin{aligned} S &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \dots > 0, \end{aligned}$$

ja que $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0$ per $n = 1, 2, 3, \dots$. D'altra banda,

$$\begin{aligned} S &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \dots = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots\right) = \frac{1}{2}S. \end{aligned}$$

Com que $S = \frac{1}{2}S$, hem obtingut que $S = 0$; però, usant el primer mètode, teníem que $S > 0$. Aleshores,

$$0 = S > 0 !!$$



Dues figures impossibles.

4.2.1 Explicacions

1. A la igualtat $a(a - b) = (a + b)(a - b)$, tenim que $a - b = 0$, i 0 no es pot cancel·lar mai quan està multiplicant els dos costats d'una igualtat.
2. Si no es posa cap signe davant d'una arrel quadrada, s'entén que dona un valor positiu. Així,

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Per tant,

$$\sqrt{\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2} = \left|2 - \frac{5}{2}\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

3. Aquí l'error ve d'usar que $\frac{p-r}{q-s} = \frac{p}{q}$ quan $q = s$. Observeu que si $x = 1$ de l'equació $\frac{3x-5}{3x-1} = \frac{3y-8}{3y-4}$, obtenim que $y = 2$, i per tant $\frac{3x-3y+3}{3x-3y+3} = \frac{0}{0}$.
4. Quan es té una desigualtat certa, si la multipliquem per un nombre negatiu, canvia, per exemple: $3 > 2$, si multipliquem per -2 , $(-2)3 < (-2)(2)$. Per tant, a la demostració, quan cancel·lem $\log\left(\frac{1}{2}\right)$, que és negatiu, canviaria la desigualtat a $3 > 2$.

5. L'error ve del mal ús de la funció arcsin. Observeu que $\sin A = \sin(\pi - A) = \sin(2\pi + a) = \dots$, i per tant la funció arcsin pot prendre molts valors. Així

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \dots \right\},$$

i per $A = \frac{\pi}{3}$ la igualtat certa és

$$\begin{aligned} 0 &= \int_1^1 \frac{a \, dx}{\sqrt{1 - a^2 x^2}} = \arcsin \left(\sin \frac{\pi}{3} \right) - \arcsin \left(\sin \frac{2\pi}{3} \right) = \\ &= \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Observeu que hauríem comès un error usant que $\arcsin \left(\sin \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{2\pi}{3}$.

6. Recordeu que totes les funcions tals que derivades donen una funció concreta, com per exemple $\sin \theta \cos \theta$, s'obtenen sumant una constant K arbitrària a una primitiva donada. És a dir

$$\int \sin \theta \cos \theta \, d\theta = \frac{\sin^2 \theta}{2} + K.$$

Per tant, si tenim dues primitives $\frac{\sin^2 \theta}{2}$ i $-\frac{\cos^2 \theta}{2}$ de la mateixa funció $\sin \theta \cos \theta$, no podem deduir que són iguals, sinó que restades donen una constant. Aquest és el cas, ja que

$$\frac{\sin^2 \theta}{2} - \left(-\frac{\cos^2 \theta}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

7. Fer arrels quadrades de nombres complexos és delicat. Com sempre, tenen dues solucions (una canviada de signe respecte a l'altra), però no és clar com prendre els signes de manera que

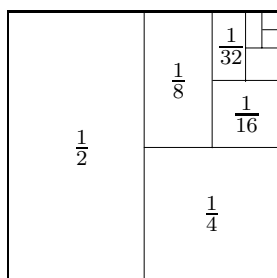
$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}.$$

Amb d'altres paraules, podem dir que la igualtat anterior només és certa per a a i b reals positius.

8. L'error prové de suposar que el fet que unes corbes s'aproximin a una altra implica que les seves longituds també hauran d'aproximar la longitud de la corba límit. Això només és cert si s'aproximen a la corba límit tant les corbes com les seves rectes tangents.
9. Aquest és un error molt més delicat. El problema prové de saber què vol dir sumar infinits nombres. Per exemple, si volem sumar els infinits números:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$$

podem imaginar que aquests es corresponen a prendre les parts següents d'un quadrat de mida 1×1 : la meitat, la meitat de la meitat, i així successivament, obtenint rectangles d'àrea els números donats. Vegeu la figura següent:



Aleshores és clar

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = 1.$$

Observeu que la suma total és 1 i que el resultat que obtenim no depèn de l'ordre en què sumem els nombres. En canvi, quan es tracta de sumar infinits nombres positius i negatius el resultat pot dependre de l'ordre en què se sumen. Això ens pot sorprendre perquè la suma d'un nombre finit de nombres sí que és commutativa. Podeu veure aquest tema amb més detall, per exemple en el llibre de M. Spivak *Cálculo infinitesimal*, Reverté, 1975.

Si en lloc dels números considerats prenem els següents

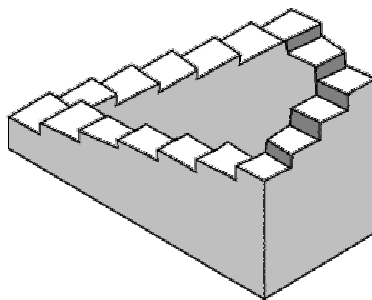
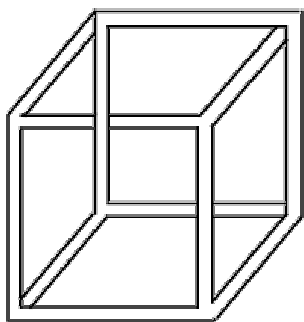
$$+1, -1, +1, -1, +1, -1, +1, -1, +1, \dots$$

es pot veure el problema més clar. Si els sumem de dos en dos tenim

$$S = (+1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0.$$

D'altra banda, si separem el número 1

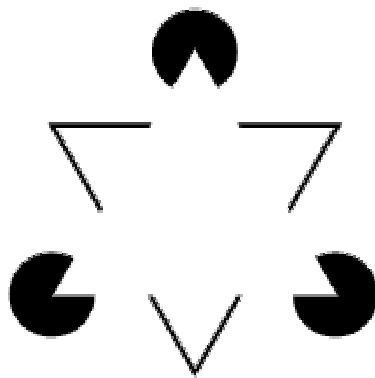
$$S = +1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1.$$



Dues figures impossibles més.



Reproducció d'una famosa obra del pintor holandès Mauritus Cornelis Escher (1898-1972).
El món de les matemàtiques ha inspirat Escher en moltes de les seves obres.



Hi ha realment un triangle blanc?

4.3 Lògica

4.3.1. Hi ha tres persones molt intel·ligents i els volem fer una prova per a veure quina té el raonament més ràpid. Aquesta consisteix en el següent: els diem que els posarem a cadascuna d'elles un mocador a l'esquena i que pot ser o blanc o negre. Un cop tinguin posat el mocador, tots podran veure el de les altres persones, però no el seu. Si veuen algun mocador blanc hauran d'aixecar la mà. El primer que descobreixi el color del seu mocador haurà guanyat la prova.

Col·loquem mocadors blancs a les tres persones i evidentment totes tres aixequen la mà. Veient això, una de les tres persones diu: “Ja sé de quin color és el meu mocador, és blanc”. Com ho ha deduït?

4.3.2. Som en una zona del món on només hi ha dues tribus, els Francs i els Mentiders. Els de la primera tribu sempre diuen la veritat i els de la segona sempre menteixen. Som al costat d'un membre d'una de les tribus i li preguntem a un membre de l'altra (que és bastant lluny) de quina tribu és. Ell ens contesta però no el sentim bé. Aleshores li preguntem a la persona que tenim al costat: “Què ha contestat?” Aquest respon: “Diu que és un Franc.” A quina tribu pertany la persona que és a prop nostre?, i a quina la persona llunyana?

4.3.3. Suposem que seguim en la mateixa zona del món que en el problema anterior i som en una cruïlla on hi ha un Franc i un Mentider. Nosaltres som incapaços de saber quin és quin. Només un dels dos camins ens porta al bosc on volem anar. Com faríeu una sola pregunta a una de les dues persones per tal de saber quin és el camí correcte?

4.3.4. Encara som a la mateixa zona del món que en els dos problemes anteriors, però a més suposem que als nadius de les dues tribus no els agrada parlar gaire i només contesten amb dos monosíl·labs: “tut” i “pap”. Sabem també que un d'aquests mots significa “sí” i l'altre “no,” però no recordem quin és quin. Si ens trobem en una cruïlla amb dos camins a seguir i sabem que només un dels dos camins ens porta al mar, on volem anar, com us ho faríeu amb una sola pregunta per a saber quin dels dos camins és el que hem de prendre. Evidentment, som incapaços de distingir els nadius de les dues tribus.

4.3.5. Hi ha un problema extret de la famosa obra de Miguel de Cervantes *Don Quijote de la Mancha*, i que li posen a Sancho Panza. És el següent, copiat literalment:

Con esta sofistería padecía hambre Sancho, y tal, que en su secreto maldecía el gobierno y aun a quien se le había dado; pero con su hambre y con su conseva se puso a juzgar aquel día, y lo primero que se le ofreció fue una pregunta¹ que un forastero le hizo, estando presentes a todo el mayordomo y los demás acólitos, que fue:

—Señor, un caudaloso río dividía dos términos de un mismo señorío (y esté vuestra merced atento, porque el caso es de importancia y algo dificultoso). Digo, pues, que sobre este río estaba una puente, y al cabo della, una horca y una como casa de audiencia, en la cual de ordinario había cuatro jueces que juzgaban² la ley que puso el dueño del río, de la puente y del señorío, que era en esta forma: “Si alguno pasare por esta puente de una parte a otra, ha de jurar primero adónde y a qué va; y si jurare verdad, déjenle pasar; y si dijere mentira, muera por ello ahorcado en la horca que allí se muestra, sin remisión alguna.” Sabida esta ley y la rigurosa condición della,

¹Un problema, enigma.

²Aplicaban.

pasaban muchos, y luego en lo que juraban se echaba de ver que decían verdad, y los jueces los dejaban pasar libremente. Sucedió, pues, que tomando juramento a un hombre, juró y dijo que para³ el juramento que hacía, que iba a morir en aquella horca que allí estaba, y no a otra cosa. Repararon los jueces en el juramento, y dijeron: “Si a este hombre le dejamos pasar libremente, mintió en su juramento, y, conforme a la ley, debe morir; y si le ahorcamos, él juró que iba a morir en aquella horca, y, habiendo jurado verdad, por la misma ley debe ser libre.” Pídesse a vuestra merced, señor gobernador, qué harán los jueces de tal hombre; que aun hasta agora están dudosos y suspensos. Y habiendo tenido noticia del agudo y elevado entendimiento de vuestra merced, me enviaron a mí a que suplicase a vuestra merced de su parte diese su parecer en tan intrincado y dudoso caso.

A lo que respondió Sancho:

—Por cierto que esos señores jueces que a mí os envían lo pudieran haber escusado, porque yo soy un hombre que tengo más de mostrenco que de agudo; pero, con todo eso, repetidme otra vez el negocio de modo que yo le entienda: quizá podría ser que diese en el hito.

Volvió otra vez y otra vez el preguntante a referir lo que primero había dicho, y Sancho dijo:

—A mi parecer, este negocio en dos paletas le declararé yo, y es así: el tal hombre jura que va a morir en la horca, y si muere en ell, juró verdad, y por la ley puesta merece ser libre y que pase la puente; y si no le ahorcan, juró mentira, y por la misma ley merece que le ahorquen.

—Así es como el señor gobernador dice —dijo el mensajero—; y cuanto a la entereza y entendimiento del caso, no hay más que pedir ni que dudar.

Quina resposta creieu que Sancho Panza va donar. A les solucions trobareu la continuació d'aquest text.

4.3.6. Quan es fan enunciats sobre si certes frases són certes o falses, s'arriba a situacions sorprenents. Considerem els exemples següents:

- Un català diu: “Tots els catalans són mentiders.” Què pots dir sobre els catalans?
- Frase A: La frase B és falsa.
Frase B: La frase A és certa.
- Plató diu: “La pròxima frase de Sòcrates serà falsa.” Sòcrates diu: “Plató ha dit la veritat.”

4.3.7. Li fem un regal a un amic, i per fer-ho a una mica més divertit li diem que l'hem posat dins d'una capsa d'entre cinc, que estan numerades de l'1 al 5. A més, li assegurem que si obre les capsas per ordre numèric, l'hem posat en una capsa de manera que mai no es pugui esperar quina és la que conté el regal.

Aleshores ell raona de la manera següent: “El regal no pot estar a la cinquena capsa ja que, un cop obertes les quatre primeres, ja no seria una sorpresa per a mi trobar-lo a l'última. De la mateixa manera puc descartar la quarta, després la tercera, la segona i la primera. Per tant, totes les capsas seran buides i no tinc cap regal.”

4.3.8. La predicció del futur també porta problemes lògics. Suposem que algú ens diu que pot predir el futur. Nosaltres li diem: “Hem escrit en un paper una cosa que pot passar o

³Por.

no abans de demà; si creus que passarà, escriu SÍ en un paper, i si creus que no passarà, escriu NO”.

Nosaltres hem escrit al paper: “Abans de demà hauràs escrit NO en un paper”.

Ha pogut endevinar si el que hem escrit passarà?

- 4.3.9.** Diu la llegenda que en un petit regne medieval dos savis estrangers varen ser agafats i conduïts a la torre més alta del regne. La torre tenia dues cel·les amb una finestra cada una. Si es mirava per les dues finestres, es veien tots els pobles del regne, però no hi havia cap poble que es veiés des de les dues finestres. Es va tancar a un savi a cada cel·la de la torre amb les instruccions següents: “Heu d’endevinar, sense parlar entre vosaltres, quants pobles hi ha al regne. Cada matí vindrem a preguntar-vos si ja ho heu descobert. Si un de vosaltres encerta el nombre de pobles, us deixarem ambdós lliures. Si s’equivoca, us conduïrem immediatament al soterrani de la torre, on passareu la resta dels vostres dies. Només us donarem una pista: al regne hi ha tres o quatre pobles.” Segons diu la història, un dels dos savis va parlar correctament el tercer matí.

Quants pobles hi havia i quants en veia el savi que va parlar?

4.3.1 Explicacions

1. La persona ha raonat així: “Si jo hagués tingut un mocador negre a l’esquena, qualsevol de les altres dues persones (recordem que també són molt intel·ligents) hauria raonat de la manera següent: “veig un mocador blanc i un mocador negre; si jo tingués un mocador negre a l’esquena, la persona que té el mocador blanc veuria dos mocadors negres i no hauria aixecat la mà; com que ha aixecat la mà, vol dir que el meu mocador és blanc.” Com que cap de les dues persones no ha dit res, això vol dir que el meu mocador és blanc.”

Un problema molt similar es té quan, en lloc de dir a les persones que han d’aixecar la mà si veuen algun mocador blanc, se’ls diu que només hi ha tres mocadors blancs i dos de negres.

2. Observeu que, independentment de la tribu a què pertany la persona llunyana, la resposta sempre serà: “Sóc Franc”; si ho és, perquè és cert, i si no ho és, perquè és mentida. Per tant, com la persona que és a prop nostre ha dit: “Diu que és Franc”, això vol dir que la persona propera diu la veritat i és Franc, i que la persona llunyana és Mentider.
3. La pregunta que li podem fer a qualsevol dels dos és: “Si li preguntés a l’altra persona si aquest —assenyalant un dels dos camins— és el camí del bosc, què em diria?”

Observem que si el camí és el correcte, les dues persones ens contestarien que NO; el Franc perquè ens diria el que realment contestaria el Mentider, i el Mentider perquè canviaria la resposta del Franc. De la mateixa manera podem raonar que si el camí no fos el correcte, els dos ens contestarien que l’altre diria que SÍ que ho és. Per tant, hem de fer el contrari del que ens contestin.

4. La pregunta que cal fer és molt enrevessada, i és la següent: “Si jo et preguntés si aquest és el camí del mar, em contestaries que «tut»?”

Veiem les possibles respostes en funció de si la persona és Franc o Mentider i del significat de “tut” i “pap”:

CAMÍ	NADIU	SIGNIFICAT “TUT” / “PAP”	RESPOSTA
Correcte	Franc	Sí/No	Tut
Correcte	Franc	No/Sí	Tut
Correcte	Mentider	Sí/No	Tut
Correcte	Mentider	No/Sí	Tut
Incorrecte	Franc	Sí/No	Pap
Incorrecte	Franc	No/Sí	Pap
Incorrecte	Mentider	Sí/No	Pap
Incorrecte	Mentider	No/Sí	Pap

Per tant, independentment de si la persona és Franc o Mentider i del significat de “tut” i “pap”, la resposta és “tut” si el camí és el correcte i “pap” si el camí és l’incorrecte.

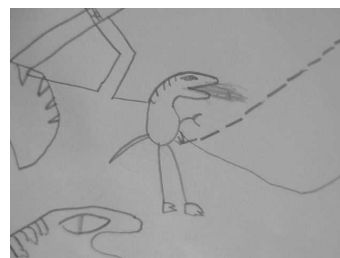
5. La continuació del text del *Quixot* és:

— Digo yo, pues, agora —replicó Sancho— que deste hombre aquella parte que juró verdad la dejen pasar, y la que dijo mentira la ahorquen, y desta manera se cumplirá al pie de la letra la condición del pasaje.

—Pues, señor gobernador —replicó el preguntador—, será necesario que el tal hombre se divida en dos partes, en mentirosa y verdadera; y si se divide, por fuerza ha de morir, y así no se consigue cosa alguna de lo que la ley pide, y es de necesidad espresa que se cumpla con ella.

—Venid acá, señor buen hombre —respondió Sancho—; este pasajero que decís, o yo soy un porro, o él tiene la misma razón para morir que para vivir y pasar la puente; porque si la verdad le salva, la mentira le condena igualmente; y siendo esto así, como lo es, soy de parecer que digáis a esos señores que a mí os enviaron que, pues están en un fil⁴ las razones de condenarle o asolverle, que le dejen pasar libremente, pues siempre es alabado más el hacer bien que mal, y esto lo diera firmado de mi nombre si supiera firmar, y yo en este caso no he hablado de mío, sino que se me vino a la memoria un precepto, entre otros muchos que me dio mi amo don Quijote la noche antes que viniese a ser gobernador desta ínsula: que fue que cuando la justicia estuviese en duda, me decantase y acogiese a la misericordia; y ha querido Dios que agora se me acordase, por venir en este caso como de molde.

Hi ha molts altres problemes que presenten essencialment la mateixa situació, per exemple el següent: Un dinosaure pren el nen a una mare i li pregunta: “Em menjaré el teu fill? Si respon correctament, te’l tornaré sa i estalvi; si no, me’l menjaré”. La mare li respon: “Et menjaràs el meu fill”.



6. Ens limitarem a posar un altre exemple. Prepareu una targeta i en una cara escriviu-hi

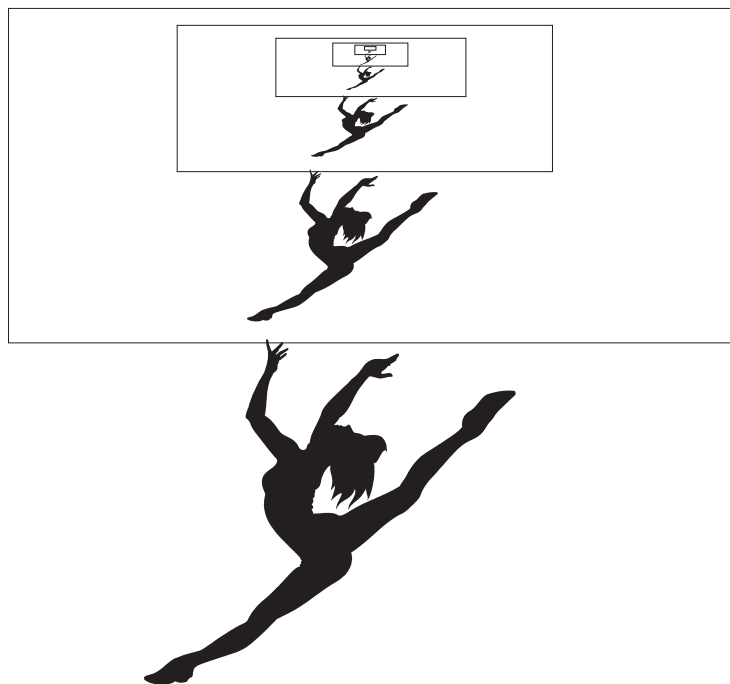
LA FRASE ESCRITA A L’ALTRA CARA D’AQUESTA TARGETA ÉS CERTA

⁴En el fiel de la balanza.

a l'altra cara escribiu:

LA FRASE ESCRITA A L'ALTRA CARA D'AQUESTA TARGETA ÉS FALSA

Quin embolic!



Recurrència gràfica infinita.

7. El regal és en una qualsevol de les capsas, i tal com havíem predit ell no esperava que fos en aquella capsas.

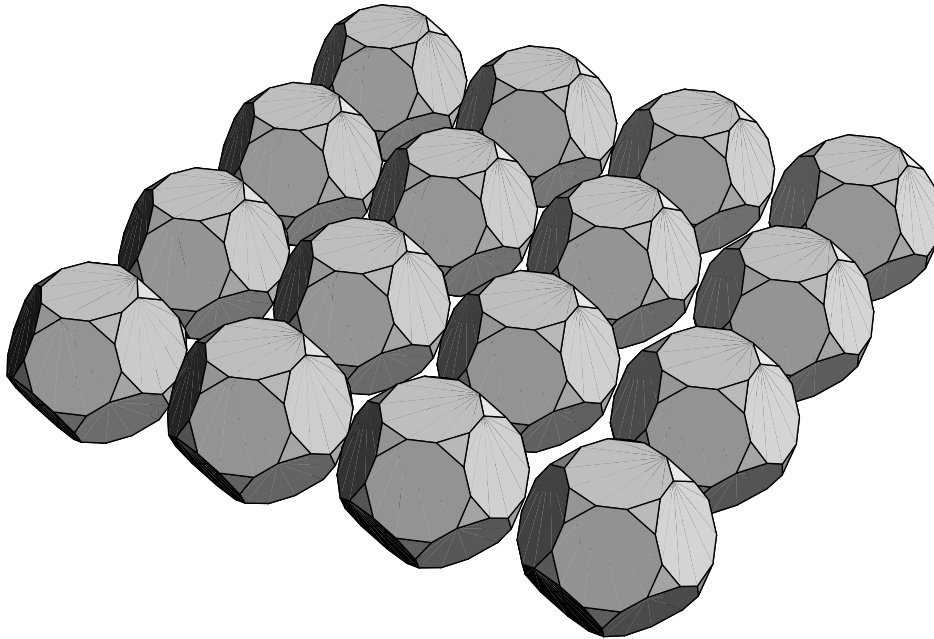
En certa manera, el raonament del nostre amic ha fallat.

8. No; si ha escrit SÍ clarament, no ho ha endevinat; si ha escrit NO, vol dir que creia que no passaria el que està escrit, i realment ha passat.
9. Abans de mirar per la finestra, els dos savis es posen a pensar en totes les combinacions possibles:
- Si un dels dos savis veu 4 pobles el primer matí, parlarà i encertarà segur.
 - Si l'un en veu 3 i l'altre 0, el que en veu 0 pensarà que l'altre en pot veure 3 o 4. Però, si en veiés 4 ja hauria parlat el primer matí; per tant, si no ha parlat és perquè en veu 3. Així, el segon matí, el savi que veu 0 pobles encertarà el nombre de pobles.
 - Si l'un en veu 3 i l'altre 1, el savi que en veu 3 pensarà que l'altre savi en veu 0 o 1. Si en veu 0, per al cas anterior, parlarà el segon matí; si no ho fa és perquè en veu 1. Així, el tercer matí el savi que en veu 3 encertarà el nombre de pobles.

- Si un savi veu 2 pobles i l'altre 1, el savi que en veu 1 s'esperarà al tercer matí. Si el tercer matí l'altre savi no ha parlat és perquè no són pas al cas anterior i, per tant, no en veu 3, sinó 2. Així, el savi que veu 1 poble encerta el nombre de pobles el quart matí.
- Si els dos savis veuen 2 pobles, s'esperaran que arribi el quart matí per a descartar el cas anterior. Com que cap dels dos parla el quart matí, el cinquè matí els dos alhora encertaran el nombre de pobles.

Per tant, si se sap que el tercer matí un savi va encertat el nombre de pobles, és que n'hi havia 4 i que el savi que va parlar és el que en veia 3.

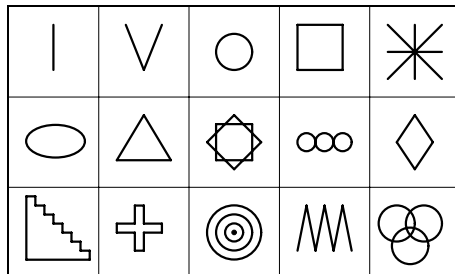
Us salvaríeu vosaltres si us plantejessin el mateix problema però en comptes d'haver-hi tres o quatre pobles, n'hi hagués vint-i-tres o vint-i-quatre?



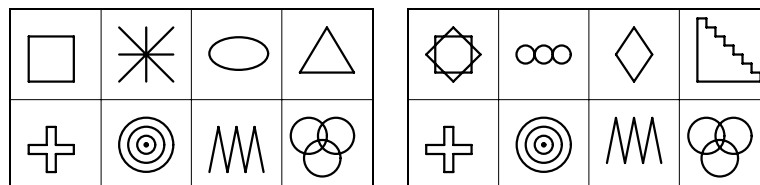
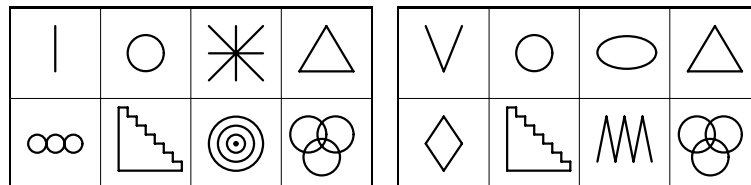
16 dodecàedres truncats.

4.4 Màgia matemàtica

4.4.1. Endevinar un objecte. Construiu una carta amb quinze objectes com a la figura



Demaneu a algú que triï un dels quinze objectes. Després li demaneu que digui si l'objecte que ha triat és o no a cada una de les quatre cartes següents:



L'objecte triat s'obté fent els comptes següents: s'associa a cada una de les quatre cartes amb vuit objectes un dels números 1, 2, 4 i 8 amb la regla següent: es mira l'objecte de dalt a esquerra. Cada un d'ells indueix el número: un pal $\rightarrow$ 1, una $V \rightarrow$ 2, un quadrat $\rightarrow$ 4, una estrella de 8 puntes $\rightarrow$ 8. La suma dels números associats a les cartes on hi ha l'objecte que busquem ens dona el nombre al qual correspon l'objecte buscat en la carta que conté tots els objectes. De fet, és millor no posar cap nombre a la carta amb els quinze objectes i numerar-los mentalment per files (el pal l'1, la V el 2, el cercle el 3, ...).

4.4.2. Endevinar una carta. D'una pila de 27 cartes demanem que algú en triï una. Després li diem que les barregi totes. Agafem les 27 cartes remenades i anem repartint les cartes en tres piles (una a cada pila cada cop seguint el mateix ordre) ensenyant totes les cartes. Li preguntem a la persona que ha triat la carta que indiqui a quina pila és la seva carta. Recollim les tres piles posant la pila amb la carta al mig de les altres dues.

Repetim el mateix procediment dos cops més. Sempre la carta triada és al lloc 14è de la baralla (de fet, al lloc 5é de l'última pila que ens indica qui ha triat la carta).

Per què funciona el truc? Dissenya'n modificacions, sia amb el mateix nombre de cartes i piles però recollint la pila amb la carta no sempre al segon lloc, sia amb diferent nombre de cartes i piles.

4.4.3. Suma rapidíssima. Es preparen cinc daus amb les puntuacions següents:

Dau 1	394	592	196	493	691	295
Dau 2	564	366	465	168	861	663
Dau 3	675	576	972	378	279	873
Dau 4	636	735	438	933	537	834
Dau 5	454	355	652	553	256	751

Es diu a algú que tiri els daus i assegurem que en pocs segons direm la seva suma. El truc consisteix en el següent: suposem que obtenim

394, 366, 972, 933, 256

aleshores sumem mentalment $4 + 6 + 2 + 3 + 6 = 21$, calculem $50 - 21 = 29$, i el resultat és 2921.

Per què funciona el truc? Pots construir taules diferents on funcioni el mateix truc?

4.4.4. Més jocs de cartes. Demanem que algú remeni un joc de cartes i, un cop remenat, ens l'entrega i el posem a la butxaca. Aleshores li diem que digui un nombre de l'1 al 15. Nosaltres anem traient cartes de la butxaca i les anem ensenyant. En traiem unes quantes de tal manera que sumin exactament el nombre que la persona ha triat.

Tot i que aquest truc és molt senzill, sol fer molt d'efecte. El truc consisteix a posar-se primer quatre cartes ordenades a la butxaca, un 1, un 2, un 4 i un 8. Quan ens donen la resta de les cartes les posem a continuació de les 4 triades (normalment ningú no s'adona si d'un joc complet de cartes n'hem tret quatre). Com segueix la resta del truc?

4.4.5. Truc del calendari. Portem un calendari de tot l'any i diem a algú que agafi un quadrat 4×4 (format per 16 dies d'un mes qualsevol). Un cop l'ha triat (nosaltres no el veiem en cap moment), li diem que ens digui quin és el nombre més petit

Desembre 1999

		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

A continuació li diem que triï un nombre qualsevol i que ratlli la seva fila i la seva columna (vegeu la figura si tria al 16). D'entre els nombres restants li diem que en triï un altre i elimini també la seva fila i la seva columna, i així un cop més. Vegeu la figura següent per a les tries 16, 8, 21. Queda sense ratllar el 31.

7	8	9	10
14	15	16	17
21	22	23	24
28	29	30	31

Li diem que sumi els quatre números no ratllats. El resultat el podem endevinar: serà $4(x + 12)$, on x és el nombre que ens havien dit. En aquest cas, $8 + 16 + 21 + 31 = 76 = 4(7 + 12)$.

4.4.6. Endevinar un número. Davant de tothom escrivim un nombre en un paper i li donem a algú per a què s'el guardi a la butxaca. Agafem una altra persona i li diem que faci les operacions següents:

- Que agafi un nombre de tres xifres no capicua.
- Que construeixi un altre nombre a partir del primer intercanviant la primera i la tercera xifres.
- Que resti el més petit dels dos al més gran dels dos.
- Que agafi el resultat de la resta i construeixi un nou nombre intercanviant la primera i la tercera xifres.
- Que sumi el nou nombre obtingut amb el resultat de la resta.

En aquest moment diem a l'altra persona que llegeixi el nombre que té guardat. Aquest nombre coincideix amb el resultat de totes les operacions. Per què?

4.4.7. Sense cap pregunta. Donem a una persona tres o quatre jocs de cartes. Li diem que les remeni bé. Aleshores, que pensi un nombre qualsevol de l'1 al 12. Un cop pensat, que vagi tirant cartes cap per amunt comptant en silenci fins que arribi a la carta que ocupa el lloc corresponent al nombre que havia pensat. Que miri el valor d'aquesta carta i a partir d'aquesta carta que compti tantes cartes com el valor indiqui fins a arribar a una altra carta, que miri el seu valor i continuï comptant, i així successivament... Per exemple, si pensa un 3 mira la tercera carta, si és un 5 tornarà a mirar la vuitena carta, si aquesta és un 12 tornarà a mirar la vintena carta i així successivament.

Nosaltres anem mirant passar les cartes, i sense preguntar res, quan estan a punt d'acabar-se totes les cartes encertem quines són les cartes en què s'està fixant. Per exemple, l'aturem i li diem: "Oi que ara et tocarà comptar tantes cartes?" Com creus que podem endevinar-ho?

4.4.8. Endevinar de nou un nombre. Demanem a una persona que pensi un nombre amb tantes xifres com vulgui (millor tres com a mínim). Després li diem que sumi totes les xifres del nombre i que calculi la diferència entre el nombre inicial i la suma de les seves xifres. Un cop fet el càlcul, li diem que ratlli una de les xifres del resultat i que ens digui la suma de les que quedin. Per exemple si pensa 1 295, hauria de fer $1\,295 - (1 + 2 + 9 + 5) = 1\,295 - 17 = 1\,278$. Aleshores, ratlla el 7 i ens diu $1 + 2 + 8 = 11$. Nosaltres som capaços d'endevinar el nombre que ha ratllat. Com ho fem?

4.4.9. Endevinar més nombres. Un dels trucs matemàtics més freqüents i que es basa en el domini de les equacions és el que consisteix a demanar a algú que pensi un nombre (o més d'un), que faci unes determinades operacions amb aquest (o aquests) i que ens digui el resultat. A partir d'aquest resultat, i sense més que resoldre una equació, nosaltres li podem endevinar el nombre (o nombres) que ha pensat. Posem un exemple per a fixar idees: com endevinar l'edat d'una persona. Li diem:

- Agafa el número del mes en que vas néixer.
- Multiplica'l per 4.
- Suma 5 al resultat.
- Multiplica el resultat per 50.
- Suma 1 738 al resultat (suposant que fem el truc l'any 2000; en general, el que s'ha de sumar és el nombre de l'any en curs menys 262).
- Resta-li l'any que vas néixer.

A partir del resultat podem deduir l'edat de la persona. L'explicació és la següent:

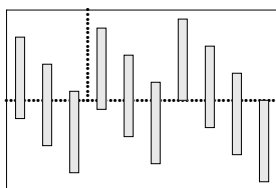
Sigui x el número del mes i suposem que la persona hagués nascut el 1980. Els resultats serien

$$\begin{aligned} x &\rightarrow 4x \rightarrow 4x + 5 \rightarrow (4x + 5)50 = \\ &= 200x + 250 \rightarrow (200x + 250) + 1738 = \\ &= 200x + 1988 \rightarrow (200x + 1988) - 1980 = \\ &= (2x)100 + 8; \end{aligned}$$

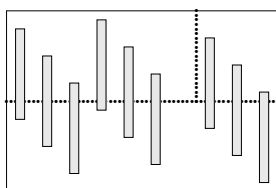
per tant, la meitat de les dues primeres xifres ens donarà el mes (x) en què va néixer la persona. Les dues segones xifres més 12, $(8 + 12)$ ens donaran els anys que farà la persona durant l'any 2000. Com que ja sabem el mes en què va néixer (x), si fem el truc abans del mes x li podem dir que té dinou anys; si el fem després del mes x , li direm que en té vint. Si fem el truc el mes x , encara podem sorprendre més la persona, ja que li direm “No sé si tens 19 o 20 anys, però sé que aquest mes és el teu aniversari.”

Hi ha una versió d'aquests trucs de fer operacions amb uns certs números i a partir del resultat endevinar-los que és una mica més original. Li diem a una persona que pensi un número i que ella mateixa vagi fent-hi operacions (sumes, restes i multiplicacions, preferentment) i que ens les expliqui en veu alta. A partir del resultat li podem dir el nombre pel qual havia començat. Com ho podem fer?

4.4.10. Desaparició. Considerem la cartolina següent, on hi ha deu columnes iguals:



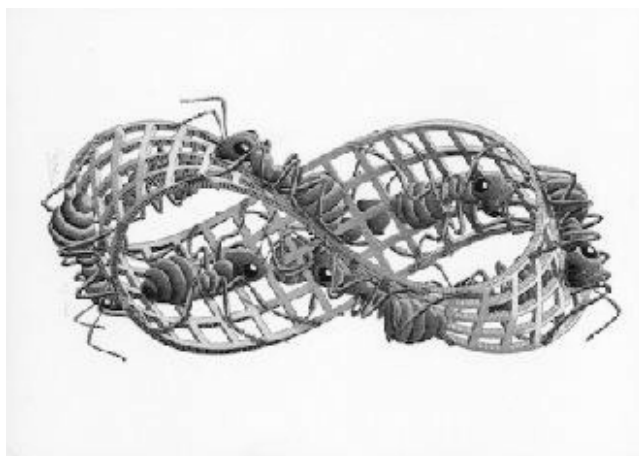
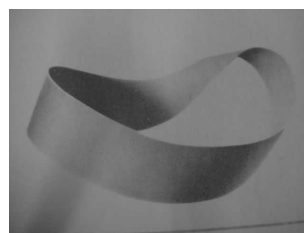
Si la retallem per la línia puntejada i la tornem a muntar posant la part superior esquerra a la part dreta i viceversa, obtenim la figura següent:



Observeu que aquesta només té nou columnes, també iguals. On és la columna que falta?

4.4.11. Paper misteriós. Agafeu una tira llarga de paper, cargoleu-la mitja volta i enganxeu les seves parts més estretes. Obtindreu una superfície que s'anomena cinta de Möbius; vegeu la figura adjunta. Experimenteu el que passa quan retalleu la cinta per la meitat llarga comparant-ho amb el que passaria si retalléssiu la cinta sense haver-la cargolat. Torneu a retallar per la meitat la cinta obtinguda.

El truc de màgia consisteix a donar a algú una cinta de Möbius molt llarga i agafar nosaltres una cinta igual de llarga (però sense estar cargolada). Aleshores, quan nosaltres la retallem pel mig, queda dividida en dues cintes més estretes; en canvi a l'altra persona li passen coses estranyes!



Reproducció d'una famosa obra del pintor holandès Mauritus Cornelis Escher (1898-1972) basada en la cinta de Möbius.

4.4.1 Explicacions

1. El truc està basat en l'expressió d'un nombre en base 2. Per exemple, $11 = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1 \cdot 11$, i per tant l'objecte associat a l'11, és a les cartes associades a 1, 2 i 8, i no és a la carta associada al 4.

Com construiríeu un truc similar per a endevinar un objecte entre 31 usant cinc cartes amb setze números? Penseu un truc basat en la base 3.

2. El truc està basat essencialment en la base 3. De fet, el que passa és que amb la primera pregunta, un cop recollides les cartes, assegureu que la carta buscada estarà entre la 10a i 18a; amb la informació de la segona pregunta assegureu les posicions entre 13a i 15a. L'última pregunta col·loca la carta exactament al lloc 5è de l'última pila escollida (és a dir, el lloc 14è un cop recollides les cartes).
3. Les cares de tots els daus tenen nombres de tres xifres p , q i r amb $0 \leq p, q, r \leq 9$ naturals. De fet, el nombre és $p \cdot 100 + q \cdot 10 + r$.

Donat el dau i -èsim $i = 1, 2, \dots, 5$ posem a cada una de les seves sis cares, nombres de la forma

$$(K_i - r)100 + q_i10 + r$$

on r pot ser diferent a cada cara.

Es pren $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 = 10n$ on n és 1, 2, 3, ó 4 i $K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 = 50 - n$. Aleshores, si tirem els cinc daus, obtindrem els cinc números següents

$$\begin{array}{ll} \text{dau 1:} & (K_1 - a)100 + q_110 + a \text{ per un cert } a \\ \text{dau 2:} & (K_2 - b)100 + q_210 + b \text{ per un cert } b \\ \dots & \dots \\ \text{dau 5:} & (K_5 - e)100 + q_510 + e \text{ per un cert } e. \end{array}$$

Sumant els nombres i dient $s = a + b + \dots + e$, tenim que la suma val

$$\begin{aligned} (K_1 + K_2 + \dots + K_5 - s)100 + (q_1 + q_2 + \dots + q_5)10 + s = \\ = (50 - n - s)100 + (10n)10 + s = (50 - s)100 + s \end{aligned}$$

i per tant tenim una explicació de per què funciona el truc. A la taula de valors s'ha pres $n = 3$.

4. Com ja haureu deduït, el que s'ha de fer és expressar el nombre que ens han dit en base 2 i treure les cartes que corresponen als llocs on hem obtingut un 10. Per exemple, si ens diuen 10, $10 = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 1010_2$. Per tant, hem de treure la segona i la quarta cartes.
5. Recordem que x denotarà la data més petita del calendari. És fàcil observar que el quadrat de 16 números triat al calendari serà

$$\begin{array}{cccc} x & x+1 & x+2 & x+3 \\ x+7 & x+8 & x+9 & x+10 \\ x+14 & x+15 & x+16 & x+17 \\ x+21 & x+22 & x+23 & x+24 \end{array}$$

El procediment explicat per a triar els quatre nombres fa que s'hagi de triar un número de cada fila i un de cada columna; per tant la suma dels triats serà $4x + (8 + 16 + 24) = 4(x + 12)$.

En aquest cas, es pot entendre encara millor si es construeix una taula més general. Ho farem amb un exemple. Observeu que si prenem dos blocs de cinc números $\{1, 0, 3, 2, 4\}$ i $\{4, 2, 1, 5, 0\}$ i construïm les seves sumes, tenim

	1	0	3	2	4
4	5	4	7	6	8
2	3	2	5	4	6
1	2	1	4	3	5
5	6	5	8	7	9
0	1	0	3	2	4

Ara, si triem, com abans, 5 dels 25 números generats (per exemple, els marcats $5 + 5 + 1 + 7 + 4$) és a dir un de cada fila i un de cada columna, la seva suma serà igual a la suma dels deu números que generen la taula

$$5 + 5 + 1 + 7 + 4 = 22 = (1 + 0 + 3 + 2 + 4) + (4 + 2 + 1 + 5 + 0).$$

En el primer cas que estudiàvem, els generadors de la taula eren $\{x, x + 1, x + 2, x + 3\}$ i $\{0, 7, 14, 21\}$ per tant la suma era

$$(x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3)) + (0 + 7 + 14 + 21) = 4x + 48 = 4(x + 12).$$

6. Veurem que el resultat de totes les operacions és 1089, independentment del nombre inicial que triem. Sigui

$$p100 + q10 + r$$

amb $0 \leq p, q, r \leq 9$ el nombre triat. Com que no és capicua $p \neq r$. Construïm l'altre nombre $r100 + q10 + p$. Suposem, per exemple, que $p > r$. Aleshores,

$$\begin{aligned} p100 + q10 + r - (r100 + q10 + p) &= \\ &= (p - r)100 + (r - p) = (p - r - 1)100 + 9 \cdot 10 + (10 + r - p) \end{aligned}$$

on $1 < 10 + r - p < 9$. Per tant, les xifres de la resta són $p - r - 1$, 9 i $10 + r - p$. Fem l'última suma

$$\begin{aligned} ((p - r - 1)100 + 9 \cdot 10 + (10 + r - p)) + ((10 + r - p)100 + 9 \cdot 10 + p - r - 1) &= \\ &= 9 \cdot 100 + 18 \cdot 10 + 9 = 1089, \end{aligned}$$

independentment de les xifres del primer nombre, p , q i r .

7. Aquest truc és essencialment diferent de la resta. Només podríem assegurar que funcionaria sempre si disposéssim d'infinites cartes (cosa impossible). En aquest cas, també és difícil donar una explicació rigorosa.

Començarem amb un cas més senzill: Suposem que tenim una moneda i l'anem tirant molts cops fent els càlculs següents: Cada cop que surt una cara sumem 1, mentre que cada cop que surt una creu restem 1. Es pot veure que com més gran és el nombre de cops que tirem la moneda, més probable és que els nostres comptes passin pel valor 0.

El nostre joc de màgia es basa en una propietat similar. El que fem nosaltres (independentment del que faci la persona a la qual fem el truc) és pensar un nombre i seguir les mateixes regles que ell a l'hora de contar les cartes. Si en un cert moment els dos arriben a la mateixa carta, per sempre més anirem seguint les mateixes cartes.

Si pensem una mica, veurem que una manera diferent de mirar-se aquesta situació és que a cada tria que fem els dos, la puntuació difereix com a molt en 11 punts (l'un tria 1 i l'altre 12 o viceversa). Aleshores, podem pensar que el que fem cada cop és sumar un nombre d'1 a 11 si l'espectador arriba a una carta més alta que nosaltres; restar un nombre de 1 a 11, si som nosaltres els que arribem a la carta més alta o no sumar res si arribem a una carta amb el mateix valor. En altres paraules és com si tiréssim un dau trucat de 23 cares (valors $-11, -10, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, 10, 11$). El problema es fa més difícil pel fet que no tots els valors surten en les mateixes proporcions. Es pot veure que com més cops repetíssim el procés, més fàcil seria que obtinguéssim un 0 a la suma total (això equivaldria a que els dos hauríem arribat a la mateixa carta).

8. Suposem que el nombre té 4 xifres, i és

$$1000a + 100b + 10c + d,$$

amb $0 \leq a, b, c, d \leq 9$. L'operació que li demanem és

$$\begin{aligned} 1000a + 100b + 10c + d - (a + b + c + d) = \\ = 999a + 99b + 9c = 9(111a + 11b + c) \end{aligned}$$

i per tant el resultat sempre és múltiple de 9. Ara recordem que les xifres d'un nombre múltiple de 9 sempre sumen un múltiple de 9; per tant, si ens ha eliminat una, la que ha eliminat és el nombre que falta al nombre que ens diu per a arribar a ser un múltiple de 9. A l'exemple ens diu 11; per tant, la xifra eliminada ha de ser $18 - 11 = 7$.

Aquest truc té un petit problema: si la persona ratlla un 0 o un 9, el nombre que ens dirà ja és un múltiple de 9. En aquest cas ens hem de limitar a dir que ha ratllat un 0 o un 9 i que no podem precisar més.

9. Senzillament, nosaltres prenem com x el número que la persona pensa i fem mentalment les operacions que ella va inventant, però amb x . Al final de tots els càlculs, arribem a un valor $ax + b$. Quan ens digui el resultat, resolent l'equació obtindrem x . Les divisions també es poden permetre, però compliquen el càlcul mental. De totes maneres hi ha un cas en que se'ns pot presentar un problema (el cas $a = 0$ en la notació de dalt). Suposem que la persona a la qual fem el truc fa les operacions següents:

- Tria un número: 5, (per a nosaltres, x).
- El dobla: 10, (per a nosaltres, $2x$).
- Li suma 3: 13, (per a nosaltres, $2x + 3$).
- El multiplica per 3: 39, (per a nosaltres, $6x + 9$).
- Li suma 9: 48, (per a nosaltres, $6x + 18$).
- El divideix per 6: 8, (per a nosaltres, $x + 3$).
- Li resta el número pensat: 3, (per a nosaltres, 3).

Si en aquest moment decideix parar les operacions, estem perduts ja que no podrem recuperar mai x . El que hem de fer en aquesta situació és dir: “No cal que continuïs més, el resultat de les teves operacions és 3”. Això encara sorprendrà més la persona, ja que no ens haurà dit cap nombre.

10. A la primera figura hi ha 10 columnes d’altura 9, mentre que a la segona figura hi ha 9 columnes d’altura 10. Es poden construir cartolines amb altres nombres de columnes i amb altures diferents. Sempre n columnes d’altura $n - 1$ unitats. La idea de com col·locar-les es veu més clara si es fa primer una taula només amb les seves llargades. Així, la primera figura correspon a

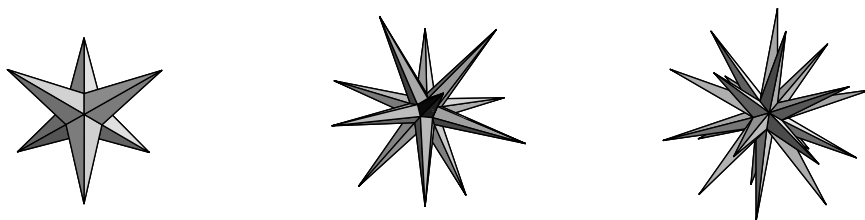
7	4	1	8	5	2	9	6	3	0
2	5	8	1	4	7	0	3	6	9

mentre que la de la segona és:

8	5	2	9	6	3	0	7	4	1
2	5	8	1	4	7	0	3	6	9

Observeu que la columna 0,0 correspon al lloc on no hi ha columna.

11. Creiem que no cal donar cap explicació.



Cub, dodecàedre i icosaèdre estrellats.

4.5 Paraules i nombres

Selecció de problemes preparada per Antoni Guillamon i Grabolosa, professor de Matemàtica Aplicada del Departament de Matemàtica Aplicada I de la Universitat Politècnica de Catalunya. tel.: 93 401 17 41, e-mail: toni@ma1.upc.es.



- 4.5.1.** Un palíndrom és una frase que es llegeix igual del dret que del revés. Per exemple, la paraula “Anna” o la frase “Català a l’atac” en són. En el text següent hi ha ocults 13 palíndroms, que poden ser frases senceres o paraules soltes.

El bar olotí té poc selaci (sic) a l’escó petit olorable. S’estimen més el peix menut i afirmen que el bon seitó pot i és noble. Per això s’han especialitat en productes de l’anxova.

Però avui el dia no hi transcorre amb gaire calma...

D’un tallat n’ha sortit disparat un glop de llet al clatell del veí. Val més estar a recer, penso, tot i que de vegades, si vas per la ruta natural reps avís. A la taula de la dreta, una executiva parla pel mòbil i diu en veu baixa “Truca’m a casa, camacurt!”; penja de seguida i es dirigeix lasciva al seu acompanyant tot dient-li “Tira’m anís a la sina, marit!”. Al fons del bar, un aviador roda i va nu; de fet, d’entrada ja s’endevinava que l’home tenia un aire de dèria.

Mentrestant, a fora al carrer, un noi que duu una samarreta amb una gran U, li diu a un home gran repenjat sobre una farola: “Avi, la nit negra i argentina li va!”. Però l’home no escolta i fixant-se en la samarreta pensa que si la U gira, deu quedar igual, i no va gens errat.

Tornant a dins, un senyor ha demanat l’especialitat a la cambrera. Ella s’hi atansa i callada posa la sopera. Ja reposa la sopa d’all ací.

- 4.5.2.** Amb les paraules ordenades alfabèticament que trobareu a continuació, heu de formar frases palindròmiques en diversos idiomes (vegeu la definició de palíndrom al problema 4.5.1). No sempre en coneixereu el significat; però ... podeu endevinar l’idioma com a mínim?

- a, mà, massa, massissa, massissa.
- a, a, ara, cavar, cert, la, la, rara, trec, vaca.
- gent, Islam, l’, la, mal, nega, si.
- i, nens, nenes, Senén, set, sis, té.
- ivres, meritis, munis, servi, sinum, sitirem.
- amor, ibit, motibus, Roma, subito, tibi.
- a, abad, arroz, dábale, el, la, zorra.
- amo, la, pacífica, paloma.

- arena, da, de, mala, mala, manera, me.
- a, a, a, canal, man, Panama, plan.
- a, a, a, dog, in, pagoda, panic.
- a, bird, imitators, rib, rot, timid.
- lavoro, oro, val.
- ama, ama, Ana Ana, e, Oto, Oto.
- à, écart, l', mon, nom, tracé.
- ein, gazelle, mit, neger, nie, regen, zagtim.
- geen, kip, neeg, pik, toit.
- bude, dub, saze, zarastovat.
- ella, eka, Jarin, pakeni, pikk, rajalle, upukki.

4.5.3. Una modalitat més complicada de palindromia (recórrer a l'inrevés un text i trobar-hi un significat) és la consistent a construir frases o locucions en una idioma A que llegides en sentit contrari tinguin significat en un altre idioma B . A continuació us en posem uns quants exemples (no n'abunden gaire) en català; esbrineu en quin idioma es pot interpretar l'expressió inversa i separeu-ne les paraules que la componen:

1. Rera en Simó trist es troba.
2. Amor beneït a la base.

4.5.4. Per a acabar d'esgotar els jocs de mirall, us oferim unes quantes frases amb una doble simetria. En què consisteix?

1. SI O NO, NOIS?
2. NO SI HI SÓN
3. ON SÍ NO SONI, NO SONIS, NO
4. NO XINO, NIXON
5. O OZÓ O ZOO

4.5.5. Un altre joc de paraules entretingut és el de formar quadrats en què es puguin llegir un conjunt de paraules, tant en sentit horitzontal com en sentit vertical; s'acostumen a anomenar *quadrats màgics*. Per exemple, amb les paraules “soc”, “ona” i “cas”, es pot formar el següent quadrat:

S	O	C
O	N	A
C	A	S

A continuació us donem dues paraules d'un quadrat 4×4 , dues d'un quadrat 5×5 , i tres d'un quadrat 6×6 . Es tracta trobar-ne 2, 3 i 3, respectivament de manera que formin quadrats màgics. No diem tampoc l'ordre que ocupen dins del quadrat. A l'apartat de solucions us en facilitem una, tot i que no és única.

1. eren, però.
2. amena, devem.

3. torege, arameu, occità

4.5.6. Les frases següents tenen en comú una passió per l'ordre. La descobriu?

1. Si no surts faré importunar-te.
2. Són uns mals nens i poc humans.
3. T'estimo quan ets fi com un paper.
4. Un pagès nipó un arbre mig mort untà.
5. El vi bo, suc malèfic!, ofuscà el pilot mutant.
6. L'afegitó cus al vestidor bru; cal fer-hi costura.
7. El dijous a les cinc o quarts de sis, com tu saps, set minyons búlgars, set, inocularen sis nous al·lells.

4.5.7. Tant els mots del primer paràgraf entre ells com els del segon tenen un tret peculiar comú. Quan els hàgiu trobat, feu una aposta aproximada sobre quants de cada classe pot haver-hi a la nostra llengua.

L'accés a l'illot, a l'Agost, és bell. Des del bot nou, filmo els ceps del clos i el cim de l'est, dens de flors, bens i llops. El bou és a l'ert hort, i el jou és al clot. A dins, l'Abel, en dejú, del got beu most de l'any, i em diu: "ahir, l'amo de l'illot hi fou mort a cops del giny d'acer de l'àgil fill hippy. El cos nu, al llot és, i el cor del gos bru adéu diu a l'amo bo. No et fiïs dels afins!"

No us amoïneu ni em sancioneu si al·ludeixo a la numeració evolutiva d'equacions i l'equiparo a un dinosaure. Obraríeu constructivament si l'abordéssiu amb precaució. Assumeixo que no oblidareu l'educació de què gaudeixo i la boniquesa dels eucalíptols ucraïnesos.

4.5.8. De vegades, darrere un missatge aparentment innocent, trobem missatges xifrats amb finalitats més "perverses". Les tres frases que trobareu a continuació contenen una gran dosi d'"irracionalitat matemàtica", tal com afirmarien, amb raó, l'Àurea i l'EPi. Sabríeu dir per què?

1. L'Andreu m'esperarà. Com dos magnífics companys correrem plegats vers horitzons anhelats.
2. El trànsit a Sabadell és carregós; a Terrassa és embussat però menys complicat.
3. Sóc a casa i sento fugaçment un soroll melós, com dotze rossinyols fabulosos cantant.

4.5.9. Què té aquest text d'especial? Podeu aplicar-li alguna mena de canvi de gènere?

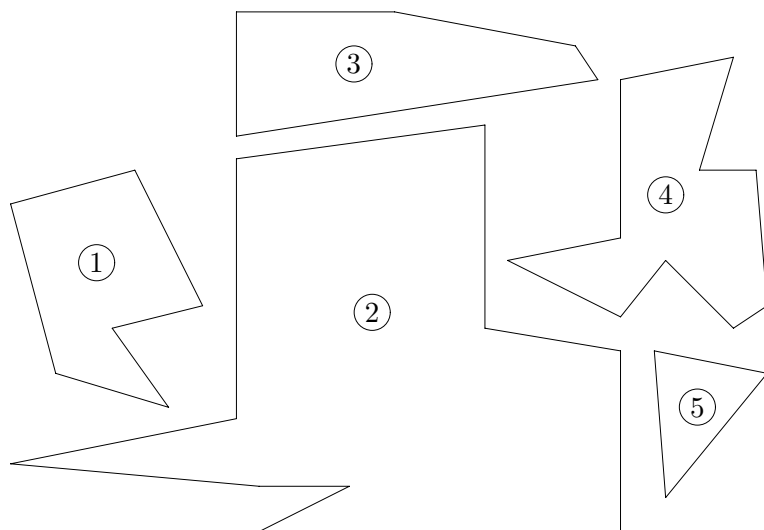
Així que vam arribar al port, vaig despullar-la de la vela; el moll cruixia després de temps inactiu i el cel es tancava rere nostre. Com que tenia una fam de salvatge, amb tot el dret vaig engrapar una pita sense alliberar tampoc la poma. El mos estava preparat. Apassionat, m'hi vaig llançar. No vaig deixar ni una pela per llepar! Un cop refet, vaig decidir agafar el tren i allunyar-me d'aquell lloc. Llavors, mirant avall, amb el bitllet ben agafat, vaig observar ben clarament el que em temia: "títol esgotat".

4.5.10. Un company ens ha fet un encàrrec, però no volem desvetllar directament la seva identitat. Si trobeu una relació entre les frases següents potser podreu arribar a aquesta identificació.

1. Du el gringo amb malles
2. Mag negre moll: buida'ls
3. Lliga'm nou grams de ble
4. Gun smell admirable, go!

4.5.11. En Lluís i l'Helena, arquitectes, s'acaben de casar. Els amics els han preparat una facècia per a fer-los esbrinar qui guarda el regal de noces.

Per arribar a la solució, els passen el plànol de la figura següent, en el qual hi ha cinc recintes dibuixats sobre una plantilla mil·limetrada. Han de calcular les seves àrees (en mm^2), i multiplicar-les entre elles. El resultat i la paraula LISENUAPDR els han de donar la clau de volta.



Com que el nostre paper no és mil·limetrat, us facilitem les coordenades dels cinc recintes per tal que en pugueu calcular les àrees:

- Recinte 1: $\{(-2, 24), (9, 27), (15, 15), (7, 13), (12, 6), (2, 9)\}$
- Recinte 2: $\{(-2, 1), (18, 5), (18, 28), (40, 31), (40, 13), (52, 11), (52, -5), (20, -5), (28, -1), (20, -1)\}$
- Recinte 3: $\{(18, 30), (18, 41), (32, 41), (48, 38), (50, 35)\}$
- Recinte 4: $\{(42, 19), (52, 21), (52, 35), (62, 37), (59, 27), (64, 27), (65, 15), (62, 13), (56, 19), (52, 14)\}$
- Recinte 5: $\{(55, 11), (65, 9), (56, -2)\}$

Si, tot i així, encara us fa mandra calcular les àrees, llegiu la primera línia de les solucions.

4.5.1 Explicacions

1. (a) El bar olotí té poc selaci (sic) a l'escó petit olorable.
 (b) el bon seitó pot i és noble
 (c) tallat
 (d) llet al clatell
 (e) recer
 (f) si vas per la ruta natural reps avís
 (g) Truca'm a casa, camacurt!
 (h) Tira'm anís a la sina, marit!
 (i) un aviador roda i va nu
 (j) aire de dèria.
 (k) Avi, la nit negra i argentina li va!
 (l) la U gira, deu quedar igual
 (m) i callada posa la sopera. Ja reposa la sopa d'all ací.

2. Una vegada reconstruïdes, obtindreu les frases següents:

- CATALÀ

- A massissa massa, massisa mà.
- Cert: a la rara vaca, a cavar ara la trec.
- Mal si la gent nega l'Islam
- Senén té sis nens i set nenes.

- LLATÍ

- Meritis servi sinum munis ivres sitirem.
- Roma tibi subito motibus ibit amor.

- CASTELLÀ

- Dábale arroz a la zorra el abad.
- Amo la pacífica paloma.
- Arena mala me da de mala manera.

- ANGLÈS

- A man a plan a canal, Panama
- A dog! A panic in a pagoda!
- Bird imitators rot a timid rib.

- ITALIÀ

- Lavoro oro val.
- Oto ama Ana e Ana ama Oto.

- FRANCÈS. Tracé mon nom a l'écart.

- ALEMANY. Ein neger mit gazelle zagtim regen nie.

- HOLANDÈS. Kip neeg toit geen pik.

- TXEC. Bude zarastovat saze dub.

- FINÈS. Ella, Jarin eka pikk upukki pakeni rajalle.

Moltes d'elles les hem extret de la llista de palíndroms d'en Ramon Giné que apareix a la pàgina web www.fut.es/~mgine. Aquesta persona, tal com diu en aquesta pàgina, és l'"home darrere dels palíndroms", probablement la persona que més ha fet per la difusió d'aquest gènere a la nostra cultura.

- (a) En anglès, es pot llegir com *Abort set. Sir Tom is nearer.*
(b) En castellà, es pot llegir com *Esa bala tiene broma.*
- És fàcil de veure que només hi intervenen sis lletres diferents: H, I, N, O, S, X. Aquestes, a més de la Z, són les úniques majúscules que es veuen igual si girem el full. Per tant, les frases que hem presentat, a part de ser palíndroms en sentit horitzontal (vegeu els exercicis 4.5.1 i 4.5.2), també ho són en sentit vertical. En altres idiomes, on la W és més freqüent en el lèxic habitual, la M i la W poden actuar de simètriques l'una de l'altra.
- Una possible solució dels tres quadrats que us proposàvem seria:

P	E	R	O	S	E	D	A	S	O	C	C	I	T	A
E	R	E	N	E	N	E	M	A	C	L	A	R	O	R
R	E	R	E	D	E	V	E	M	C	A	D	I	R	A
O	N	E	S	A	M	E	N	A	I	R	I	S	E	M
				S	A	M	A	L	T	O	R	E	G	E
									A	R	A	M	E	U

En el fons, el que fem són mots encreuats simètrics sense quadres negres, i ja us podeu imaginar que en augmentar el nombre de lletres per paraula el problema es complica en gran manera. Els de vuit lletres en amunt es poden considerar excepcionals.

- L'aparició de vocals en el text sempre segueix un ordre creixent (AEIOU) i és cíclica.
- El tret que caracteritza tots els mots del primer paràgraf és que les lletres sempre estan en ordre creixent (paraules alfagramàtiques). Observeu, a més, que una conseqüència immediata és que el nombre de lletres de cada paraula és més aviat curt. Aquesta propietat es pot veure d'una altra manera: si demanéssim ordre estrictament creixent, en un alfabet de L símbols hi hauria només 1 possible paraula alfagramàtica de longitud L ; L de longitud $L - 1$, $\binom{L}{2}$ de $L - 2$; i, en general, $\binom{L}{p}$ possibles paraules de longitud p , amb $p \leq L$. En un alfabet de 26 símbols com el nostre, això dona 67 108 837 possibles paraules alfagramàtiques. Ara bé: un cop formades, cal demanar que tinguin sentit... I si ho fem, ens quedem amb unes 300! Per veure-ho, hem fet un programa d'ordinador que ha analitzat totes les paraules que hi havia en un fitxer corrector de català. Ens n'han sortit 290, però no podem assegurar que el fitxer emprat contingui tots els mots catalans.

Al segon paràgraf, la peculiaritat rau en el fet que totes les paraules de més d'una síl·laba contenen una i només una vegada les cinc vocals (paraules pentavocàliques). Aquesta mena de paraules tampoc no són una raresa en el nostre idioma: a partir del nostre fitxer, n'hem comptabilitzades unes 1 430. D'altra banda, si deixem que les vocals es repeteixin, n'aconsegüim unes 5 100. Segons explica en Màrius Serra al seu *Manual*

d'enigmística (Columna, 1991), que us recomanem fortament, el lingüista Lluís de Yzaguirre en va trobar 14 006, fet que indica que el nostre fitxer de partida no és pas dels més complets.

8. Les paraules clau de l'enunciat són *irracionalitat matemàtica*, *raó...àurea* i *E-Pi*. Si compteu el nombre de lletres de cada paraula trobareu, respectivament, els primers decimals (tallant a la darrera xifra) de tres dels nombres irracionals més coneguts: la raó àurea $= (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.6180339887498$, el número $e \approx 2.7182818284590$, i el número $\pi \approx 3.1415926535897$. Els zeros han estat substituïts per punts, però no tots els punts signifiquen zeros.
9. Canvieu de gènere tots els noms que hi apareixen; veureu que el text canvia completament de sentit:

Així que vam arribar a la porta, vaig despollar-la del vel; la molla...

10. Totes les frases tenen les mateixes lletres: AABDEEGGILLMMNORSU. Continueu buscant la identitat del company. Està escrita al llibre però en un altre lloc. Quan el trobeu, podreu imaginar-vos també quin és l'encàrrec.
11. Les àrees de les diferents regions són, respectivament, 251, 997, 201, 239 i 64. La multiplicació de totes 5 dona $p = 769383400512$. Si a cada lletra de la paraula clau LISENUAPDR li associeu un nombre del 0 al 9 i substituïu els nombres de p per les lletres adients, obtindreu PARE D'EN LLUÍS.

4.6 Referències

- *Juegos de Lógica y Matemáticas* F. Agostini, Ed. Pirámide SA, Madrid 1982.
- *¿Se atreve Vd. con ellos?* J.M. Albaiges Olivart, Marcombo, Boixareu Eds., Barcelona 1981.
- *101 proyectos matemáticos* B. Bolt, D. Hobbs, Ed. Labor, Barcelona 1991.
- *Mas actividades matemáticas* B. Bolt, D. Hobbs, DEd. Labor, Barcelona 1988.
- *Inspiración ¡Ajá!*, M. Gardner, Ed. Labor, Barcelona 1981.
- *¡Ajá! Paradojas*, M. Gardner, Ed. Labor, Barcelona 1983.
- *Comunicación extraterrestre y otros pasatiempos matemáticos*, M. Gardner, Colección Teorema, Catedra 1986.
- *Enigmas, Curiosidades y Entretenimientos Matemáticos*, W.M. Gratz, Eds. Ibéricas, Madrid.
- *En el reino del ingenio*, E.I. Ignatiev, Colección Ciencia Popular, Ed. Mir, Moscú 1986.
- *Fácil, menos fácil y difícil*, M. Mataix, Marcombo, Boixareu Eds., Barcelona 1981.
- *Algebra recreativa* Y. Perlemán, Colección Ciencia Popular, Ed. Mir, Moscú 1978.
- *Matemáticas recreativas* Y. Perlemán, Colección Ciencia Popular, Ed. Mir, Moscú 1982.
- *Problemas y experimentos recreativos* Y. Perlemán, Ed. Mir, Moscú 1975.
- *Diversiones Matemáticas*, R. Rodriguez-Vidal, Ed. Reverté S.A., Barcelona 1975.
- *La magia de los números*, Who?, Biblioteca de Juegos, Prestidigitación, Ilusionismo,... vol XIV, Ed. Sintés, Barcelona 1963.

A part de les adreces d'internet que ja apareixen al text, destaquem:

- <http://www.xtec.es/~jjareno/>
- <http://www.xtec.es/recursos/mates/aqui/index.htm>
- <http://mathworld.wolfram.com/>
- <http://math.smsu.edu/~les/POTW.html>

Capítol 5

Notes històriques i citacions.

Qualsevol tema d'estudi s'entén molt millor si es considera la seva evolució al llarg dels temps. Per això hem decidit incloure una secció amb ressenyes sobre alguns dels científics que han contribuït a fer que la matemàtica i l'estadística siguin com són avui en dia.

També hi ha una secció de citacions sobre matemàtiques i ciència, que creiem que ens divertirà, i ens farà pensar a tots una miqueta.

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

Auctore J. S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos
Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. P E P Y S, Reg. Soc. P R Æ S E S.
Julii 5. 1686.

L O N D I N I,

Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud
plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Principia mathematica,
Isaac Newton, 1687.

INTRODUCTIO IN ANALYSIN INFINITORUM.

AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio BEROLINENSI, & Academia Im-
periali Scientiarum PETROPOLITANA
Socio.

T O M U S P R I M U S



L A U S A N N Æ.

Apud MARCUM-MICHAELUM BOUSQUET & Socios.

M D C C X L V I I I

Analysis infinitorum,
Leonhard Euler, 1748.

5.1 Història

Text preparat per Ferran Cedó i Giné, professor d'Àlgebra del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona. tel.: 93 581 18 67, e-mail: cedo@mat.uab.es.



Al llarg de la història, hi ha hagut personatges famosos que han contribuït notablement a l'evolució de la matemàtica. Aquí, presentem una ressenya biogràfica d'alguns d'ells. Això no vol dir que aquests siguin els més importants. La història de la matemàtica és llarga i complexa, i és difícil decidir quins han estat els que han incidit més en el seu desenvolupament.

Tales de Milet (aproximadament del 624 al 548 a.C.)

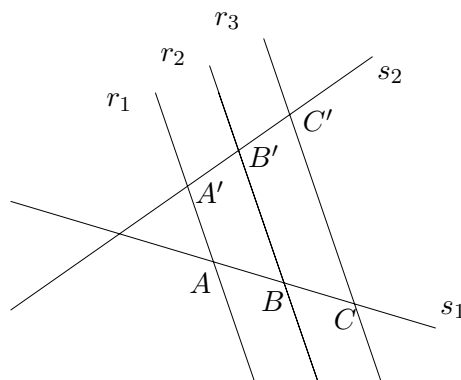
Matemàtic, físic, filòsof i astrònom grec, un dels Set Savis de Grècia. Se'l considera el pare de les matemàtiques demostratives, el primer a demostrar resultats geomètrics. És famós, per exemple, el teorema de Tales. Altres resultats que la tradició manté que va demostrar són els següents:

- La suma dels angles d'un triangle equival a dos rectes.
- Un angle inscrit en un semicercle és un angle recte.



Teorema de Tales. *Donades tres rectes paral·leles r_1, r_2, r_3 i dues rectes concurrents s_1, s_2 que tallen a les rectes r_1, r_2, r_3 en els punts A, B, C i A', B', C' respectivament, es té que*

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$$



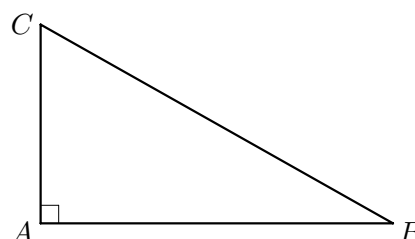
Pitàgores de Samos (aproximadament del 580 al 500 a.C.)

Matemàtic i filòsof grec. Després de viatjar a Egipte i Babilònia, i possiblement a l'Índia, es va establir a Crotona (al sud-est d'Itàlia), a la Magna Grècia. Allí va fundar una societat secreta, coneguda per nosaltres com escola pitagòrica. El lema d'aquesta escola era "Tot és nombre". El famós teorema de Pitàgores era conegut, abans que ell visqués, pels babilonis. És possible que Pitàgores fos el primer a demostrar-lo, encara que no n'hi ha proves documentals.

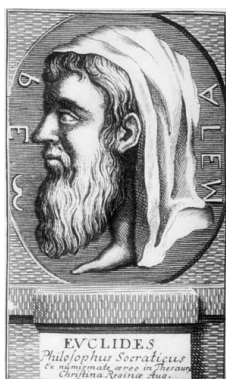


Teorema de Pitàgores. *Si ABC és un triangle rectangle en A , llavors*

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$



Euclides d'Alexandria (s. III a.C.)



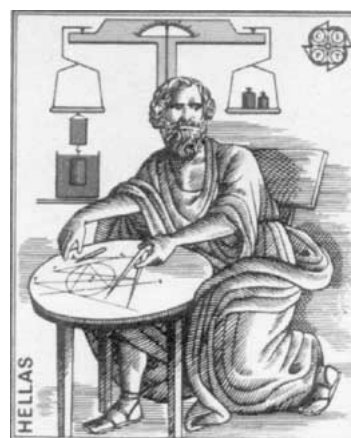
Matemàtic grec autor dels *Elements*, obra que recull la geometria clàssica grega exposada de forma deductiva. Se sap poc de la seva vida, no es coneix ni on va néixer. Va ser professor a Alexandria. Els Elements és potser el llibre de text de matemàtiques més famós de tota la història. A part de la geometria sintètica, els Elements també tracten l'aritmètica. Per exemple, es demostra que hi ha infinits nombres primers.

Arquimedes de Siracusa (aproximadament del 287 al 212 a.C.)

Savi grec i el matemàtic més important de tota l'antiguitat. Va donar un mètode que permet obtenir una aproximació de π tant bona com es vulgui. Va demostrar la relació que hi ha entre l'àrea d'un cercle i la longitud de la seva circumferència:

$$\text{àrea del cercle} = \frac{\text{radi} \times \text{longitud de la circumferència}}{2}$$

Una de les seves obres, el *Mètode*, que va estar perduda durant segles, es va recuperar a l'any 1906. En aquesta obra, hi ha les primeres idees d'infinitesims. Aquestes idees no van tornar a sorgir fins al segle XVII, amb la invenció del càlcul diferencial.



Es diu que Arquimedes va descobrir el seu famós principi de flotació mentre s'estava banyant i que, un cop descobert, va sortir al carrer nu i cridant "Eureka", que vol dir: "Ho he trobat."

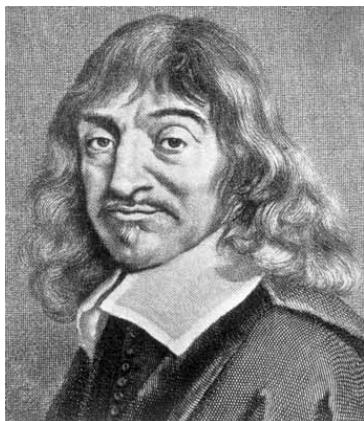
Arquimedes va morir durant la presa de Siracusa per l'exèrcit de Marcel el 212 a.C., tot i que Marcel el volia capturar viu.

Gerolamo Cardano (Pavia, 1501 - Roma, 1576)

Metge, matemàtic i filòsof italià. Al 1545, va publicar l'obra *Ars Magna*, on es dona la solució per a resoldre equacions cúbiques i quàrtiques. El mateix Cardano reconeix que Niccolò Fontana (Tartaglia) li suggerí la forma de resoldre l'equació cúbica, i que el seu secretari, Ludovico Ferrari, va descobrir com resoldre l'equació quàrtica. De fet, però, el primer a descobrir com es resolvia l'equació cúbica de la forma $x^3 + px = q$ va ser Scipione del Ferro, encara que aquest mai no va fer públic el seu resultat. En aquell temps es feien desafiaments matemàtics. Tartaglia en va guanyar un sobre resolució d'equacions cúbiques, fent així que Cardano es fixés en ell.



René Descartes (L'Haia, 1596 - Estocolm, 1650)



Filòsof i matemàtic francès. Va estudiar en un col·legi de jesuïtes i es va llicenciar en Dret a Poitiers. Més tard, va viatjar per diversos països en campanyes militars. La contribució més important de Descartes a la matemàtica fou la creació de la geometria analítica, que publicà com un apèndix, *La Géométrie*, de la seva famosa obra *Dicours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* (1637).

Pierre de Fermat (Beaumont-de-Lomagne, 1601 - Castres, 1665)

Va estudiar dret a Tolosa de Llenguadoc, on va ser després conseller al Parlament. Encara que Fermat no fos matemàtic professional, a partir del 1629, va començar a fer descobriments matemàtics de gran importància. Va fundar la geometria analítica al mateix temps que Descartes. Va ser precursor del càlcul diferencial i integral.



Es pot dir d'ell que és el pare de la teoria de nombres moderna. Fermat va demostrar que no existeixen nombres enters positius x, y, z , tals que $x^3 + y^3 = z^3$. Al marge del seu exemplar de l'*Arithmetica* de Diofant, va escriure que per a $n > 2$ no hi ha enters positius x, y, z , tals que $x^n + y^n = z^n$, i que havia trobat una demostració veritablement meravellosa d'aquest fet, però que aquell marge era massa estret per a contenir-la. Aquest resultat es coneix com “últim teorema de Fermat” o “gran teorema de Fermat”. L'estudi d'aquesta conjectura de Fermat ha fet avançar branques importants de la matemàtica. Finalment, a l'any 1995, Andrew Wiles va fer l'últim pas en la demostració d'aquest gran teorema.

Sir Isaac Newton (Woolsthorpe, Lincolnshire, 1642 - Londres, 1727)

Després d'una infància sense gaire afecte (el seu pare havia mort abans del seu naixement i la seva mare es va tornar a casar quan ell tenia tres anys, deixant-lo amb la seva àvia), va estudiar a Cambridge i entrà a formar part del Trinity College al 1661.

Al final de 1664, sembla que ja coneixia tota la matemàtica de l'època; havia tingut de mestre a Barrow. Aquell any i el següent, el Trinity College va estar tancat a causa de la pesta. Així, Newton, a casa seva, en aquest període de temps, va fer quatre dels seus principals descobriments:

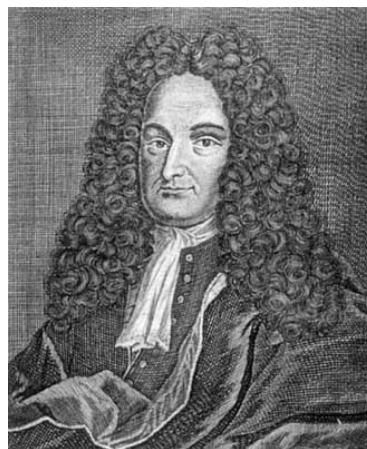


1. El teorema binomial.
2. El càlcul infinitesimal.
3. La llei de gravitació universal.
4. La naturalesa dels colors.

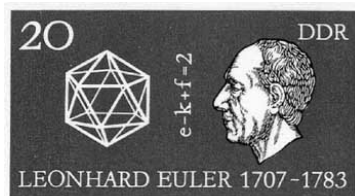
La primera exposició impresa del càlcul de Newton va aparèixer el 1687 al *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Leibniz havia descobert el càlcul diferencial cap a l'any 1676 i ho va publicar l'any 1684. Això va fer que s'establís una disputa entre ells per l'autoria de la creació del càlcul. Avui, se sap que Newton i Leibniz crearen el càlcul independentment l'un de l'altre; això sí, Newton ho va fer deu anys abans i Leibniz ho va fer amb una notació més entenedora, que és la que ha perdurat.

Gottfried Wilhelm Leibniz (Leipzig, 1646 - Hannover, 1716)

Va ingressar a la Universitat de Leipzig als quinze anys. Estudià teologia, dret, filosofia i matemàtiques. Als 20 anys, ja estava preparat per a obtenir el doctorat en dret, però, a Leipzig, no li van concedir per massa jove. Això va fer que Leibniz abandonés Leipzig i es doctorés en Dret a la Universitat d'Altdorf, a Nuremberg. Després, va començar la seva carrera diplomàtica, cosa que li permeté viatjar molt. La contribució més important de Leibniz a la matemàtica fou el càlcul diferencial, creat el 1676 independentment de Newton. Leibniz va ser precursor de la lògica matemàtica i un gran creador de notació. De fet, la notació que s'usa avui de càlcul diferencial és, pràcticament, la de Leibniz.

**Leonhard Euler (Basilea, 1707 - Sant Petersburg, 1783)**

Va estudiar amb els Bernoulli, una família de matemàtics que havien fugit de Bèlgica a causa de persecucions religioses i s'havien instal·lat a Suïssa. Euler va rebre una formació molt completa, va estudiar matemàtiques, teologia, medicina, astronomia, física i llengües orientals. El 1730, Euler havia anat a Sant Petersburg per ocupar una plaça de medicina a l'Acadèmia i es va trobar que havia mort l'Emperadriu Caterina I, cosa que va fer perillar la continuïtat de l'Acadèmia. Però l'Acadèmia va sobreviure i Euler va ocupar la càtedra de filosofia natural. El 1733, Daniel Bernoulli, que estava de professor a l'Acadèmia de Sant Petersburg abans que hi arribés Euler, se'n va anar un altre cop a Basilea. Així, Euler es convertí en el matemàtic més important de l'Acadèmia. Tret del període entre 1741 i 1766, que va estar a l'Acadèmia de Berlín per invitació de Frederic el Gran de Prússia, Euler va estar a Sant Petersburg la resta de la seva vida. Allí, es va casar i va tenir 13 fills, als quals no va faltar la seva dedicació, tot i que ha estat el matemàtic que ha publicat més de tota la història. El 1735, va perdre la vista de l'ull dret i, el 1766, va començar a perdre la visió de l'ull esquerre fins a quedar-se cec.



Euler ha estat el matemàtic més important del segle XVIII. Va escriure un total de 886 treballs, cosa que suposa una mitjana de 800 pàgines anuals escrites al llarg de la seva vida. No va deixar de fer matemàtiques ni quan es va quedar cec. Euler va fer avançar pràcticament totes les branques de la matemàtica del seu temps: anàlisi, sèries, equacions diferencials, geometria, probabilitat, teoria de nombres, etc.

El 1783, va morir mentre prenia el te i jugava amb un nét seu.

Carl Friedrich Gauss (Brunswick, 1777 - Göttingen, 1855)

Conegut com el Príncep de les Matemàtiques, va ser un nen prodigi. Un dia, el mestre de l'escola on estudiava, per tal de mantenir els seus alumnes ocupats, els va manar que sumessin tots els nombres de l'1 al 100. Gauss, que tenia llavors 10 anys, quasi immediatament, va posar el resultat correcte sobre la taula del mestre. Havia fet mentalment el càlcul

$$\begin{array}{rrrrr}
 1+ & 2+ & 3+ & \dots & +50 \\
 +100+ & 99+ & 98+ & \dots & +51 \\
 \hline
 =101+ & 101+ & 101+ & \dots & 101
 \end{array}$$

que és $101 \times 50 = 5050$.



Gauss era de família humil, i no hauria pogut estudiar si no hagués rebut l'ajuda del duc de Brunswick. Gràcies a ell, Gauss va estudiar a la Universitat de Göttingen. El 30 de març de 1796, va fer el seu primer descobriment important: va demostrar que es podia construir amb regla i compàs el polígon regular de 17 costats. Des del temps d'Euclides, feia uns dos mil anys, que no es coneixia cap més polígon regular amb un nombre primer de costats, que es pogués construir amb regla i compàs, que no fos un triangle o un pentàgon. Aquell mateix dia, Gauss va començar a escriure un diari, on va anant apuntant, durant els divuit anys següents, alguns dels seus descobriments més grans.

Gauss no publicava gaire, el seu segell portava escrit el lema: “*pauca sed matura*” (poc però madur). Alguns dels seus descobriments no es van fer públics fins després de la seva mort. Al 1799, va publicar la seva tesi doctoral, on demostrava el teorema fonamental de l'àlgebra. Al 1801, va publicar un treball de teoria de nombres en llatí, les *Disquisitiones arithmeticae*. Al 1827, va publicar *Disquisitiones circa superficies curvas*, iniciant així una nova branca de la geometria: la geometria diferencial. Si Gauss hagués publicat tots els seus descobriments immediatament, potser no hauria fet falta que altres matemàtics els redescobrisin. Per exemple: la geometria no euclidiana, inventada independentment per Lobatxevski i Bolyai, va ser un dels treballs no publicats de Gauss.

Baró Augustin Louis Cauchy (París, 1789 - Sceaux, 1857)



Estudià a l'Escola d'Enginyers Militars. Fou professor de la Sorbona, del Col·legi de França i de l'Escola Politècnica. El 1830, amb l'exili de Carles X, se'n va a Itàlia, on serà professor de la Universitat de Torí. El 1838, tornà a París. Després d'Euler, és el matemàtic que ha publicat més treballs de matemàtiques de tota la història. Contribuí a l'establiment del rigor a la matemàtica. Va fer aportacions importants a pràcticament tots els camps de la matemàtica, però cal destacar la creació de la teoria de les funcions de variable complexa.

El 1816, va ser nomenat membre de l'Acadèmia de Ciències. Aquest càrrec li va permetre perdre, el 1826, un important treball que Abel li havia entregat, quan buscava feina de professor a París. Dos anys més tard, va perdre un altre treball que li havia entregat Galois. Potser aquests dos joves matemàtics de vida intensa i curta, i obra important, no escrivien amb prou rigor com perquè Cauchy es dignés a llegir els seus treballs, o potser Cauchy va entendre que li podien fer ombra.

Évariste Galois (Bourg-la-Reine, 1811 - París, 1832)

Als 12 anys es va interessar per la *Géométrie* de Legendre. Més tard, va estudiar algunes obres de Lagrange i Abel. Els seus professors el consideraven una mica estrany. Als 16 anys, Galois, conscient que era un geni per a les matemàtiques, va presentar una sol·licitud per a entrar a l'Escola Politècnica, però va ser rebutjat per manca de preparació sistemàtica. Als 17 anys, va entregar a Cauchy un escrit amb alguns dels seus descobriments fonamentals per presentar-ho a l'Acadèmia. Cauchy va perdre aquest escrit. Galois va tornar a intentar entrar a l'Escola Politècnica i va tornar a fracassar.

Finalment va entrar a l'Escola Normal per preparar-se per a l'ensenyament. Continuà les seves investigacions matemàtiques i, el 1830, va presentar una memòria per a optar al premi de l'Acadèmia. Fourier es va endur aquesta memòria a casa per llegir-la. Poc després, Fourier es va morir i el treball de Galois es va perdre. Per tercera vegada, Galois presentà un altre treball a l'Acadèmia. Aquest cop, Poisson va retornar el treball a Galois amb l'observació de que era incompreensible. Aquest treball contenia resultats importants del que avui es coneix com teoria de Galois.



Galois va tenir problemes també per les seves idees republicanes. El 1831, va ser empresonat durant sis mesos. El 1832, per qüestions d'honor, es va batre en duel. La nit abans del duel, Galois va redactar, en una carta als seus amics algunes notes sobre els seus descobriments, expressant l'esperança que Jacobi o Gauss se'n poguessin assabentar. Durant el duel, va quedar a terra ferit de mort. Un pagès el va trobar i el va portar a un hospital, on morí l'endemà. L'obra de Galois va caure en mans de Liouville, qui, el 1846, després de completar alguns detalls de les demostracions de Galois, la va publicar.

Bernhard Riemann (Breselenz, Hannover, 1826 - Selasca, Itàlia, 1866)

Va néixer en una família modesta, però tingué una bona educació. Estudià a la Universitat de Berlín, on tingué de professors a Jacobi i Steiner. Després fou alumne de Dirichlet a la Universitat de Göttingen, on féu la tesi doctoral sobre funcions de variable complexa el 1851. Gauss li proposà un treball sobre els fonaments de la geometria per la seva habilitació. Així, el 1854, per entrar de professor a Göttingen, presentà la tesi d'habilitació *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (és a dir, *Sobre les hipòtesis en què es basen els fonaments de la geometria*). Amb aquest treball, es creà una nova branca de la matemàtica, la geometria riemanniana, i s'integraven, definitivament, les geometries no euclidianes a la matemàtica. Riemann també féu grans aportacions a l'anàlisi (integral de Riemann) i a la teoria de nombres, i fou precursor de la topologia. El 1859, ocupà la càtedra que havia deixat Dirichlet a Göttingen. Morí de tuberculosi als 39 anys.



Ave Riemann

*Mestre Príncep tu tingueres,
Riemann de família humil.
Per a tu són les esferes,
de geometria subtil.
Integrals i superfícies,
ara, porten el teu nom,
i així, la fama acaricies,
ensenyant, per tot el món,
la bellesa d'una ciència
que il·lumina l'experiència.*

Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor (Sant Petersburg, 1845 - Halle, 1918)

Estudià a les Universitats de Zurich, Göttingen i Berlín, filosofia, física i matemàtiques. A Berlín, fou alumne de Weierstrass i de Kronecker. Defensà la seva tesi doctoral sobre teoria de nombres, a Berlín, l'any 1867. Després, fou professor a la Universitat de Halle, on estaria la resta de la seva vida, encara que li hauria agradat ser professor a una universitat més important.

S'interessà profundament per l'aritmètica de l'anàlisi, seguint al seu mestre Weierstrass. Això el portà a crear la teoria de conjunts. Tenia correspondència amb Dedekind i compartia amb ell aquestes idees revolucionàries. El 1874, demostrà que el conjunt dels nombres reals és no numerable. Aquesta nova teoria tenia detractors importants. Kronecker era un d'ells; s'oposava radicalment a les idees de Cantor sobre l'infinit i intentava destruir les seves teories. Al 1883, Cantor escriví una defensa enèrgica de les seves teories. Potser a causa de l'estrès i les crítiques sobre el seu treball, l'any 1884, patí una crisi nerviosa depressiva i el van haver d'internar al sanatori mental de Halle. La resta de la seva vida, sortiria i entraria al sanatori diverses vegades, però, tot i així, continuà les seves investigacions, produint importants resultats. Per exemple, l'any 1891, demostrà que el cardinal d'un conjunt A és més petit que el cardinal del conjunt de les seves parts $P(A)$. El 1918, morí mentre estava internat al sanatori mental.



Hilbert es referia al seu treball sobre teoria de conjunts com “el més sorprenent producte del pensament matemàtic i una de les realitzacions més belles de l'activitat humana en el domini de la intel·ligència pura.” També deia: “Ningú no ens expulsarà del paradís que Cantor ha creat per a nosaltres.”

Henri Poincaré (Nancy 1854-París 1912)

Es va graduar a l'Escola Politècnica el 1875. El 1879, es va graduar en enginyeria de mines i es va doctorar en ciències a la Universitat de París, on va ocupar diverses places de professor de matemàtiques i física fins a la seva mort. Poincaré va ser un matemàtic universal, i potser el que ha publicat més després d'Euler i Cauchy. Els seus treballs més importants van ser de mecànica celeste i el primer desenvolupament sistemàtic de la topologia. Alguns el consideren el pare de la topologia. Junt amb Hilbert, és el matemàtic més important de la transició entre els segles XIX i XX.

David Hilbert (Königsberg, 1862 - Göttingen, 1943)

Estudià a la Universitat de Königsberg, on es doctorà l'any 1884. Del 1886 al 1895, fou professor d'aquesta universitat. Del 1895 al 1929, fou professor a la Universitat de Göttingen. Féu grans aportacions a moltes branques de la matemàtica: teoria de nombres, lògica matemàtica, equacions diferencials, equacions integrals, etc. També obtingué resultats matemàtics que s'aplicaren a la física.

Es preocupà molt per la fonamentació de les matemàtiques. El 1899, donà un sistema axiomàtic rigorós de la geometria euclidiana. El 1900, quan era considerat un dels matemàtics més importants del moment, presentà, al Congrés Internacional de Matemàtiques de París, una llista amb 23 problemes, que han estat molt importants en el desenvolupament de la matemàtica del segle XX. Alguns d'aquests problemes formaven part d'un pla per a la fonamentació de les matemàtiques.



Emmy Noether (Erlangen, 1882 - Bryn Mawr, Pennsilvània, 1935)

Filla de matemàtic, al 1907, es convertí en la primera dona a obtenir el grau de doctor en una universitat alemanya. Va treballar amb Klein i Hilbert sobre la teoria de la relativitat general a Göttingen. El 1922, va obtenir una plaça de professora de universitat, malgrat l'oposició que hi havia d'atorgar una càtedra a una dona. Albert Einstein comentava d'ella: "Descobrí mètodes de gran importància en el camp de l'àlgebra del qual s'han ocupat quasi tots els matemàtics més excel·lents."

Amb la creació del Partit Nacional Socialista, va haver d'abandonar Alemanya al 1933. Se'n va anar als Estats Units i, allí, va ser professora a la Universitat de Bryn Mawr a Filadèlfia. D'allí, viatjava sovint a la Universitat de Princeton, on feia conferències a l'Institut d'Estudis Avançats.

**John von Neumann (Budapest, 1903 - Washington, 1957)**

Molt aviat, demostrà la seva capacitat per a les matemàtiques. Als 10 anys, estudiava sota la direcció dels millors matemàtics hongaresos. Als 21 anys, va obtenir el grau d'enginyer químic a Zuric i el de doctor en Matemàtiques a la Universitat de Budapest. Va passar un quant temps a la Universitat de Berlín. El 1930, va acceptar ser professor visitant a la Universitat de Princeton. Ell i Albert Einstein van ser dels primers professors a temps complet de l'Institut d'Estudis Avançats de la Universitat de Princeton.

Durant la Segona Guerra Mundial, va participar en la construcció de la bomba atòmica a Los Álamos. Entre 1944 i 1946, va col·laborar en l'elaboració d'un informe per a l'exèrcit sobre computadores, i, el 1949, va començar a funcionar el primer computador programable. El 1954, el president Eisenhower el va designar membre de la Comissió d'Energia Atòmica. Les aportacions de von Neumann tant en matemàtica aplicada com en matemàtica pura són notables. Se'l considera el pare de la teoria de jocs moderna. Es va interessar també per la mecànica quàntica.

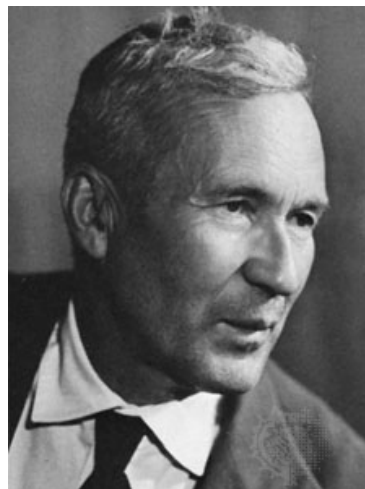
Va morir d'un càncer als 53 anys.



Andrei Nikolaievitx Kolmogorov (Tambov, 1903 - Moscou, 1987)

Va estudiar a la Universitat de Moscou. El 1931, Entrà de professor a la Universitat de Moscou. Aquest mateix any, va fer progressos importants en la teoria dels processos de Markov. El 1933, axiomatitzà la teoria de la probabilitat, relacionant-la amb la teoria de la mesura, resolent, així, part d'un dels problemes de Hilbert. Al llarg de la seva vida, va treballar en diverses branques de la matemàtica. Així, a més dels seus resultats en teoria de la probabilitat, féu aportacions importants a l'estudi de l'estabilitat de les òrbites planetàries, a la teoria de conjunts, a la topologia, a les funcions de variable real i a les sèries trigonomètriques. Últimament, treballà en lògica matemàtica i en teoria de la informació.

El 1939, el van nomenar membre de l'Acadèmia Soviètica de Ciències.

**Kurt Gödel (Brno, 1906 - Princeton, 1978)**

Estudià a la Universitat de Viena, on va ser professor a partir del 1930. Al 1931, resolgué el segon problema de Hilbert, provant que és impossible demostrar la consistència del sistema formal de l'aritmètica dins del mateix sistema formal. Aquest mateix any, demostrà que el sistema formal de l'aritmètica no és complet, és a dir, que hi ha proposicions, dins del sistema, que no es poden provar i tampoc es poden demostrar les seves negacions dins del mateix sistema. Aquests resultats tiraren per terra el pla de Hilbert per a la fonamentació de les matemàtiques.

A partir de 1938, s'establí als Estats Units i fou membre de l'Institut d'Estudis Avançats de Princeton. Al 1940, demostrà la consistència de la hipòtesi del continu i de l'axioma de l'elecció amb els axiomes de teoria de conjunts de Zermelo-Fraenkel; és a dir, si suposem que els axiomes de la teoria de conjunts de Zermelo-Fraenkel no porten a una contradicció, llavors, afegint la hipòtesi del continu i l'axioma de l'elecció, obtenim un sistema d'axiomes que no porten a una contradicció. Això resolva part del primer problema de Hilbert. El 1963, Paul J. Cohen demostrà la independència de l'axioma de l'elecció i de la hipòtesi del continu dels axiomes de la teoria de conjunts de Zermelo-Fraenkel; és a dir, si suposem que els axiomes de Zermelo-Fraenkel no porten a una contradicció i afegim la negació de l'axioma de l'elecció o la negació de la hipòtesi del continu com a nou axioma del sistema, llavors aquest nou sistema d'axiomes no porta a una contradicció. Això acaba la resolució del primer problema de Hilbert, que, de fet, era el recull de dos problemes que van portar de corcoll a Cantor durant part de la seva vida.

Els resultats de Gödel són de gran transcendència per a les matemàtiques. Les matemàtiques actuals es basen en la teoria de conjunts de Zermelo-Fraenkel. I Gödel ens diu que en el sistema formal de la teoria de conjunts de Zermelo-Fraenkel, encara que hi afegim l'axioma de l'elecció o altres axiomes independents, és impossible demostrar la seva pròpia consistència.

NOTA: Les fotografies has estan obtingudes de l'adreça d'Internet:
<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay>
 de la School of Mathematics and Statistics de la Universitat de St. Andrews a St. Andrews, Escòcia.

Acabem aquesta secció amb fotografies d'altres matemàtics cèlebres.



Tartaglia (1500-1557)



B. Pascal (1623-1662)



I. Barrow (1630-1677)



J. Bernouilli (1654-1705)



G. Hôpital (1661-1704)



B. Taylor (1685-1731)



P.S. Laplace (1749-1827)



J. Fourier (1768-1830)



S.V. Kovaleskaia (1850-1891)

5.2 Citacions de matemàtics i sobre matemàtiques

En aquesta secció es recullen i es tradueixen al català unes quantes citacions sobre matemàtiques i ciència, ja siguin de matemàtics o d'altres personatges famosos. Les fonts principals han estat el “Mathematical Quotation Server” de la Furman University, amb adreça electrònica

<http://math.furman.edu/~mwoodard/mqs/mquot.shtml>

i la pàgina de web “Science humor” preparada per Joachim Verhagen, amb adreça

<http://www.xs4all.nl/~jcdverha/scijokes/>

La selecció ha estat feta per Armengol Gasull i Maria Jolis. Aquestes citacions es classifiquen en quatre grups: Citacions a favor de les matemàtiques, citacions en contra d'elles, citacions sobre ciència i citacions sobre filosofia.

Citacions a favor de les matemàtiques

- Aristòtil (384-332 a. C.):

Les ciències matemàtiques mostren entre altres coses, ordre simetria i restriccions, i aquestes coses són les grans formes de la bellesa.

- Arthur Cayley (1825-1895):

A les matemàtiques els passa com a moltes altres coses: la bellesa es pot percebre, però no explicar.

- Charles Darwin (1809-1882):

Les matemàtiques semblen dotar-nos amb una espècie de nou sentit.

- René Descartes (1596-1650):

Cada problema que resolc es transforma en una regla que més endavant pot servir per a resoldre altres problemes.

- Albert Einstein (1879-1955):

Com pot ser que les matemàtiques, essent després de tot un producte humà, independent de l'experimentació, s'adaptin admirablement als objectes de la realitat?

- Galileu Galilei (1564-1642):

[L'univers] no es pot llegir fins que no hem après el llenguatge i ens hem familiaritzat amb els caràcters en els que està escrit. Ell està escrit en llenguatge matemàtic, i les lletres són els triangles, els cercles i altres figures geomètriques, sense les quals és humanament impossible entendre una simple paraula.

- Jacques Hadamard (1865-1963):

L'aplicació pràctica no es troba buscant-la i es podia dir que tot el progrés de la civilització es basa en aquest principi.

- David Hilbert (1862-1943):

Les matemàtiques no coneixen races o fronteres geogràfiques; per a les matemàtiques el món de la cultura és un país.

- Emmanuel Kant (1724-1804):

La ciència de les matemàtiques presenta l'exemple més brillant de com la raó pura pot ampliar amb èxit el seu domini sense l'ajut de l'experimentació.

- Nikolai Ivànovitx Lobatxevski (1792-1856):

No hi ha cap branca de les matemàtiques, per abstracta que sigui, que un dia no pugui ser aplicada a fenòmens del món real.

- Jules Henri Poincaré (1854-1912):

Els descobriments matemàtics, grans o petits mai no neixen per generació espontània. Sempre pressuposen un terra plantat amb el coneixement preliminar i ben preparat amb el treball tant conscient com subconscient.

- Alexandr Sergueièvitx Puixkin (1799-1837):

La inspiració es necessita en la geometria tant com en la poesia.

Citacions en contra de les matemàtiques

- Sant Agustí (354-430):

Si em donen una fórmula i no en sé el significat, no em pot ensenyar res; però si ja en conec el significat, què m'ensenya?

El bon cristià hauria de tenir compte dels matemàtics i de tots aquells que fan profecies buides. Ja hi ha el perill que els matemàtics hagin fet un pacte amb el diable per a enfosquir l'esperit i confinar-nos a les profunditats de l'infern.

- Daniel Bernouilli (1700-1782):

Seria millor per a la veritable física si no hi hagués matemàtics a la Terra.

- Albert Einstein (1879-1955):

Quan les lleis de la matemàtica es refereixen a la realitat, no són certes; quan són certes no es refereixen a la realitat.

Des que els matemàtics han envaït la teoria de la relativitat, ja no m'entenc a mi mateix.

- Martí Luter (1483-1546):

La medicina fa la gent malalta, les matemàtiques els fan tristos, i la teologia, pecadors.

- Charles Darwin (1809-1882):

Un matemàtic és un home cec en una habitació fosca buscant un gat negre que no és a l'habitació.

Citacions sobre la ciència

- René Descartes (1596-1659)

Els nombres perfectes¹ són com els homes perfectes, molt rars.

- Évariste Galois (1811-1832):

Malauradament, el que és poc reconegut és que els llibres científics valuosos són aquells en els que l'autor indica clarament el que no sap; encobrir les dificultats és el pitjor que pot fer un autor per els seus lectors.

- Karl Friedrich Gauss (1777-1855):

Sabeu que jo escric a poc a poc. Això és, sobretot, per què mai no estic satisfet fins que no he dit tot el possible en poques paraules, i escriure amb brevetat pren molt més temps que escriure amb extensió.

- Niels H. Abel (1802-1829):

És com una guineu², que esborra les seves petjades a la sorra amb la cua.

- Jacques Hadamard (1865-1963):

El camí més curt entre dues veritats al domini real passa per domini complex.

- Oliver Heaviside (1850-1925):

Hauria de refusar un bon sopar senzillament perquè no entenc el procés de la digestió?³

- Charles Hermite (1822-1901):

Som servents i no senyors de les matemàtiques.

¹Un nombre es diu perfecte si és igual a la suma de tots els seus divisors més petits que ell. Així 6, 28, 496, 8128,... són nombres perfectes ja que $6 = 3 + 2 + 1$, $28 = 14 + 7 + 4 + 2 + 1$, ... Es pot veure que els nombres de la forma $2^{n-1}(2^n - 1)$ i tals que $2^n - 1$ és primer són nombres perfectes. Els quatre que hem donat corresponen a $n = 2, 3, 5$ i 7 . Altres nombres perfectes s'obtenen per $n = 13, 17, 19, 31, 61$. Com a curiositat, direm que tots el nombres perfectes coneguts acaben amb 6 o 8.

²Citació sobre l'estil de Gauss.

³Resposta a les crítiques sobre les manipulacions algebraiques formals.

- David Hilbert (1862-1943):

L'art de fer matemàtiques consisteix a trobar quin és el cas especial que conté tots els gèrmens de generalitat.

Es pot mesurar la importància d'un treball científic pel nombre de publicacions prèvies que es tornen supèrflues per aquest.

- Lao Tze (604-531 a. C.):

Un bon calculador no necessita ajuts artificials.

- Pierre-Simon de Laplace (1749-1827):

Tal és l'avantatge d'un llenguatge ben construït que la seva notació simplificada es tradueix sovint en font de profundes teories.

- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716):

El nombre imaginari és un subtil i meravellós recurs de l'esperit diví, quasi un amfibi entre el ser i el no ser.

Qui estima la pràctica sense teoria és com el mariner que s'embarca en un vaixell sense timó ni brúixola i mai no sap on pot naufragar.

- Jules Henri Poincaré (1854-1912):

Les matemàtiques son l'art de donar el mateix nom a coses diferents.⁴

La ciència es construeix a partir de fets, com una casa a partir de totxos. Però una col·lecció de fets ja no és una ciència de la mateixa manera que una pila de totxos no és una casa.

La ment usa les seves facultats per a la creativitat només quan l'experiència la força a fer-ho.

- Edgar Allan Poe (1809-1849):

To speak algebraically, Mr. M. is execrable, but Mr. G. is $(x + 1)$ -ecrable.⁵

Citacions sobre filosofia

- René Descartes (1596-1650):

Si algú vol ser un veritable buscador de la veritat ha de dubtar, almenys un cop i tant com sigui possible, de totes les coses.

- Albert Einstein (1879-1955):

Tot hauria de ser tan simple com fos possible, però no més simple.

⁴En contraposició a la citació: La poesia és l'art de donar diferents noms a la mateixa cosa.

⁵Intraduïble.

La cosa més maca amb la qual podem experimentar és el misteri. Aquest és la font de tot l'art i ciència veritables.

- William Rowan Hamilton (1805-1865):

A la Terra no hi ha res tan gran com l'home; a l'home no hi ha res tan gran com la ment.

- David Hilbert (1862-1943):

L'infinit! Cap altra qüestió ha mogut tan profundament l'esperit de l'home.

- Immanuel Kant (1724-1804):

Tot el coneixement humà comença amb intuïcions, continua amb conceptes i acaba amb idees.

- Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813):

Quan demanem consell, el que busquem és complicitat.

- Pierre-Simon de Laplace (1749-1827):

En la seva major part, les qüestions més importants de la vida són finalment només problemes de càlcul de probabilitats.

El que sabem no és gaire. El que no sabem és immens.

- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716):

Res no és més impotent que veure les fonts d'una invenció, que, en la meva opinió són més importants que les invencions per elles mateixes.

- Blaise Pascal (1623-1662):

Normalment ens convencem més fàcilment per raons trobades per nosaltres mateixos que per les que s'han acudit a altri.

No puc jutjar el meu treball mentre l'estic fent. He de fer com fan els pintors, allunyar-me'n i veure'l des d'una distància, però no una distància gaire gran. Com de gran? Qui sap.

La natura és com una esfera infinita, de la qual el centre és a tot arreu i la circumferència enlloc.

No és cert que tot sigui incert.

- Lev Nikolaievitx Tolstoi (1828-1910):

Un home és com una fracció, amb numerador el que és i amb denominador el que pensa d'ell mateix. Com més gran és el denominador més petita és la fracció.