MATEMÀTIQUES I MODELITZACIÓ PER A LES CIÈNCIES AMBIENTALS

JAUME AGUADÉ

MATEMÀTIQUES I MODELITZACIÓ PER A LES CIÈNCIES AMBIENTALS

Jaume Aguadé

ISBN: 978-84-608-9345-5

L'autor d'aquesta obra és Jaume Aguadé Bover
Jaume.Aguade@uab.cat

Versió 1.1

1 de març de 2017,
aniversari d'Eduard Fontserè i Riba.

Aquesta obra es pot descarregar d'aquí:
http://mat.uab.cat/∼aguade/teaching.html
http://ddd.uab.cat/record/158385?ln=ca

Índex

Proemi

Les assignatures de matemàtiques del batxillerat científic i tecnològic proporcionen unes eines molt poderoses per emprendre amb èxit estudis científics. L'alumne —si realment assoleix els coneixements que hi ha als programes d'aquestes assignatures— coneix les funcions elementals, la derivada i la integral, els vectors i les matrius..., i ha adquirit destresa en la manipulació d'aquests conceptes fonamentals. És clar que la ciència i la tècnica utilitzen moltes altres eines més sofisticades, però les que ja estan a l'abast de l'estudiant que arriba, per exemple, a la Facultat de Ciències i al grau de Ciències Ambientals, constitueixen una base imprescindible i prou àmplia.

Tanmateix, després d'haver adquirit les eines bàsiques que hem comentat, l'estudiant ha d'aprendre a utilitzar-les en els diversos camps científics. Ha d'aprendre a *modelitzar*, és a dir, convertir un problema científic en un problema matemàtic. Encara que, mirant l'índex d'aquest llibre, pugui semblar que es tracta d'uns apunts més o menys estàndard de matemàtiques bàsiques, la realitat és que l'èmfasi principal del curs —perquè aquest llibre és, de fet, els apunts d'un curs— es troba en la modelització.

Perquè quedi més clar això que estem dient, posem un exemple. Considerem aquests dos problemes:

- Calculeu la derivada de la funció $y = xe^x$ per $x = 1$.
- Doneu una estimació de la pèrdua d'absorció de diòxid de carboni atmosfèric als boscos del Brasil, per culpa de la desforestació i del canvi climàtic.

Els estudiants que comencen Ciències Ambientals saben resoldre el primer exercici, que és una aplicació immediata de la regla de derivació del producte de dues funcions. Normalment, no saben resoldre el segon ni tampoc veuen cap relació entre el segon exercici i el primer. Matemàticament, els dos exercicis són equivalents i es redueixen a la regla de derivació del producte de dues funcions. La diferència es troba en que el primer exercici —que en diem exercici perquè no té altra utilitat que la d'exercitar la capacitat de calcular derivades de funcions— és un exercici abstracte de matemàtiques, mentre que el segon problema exigeix, abans de poder-lo resoldre, un procés de modelització que el converteixi en un exercici tan simple com el primer.

D'això tracta, precisament, aquest curs de *Matemàtiques i Modelització per a les Ciències Ambientals*: de guiar l'estudiant en els mètodes més elementals del procés de modelització matemàtica: Quines són les variables i quines són les funcions que intervenen en el problema? Amb quins conceptes matemàtics es relaciona la qüestió que volem resoldre? Quines hipòtesis ens cal fer per poder atacar el problema? Quina és la formulació matemàtica a la què arribem després del procés de modelització?

Per tal d'assolir aquest objectiu, s'ha dedicat un esforç especial a la tria dels exemples i exercicis que hi ha al llarg del llibre. Els exercicis que hi ha al final de cadascuna de les sis parts del curs s'han distribuït en dues tipologies: exercicis teòrics i exercicis d'aplicació. La finalitat dels primers és *exercitar-se* en la utilització dels diversos

conceptes i les diverses tècniques que s'han presentat —talment com les sessions d'entrenament esportiu—. Els exercicis de la segona part presenten autèntics problemes de *modelització* —força simplificats, però prou significatius. Cal dominar els primers per atacar amb èxit els segons, però és en els exercicis d'aplicació on trobem els objectius fonamentals del curs. Tornant amb el símil esportiu, els primers són l'entrenament i els segons són la competició. O, si preferim comparar-ho amb la música, els primers serien la tècnica, la pràctica i l'assaig i els segons serien el concert.

*

Molts dels capítols d'aquest llibre —cada capítol correspon, aproximadament, a una classe d'una hora— s'acaben amb un apartat que du el títol *«Fem-ho amb sage»*. En aquests apartats es donen indicacions sobre com utilitzar un programari concret per treballar amb els conceptes que s'acaben d'estudiar. Hem escollit el programa sage, que és excel·lent i, a més, és de codi lliure. A la pàgina `sagemath.org` hi podem trobar tota la informació necessària i la possibilitat de descarregar-nos el programa en el nostre ordinador o bé obrir-hi un compte per treballar *online* des de qualsevol navegador.

Exigir als estudiants que siguin capaços de resoldre els exercicis del curs utilitzant una calculadora senzilla, no està en contradicció amb ensenyar-los que, més enllà de l'aula, els càlculs matemàtics es fan sempre amb algun programa com pugui ser el sage. En conseqüència, convé que l'estudiant es familiaritzi amb la utilització de l'ordinador com a instrument de càlcul matemàtic. D'altra banda, l'autor d'aquestes notes està convençut que fóra un greu error focalitzar la docència en l'ordinador —per exemple, dedicant temps docent a aprendre sage— perquè la docència ha d'esmerçar tots els seus esforços en els *conceptes fonamentals*.[1]

*

Deixeu-me acabar aquest proemi amb quatre consells sobre com s'aprenen les matemàtiques.

Encara que ens passem hores i hores mirant vídeos d'esquí, no aprendrem a esquiar si no ens calcem uns esquís i ens involucrem a fons en la pràctica de l'esquí —dirigida, és clar, per algú que en sàpiga. Això és evident. Hi ha moltes habilitats que no es poden adquirir amb la simple contemplació d'una persona que practica aquesta habilitat. Per

[1] En aquest context, em semblen especialment pernicioses les veus que, com un corcó, van repetint una vegada i una altra que *la docència s'ha de basar en les «noves tecnologies»*. Sempre hi ha hagut *noves tecnologies* i la seva característica principal és que es converteixen en *velles tecnologies* a gran velocitat. Quan l'autor d'aquest llibre estudiava el batxillerat, va perdre moltes malaguanyades hores en aprendre les noves tecnologies de l'època, que eren les Taules de Logaritmes i el Regle de Càlcul. I si s'hagués sotmès, ara fa trenta anys, quan ja era professor universitari, a la dèria de les noves tecnologies, hauria fet perdre el temps als seus alumnes ensenyant-los un programa que es deia *Lotus-123* que, segurament, ningú dels qui llegeixin aquest llibre ha sentit anomenar mai. La conclusió és ben clara: cal ensenyar —encara més en matemàtiques— els principis fonamentals i no pas les *noves tecnologies*.

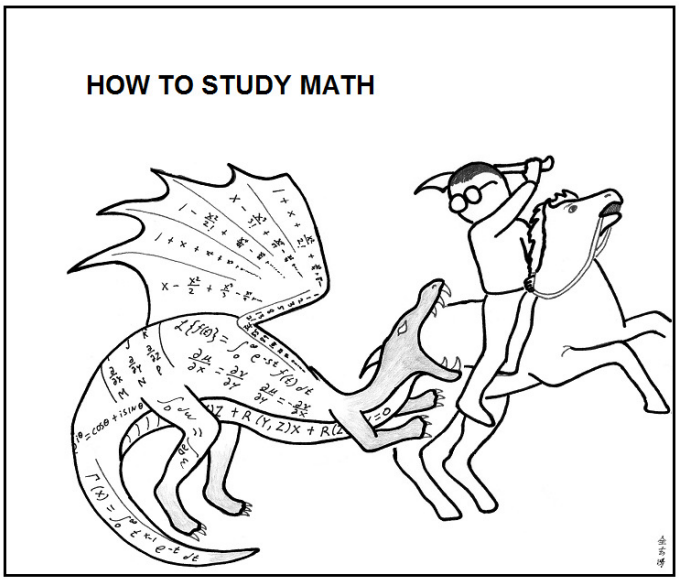
exemple, esquiar, anar amb bicicleta, tocar el violí... Les matemàtiques també tenen aquesta propietat.

Un estudiant que es limiti a *contemplar* com el professor explica l'assignatura, es pràcticament segur que mai no aprendrà res. Les matemàtiques només s'aprenen *fent* matemàtiques. És a dir, involucrant-s'hi personalment a fons: practicant incansablement, dedicant-hi hores i hores d'esforç i concentració individual. Exactament igual que fa qualsevol persona que vol excel·lir en un esport de competició, o que vol tocar un instrument a un nivell alt.

El famós matemàtic Paul Halmos ens recordava amb aquestes paraules com ho hem de fer per aprendre matemàtiques:

> ***Don't just read it; fight it!*** *Ask your own questions, look for your own examples, discover your own proofs.*

Aquesta idea la recull molt bé un dibuix que va publicar fa temps el còmic `abstrusegoose.com`. Representa l'estudiant de matemàtiques com un Sant Jordi molt especial.[2]



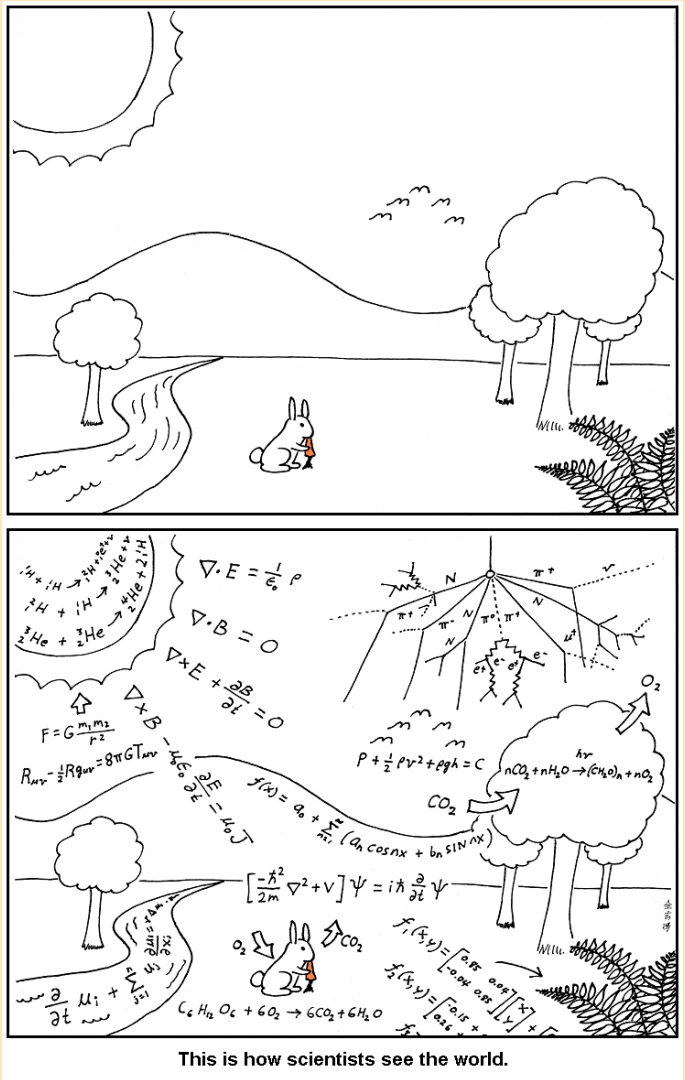
Don't just read it; fight it!

--- Paul R. Halmos

[2] Dibuix ©`abstrusegoose.com` publicat amb llicència Creative Commons.

Part I:

Les funcions elementals



This is how scientists see the world.

1. Els nombres

1.1 Nombres enters i nombres decimals

Tot comença amb els **nombres enters** positius i negatius, i amb el zero:

$$\ldots -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\ldots$$

i la primera cosa que observem és que *no s'acaben mai*, és a dir, per molt gran que sigui un nombre, sempre n'hi ha un de més gran. Diem que hi ha **infinits** nombres enters.[1] És a dir, des de l'inici de les matemàtiques ja «topem» amb l'infinit! I no ho podem evitar: encara que els nombres que realment podem escriure en un paper (o en qualsevol mena de suport) són limitats, per poder fer matemàtiques **necessitem** admetre que hi ha nombres enters il·limitadament grans.

Però amb els nombres enters no n'hi ha prou —ni de bon tros!— per a totes les aplicacions de les matemàtiques a la ciència. Ens calen els **nombres decimals** —que els matemàtics anomenen **nombres reals**. Un nombre decimal està format per un nombre enter, una coma (o punt) decimal i una successió il·limitada de dígits arbitraris.[2] Aquí tornem a topar, doncs, amb l'infinit, i encara d'una manera més punyent. Pensem, per exemple, en el nombre $\sqrt{2}$ que és, per definició, el nombre decimal positiu que, elevat al quadrat, dóna exactament 2. Aquest nombre decimal no es pot escriure exactament enlloc, ni en un paper (per gran que sigui) ni en un ordinador (per potent que sigui). El podem escriure amb moltes xifres

$$\sqrt{2} =$$
$$1.41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667973799073247846210703885038753432764157273501384623091229702492483605585073721264412149709993583141322266592750559275579995050115278206057147010955997160597027453459686201472851741864088919860955232923048430871432145083976260362799525140798968725339654633180882964062061525835239505474575028775996172983557522033753185701135437460340849884716038689997069900481503054402779031645424782306849293691862158057846311159666871301301561856898723723528850926486124949771542183342042856860601468247207714358548741556570696776537202264854470158588016207584749226572260020855844665214583988939443709265918003113882464681570826301005948587040031864803421948972782906410450726368813137398552561173220\cdots$$

[1] Cal ser molt curós a l'hora d'usar la paraula *infinit*, perquè no té un significat intrínsec. Per tant, en cada ocasió que surti aquesta paraula, hem de deixar clar què significa exactament en aquest context.

[2] De fet, hi ha una restricció, que consisteix en que aquesta successió il·limitada de dígits no pot tenir infinites xifres 9 consecutives. Per exemple, no s'hi val $2.1999999\ldots$ perquè aquest nombre és el mateix que el nombre 2.2.

però mai el podrem escriure amb totes les seves xifres.[3] Podríem pensar que *per a les aplicacions pràctiques potser n'hi ha prou amb unes poques xifres decimals, diguem cinc o deu*, però ens equivocaríem perquè, igual que passa amb els nombres enters, per poder fer matemàtiques és imprescindible admetre nombres decimals amb una quantitat infinita de xifres decimals.

Per tant, els nombres decimals només els podem escriure de forma **aproximada**

$$\sqrt{2} \approx 1.4$$
$$\sqrt{2} \approx 1.4142$$
$$\sqrt{2} \approx 1.41421356$$
etc.

Aquest fet dóna lloc al problema de l'**arrodoniment**: cada vegada que aproximem un nombre real per un nombre amb una quantitat finita de decimals estem cometent un error i, per tant, els càlculs que fem (a mà, amb una calculadora o amb un ordinador, per potent que sigui) estan sempre sotmesos a aquests errors que es poden anar acumulant fins a distorsionar completament el resultat final dels nostres càlculs. És un problema molt seriós, que no hem de menystenir.

Per minimitzar els riscos de patir aquests errors, cal tenir present aquestes normes generals:

1. Cal fer els càlculs amb la màxima exactitud que permeti la nostra calculadora o ordinador. És a dir, mai no hem de arrodonir a poques xifres decimals els resultats intermedis d'un càlcul.

2. Quan obtinguem el resultat final, l'arrodonirem a un nombre «convenient» de xifres decimals. El concepte de «convenient» tindrà a veure amb la naturalesa del problema i amb la precisió de les dades.

3. Cal arrodonir correctament. La idea és buscar el nombre que tingui la quantitat de decimals que volem i que sigui el més proper possible al nombre donat. Per exemple, el resultat d'arrodonir $\sqrt{5} = 2.23606797749\cdots$ a 1, 2, 3,... xifres decimals és:

   $$2.2,\ 2.24,\ 2.236,\ 2.2361,\ 2.23607,\ 2.236068,\ 2.2360680,\ 2.23606798,\ldots$$

   El cas que queda indeterminat és aquell en què la part descartada consisteix en un 5 seguit d'infinits zeros. Per exemple, si volem arrodonir 2.45 a un decimal, les dues opcions 2.5 i 2.4 estan igualment properes al valor exacte 2.45. En aquest cas (científicament poc significatiu), hi ha diversos mètodes i tots presenten avantatges i inconvenients.

Si hem d'expressar nombres molt grans o molt petits, utilitzem la **notació científica** que consisteix en expressar el nostre nombre com el producte d'un nombre amb una part entera amb poques xifres i una potència de 10 (d'exponent positiu o negatiu). Per exemple:

$$3.45 \times 10^{12},\ -2.547 \times 10^{6},\ 7.31 \times 10^{-5},\ldots$$

[3] De fet, com que aquest nombre $\sqrt{2}$ no es pot escriure, ni en teoria, els grans matemàtics grecs de fa més de dos mil anys no acceptaven que for realment un nombre.

1.2 Ordre i intervals

Coneixem les operacions aritmètiques bàsiques dels nombres: la suma, la resta, la multiplicació i la divisió. Cal recordar que la divisió només és possible si el denominador és un nombre diferent de zero.

Una altra propietat important dels nombres reals és que estan **ordenats**: donats dos nombres diferents sempre n'hi ha un que és més gran que l'altre. Utilitzarem els símbols

$$a < b,\ a \leq b,\ a > b,\ a \geq b$$

per indicar aquesta relació. S'anomenen **positius** els nombres que són més grans que zero i s'anomenen **negatius** els nombres que són més petits que zero. El zero no és ni positiu ni negatiu.

El fet que els nombres estiguin ordenats ens permet parlar d'**intervals**. La notació serà:

$$\begin{aligned}
[a,b] &\text{ denota tots els nombres } x \text{ tals que } a \leq x \leq b\\
(a,b) &\text{ denota tots els nombres } x \text{ tals que } a < x < b\\
[a,b) &\text{ denota tots els nombres } x \text{ tals que } a \leq x < b\\
(a,b] &\text{ denota tots els nombres } x \text{ tals que } a < x \leq b\\
(-\infty,b] &\text{ denota tots els nombres } x \text{ tals que } x \leq b\\
(-\infty,b) &\text{ denota tots els nombres } x \text{ tals que } x < b\\
[a,\infty) &\text{ denota tots els nombres } x \text{ tals que } a \leq x\\
(a,\infty) &\text{ denota tots els nombres } x \text{ tals que } a < x\\
(-\infty,\infty) &\text{ denota tots els nombres}
\end{aligned}$$

1.3 Potències i arrels

Ja coneixem el concepte de potències d'un nombre. Si a és un nombre qualsevol i n és un enter positiu, definim la potència a^n com el producte repetit de a per a n vegades:

$$a^n = \overbrace{a \cdots a}^{n}.$$

Les dues propietats fonamentals d'aquesta operació són aquestes

$$a^{n+m} = a^n a^m, \qquad (a^n)^m = a^{nm}. \tag{$*$}$$

El concepte d'arrel enèsima es defineix així: $\sqrt[n]{a} = b$ vol dir que $b^n = a$. Si n és senar, tot nombre a té una única arrel n-èsima $\sqrt[n]{a}$. En canvi, si n és parell

- 0 té una única arrel n-èsima: $\sqrt[n]{0} = 0$.
- Els nombres negatius no tenen arrel n-èsima.
- Els nombres positius tenen dues arrels n-èsimes, una de positiva i una de negativa. La notació $\sqrt[n]{a}$ denota, en aquest cas, sempre l'arrel **positiva**.

Si l'exponent no és un enter positiu, el concepte anterior de potència com a *multiplicació repetida* no té cap significat però, malgrat això, li podem donar un sentit i ho podem fer de manera que les dues propietats fonamentals $(*)$ segueixin essent vàlides. Ho fem així:

- Si a és un nombre qualsevol $\neq 0$, definim $a^0 = 1$.
- Si a és un nombre qualsevol $\neq 0$ i n és un enter positiu, definim $a^{-n} = 1/a^n$.
- Si a és un nombre positiu i m és un enter positiu, definim $a^{1/m} = \sqrt[m]{a}$.
- Si a és un nombre positiu, els apartats anteriors ja ens defineixen $a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$.
- Finalment, si a és un nombre positiu i r és un nombre decimal arbitrari, podem definir a^r per un mètode de *pas al límit* que ara no discutirem.

Convé observar

- Les definicions anteriors no són capricioses, sinó que són les definicions que cal adoptar si volem que les propietats

  $$a^{r+s} = a^r a^s, \qquad (a^r)^s = a^{rs}.$$

  que ja es complien per a exponents enters positius segueixin essent vàlides per a exponents arbitraris.
- Les potències a^r amb r un nombre decimal arbitrari només estan definides si $a > 0$. Només en el cas en què l'exponent sigui enter podem admetre que a pugui ser negatiu.[4] Finalment, si $r > 0$ també podem acceptar que $0^r = 0$.

1.4 Valor absolut i part entera

Podem dir que el **valor absolut** d'un nombre és «el nombre prescindint del seu signe». Una definició més precisa és aquesta

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

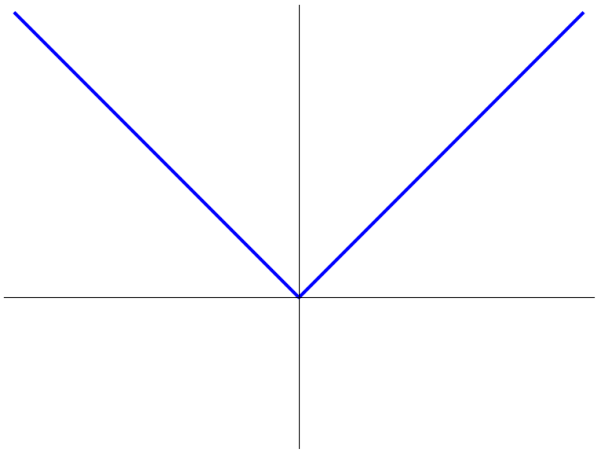
Les propietats elementals d'aquesta funció són aquestes

- $|a| = |b|$ és el mateix que $a = \pm b$.
- $|ab| = |a|\,|b|$ i $|a|/|b| = |a/b|$ (en aquest cas, si $b \neq 0$).
- $|a + b| \leq |a| + |b|$.

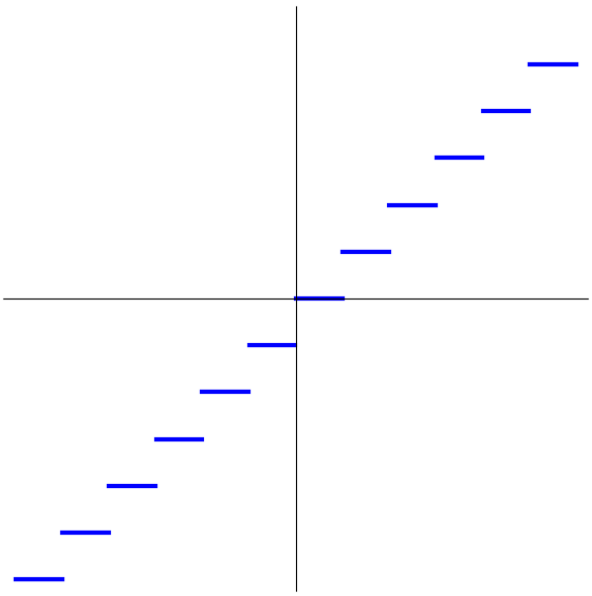
[4] Per comprendre millor això que estem dient aquí, observem aquesta paradoxa: $-1 = (-1)^1 = ((-1)^2)^{1/2} = 1^{1/2} = \sqrt{1} = 1$. Pot veure el lector on hi ha l'error?

- $|a| < b$ és el mateix que $-b < a < b$ i $|a| > b$ és el mateix que $a > b$ o $a < -b$.[5]
- $\sqrt{a^2} = |a|$ i, en general, si n és parell, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

El valor absolut es pot considerar com una funció $f(x) = |x|$. Si la pensem així, la seva gràfica és aquesta



La **part entera** d'un nombre positiu és el nombre sense la seva part decimal. S'acostuma a denotar $\lfloor x \rfloor$ o també $\mathrm{INT}(x)$. Si volem donar una definició més precisa que valgui també per als nombres negatius, direm que la part entera d'un nombre a és el més gran de tots els enters n tals que $n \leq a$. Observem que, amb aquesta definició, la part entera de -3.18 és -4. Si dibuixem la part entera com una funció, obtenim una gràfica que en podríem dir «esglaonada».



[5] Com que aquesta és, potser, la primera vegada que surt la paraula «o» en aquests apunts, és un bon moment per recordar que, si bé aquesta paraula té dos significats diferents en el llenguatge ordinari —l'o inclusiu i l'o exclusiu— en el llenguatge matemàtic té únicament el significat «inclusiu». En matemàtiques, l'expressió «A o B» vol dir «o A, o B o ambdós».

1.5 Fem-ho amb sage

Ja hem dit que cap ordinador pot emmagatzemar un nombre real arbitrari, perquè aquests nombres tenen infinites xifres decimals. sage considera tres tipus de nombres:

- Nombres **exactes**. Per exemple, 14 i 125/41 són nombres exactes. Les operacions (suma, producte, divisió) que es fan amb nombres exactes sempre donen nombres exactes.
- Nombres **inexactes**, que són els nombres decimals amb una quantitat determinada de decimals (com a les calculadores). El nombre de decimals es pot escollir i pot ser tan gran com calgui. Per exemple, 2.5 és un nombre inexacte i, de fet, qualsevol nombre que contingui una coma decimal es considera un nombre inexacte. Observem la diferència que hi ha entre el nombre exacte 5/2 i el nombre inexacte 2.5. Les operacions amb nombres inexactes donen nombres inexactes, però hi ha algunes operacions que sage es nega a fer amb nombres inexactes, perquè no pot garantir la correcció dels resultats. Treballar amb nombres inexactes s'assembla a treballar amb una calculadora, amb la diferència que podem augmentar el nombre de decimals tant com vulguem.
- Nombres **simbòlics**. Es tracta de nombres donats per expressions simbòliques que, per tant, són **exactes**. Per exemple, `sqrt(3)`, `e^2` i `cos(pi/7)` són nombres simbòlics. Les operacions amb nombres simbòlics donen nombres simbòlics.

Podem passar d'un tipus de nombre a un altre. Per exemple, l'atribut `.N()` ens dóna el valor aproximat d'una expressió simbòlica o d'una fracció. Si volem més xifres decimals, podem indicar-ho a l'interior del parèntesi. També podem utilitzar la funció `RR(-)`.

```
sage: 125/41.N()
 3.04878048780488
sage: sqrt(5).N()
 2.23606797749979
sage: sqrt(5).N(digits=29)
 2.2360679774997896964091736687
sage: cos(e^2)
 cos(e^2)
sage: cos(e^2.1)
 -0.307141875548787
sage: cos(e^2).N()
 0.448356241818733
sage: RR(cos(e^2))
 0.448356241818733
sage: AA(cos(pi/7))
 0.90096886790241917
```

La funció `AA(-)` ens dóna el valor aproximat de l'expressió, acabada amb un interrogant que ens indica que sage coneix el valor exacte del nombre.

Sovint, sage ens dóna una resposta tan complicada que es fa difícil llegir-la amb comoditat. La funció `view(-)` ens permet visualitzar l'expressió en format tipogràfic.

```
sage: solve(x^2+sqrt(2)*x-1,x)
 [x == -1/2*sqrt(6) - 1/2*sqrt(2), x == 1/2*sqrt(6) - 1/2*sqrt(2)]
```

```
sage: view(solve(x^2+x-1,x))
```

$$\left[x = -\frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{2},\ x = \frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right]$$

Observem la utilització de la funció `solve(-)` per resoldre equacions de segon grau (i de tercer i quart), de manera que el resultat és una expressió simbòlica. En general, podem resoldre equacions amb la funció `find_root(-,-,-)` si li diem entre quins valors ha d'estar la solució.

```
sage: find_root(cos(x)==sin(x),0,pi/2)
 0.7853981633974484
sage: find_root(x^5+e*x-1,0,10)
 0.36548046271183154
```

A banda de la variable x, que ja està incorporada per defecte, podem introduir altres variables. També podem resoldre sistemes d'equacions.

```
sage: alfa=var('alfa')
sage: solve([2*x+alfa==6, x-alfa==4],x,alfa)
 [[x == (10/3), alfa == (-2/3)]]
```

Tenim la funció `round(-,-)` per arrodonir un nombre decimal, la funció `abs(-)` per calcular el valor absolut i la funció `floor(-)` per calcular la part entera. També podem fer comparacions entre nombres.

```
sage: abs(sin(0.3)-cos(0.5))
 0.582062355229033
sage: round(e,4)
 2.7183
sage: floor(2^3.5)
 11
sage: RR(cos(pi/8))>RR(sin(pi/7))
 True
```

Ja hem dit que treballar amb nombres inexactes té els seus problemes. Observem aquest exemple:

```
sage: a=pi/12
sage: RR(sin(a)^2+cos(a)^2)==1
 False
sage: AA(sin(a)^2+cos(a)^2)==1
 True
```

Observem la diferència semàntica entre els signes `=` i `==`. El primer serveix per assignar un valor a una variable mentre que el segon serveix per indicar la igualtat o manca d'igualtat entre dos objectes.

```
sage: a=cos(0)
sage: a
 1
sage: a==1
 True
```

La funció `solve(-,-)` no pot resoldre totes les equacions, però no està gens malament la capacitat que té. Per exemple, aquestes equacions (extretes de la llista d'exercicis), les resol sense dificultat:

```
sage: K,t,r,k=var('K,t,r,k')
sage: solve(x/(1-(x/K))==k*e^(r*t),x)
```

```
 [x == K*k*e^(r*t)/(k*e^(r*t) + K)]
sage: solve((x+5)^2/(2*x-3)^2==1,x)
 [x == (-2/3), x == 8]
sage: solve((x-1)*(x-2)==3*(1+(x-2)/(1-(x-3)/x)),x)
 [x == -1]
sage: solve((3*x+1)*(x-2)>1,x)
 [[x < -1/6*sqrt(61) + 5/6], [x > 1/6*sqrt(61) + 5/6]]
sage: solve(abs(x+1)<=abs(x),x)
 [[x == (-1/2)], [x < -1], [x == -1], [-1 < x, x < (-1/2)]]
```

2. Algunes qüestions de geometria elemental

En aquesta lliçó repassarem alguns conceptes elementals de geometria, com són les rectes, les circumferències i la trigonometria.

2.1 Rectes del pla

Una recta del pla està formada pels punts del pla de coordenades (x, y) que compleixen una equació **lineal**

$$ax + by + c = 0$$

on a, b i c són nombres i a i b no són tots dos zero. Les rectes verticals són les rectes amb $b = 0$, és a dir, les rectes $x = d$. Totes les altres rectes es poden escriure de la forma

$$y = mx + b.$$

Els coeficients m i b tenen un significat que cal recordar:

- b indica el punt de tall de la recta i l'eix d'ordenades. És a dir, la recta passa pel punt $(0, b)$.
- m indica el **pendent** de la recta, que és l'augment de y quan x augmenta en una unitat. Si $m > 0$, la recta és creixent, si $m < 0$, la recta és decreixent. Si $m = 0$, la recta és horitzontal.

És clar que dues rectes són paral·leles si tenen el mateix pendent. D'altra banda, la geometria elemental ens diu que les rectes $y = mx+b$ i $y = m'x+b'$ són perpendiculars si els seus pendents estan relacionats per la fórmula $mm' = -1$.

Donats dos punts (diferents) del pla, és molt senzill escriure l'equació de la recta que passa per aquests dos punts. Suposem que els punts són (a, b) i (a', b'). Clarament, el pendent de la recta ha de ser

$$m = \frac{b - b'}{a - a'}.$$

Per tant, l'equació de la recta tindrà la forma

$$y = \frac{b - b'}{a - a'}\, x + c$$

i ara podem determinar quin és el valor de c per tal que la recta passi pel punt (a, b).

Exemple: Trobeu l'equació de la recta que passa pel punt $(1, 1)$ i és perpendicular a la recta que passa pels punts $(0, 2)$ i $(3, 1)$.

La recta que passa per $(0,2)$ i $(3,1)$ té pendent $m = -1/3$. Per tant, una recta perpendicular a ella tindrà pendent $m' = 3$. Això ens diu que la recta serà $y = 3x + b$ i ara cal determinar el valor de b. Com que la recta ha de passar pel punt $(1,1)$, veiem que $b = -2$. En conclusió, la recta buscada té l'equació

$$y = 3x - 2.$$

2.2 Distància i circumferències

La distància entre dos punts del pla de coordenades (a,b) i (a',b') ve donada pel teorema de Pitàgores:

$$d = \sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2}.$$

La circumferència de centre (a,b) i radi $r > 0$ està formada per tots els punts del pla que estan a distància r del centre. Per tant, aquest punts són els que compleixen l'equació

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

En particular, les circumferències centrades a l'origen tenen equació

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Altres figures geomètriques que venen representades per equacions de segon gran són les el·lipses i les hipèrboles. L'equació d'una el·lipse centrada a l'origen i amb eixos els eixos de coordenades té la forma

$$x^2 + a^2y^2 = r^2$$

amb $a \neq 0, 1$ i $r \neq 0$. L'equació d'una hipèrbola en les mateixes condicions té la forma

$$x^2 - a^2y^2 = r^2 \quad \text{o} \quad x^2 - a^2y^2 = -r^2, \quad a, r \neq 0.$$

Una equació de segon grau de la forma

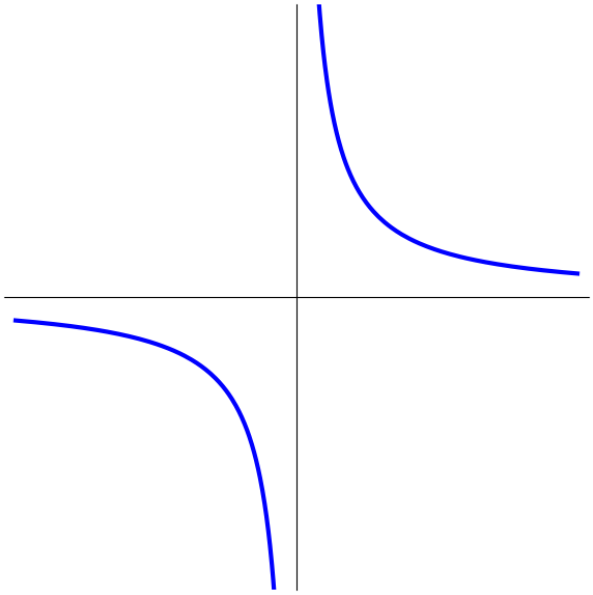
$$y = ax^2 + bx + c$$

amb $a \neq 0$ determina una paràbola amb l'eix vertical.

Finalment, l'equació

$$xy = k$$

amb $k \neq 0$ defineix una hipèrbola amb aquesta forma (si $k > 0$):



Si una equació de segon grau (se'n diuen *quadràtiques*) en dues variables representa una circumferència, és senzill determinar el seu centre i el seu radi per un mètode que s'anomena *completar els quadrats*.

Exemple: Determineu el centre i el radi de la circumferència $x^2+2x+y^2-8y+8=0$. Fem això:

$$(x^2+2x)+(y^2-8y)+8=(x+1)^2-1+(y-4)^2-16+8=(x+1)^2+(y-4)^2-9$$

i, per tant, el centre és el punt $(-1,4)$ i el radi és 3.

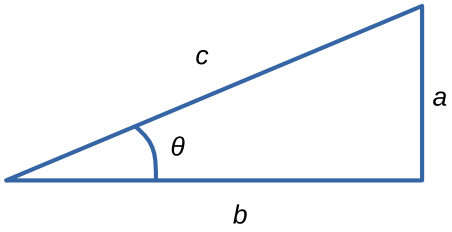
2.3 Angles i trigonometria

Un angle consisteix en dues rectes que es tallen en un punt. De la mateixa manera que, per mesurar distàncies, hem de fixar una unitat de mesura, per poder mesurar angles també hem de fixar una unitat de mesura. Però hi ha una diferència essencial entre aquests dos casos, perquè l'elecció de la unitat de mesura de distàncies és relativament arbitrària i s'ha de fer utilitzant alguna propietat física, mentre que en el cas dels angles, hi ha una unitat *«canònica»* que és l'angle «complet», és a dir la volta completa a la circumferència.

De la mateixa manera que en els càlculs científics cal utilitzar un sistema coherent d'unitats de mesura, als càlculs matemàtics és imprescindible mesurar els angles en **radians**. Un radian és la mesura d'un angle tal que un arc de circumferència de radi 1 i mida 1 radian té una longitud igual a 1. Dit d'una altra manera, el radian és la unitat de mesura d'angles tal que la circumferència completa mesura 2π radians. Per tant, mitja circumferència serà un angle de π radians, un quart de circumferència serà un angle de $\pi/2$ radians, etc.

En molts casos, si hem de calcular un angle, pot ser apropiat i útil donar el resultat final en **graus, minuts i segons**, però els càlculs els hem de fer sempre en radians.

Per què? No és cap caprici. Per exemple, tots hem après que la derivada de la funció **sinus** és la funció **cosinus**, però això només és cert si mesurem aquestes funcions en radians. No és cert si les mesurem en graus.



Considerem un triangle rectangle i suposem que els catets mesuren a i b, mentre que la hipotenusa mesura c. Designem per θ la mesura de l'angle que formen el catet de longitud b i la hipotenusa. La trigonometria estudia la relació que hi ha entre θ, a, b i c. Aquesta relació ve donada per les funcions trigonomètriques sinus i cosinus. En concret,

$$\sin\theta = \frac{a}{c}, \quad \cos\theta = \frac{b}{c}.$$

La geometria elemental ens diu que, efectivament, aquests quocients no depenen del triangle rectangle que haguem pres, sempre que l'angle θ tingui el mateix valor.

A partir del teorema de Pitàgores s'obté immediatament aquesta relació fonamental entre les dues funcions sin i cos:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

Observem que el **pendent** de la hipotenusa és precisament el quocient a/b. Com que aquest concepte és tan important, introduïm una nova funció trigonomètrica, la **tangent**

$$\tan\theta = \frac{a}{b} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

Aquesta funció trigonomètrica, sense anomenar-la tangent, s'utilitza constantment a la pràctica i se'n diu el **pendent**. Per exemple, si $a = b$, la tangent val 1 i es parla d'un pendent del 100%. Si llegim que la carretera del Tourmalet té un pendent mitjà del 7.4%, això ens està dient que la carretera fa un angle θ amb l'horitzontal tal que $\tan\theta = 0.074$. Amb una calculadora trobarem que $\theta \approx 4.2$ graus.[1]

En aquest exemple ja hem vist que hi haurà situacions en què, a partir del valor d'alguna funció trigonomètrica, ens interessarà calcular el valor de l'angle. Això ho fem amb les **funcions trigonomètriques inverses**.

$$\sin\theta = s \text{ és el mateix que } \arcsin s = \theta$$
$$\cos\theta = s \text{ és el mateix que } \arccos s = \theta$$
$$\tan\theta = s \text{ és el mateix que } \arctan s = \theta$$

[1] A la pràctica, per a pendents no gaire grans, el que es fa és dividir el guany en alçada per la distància recorreguda. Això és el sinus de l'angle d'inclinació i no pas la seva tangent però, si l'angle és petit, hi ha poca diferència entre el sinus i la tangent. Per exemple, considerem un pendent del 10%, mesurat dividint el guany en alçada per la distància en horitzontal. Si ara calculem el pendent dividint el guany en alçada per la distància recorreguda, obtenim un pendent del 9.95%. Com podem veure, si l'angle és petit, la diferència és poc significativa.

Per la pròpia definició d'aquestes funcions, ja coneixem alguns valors i algunes propietats. Per exemple:

$$\sin 0 = \sin \pi = \cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$$
$$\cos 0 = -\cos \pi = \sin \frac{\pi}{2} = -\sin \frac{3\pi}{2} = 1$$
$$\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \tan \frac{\pi}{4} = 1$$
$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

També, una mica de geometria elemental ens permet calcular les funcions trigonomètriques dels angles de 30°, 45° i 60°:

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \tan \frac{\pi}{4} = 1$$
$$\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$
$$\sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Finalment, si a un angle li sumem 2π radians, torna a ser el mateix angle. Per tant, aquestes funcions trigonomètriques són funcions que es van repetint cada 2π. Direm que són **periòdiques**.

Observem també que la funció tangent es defineix com un quocient i, per tant, només es podrà calcular quan el denominador sigui diferent de zero. Aquest denominador és la funció $\cos\theta$ que val zero precisament quan $\theta = \pi/2 + k\pi$ i k és qualsevol nombre enter. Per aquests angles no existirà la funció tangent.

2.4 Fem-ho amb sage

Hi ha paquets de sage dedicats a la geometria de corbes planes, però són massa sofisticats per les necessitats d'aquest curs.

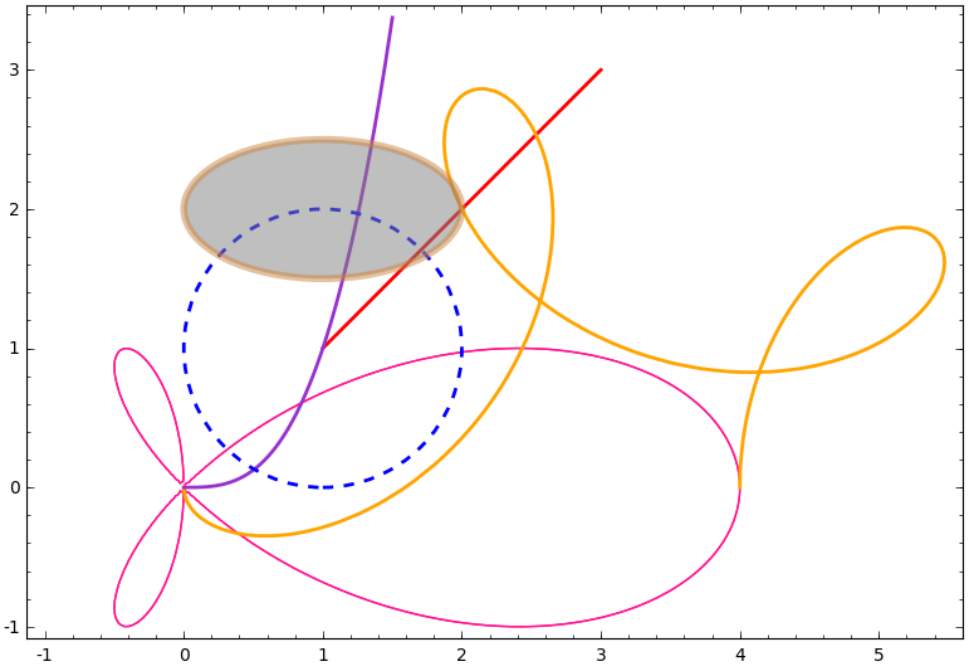
La funció `circle((a,b),r)` ens dibuixa una circumferència de centre (a, b) i radi r, i una corba definida per una equació en dues variables es pot dibuixar amb la instrucció `implicit_plot()`.

També hi ha funcions per dibuixar el·lipses, rectes, punts, polígons,... Les possibilitats són tan grans que és millor consultar algun dels manuals de sage si s'ha de fer algun dibuix concret.

Fem un petit exemple.

```
sage: A=circle((1,1),1,thickness=2,linestyle='-')
sage: B=line([(1,1),(3,3)],thickness=2,color='red')
sage: C=ellipse((1,2),1,1/2,edgecolor='peru',thickness=4,fill=True,
....: facecolor='gray',alpha=0.5)
```

```
sage: D=parametric_plot([3-cos(x)-2*cos(x/4),-sin(x)+2*sin(x/4)],
....: (x,0,4*pi),thickness=2,color='orange')
sage: E=plot(x^3,(x,0,1.5),color='darkorchid',thickness=2)
sage: y=var('y')
sage: F=implicit_plot((x^2+y^2)^2-4*x*(x^2-y^2),(x,-1,4),(y,-1,2),
....: color='deeppink')
sage: A+B+C+D+E+F
```



3. El concepte de funció

El concepte matemàtic més important a la ciència és el concepte de **funció**. Conseqüentment, l'estudi de les funcions és l'objectiu central d'aquest curs.

Quan modelitzem (és a dir: quan volem descriure un sistema utilitzant conceptes matemàtics) un fenomen de les ciències naturals, de l'economia, de les ciències socials o d'on sigui, comencem establint unes determinades variables x, y, z, u... que creiem que són rellevants per a la situació que estem estudiant. Aleshores, sovint veiem que algunes d'aquestes variables depenen d'algunes altres. El pas següent és intentar descriure aquestes dependències a través de **funcions**. Posem alguns exemples:

- La **temperatura de sensació de fred** (W, pel terme en anglès *wind chill*) depèn de la temperatura (T) i de la velocitat del vent (V) (i, potser, d'algunes altres coses). És important trobar un bon model per aquesta dependència perquè, en les regions més fredes, l'efecte combinat del fred i el vent pot afectar la supervivència de les persones exposades a la intempèrie. S'han fet molts estudis sobre aquest tema. Per exemple, la funció que utilitza el servei meteorològic del Canadà és

  $$W = 13.12 + 0.6215\,T - (11.37 - 0.3965\,T)\,V^{0.16}$$

  on $T < 10$ és la temperatura de l'aire en Celsius, $V > 4.8$ és la velocitat del vent a 10 metres sobre el sòl, en km/h, i W és la *temperatura de sensació* (o *wind chill index*) en Celsius. Tenim, doncs, una **funció** que, partir de les variables T i V ens permet calcular la variable W.

- En economia ens interessa relacionar els diversos *factors de producció* $X_1, \ldots X_n$ amb la producció Q. És a dir, s'estudien les **funcions de producció**

  $$Q = f(X_1, \ldots X_n).$$

  Per exemple, un model clàssic és la funció de producció de Cobb-Douglas

  $$Q = AL^{\beta}K^{\alpha}$$

  on Q és la producció total en un any, L mesura el treball (persones-hora en un any), K indica el capital (valor de tot l'equipament que s'utilitza), A és una constant de proporcionalitat i α i β són constants relacionades amb la productivitat i el nivell tecnològic, respectivament. Tenim, doncs, una **funció** que ens permet estudiar la influència que tindria en la producció un hipotètic augment de treball i/o capital.

- D'ençà que es va prendre consciència de l'escalfament global, la mesura del contingut de CO_2 a l'atmosfera —i de la seva variació en funció del temps— ha adquirit una gran importància. L'observatori de referència és el de Mauna Loa

(Hawaii). La relació que s'ha observat entre la concentració de CO_2 (C, en ppmv) i la temperatura (T, en Celsius) és aquesta

$$T = 4.28 \log\left(\frac{C}{C_0}\right) + T_0$$

on T_0 i C_0 són la temperatura i la concentració de referència. Per a C_0 s'acostuma a prendre el valor de l'any 1977 que era de $C_0 = 334$. El valor que es pren com a T_0 és relativament indiferent, perquè el que ens interessa és l'increment de la temperatura.[1] Tenim, doncs, una **funció** que ens permet calcular la temperatura com a funció de la concentració de CO_2 a l'atmosfera i, més important encara, ens permet predir com variarà la temperatura si segueix creixent la concentració de CO_2.

- Quan estudiem un bosc, ens pot interessar conèixer la quantitat tota de biomassa o la superfície foliar total. És molt difícil mesurar directament aquestes variables. S'han fet nombrosos estudis[2] per trobar relacions funcionals d'aquestes variables amb variables molt més fàcils de mesurar com, per exemple, el diàmetre del tronc dels arbres a una certa alçada del sòl. Per exemple, s'ha determinat que, per als exemplars joves de faig, la superfície foliar per arbre (em metres quadrats) és

$$A = 0.307\, D^{1.803}$$

on D és el diàmetre del tronc (en cm) a 1.37 metres d'alçada sobre el sòl. D'aquesta manera, tenim una **funció** que ens permet donar una estimació de la superfície foliar de manera relativament senzilla, mesurant el diàmetre dels troncs.

- Segons la llei de l'**oferta i la demanda** de l'economia, la relació entre el preu d'un producte o servei i la quantitat d'aquest producte o servei que es produeix i es ven està descrita per dues funcions: la funció d'oferta i la funció de demanda. Si designem per p el preu unitari d'un producte o servei i per q la quantitat d'aquest producte, la funció d'oferta (*supply curve*) és

$$q = S(p)$$

que ens dóna la quantitat que es produirà al preu p. És una funció creixent. La funció de demanda és

$$q = D(p)$$

i és la quantitat que els consumidors compraran al preu p. És una funció decreixent.[3] El punt on es tallen les gràfiques d'aquestes dues corbes és el punt d'equilibri del mercat. En aquest punt, l'oferta és igual a la demanda.

En aquests exemples, tenim **una** variable dependent que s'expressa en **funció** d'**una o diverses** variables independents. El cas més senzill —i el que estudiarem ara— és

[1] Vegeu *Temperature trends at the Mauna Loa observatory, Hawaii*, Clim. Past, 7 (2011), 975–983.

[2] Vegeu *Allometric Relationships of Selected European Tree Species*, Institute for Environment and Sustainability, 2003.

[3] Els economistes, normalment, dibuixen aquestes corbes amb p a l'eix vertical i q a l'eix horitzontal. És a dir, consideren les funcions inverses $p = S^{-1}(q)$ i $p = D^{-1}(q)$.

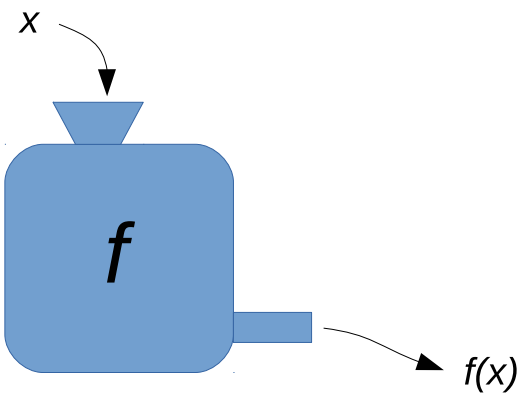
el d'una variable dependent i una variable independent. Tindrem, doncs, una situació del tipus

$$y = y(x)$$

com en els dos últims exemples anteriors. També utilitzarem la notació $y = f(x)$ i parlarem indistintament de «y com a funció de x» o «la funció $f(x)$».

Per tant, una **funció d'una variable** és una relació entre dues variables x i y que, per a cada valor de la variable x (dintre d'un cert àmbit) ens determina un valor (unívocament determinat) d'una variable y.

Als matemàtics els agrada pensar una funció f com una *màquina expenedora* que quan li introdueixes un nombre x et retorna un altre nombre $f(x)$:



3.1 Domini de definició

Igual com passa amb les màquines expenedores, una funció pot refusar algunes entrades x. Per exemple, a la funció del *wind chill* de la secció anterior, es diu explícitament que la temperatura ha de ser inferior a 10 graus i la velocitat del vent ha de ser superior a 4.8 km/h per poder aplicar la fórmula. També, des d'un punt de vista matemàtic, hi ha funcions que simplement no estan definides per a certs valors de x.

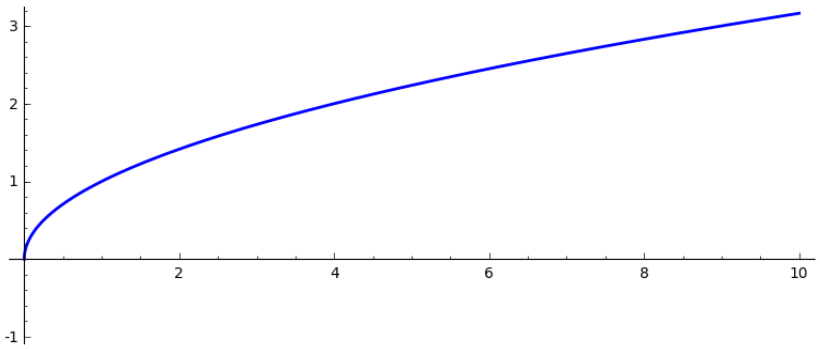
El **domini de definició** d'una funció $f(x)$ és el conjunt de tots els nombres x per als quals la funció està definida. Per exemple:

- El domini de definició de $y = 1/(x-1)$ és tots els nombres diferents de 1, perquè quan $x = 1$ tindríem una divisió per zero, que no és vàlida.
- El domini de definició de $y = \sqrt{9-x^2}$ és l'interval $[-3, 3]$ perquè, fora d'aquest interval, $9 - x^2$ seria un nombre negatiu, que no té arrel quadrada.
- La funció $y = \tan(x)$ està definida per a tots els valors de la variable x, excepte per $x = \pi/2 + k\pi$, on k és un nombre enter qualsevol.

3.2 Representació gràfica

Si tenim una funció $y = f(x)$, podem dibuixar la seva **gràfica**, que està formada per tots els punts del pla de coordenades (x, y) tals que x pertany al domini de definició i $y = f(x)$. En general, la gràfica d'una funció serà una corba del pla.[4]

Per exemple, la gràfica de la funció $f(x) = \sqrt{x}$ és aquesta:



3.3 Funcions inverses

Si les variables x i y estan relacionades per una funció $y = f(x)$, ens pot interessar poder expressar x com a funció de y, en la forma $x = g(y)$. Si utilitzem la idea de les *màquines expenedores*, estem dient que tenim la màquina expenedora f que accepta entrades x i et retorna y, i ara volem una nova màquina expenedora que funcioni de manera que si li introdueixes y et retorni el nombre x que havies introduït a la primera màquina. És a dir, volem una màquina que «ens retorni l'import» de la primera màquina.

Ja es veu que això no sempre serà possible. Considerem la funció $y = x^2$. Aquí és impossible trobar una màquina que, a partir de y ens retorni x perquè si, per exemple, $y = 4$, no podem saber si x valia 2 o valia -2. En molts casos, restringint el domini de la funció, sí que podem trobar funcions inverses. En aquest sentit,

multiplicar per $a \neq 0$ i dividir per $a \neq 0$ són funcions inverses

$(-)^n$ i $\sqrt[n]{-}$ són funcions inverses

sin i arcsin són funcions inverses

cos i arccos són funcions inverses

tan i arctan són funcions inverses

3.4 Composició de funcions

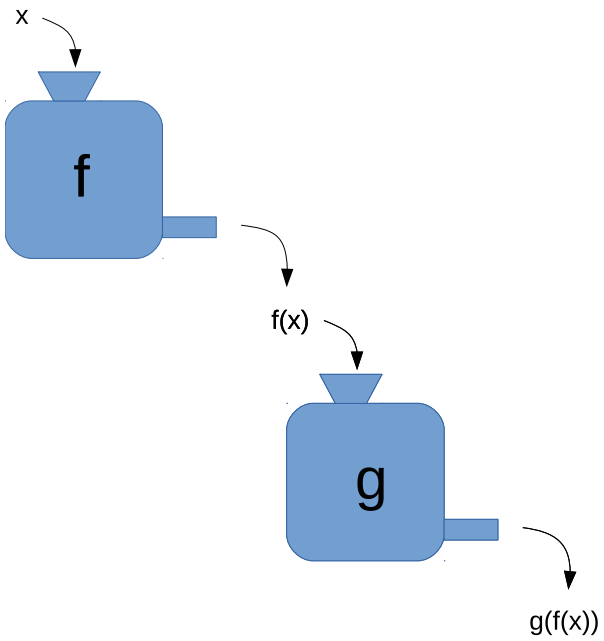
Si tenim dues funcions, a més de poder-les sumar, multiplicar, dividir... podem fer una cosa que no es pot fer amb nombres: *concatenar-les* o, com es diu matemàticament,

[4] Però no qualsevol corba del pla és la gràfica d'una funció. Observem que la gràfica d'una funció no pot tenir dos punts en una mateixa línia vertical.

composar-les. Per exemple, amb les dues funcions $\sin(x)$ i $\sqrt{x}$, podem fer

$$\sin(x) + \sqrt{x}, \quad \sin(x)\sqrt{x}, \quad \sin(\sqrt{x}), \quad \sqrt{\sin(x)}.$$

(Observem que les dues maneres de composar-les donen resultats diferents!). Si pensem una funció f com una *màquina expenedora*, aquesta composició de funcions seria una operació tan natural com *empalmar* la sortida d'una d'aquests màquines amb l'entrada d'una altra:



D'aquesta manera, a partir d'un petit nombre de funcions bàsiques o elementals, podem construir funcions molt més complicades.

3.5 Funcions empíriques

Comparem aquestes tres funcions:

1. $y = x^2 \sin(1 + x)$.
2. $h(t) = h_0 - \frac{g}{2} t^2$.
3. $A = 0.307\, D^{1.803}$

Les tres són funcions, però representen tres situacions diverses. La primera és una funció que en podríem dir «abstracta». És una funció matemàtica que pot ser útil en situacions múltiples. Les variables x i y no signifiquen, a priori, res concret.

La segona funció és una fórmula física que ens dóna l'alçada d'un cos pesant que cau per l'acció de la gravetat, en absència d'aire, a partir d'una alçada inicial h_0. És també una funció matemàtica «exacta» que s'ha obtingut a partir d'un model teòric de

la gravitació. De fet, és una aproximació de la realitat, només vàlida per valors de t propers a zero, que ens permetin suposar que l'acceleració de la gravetat és constant.

La tercera funció ha aparegut en els exemples d'estudis al·lomètrics de determinats arbres i no procedeix de cap model teòric sinó que s'hi ha arribat a partir d'estudis experimentals. Direm que és una **funció empírica**. Com s'ha obtingut aquesta funció? D'on surten els coeficients 0.307 i 1.803? S'han obtingut «empíricament», és a dir, s'han pres mesures de A i D per a un gran nombre d'arbres i s'ha buscat una funció matemàtica que aproximi relativament bé aquestes observacions experimentals.

Els estudiants de batxillerat estan acostumats a «tabular» valors d'una funció abstracta. En el cas de les ciències experimentals, sovint el que cal fer és tot el contrari: es té una taula de valors de x, y i cal trobar una funció senzilla que ens permeti calcular y a partir de x. D'una funció que hem trobat d'aquesta manera en direm una **funció empírica**.

3.6 Fem-ho amb sage

És clar que sage té incorporades totes les funcions elementals que utilitzarem aquest curs. A més, és possible definir funcions específiques. Hi ha diverses formes de fer-ho. Per exemple, suposem que volem definir una funció que ens calculi el *wind chill* a partir de la temperatura i de la velocitat del vent. Ho podem fer així:

```
sage: W(T,V)=13.12+0.6215*T-(11.37-0.3965*T)*V^0.16
sage: W(-12,65)
 -25.7898830284364
sage: round(W(-12,65),1)
 -25.8
```

La gràfica d'una funció d'una variable s'obté amb la comanda `plot()` que admet múltiples arguments, alguns dels quals ja els hem vist en els exemples del capítol anterior.

```
sage: f(x)=sqrt(x)
sage: plot(f(x),(x,0,5),aspect_ratio=1,ymax=3,ymin=-1)
sage: plot(W(0,x),(x,0,5),aspect_ratio=1,ymax=3,ymin=-1)
```

La comanda `aspect_ratio=1` obliga a que els dos eixos estiguin a la mateixa escala. Sense aquesta comanda, sage tria automàticament escales apropiades per a cada eix. Cal anar amb compte amb els punts on la funció no està definida. Per exemple, `plot(sqrt(x),(x,-1,1))` donarà un error, perquè la funció no està definida entre -1 i 0.

Suposem que volem dibuixar la gràfica de la funció $f(x) = x/(x-1)$ a l'interval $[0, 2]$. La comanda

```
sage: plot(x/(x-1),(x,0,2),aspect_ratio=1)
```

dóna un resultat que no és satisfactori. El motiu és que la funció se'n va cap a l'infinit quan ens acostem a $x = 1$. Cal restringir els valors màxims de y.

```
sage: plot(x/(x-1),(x,0,2),aspect_ratio=1,ymax=5,ymin=-5)
```

Aquesta comanda ens dibuixa la funció i una asímptota vertical a $x = 1$. Si volem eliminar aquesta asímptota vertical, podem dir-li que exclogui el valor $x = 1$ on la funció no està definida.

```
sage: plot(x/(x-1),(x,0,2),aspect_ratio=1,ymax=5,ymin=-5,exclude=[1])
```

Finalment, podem especificar quins punts hem de marcar a cada eix, amb l'atribut `ticks`.

```
sage: plot(x/(x-1),(x,0,2),aspect_ratio=1,ymax=5,ymin=-5,exclude=[1],
....: ticks=[[0,1,2],[-1,3]])
```

Si volem definir funcions més complicades, ho podem fer amb la sintaxi del llenguatge `python`. Per exemple, suposem que volem definir una funció $f(x)$ que, per a $x \geq 0$, sigui igual a l'arrel quadrada i que valgui zero per a $x < 0$. Ho podem fer així:

```
sage: def f(x):
....:     if x<0:
....:         return 0
....:     else:
....:         return sqrt(x)
....:
sage:
```

En aquest cas, si volem dibuixar la gràfica de la funció, no hem d'incloure la variable x sinó que hem d'usar aquesta sintaxi:

```
sage: plot(f,-2,2)
```

4. Funcions elementals

Farem un repàs de les funcions més fonamentals de les matemàtiques, que es coneixen amb el qualificatiu de **funcions elementals**.

4.1 Les funcions polinòmiques

Les funcions més senzilles són les funcions **constants** $y = k$ que són les que sempre retornen el mateix valor k per a qualsevol valor de x.

Després de les constants, les funcions més senzilles son les funcions **lineals**

$$y = mx + b$$

que s'anomenen així perquè la seva gràfica és una línia recta.

Les funcions **quadràtiques** són les que s'expressen per una equació de segon grau

$$y = ax^2 + bx + c.$$

La seva representació gràfica és una paràbola. Apareixen amb molta freqüència a les aplicacions. Per exemple:

- La dinàmica elemental ens diu que si un cos està en repòs a una alçada h_0 i comença a caure per l'acció de la gravetat, la seva alçada vindrà donada per una funció quadràtica del temps t:

$$h(t) = h_0 - \frac{g}{2}\, t^2.$$

- La llei d'acció de masses de la química, en la seva formulació més elemental, ens diu que la velocitat v d'una reacció del tipus $A + B \to C$ és proporcional a les concentracions de A i de B

$$v([C]) = k([A]_0 - [C])([B]_0 - [C])$$

on $[A]_0$ i $[B]_0$ són les concentracions inicials de A i B respectivament, i $[C]$ és la concentració de C. Observem que és una funció quadràtica de la variable $[C]$.

La generalització d'aquest concepte són les funcions **polinòmiques** de grau arbitrari

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Aquestes funcions estan definides arreu.

4.2 Les funcions racionals

Les funcions racionals són les que s'expressen com a quocient de dos polinomis

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

El domini de definició d'aquestes funcions està format per tots els nombres excepte aquells x per als quals el denominador sigui igual a zero. La més senzilla d'aquestes funcions és la que té per gràfica una hipèrbola

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

Una altra funció racional senzilla que apareix sovint és la funció de Monod (o la funció de Michaelis-Menten, que és la mateixa)

$$f(x) = \frac{ax}{k + x}. \qquad (*)$$

Jacques Monod va introduir aquesta funció el 1949 per descriure la taxa de creixement μ dels microorganismes en un medi aquós com a funció de la concentració S del nutrient crucial. L'equació de Monod és

$$\mu = \mu_{\text{màx}} \frac{S}{K_s + S}$$

on K_s és una constant que dependrà de l'espècie i de les condicions ambientals. L'equació de Michaelis-Menten és

$$v = \frac{V_{\text{màx}}[S]}{K_M + [S]}$$

(ja veiem que, matemàticament és la mateixa funció) que descriu la velocitat V d'una reacció enzimàtica en funció de la concentració $[S]$ d'un determinat substrat. La mateixa equació s'ha utilitzat per descriure el rendiment d'un camp de cereal (per exemple) en funció de la concentració al sòl d'un cert nutrient.

Dividint el numerador i el denominador per k a l'expressió $(*)$, veiem que aquesta funció també es pot expressar en la forma

$$f(x) = \frac{bx}{1 + Kx}.$$

Per exemple, el model de *resposta funcional* de Holling[1] de tipus II expressa la taxa de consum d'un depredador com a funció de la densitat de preses segons la fórmula

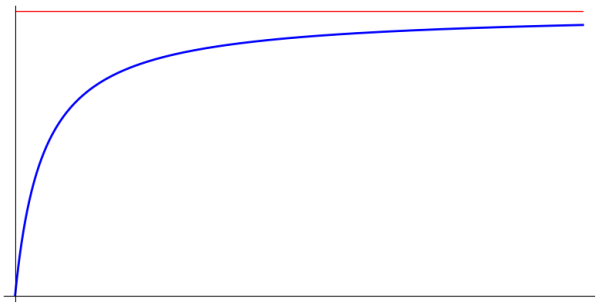
$$f(R) = \frac{aR}{1 + ahR}$$

on R és la densitat de preses (o de recursos), a és una constant que mesura la taxa de depredació i h és una altra constant que mesura el temps necessari perquè el depredador consumeixi la presa.[2]

[1] C.S. Holling és un ecòleg famós, nascut el 1930 al Canadà.

[2] Busqueu informació a Internet sobre la *Holling disc equation*.

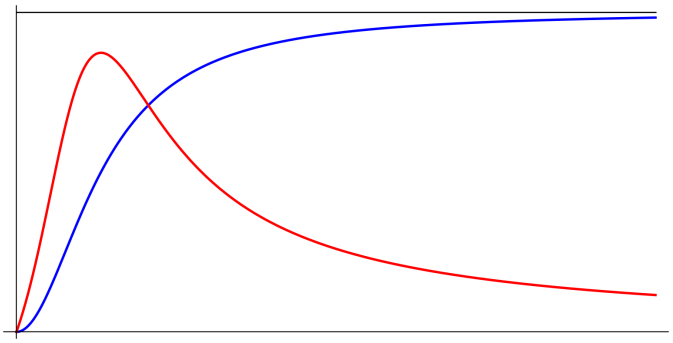
Observem[3] que, en la funció de Monod $f(x) = ax/(k+x)$, si x és petit, la funció s'acosta a una recta de pendent a/k, mentre que a mida que x creix, la funció es va «ajaient» i es va acostant a un valor màxim igual a a. La representació gràfica és aquesta



Més enllà de la funció de Monod, altres funcions racionals que apareixen a les aplicacions són les funcions de Holling de tipus III i tipus IV, que són funcions com aquestes

$$y = \frac{ax^2}{b^2+x^2}, \text{ (tipus III)}, \qquad y = \frac{ax}{b+cx+x^2}, \text{ (tipus IV)}^4.$$

Tenen aquesta forma (en vermell la de tipus IV i en blau la de tipus III):



La diferència qualitativa entre una funció de Holling tipus II i una tipus III és que, per a valors petits de la variable, la de tipus III té un creixement més lent que la de tipus II. Les funcions de tipus IV són interessants perquè poden modelar situacions en les quals tant l'excés com la manca d'un nutrient x perjudiquen el creixement de la variable y. Per exemple, s'han utilitzat per modelar el cultiu de microorganismes en substrats que n'inhibeixen el metabolisme.[5]

[3] Això que ve ara ho entendrem millor quan haguem estudiat la derivada.

[4] En alguns llocs les funcions de tipus IV tenen com a numerador ax^2. La diferència qualitativa entre els dos casos és que, per a valors grans de x, una funció s'acosta a 0 i l'altra s'acosta a a.

[5] Vegeu *A Mathematical Model for the Continuous Culture of Microorganisms Utilizing Inhibitory Substrates*, Biotechnol. Bioeng. 10 (1968), 707–723. Per exemple, els bacteris nitrificants que s'utilitzen en el tractament d'aigües poden seguir una funció de tipus IV d'aquestes.

4.3 Les funcions potencials

En els polinomis, els exponents són nombres enters. Si aquests exponents són nombres decimals arbitraris, parlem de funcions **potencials** (en anglès, *power laws*). La funció potencial elemental és

$$y = kx^r$$

on $k \neq 0$ és una constant i r és un nombre que no és enter. El domini de definició d'aquesta funció és $x > 0$. Si $r > 0$, també podem considerar que la funció està definida per $x = 0$.

Aquestes funcions potencials tenen moltes aplicacions, per exemple en el camp de l'al·lometria[6]

- La *llei de Kleiber* (formulada per Max Kleiber als anys 30 del segle passat) és l'observació que, en un gran nombre d'animals, el seu metabolisme (és a dir, la quantitat d'energia que generen o, equivalentment, necessiten per viure) és proporcional a la potència 3/4 de la seva massa. És a dir,

  $$M = km^{0.75}$$

  on m és la massa de l'animal i M és el seu metabolisme. Per exemple, segons aquesta llei, com que la massa del gat és aproximadament 100 vegades la del ratolí, el metabolisme del gat serà aproximadament 32 vegades el del ratolí.

- S'han fet estudis al·lomètrics que relacionen la massa del cor i la massa total de diverses espècies d'aus i s'ha trobat que segueixen aproximadament una funció potencial

  $$M_C = 8.76 \times 10^{-3}\, m^{0.92}$$

  on M_C és la massa del cor (kg) i m és la massa corporal (kg).[7]

- En el capítol anterior hem parlat dels estudis d'al·lometria que s'han fet per relacionar les diverses mesures dels arbres: diàmetre del tronc, alçada, biomassa total, superfície foliar, etc. En molts casos, s'ha arribat a relacions al·lomètriques del tipus potencial. Per exemple, a la pàgina 17 de l'informe que hem citat hi trobem la relació al·lomètrica

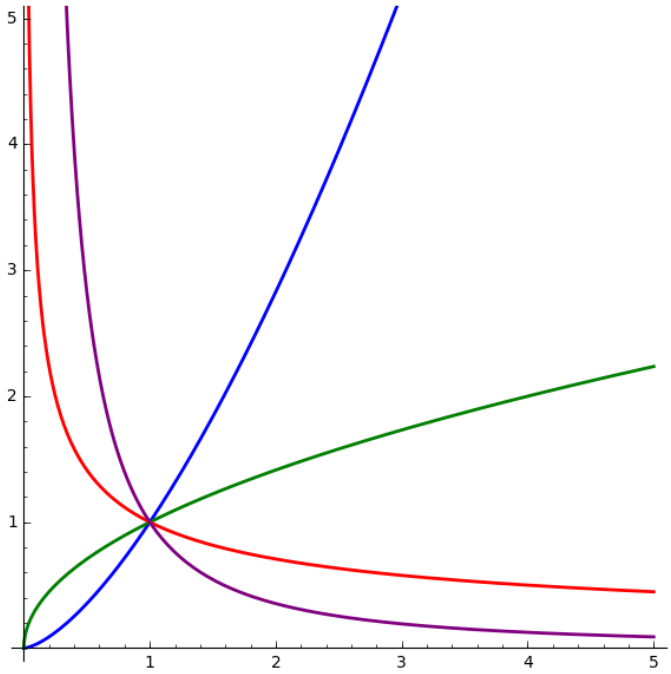
  $$H = 3.240838\, DBH^{0.613065}$$

  entre l'alçada H (en metres) d'un faig (*Fagus Silvatica*) i el diàmetre a 1.37 m sobre el sòl DBH (en cm).

El comportament de la funció $y = kx^r$ depèn de si r és positiu o negatiu i de si $|r| > 1$ o $|r| < 1$. El dibuix següent mostra diverses gràfiques. La corba vermella representa $r = -0.5$, la corba porpra representa $r = -1.5$, la corba blava representa $r = 1.5$ i la corba verda representa $r = 0.5$.

[6] *Al·lometria:* estudi de les relacions entre les diverses mesures dels organismes.

[7] Vegeu *Allometric relations of cardiovascular function in birds*, Am J Physiol. 1983 Oct;245(4):H567–72.



4.4 Fem-ho amb sage

Les funcions polinòmiques es poden definir de la manera que ja coneixem. Per exemple,

```
sage: p(x)=3*x^3-2*x^2+x+1
```

Recordem que una **arrel** d'un polinomi és un valor de la variable que fa que el polinomi valgui zero. La comanda

```
sage: p(x).roots()
```

ens dóna les arrels exactes d'aquest polinomi. En aquest cas, obtenim una expressió molt complicada que és poc útil i, per a polinomis de grau superior a 4, la comanda anterior pot no trobar les arrels exactes. Cal usar aquesta sintaxi:

```
sage: p(x).roots(ring=RR)
```

on l'expressió `ring=RR` indica que volem les arrels com a nombres **reals** (inexactes). Per exemple

```
sage: (3*x^8-2*x^2+x+1).roots(ring=RR)
 [(-0.928030244348921, 1), (-0.504162567229218, 1)]
```

troba les dues arrels reals d'aquest polinomi de grau 8. Per exemple,

```
sage: h(x)=x^7+4*x^6-14*x^4-5*x^3+18*x^2+4*x-8
sage: h(x).roots(ring=RR)
 [(-2.00000000000000, 3), (-1.00000000000000, 1), (1.00000000000000, 3)]
sage: h(x).factor()
 (x+2)^3*(x+1)*(x-1)^3
```

5. Funcions elementals —2—

5.1 Les funcions exponencials

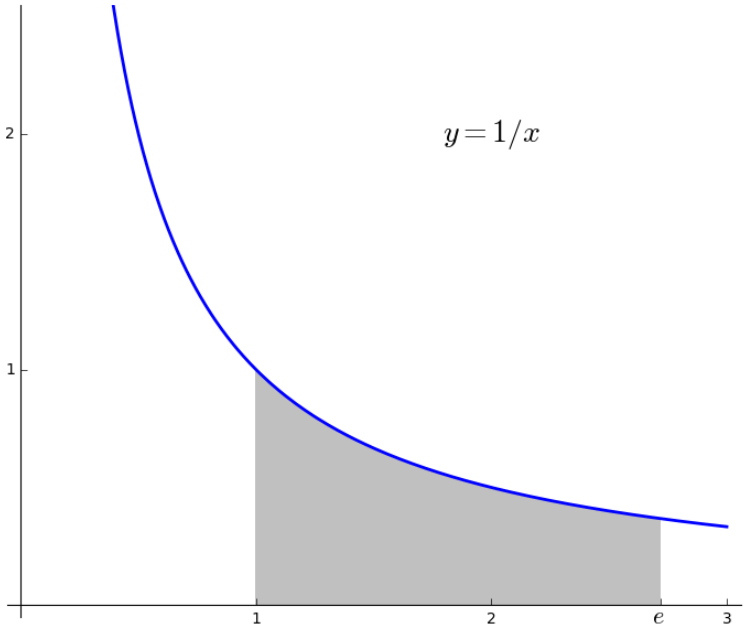
Si $a > 0$, podem considerar la funció $y = a^x$ o, més en general, la funció

$$y = k\, a^{rx}$$

on $k, r \neq 0$ són constants. D'aquesta família de funcions se'n diuen **funcions exponencials** i són molt importants a la ciència, com veurem al llarg del curs. El valor de a que més s'utilitza (ja veurem el perquè més endavant) és el del nombre e. Aquest nombre

$$e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496 7\ldots$$

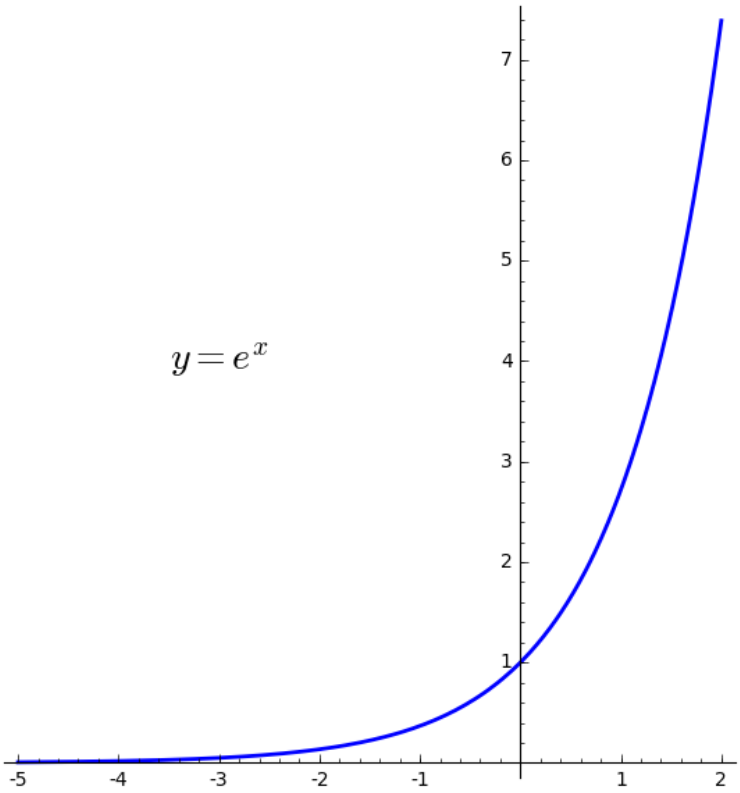
és una constant matemàtica fonamental, com ho és el nombre π. De la mateixa manera que π està relacionat amb la circumferència (π és l'àrea limitada per una circumferència de radi 1), el nombre e està relacionat amb la hipèrbola: l'àrea limitada per la hipèrbola $xy = 1$ entre $x = 1$ i $x = e$ és exactament 1.



La funció exponencial de base e també s'indica amb la notació exp:

$$y = k\, e^{rx} = k \exp(rx).$$

Aquesta notació és molt útil quan l'exponent és una expressió complicada. La gràfica de la funció exponencial e^x té aquesta forma:

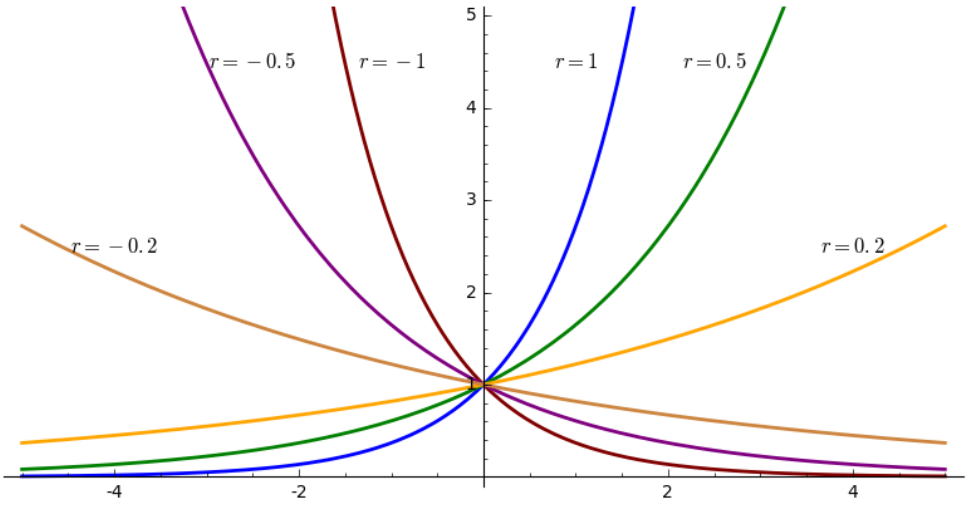


La funció exponencial té aquestes propietats:

- La funció exponencial està definida arreu.
- $e^x > 0$ per qualsevol valor de x. En particular, e^x mai no val zero, encara que en el dibuix ho sembli.
- $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$. Podem dir que la funció exponencial *«transforma sumes en productes»*. També $\exp(x-y) = \exp(x)/\exp(y)$ i $\exp(sx) = \exp(x)^s$.
- Tot nombre positiu apareix com a resultat de l'exponencial. Més exactament, si $y > 0$, existeix un únic x tal que $e^x = y$.
- Si $x << 0$ (és a dir, x és un nombre negatiu i $|x|$ és molt gran), $e^x \approx 0$.
- Quan $x > 0$, la funció exponencial creix molt de pressa. Quan $x < 0$, la funció creix molt lentament.

La funció exponencial és tan fonamental i apareix a tants àmbits, que no posarem ara cap exemple perquè ja n'apareixeran prou al llarg del curs.

Canviant el valor del paràmetre r podem modificar la forma de la gràfica de la funció. Per exemple, aquest dibuix mostra les gràfiques de e^{rx} per $r = \pm 0.2, \pm 0.5, \pm 1$:



5.2 Les funcions logarítmiques

La funció **logaritme en base** $a > 0$, $y = \log_a(x)$ és la inversa de la funció exponencial de base a. És a dir,

$$y = a^x \text{ és el mateix que } x = \log_a(y).$$

La funció logaritme «desfà» el que hagi fet la funció exponencial:

$$\log_a(a^x) = x, \qquad a^{\log_a(y)} = y.$$

Tal i com passava amb la funció exponencial, la funció logaritme més important és la de base e. S'anomena *logaritme natural* o *logaritme neperià*[1] i la designarem sense subíndex. És a dir, la funció $\log(x)$ indicarà el logaritme neperià de x.[2]

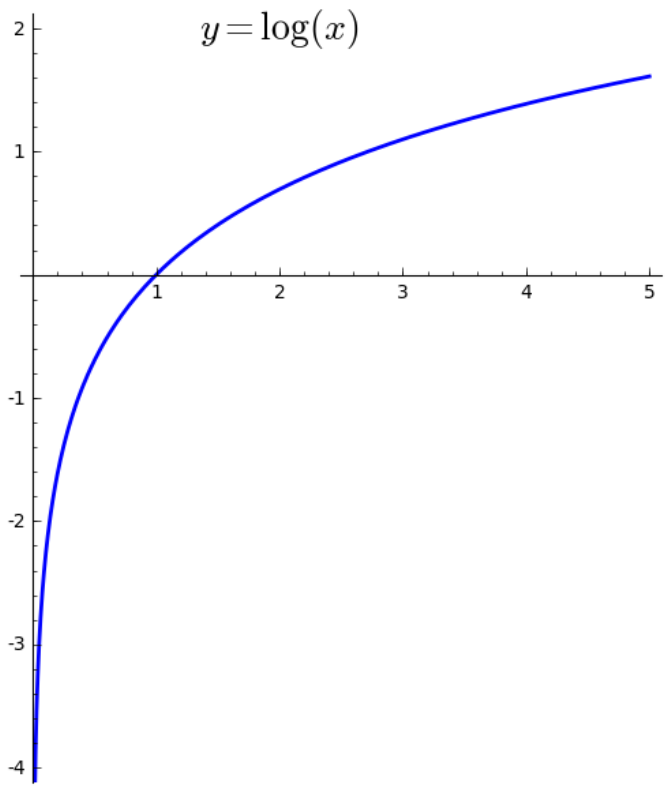
Com és lògic, la gràfica de la funció $y = \log(x)$ és la mateixa que la de la funció $x = e^y$ i s'obté, per tant, agafant la gràfica de $y = e^x$ anterior i intercanviant els eixos. Les propietats de la funció logaritme són una reinterpretació de les propietats de la funció exponencial. Són aquestes:

- La funció logaritme només està definida per $x > 0$.
- $\log(1) = 0$.
- $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$. Podem dir que la funció logaritme *«transforma productes en sumes»*. També $\log(x/y) = \log(x) - \log(y)$ i $s\log(x) = \log(x^s)$.
- Si $x \approx 0$ (és a dir, x és un nombre positiu molt petit), $\log(x)$ és un nombre negatiu de valor absolut molt gran.

[1] En honor de John Napier of Merchiston (1550–1617), que va ser l'inventor dels logaritmes (1614).

[2] Aquesta convenció és la que utilitzen tots els matemàtics i és consistent amb la idea que el logaritme neperià és el més important, però també és cert que, per motius de tradició, també s'utilitza la notació ln per indicar el logaritme en base e, és a dir, el logaritme neperià. En aquest curs, log **sempre** indicarà el logaritme neperià (que és el que s'utilitza en el 99% dels casos). Quan calgui utilitzar algun altre logaritme (en base 10, en base 2, o en qualsevol altra base) indicarem explícitament la base en la forma $\log_2$, $\log_{10}$, etc.

- Quan $x > 1$, la funció logaritme creix lentament, quan $x < 1$, la funció creix molt ràpidament.



El logaritme ens permet expressar qualsevol funció exponencial a partir de l'exponencial de base e i qualsevol logaritme a partir del logaritme de base e:

$$e^{x\log(a)} = (e^{\log(a)})^x = a^x; \qquad \log_a(x)\log(a) = \log\left(a^{\log_a(x)}\right) = \log(x).$$

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}.$$

Exemples: El nombre de situacions científiques en les que apareixen funcions logarítmiques és immens.

- Un índex que s'utilitza a ecologia per mesurar el nivell de biodiversitat en una zona és l'*índex de Shannon*

$$H = -\sum_{i=1}^{R} p_i \log(p_i)$$

on $p_1, \ldots, p_R$ són les proporcions de cada espècie d'interès a la zona d'estudi.

- El pH d'una dissolució aquosa es defineix com

$$pH = -log_{10}(a_{H_3O^+})$$

on $a_{H_3O^+}$ és l'activitat dels cations hidroni a la dissolució.

- El 1969, Jukes i Cantor van proposar un model per mesurar la distància evolutiva entre dues seqüències genètiques:

$$d = -\frac{3}{4}\log\left(1 - \frac{4}{3}p\right)$$

on p és la proporció de diferències entre les dues seqüències.

- L'*índex de Richter* d'un terratrèmol es va definir com

$$M = \log_{10}\left(\frac{A}{A_0(\delta)}\right)$$

on A és l'amplitud de les ones sísmiques i A_0 és una certa funció empírica de la distància a l'epicentre.

- Donades dues freqüències a i b, el nombre d'octaves que les separen és

$$n = \log_2\left(\frac{a}{b}\right).$$

- La *llei de Fechner* de la psicofísica afirma que les sensacions són proporcionals al logaritme dels estímuls. La fotografia ha de tenir en compte aquesta llei, perquè els sensors digitals no segueixen la llei de Fechner.[3] Quantitativament, escrivim

$$p = k\log\frac{S}{S_0}$$

on p és la percepció rebuda i S és la magnitud de l'estímul.

- A la microeconomia clàssica s'estudien les *funcions d'utilitat* que són funcions que, a cada possible objecte de consum d'un determinat conjunt, li associen un nombre que indica la preferència del consumidor per aquest objecte. Sovint, aquestes funcions són logarítmiques.[4]

- Un tema important en el disseny de generadors eòlics i també en els estudis de la dispersió de la pol·lució atmosfèrica és conèixer com canvia la velocitat del vent u en funció de d'alçada sobre el sòl z. Un model clàssic ve donat per la funció[5]

$$u(z) = \frac{u_*}{\kappa}\left(\log\left(\frac{z-d}{z_0}\right) + \psi(z, z_0, L)\right).$$

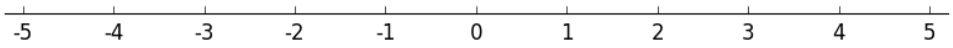
[3] La resposta del sensor d'una càmera digital és aproximadament lineal. Per tant, un cop el sensor ha adquirit la fotografia cal fer una transformació exponencial per tal d'obtenir una fotografia que, al nostres ulls, s'assembli a la imatge original.

[4] Si voleu més informació, consulteu *«Logarithmic laws in service quality perception: where microeconomics meets psycophysics and quality of experience»*, Telecommun. Syst. 52, n. 2 (2013) 587–600.

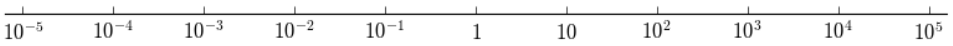
[5] Per entendre què és cada terme d'aquesta funció, consulteu l'entrada *«log wind profile»* a Wikipedia.org.

5.3 L'escala logarítmica

Quan representem els nombres sobre una recta, escollim dos punts que marquem com a 0 i 1 (el punt 1 a la dreta del punt 0) i aleshores, desplaçant el segment entre 0 i 1 cap a la dreta, anem sumant 1 repetidament i obtenim els punts 2, 3, etc. Desplaçant el mateix segment cap a l'esquerra, anem restant 1 repetidament i obtenim els punts -1, -2, -3, etc. Obtenim el que en podem dir *l'escala ordinària*.



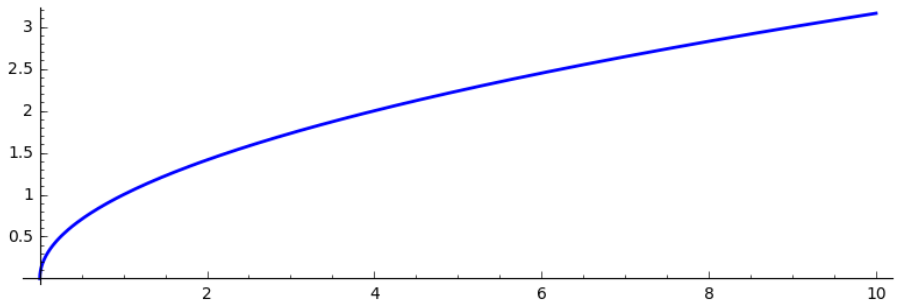
A l'**escala logarítmica** fem una cosa similar, però *multiplicativament*: escollim dos punts que marquem com a 1 i 10, el 10 a la dreta de l'1. En lloc de 10, podem prendre qualsevol altre nombre > 1. Aleshores, desplaçant el segment entre 1 i 10 cap a la dreta, anem multiplicant per 10 repetidament i obtenim els punts 100, 1000, 10^4, 10^5, etc. Desplaçant el mateix segment cap a l'esquerra, anem dividint per 10 repetidament i obtenim els punts $0.1 = 10^{-1}$, $0.01 = 10^{-2}$, 10^{-3}, 10^{-4}, etc. Obtenim el que es coneix com *l'escala logarítmica*.

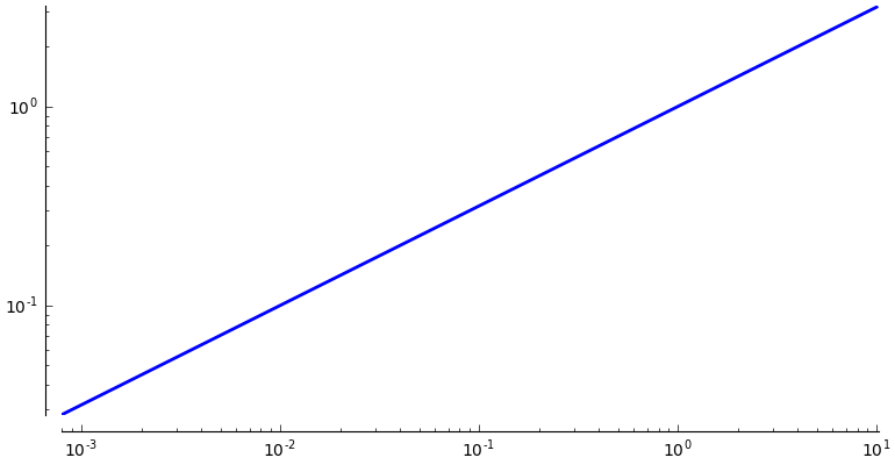


Observem:

- A l'escala logarítmica només hi apareixen els nombres positius.
- La relació entre l'escala ordinària i l'esca logarítmica és que el punt a a l'escala ordinària és el punt 10^a a l'escala logarítmica i, recíprocament, el punt b a l'escala logarítmica és el punt $\log_{10}(b)$ a l'escala ordinària.
- El punt mig entre els punts 1 i 10 no és el punt 5, sinó que és el punt $\sqrt{10} = 10^{0.5}$.

Si una funció està definida sobre els nombres positius i pren només valors positius, podem representar la gràfica d'una funció prenent escales logarítmiques per als dos eixos. L'aspecte de la gràfica pot canviar substancialment. Per exemple, dibuixem la funció $y = \sqrt{x}$ en escala ordinària i en escala logarítmica.





Observem que quan dibuixem la funció $y = \sqrt{x} = x^{0.5}$ en escala logarítmica, la gràfica sembla una recta. Això no és cap casualitat:

> **Quan dibuixem una funció potencial $y = kx^r$ en escala logarítmica obtenim una recta de pendent r.**

L'explicació és molt senzilla: si tenim $y = kx^r$ i prenem logaritmes als dos costats, obtenim

$$\log(y) = \log(k) + r\log(x).$$

És a dir, tenim

$$Y = K + rX$$

(hem posat $K = \log(k)$) que és una recta en l'escala $X = \log(x)$, $Y = \log(y)$, que és l'escala logarítmica.

Aquesta observació és molt més important del que pot semblar al primer moment. A la pràctica, el que es fa quan estudiem un fenomen que sospitem que pot venir donat per una funció potencial és recollir mostres i situar els valors que hem trobat en un pla de coordenades logarítmiques. Aleshores, busquem una recta de regressió que aproximi aquests punts. Si l'aproximació és bona, podem afirmar que tenim una relació potencial, i l'exponent és el pendent d'aquesta recta de regressió que hem trobat.

De vegades, també s'utilitza l'escala **semilogarítmica**, que és l'escala en què s'utilitza l'escala ordinària a l'eix x i l'escala logarítmica a l'eix y. En aquesta situació tenim:

> **Quan dibuixem una funció exponencial $y = ke^{rx}$ en escala semilogarítmica obtenim una recta de pendent r.**

Exemple: Recordem la relació al·lomètrica entre la massa del cor i la massa corporal de les aus que hem esmentat a la pàgina 26. Resulta que, si dibuixem en escala logarítmica la gràfica de la massa del cor com a funció de la massa corporal, obtenim aproximadament una recta de pendent 0.92. Si una espècie A té una massa corporal 10 vegades superior a la d'una altra espècie B, quina relació hi haurà entre la massa del cor c_A de l'espècie A i la massa del cor c_B de l'espècie B?

El fet que la gràfica s'acosti a una recta en escala logarítmica, ens diu que la funció s'ha d'acostar a una funció potencial. Si la recta té pendent 0.92, la funció potencial ha de ser

$$c = km^{0.92}$$

on m és la massa corporal i c és la massa del cor. Apliquem aquesta funció a les espècies A i B. Obtenim

$$c_A = km_A^{0.92} = k(10 \times m_B)^{0.92} = 10^{0.92} km_B^{0.92} = 10^{0.92} c_B \approx 8.32 \times c_B.$$

Per tant, estimem que la massa del cor a l'espècie A serà 8.32 vegades la massa del cor a l'espècie B.

Exemple: Es fa un estudi de la relació entre la densitat de plantació X i la producció per planta (per exemple, blat de moro, cirerers, etc.) Y, representem els resultats en una escala logarítmica i observem que la gràfica de $Y = Y(X)$ s'aproxima a una recta de pendent $-3/2$. Quines conclusions en traiem? En primer lloc, a nivell qualitatiu, sabem que la producció per planta disminueix quan augmenta la densitat de plantació. A nivell quantitatiu, sabem que la funció $Y = Y(X)$ serà una funció potencial d'exponent $-3/2$

$$Y = KX^{-3/2}.$$

Si coneixem un valor concret de Y podem determinar el valor de la constant K.

5.4 Fem-ho amb sage

Podem dibuixar gràfiques en escala logarítmica o semi-logarítmica. Per exemple,

```
sage: m=var('m')
sage: f(m)=3.25*m^0.32
sage: plot(f(m),(m,0,4),aspect_ratio=1)
sage: plot(f(m),(m,0,4),scale='loglog')
sage: g(m)=3.25*exp(0.32*m)
sage: plot(g(m),(m,0,4),aspect_ratio=1)
sage: plot(g(m),(m,0,4),scale='semilogy')
```

6. Funcions elementals —3—

6.1 Funcions sinusoïdals

Les funcions trigonomètriques $\sin(x)$ i $\cos(x)$, com que només depenen de l'angle, són **periòdiques**

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

i apareixen en l'estudi dels fenòmens periòdics: moviment harmònic, ones, fenòmens naturals amb periodicitat diària o anual, etc. Per exemple:

- El model clàssic de Nakatsugawa et al. de 1996 per a la temperatura de la superfície del mar[1] és

  $$T(D) = T_m + \frac{T_v}{2} \sin\left(\frac{2\pi D}{365}\right) + T_p$$

  on D és el dia de l'any (comptat a partir del dia que marca la temperatura mitjana), T_m és la temperatura mitjana anual, T_v és l'amplitud tèrmica anual i T_p és un terme que serveix per incorporar pertorbacions com pot ser *«el niño»*.

- En els estudis sobre la fotosíntesi cal tenir en compte la irradiació solar diària. L'equació més natural és aquesta[2]

  $$E(t) = E_m \sin\left(\frac{\pi t}{N}\right)$$

  on $E(t)$ és la insolació t hores després de la sortida del sol, E_m és la irradiació solar al migdia i N és el nombre d'hores de sol totals del dia.

La funció sinusoïdal més general és

$$f(x) = A \sin(2\pi\nu x + b).$$

Observem que la funció cosinus és un cas particular d'això, perquè

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

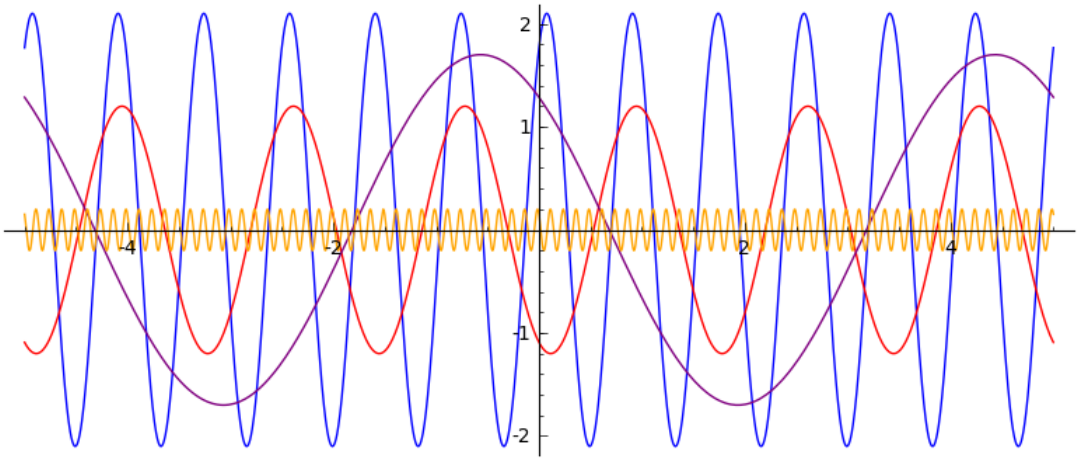
Discutim ara el significat dels paràmetres A, ν i b.

- A és la meitat de l'**amplitud** del moviment sinusoïdal. Recordem que la funció sin té un valor mínim de -1 i un valor màxim de 1. Per tant, si volem una funció sinusoïdal que oscil·li entre $-A$ i A, hem de multiplicar la funció sin per A.

[1] Vegeu Kavvas, Anderson, *Mathematical Models of Large Watershed Hydrology*, p. 198.
[2] Vegeu Kirk, *Light and Photosynthesis in Aquatic Ecosystems*, p. 41.

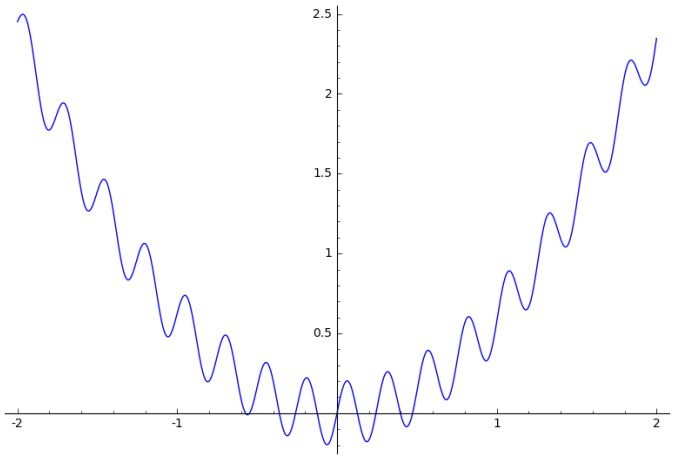
- ν és la **freqüència**. Recordem que un cicle de la funció sin té una longitud de 2π, és a dir, la funció sinus es torna a repetir després de 2π. Si volem una funció sinusoïdal que es repeteixi cada $1/\nu$, hem de considerar $\sin(2\pi\nu x)$.
- b és la **fase**. Recordem que $\sin(0) = 0$. Si volem una funció sinusoïdal que tingui el primer zero en un determinat valor $x = -b$, hem de considerar $\sin(x + b)$.

D'aquesta manera, escollint convenientment aquests paràmetres podem adaptar la funció sinusoïdal a les nostres necessitats.



Funcions sinusoïdals amb diversos valors dels paràmetres A, ν i b.

Sumant a una funció donada una funció sinusoïdal, podem obtenir una funció que vagi oscil·lant a l'entorn de la funció inicial. Per exemple, la gràfica següent representa una funció quadràtica (una paràbola) amb una petita pertorbació sinusoïdal:



La funció és

$$y = 0.5\,x^2 + 0.2\sin(25x).$$

Exemple: En un estudi sobre la temperatura mitjana (de les mínimes) en un determinat observatori (la Seu d'Urgell), s'ha vist que segueix aproximadament una funció

sinusoïdal. La temperatura mitjana (de les mínimes) d'aquest observatori és 5.7. El dia més fred de l'any és el 6 de febrer i l'amplitud tèrmica anual és de 14.8 graus. Trobeu una funció sinusoïdal que aproximi aquestes dades.

Si expressem el temps d en dies i la temperatura T en Celsius, la funció sinusoïdal que busquem és

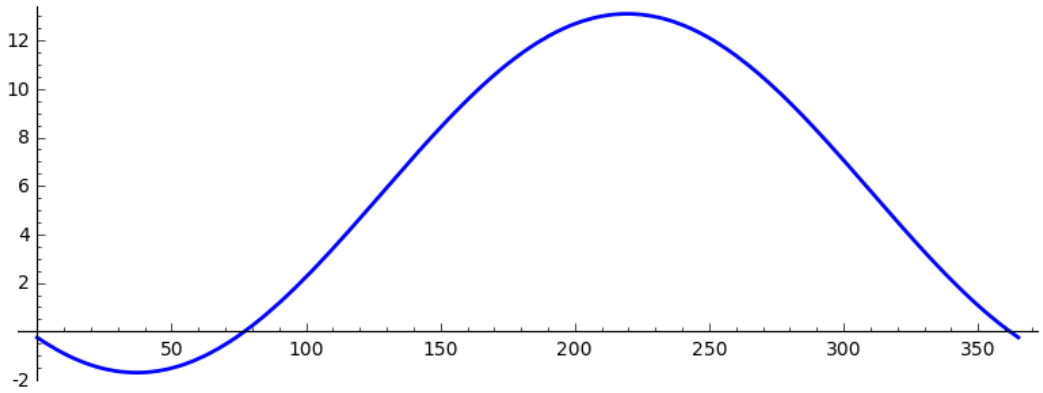
$$T = T_m + A\sin(2\pi\nu d + b)$$

on T_m serà la temperatura mitjana anual i A serà la semi-amplitud tèrmica. Com que la periodicitat ha de ser anual, $\nu = 1/365$. Només ens cal determinar el paràmetre b. Sabem que el mínim de la funció es produeix quan $d = 37$. Aquest mínim correspon a $\sin(2\pi\nu d + b) = -1$ i, per tant, $2\pi\nu d + b = -\pi/2$. Això ens dóna

$$b = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{2\times 37}{365}\right) \approx -0.7027\pi.$$

La funció sinusoïdal que busquem és

$$T(d) = 5.7 + 7.4\sin\left(\pi\left(\frac{2d}{365} - 0.7027\right)\right).$$



6.2 Fem-ho amb sage

La figura anterior amb quatre funcions sinusoïdals està feta amb aquestes comandes:

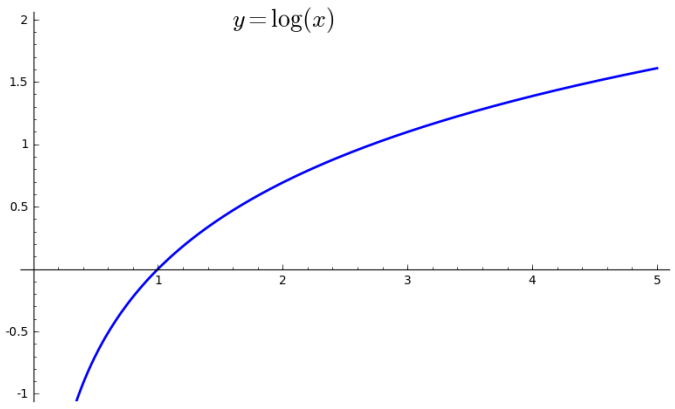
```
sage: p=plot(2.1*sin(2*pi*1.2*x+1),(x,-5,5),aspect_ratio=1)
sage: q=plot(1.2*sin(2*pi*0.6*x-2),(x,-5,5),color='red')
sage: r=plot(1.7*sin(2*pi*0.2*x-4),(x,-5,5),color='purple')
sage: s=plot(0.2*sin(2*pi*8*x-4),(x,-5,5),color='orange')
sage: p+q+r+s
```

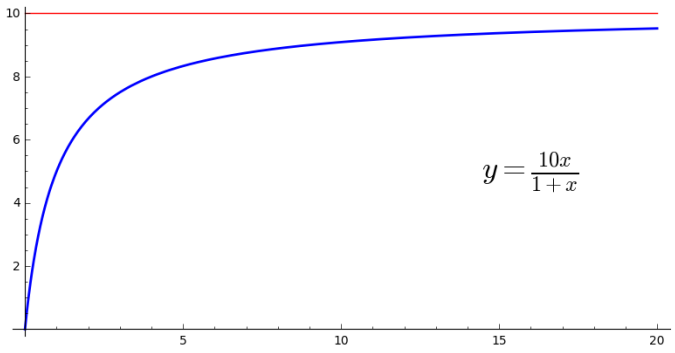
7. Límits i continuïtat

7.1 Comportament a llarg termini

Si estudiem un fenomen descrit per una funció $y = y(x)$, ens interessa conèixer el comportament de la variable y per a valors molt grans de la variable x. Si la variable x és el temps, això és precisament el què en diem *comportament de y a llarg termini*.

Considerem una funció logarítmica com $y = \log(x)$ i una funció de Monod com $y = 10x/(1+x)$. Veiem que tenen comportaments a llarg termini ben diferents:





La funció logarítmica creix «il·limitadament», és a dir, supera qualsevol valor N, per gran que sigui. En canvi, la funció de Monod es va acostant més i més al valor 10, sense superar-lo mai. És a dir, per qualsevol valor ϵ, per petit que sigui, si x és prou gran tindrem que $|y - 10| < \epsilon$. Aquestes situacions les expressarem utilitzant el concepte matemàtic de **límit**:

$$\lim_{x\to\infty} \log(x) = \infty; \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{10x}{1+x} = 1.$$

Si la funció està definida per als nombres negatius, també podem preguntar-nos pel comportament de la funció quan la variable «tendeix» a $-\infty$. Per exemple, hem vist

abans que

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

Repassem quin és el comportament a llarg termini —el límit— de les diverses funcions elementals.

- **Lineals i polinòmiques**. Aquestes funcions (en valor absolut), creixen indefinidament per a valors grans de la variable (en valor absolut). De fet, si $|x|$ és molt gran, un polinomi $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ ($n > 0$) es comporta igual que el seu terme de grau màxim

  $$\lim_{x\to\pm\infty}(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0) = \lim_{x\to\pm\infty} x^n$$

  i, d'altra banda,

  $$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty; \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n = (-1)^n\infty.$$

- **Racionals**. Igual que en el cas dels polinomis, quan $|x|$ és molt gran només és rellevant el terme de grau més gran del numerador i el denominador:

  $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x\to\pm\infty} x^{n-m}.$$

  D'altra banda,

  $$\lim_{x\to\infty} x^r = \begin{cases} \infty & \text{si } r > 0, \\ 1 & \text{si } r = 0, \\ 0 & \text{si } r < 0. \end{cases} \qquad \lim_{x\to-\infty} x^r = \begin{cases} (-1)^r\infty & \text{si } r > 0, \\ 1 & \text{si } r = 0, \\ 0 & \text{si } r < 0. \end{cases}$$

- **Potencials**. x^r es comporta essencialment com si l'exponent fos enter i tenim la mateixa fórmula anterior. Només té sentit el cas $x \to \infty$ perquè les funcions potencials només estan definides per $x > 0$.

- **Exponencial i logaritme**. Ja hem considerat aquests casos abans. Tenim

  $$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty; \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0; \qquad \lim_{x\to\infty} \log(x) = \infty.$$

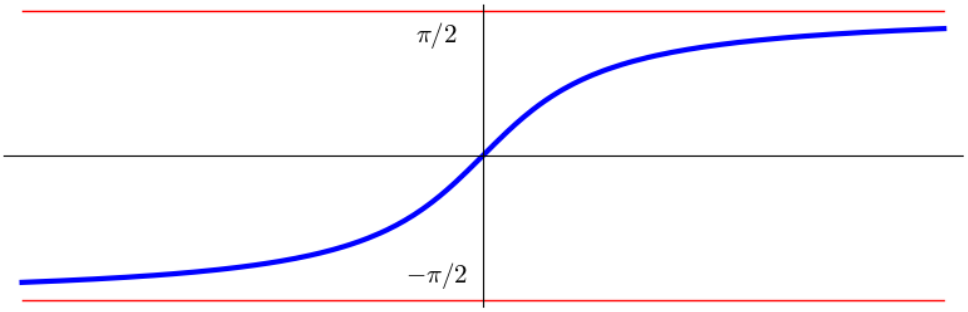
  En el cas del logaritme, no té sentit el límit quan $x \to -\infty$ perquè la funció logaritme només està definida per $x > 0$.

- **Trigonomètriques**. Les funcions sinusoïdals van oscil·lant indefinidament, sempre amb la mateixa amplitud. Per tant, quan x tendeix a $\pm\infty$ aquestes funcions ni s'acosten a cap valor concret, ni s'allunyen cap a $\pm\infty$. Simplement, **no tenen límit**. Aquí observem que el límit d'una funció $\lim_{x\to\infty} f(x)$ pot no existir. La funció tangent tampoc no té límit (perquè també és periòdica).

  En canvi, l'altra funció trigonomètrica important, la funció arc-tangent, sí que té un límit:

  $$\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}; \qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

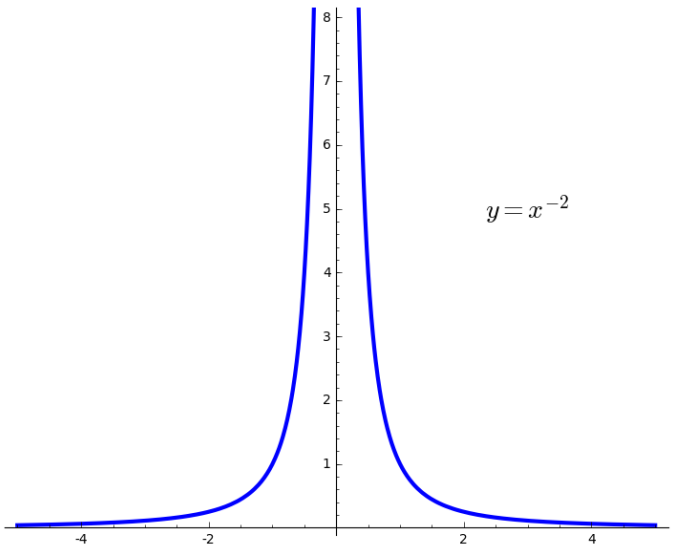
  És interessant recordar l'aspecte que té la gràfica d'aquesta funció:



7.2 Límits finits i límits laterals

En concepte de límit també pot estendre al cas en què la variable tendeix a un determinat valor finit a. Considerem, per exemple, la funció $y = x^{-2}$. Aquesta funció no està definida per $x = 0$, però podem estudiar el seu comportament quan x és «molt proper» a zero, sense ser mai igual a zero. Veiem immediatament que quan $x \to 0$, la funció creix il·limitadament. Direm que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$



Considerem la funció $y = \log(x)$ que només està definida per valors $x > 0$. Sabem que si $x > 0$ és molt petit, la funció y pren valors negatius de valor absolut il·limitadament gran. Direm que

$$\lim_{x\to 0^+} \log(x) = -\infty.$$

Observem la notació $x \to a^+$ que ens indica que prenem valors de x arbitràriament propers a a però sempre $> a$. Anàlogament, podem considerar la notació $x \to a^-$ que ens indica que prenem valors de x arbitràriament propers a a però sempre $< a$.

Considerem la funció

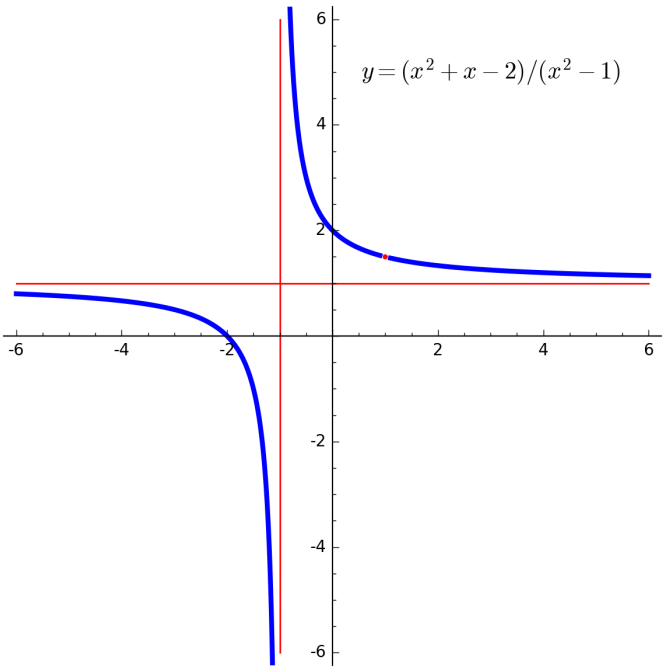
$$y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$$

que està definida arreu excepte als punts $x = \pm 1$ perquè en aquests punts s'anul·la el denominador. Podem preguntar-nos pels límits d'aquesta funció quan la variable $x \to \pm 1$. Observem que $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$ i $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, per tant, fora dels punts $x = \pm 1$, podem escriure $y = (x + 2)/(x + 1)$. Veiem això:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x + 2}{x + 1} = \frac{3}{2};$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{x + 2}{x + 1} = \infty;$$

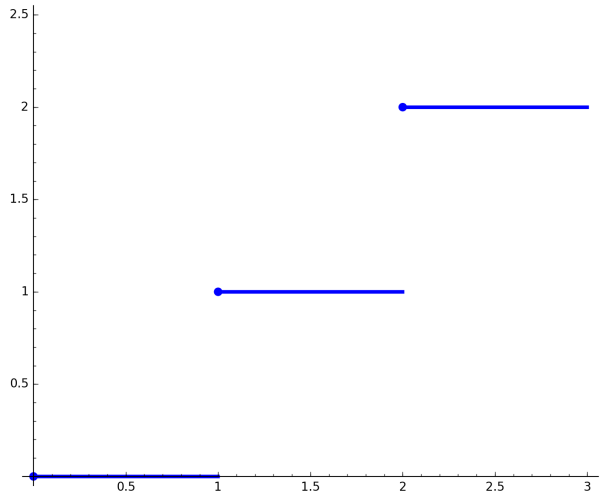
$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{x + 2}{x + 1} = -\infty;$$



7.3 El concepte de continuïtat

Considerem la funció part entera $y = \lfloor x \rfloor$ que hem definit en una secció anterior i observem el fenomen següent. Considerem els nombre $0 \leq x < 1$. La seva part entera és zero. Per molt que x s'acosti a 1, mentre $x < 1$, la part entera serà zero. Però la part entera de 1 és 1. Tenim, doncs, una discrepància entre el límit quan $x \to 1^-$ i el valor de la funció quan $x = 1$:

$$0 = \lim_{x \to 1^-} \lfloor x \rfloor \neq \lfloor 1 \rfloor = 1.$$



Aquesta discrepància es deu a que la funció «fa un salt» en el punt $x = 1$. Diem que **hi ha una discontinuïtat**. Aquest és exactament el significat del concepte de continuïtat en una funció:

> **Una funció $f(x)$ és contínua en el punt $x = a$ si $\lim_{x\to a} f(x)$ existeix i $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.**

Ens interessa saber quines funcions elementals són contínues:

> **Totes les funcions elementals són contínues, en els seus dominis de definició. També ho són les funcions que s'obtenen per composició de funcions elementals, en els seus dominis de definició.**

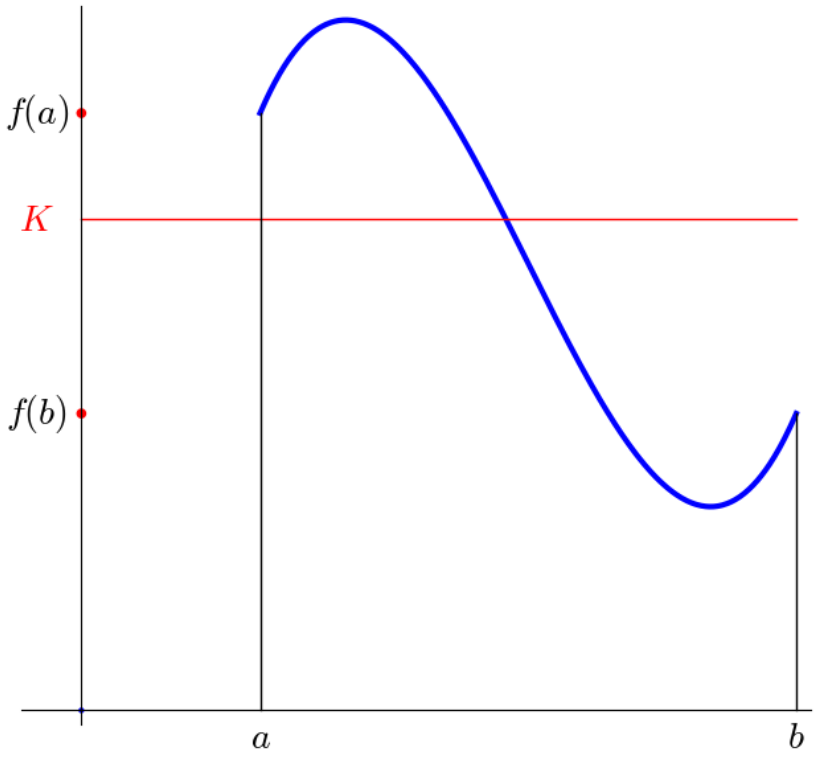
(Això exclou la funció part entera, que no la considerem com una funció elemental.) Per tant, per calcular el límit d'una composició de funcions contínues, quan $x \to a$, si la funció està definida a $x = a$, simplement hem de substituir x per a i avaluar la funció.

7.4 Una propietat essencial de les funcions contínues

La idea mateixa de continuïtat ens diu, per exemple, que no podem passar contínuament de 2 a 3 sense passar per **tots** els valors que hi ha entre 2 i 3. Aquesta és una propietat essencial de les funcions contínues. Dit amb més precisió:

> **Sigui $f(x)$ una funció contínua definida a tots els punts d'un interval $[a, b]$. Sigui K un valor entre $f(a)$ i $f(b)$. Aleshores, existeix algun valor c a l'interval $[a, b]$ tal que $f(c) = K$.**

Així, la funció contínua del dibuix ha de tallar necessàriament la línia vermella:



Aquesta propietat —que es coneix amb el nom de **propietat de Bolzano**— té una gran importància pràctica perquè ens dóna un mètode per resoldre equacions.

Exemple: Resoleu aquesta equació: $\cos(x) = x$.

Considerem la funció $f(x) = \cos(x) - x$, que sabem que és una funció contínua. Observem que $f(0) = 1$ i $f(\pi/2) = -\pi/2$. Per tant, per la propietat de Bolzano hi ha d'haver un valor c entre 0 i $\pi/2$ tal que $f(c) = 0$. Aquest valor serà una solució de l'equació. De moment sabem, doncs, que l'equació té solució. Ara voldríem trobar-la.

Calculem el valor de la funció en un punt intermedi entre 0 i $\pi/2$, per exemple, $f(0.9) \approx -0.116673 < 0$. Per tant, novament per la propietat de Bolzano, hi haurà una solució de l'equació entre 0 i 0.9. Si anem repetint aquest procés, cada vegada acotarem més la solució, fins que la coneguem amb la precisió que ens calgui.

La taula següent és un exemple fet molt ràpidament amb un full de càlcul. La primera columna és un número A tal que $f(A) > 0$, la tercera columna és un número B tal que $f(B) < 0$ i la segona columna és el punt mig entre A i B. Les tres columnes de la dreta són els valors de la funció als punts A, B i C i aquests valors ens permeten decidir quins són els punts A i B de la fila següent. Ràpidament arribem a un valor C tal que $f(C) \approx 0$. Aquest C és una solució aproximada. En la taula veiem que aquest valor és $C = 0.7390851$.

Hem arribat a aquesta solució aproximada per un **procés iteratiu**, és a dir, un procés que consisteix en repetir indefinidament un mateix mètode de manera que a cada nova repetició ens acostem més al resultat exacte de manera que, en el límit, obtindríem aquest resultat exacte.

A	$C=(A+B)/2$	B	$f(A)$	$f(C)$	$f(B)$
0.00000000	0.75000000	1.50000000	1.00000000	-0.01831113	-1.42926280
0.00000000	0.37500000	0.75000000	1.00000000	0.55550762	-0.01831113
0.37500000	0.56250000	0.75000000	0.55550762	0.28342450	-0.01831113
0.56250000	0.65625000	0.75000000	0.28342450	0.13603586	-0.01831113
0.65625000	0.70312500	0.75000000	0.13603586	0.05970028	-0.01831113
0.70312500	0.72656250	0.75000000	0.05970028	0.02089986	-0.01831113
0.72656250	0.73828125	0.75000000	0.02089986	0.00134515	-0.01831113
0.73828125	0.74414063	0.75000000	0.00134515	-0.00847036	-0.01831113
0.73828125	0.74121094	0.74414063	0.00134515	-0.00355944	-0.00847036
0.73828125	0.73974609	0.74121094	0.00134515	-0.00110635	-0.00355944
0.73828125	0.73901367	0.73974609	0.00134515	0.00011960	-0.00110635
0.73901367	0.73937988	0.73974609	0.00011960	-0.00049333	-0.00110635
0.73901367	0.73919678	0.73937988	0.00011960	-0.00018685	-0.00049333
0.73901367	0.73910522	0.73919678	0.00011960	-0.00003363	-0.00018685
0.73901367	0.73905945	0.73910522	0.00011960	0.00004299	-0.00003363
0.73905945	0.73908234	0.73910522	0.00004299	0.00000468	-0.00003363
0.73908234	0.73909378	0.73910522	0.00000468	-0.00001447	-0.00003363
0.73908234	0.73908806	0.73909378	0.00000468	-0.00000490	-0.00001447
0.73908234	0.73908520	0.73908806	0.00000468	-0.00000011	-0.00000490
0.73908234	0.73908377	0.73908520	0.00000468	0.00000229	-0.00000011
0.73908377	0.73908448	0.73908520	0.00000229	0.00000109	-0.00000011
0.73908448	0.73908484	0.73908520	0.00000109	0.00000049	-0.00000011
0.73908484	0.73908502	0.73908520	0.00000049	0.00000019	-0.00000011
0.73908502	0.73908511	0.73908520	0.00000019	0.00000004	-0.00000011
0.73908511	0.73908515	0.73908520	0.00000004	-0.00000003	-0.00000011
0.73908511	0.73908513	0.73908515	0.00000004	0.00000000	-0.00000003

7.5 Fem-ho amb sage

sage pot calcular, en alguns casos, límits de funcions. Per exemple, podem calcular els vuit límits d'un dels exercicis d'aquesta primera part així:

```
sage: limit((1+log(x))/(2+x),x=0,dir='plus')
 -Infinity
sage: limit(sin(x)/x^2,x=oo)
 0
sage: limit(log((x^2+1)/x^2),x=Infinity)
 0
sage: limit(log(x-1)/log(x),x=1,dir='plus')
 -Infinity
sage: limit(sqrt(x-1)*exp(-x),x=1,dir='plus')
 0
sage: limit(tan(x),x=pi/2,dir='plus')
 -Infinity
sage: limit(3*e^(-x)/(1+e^(-x)),x=oo)
 0
sage: limit(12*exp(-5/x^2),x=0)
 0
sage: limit(((x+2)/x)^x,x=oo)
 e^2
```

8. Alguns límits significatius

8.1 Casos d'indeterminació

Suposem que multipliquem una funció $f(x)$ que tendeix a ∞ per una altra funció $g(x)$ que tendeix a 0. Què podem afirmar del límit del producte d'aquestes dues funcions $f(x)g(x)$? N'hi ha prou amb considerar alguns exemples elementals per veure que no podem concloure res sobre el límit d'aquest producte.

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{2}{x}=2; \qquad \lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{2}{x^2}=0; \qquad \lim_{x\to\infty} x^2\cdot\frac{2}{x}=\infty.$$

Diem que tenim un *cas d'indeterminació del tipus* $\infty\cdot 0$. De manera informal, podem pensar aquest cas com una comparació de la «força» d'aquestes dues funcions, actuant en sentits contraris. La primera funció intenta que el producte sigui molt gran, la segona funció intenta que el producte sigui molt petit i el producte es decantarà cap un costat o l'altre segons quina de les dues funcions tingui més «força» o, dit d'una altra manera, s'acosti més ràpidament al seu valor a llarg termini.

Hi ha diversos casos d'indeterminació. Per exemple[1]

$$0\cdot\infty, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad \frac{0}{0}, \qquad \infty-\infty, \qquad 1^\infty, \qquad 0^0.$$

En cadascun d'aquests casos, el càlcul del límit s'ha de fer per mètodes més o menys *ad hoc*. Veurem alguns exemples, però no pretenem cobrir tots els casos possibles.

8.2 Alguns exemples

- **Exemple 1:** En el cas de les funcions racionals, quan obtenim un cas d'indeterminació, sempre el podem resoldre per mètodes que ja hem vist abans.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+1}=\frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2+x-1}{3x^3-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{3x^3}=\frac{2}{3}.$$

- **Exemple 2:**

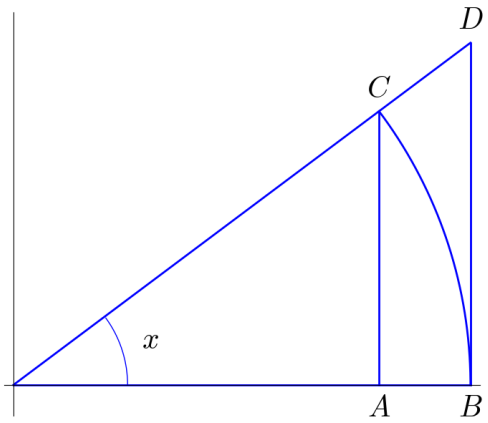
$$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-1})=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=0.$$

[1] Aquestes «fórmules» no tenen cap altre significat que ser noms per designar certes situacions que ens podem trobar a l'hora de calcular límits. És a dir, $0/0$, $\infty-\infty$, etc. no tenen cap significat matemàtic.

- **Exemple 3:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

Aquest és un límit molt interessant que es calcula utilitzant un argument geomètric. Considerem un triangle rectangle d'hipotenusa 1 i amb un angle igual a x.



En aquest triangle, el segment AC mesura $\sin(x)$, el segment BD mesura $\tan(x)$ i l'arc de circumferència BC mesura x, perquè l'angle x el mesurem en radiants. Aleshores, observant aquest triangle veiem que es compleix aquesta desigualtat:

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Dividint per $\sin(x)$ obtenim

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

i observem que la funció $x/\sin(x)$ està «encaixada» entre dues funcions que totes dues tendeixen a 1 quan $x \to 0$. Això ens diu que, necessàriament, aquesta funció «encaixada» també ha de tendir a 1. Tenim, doncs, un límit que és força útil:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1.$$

Aquest mètode d'encaixar una funció de la que no coneixem el límit entre dues funcions que sabem que tenen el mateix límit també és útil en altres circumstàncies.

- **Exemple 4:**

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Observem que la funció $\sin(\frac{1}{x})$ ni tan sols té límit quan $x \to 0$. Malgrat això, podem encaixar-la d'aquesta manera. Recordem que el sinus val sempre entre -1 i 1. Aleshores, si $x > 0$:

$$x \cdot (-1) \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x \cdot 1$$

i si $x < 0$:

$$x \cdot (-1) \geq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq x \cdot 1.$$

En qualsevol cas, com que les dues funcions dels extrems tendeixen a zero, també la funció del mig ha de tendir a zero.

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

- **Exemple 5:**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n}.$$

Aquí estem comparant la «força» de l'exponencial amb la d'una potència d'exponent arbitrari n. Les dues funcions tendeixen a ∞ però, quina ho fa «més de pressa»? La resposta és que «guanya» sempre l'exponencial. Donarem l'explicació d'això en el cas més senzill

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty.$$

Per comprovar això, escrivim $f(x) = e^x/x$ i calculem $f(2x)$ (per $x > 1$):

$$f(2x) = \frac{e^{2x}}{2x} = \frac{e^x e^x}{2x} = \frac{e^x}{2} f(x) \geq \frac{e}{2} f(x) > 1.3\, f(x).$$

Per tant, $f(2^r) > 1.3^r e$ i això ens demostra que la funció $f(x)$ es fa il·limitadament gran, és a dir, tendeix a ∞.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \text{ per tot } n > 0.$$

- **Exemple 6:**

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Aquí tenim una indeterminació del tipus 1^∞ en un límit que té un gran interès (com veurem en els propers capítol). Malauradament, totes les maneres que hi ha de calcular aquest límit són una mica complicades i ens haurem de limitar a donar el resultat, sense justificació.

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

- **Exemple 7:** Aquest límit està molt relacionat amb l'anterior:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1}.$$

Es tracta d'una indeterminació del tipus «0/0» i la podem resoldre fent el canvi de variable $y = 1/(e^x - 1)$. Observem que quan $x \to 0$, la nova variable compleix $y \to \infty$ i tenim

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{y\to\infty} y \log\left(1 + \frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to\infty} \log\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = 1.$$

Per tant,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

8.3 I la regla de l'Hôpital?

Hi ha un instrument molt poderós per resoldre alguns casos d'indeterminació dels que hem considerat aquí que es coneix amb el nom de *regla de l'Hôpital*. Segurament, l'estudiant ja coneix aquest mètode, però en els exemples anteriors hem preferit buscar justificacions alternatives. La regla de l'Hôpital utilitza les derivades, que estudiarem més endavant, però l'estudiant ja les coneix.

Recordem aquí com es pot aplicar aquesta regla:

- La regla de l'Hôpital s'aplica al càlcul de límits amb indeterminacions del tipus «0/0» i «∞/∞».
- Volem, doncs, calcular un límit com

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

  quan $f(x)$ i $g(x)$ són funcions que es poden derivar. Aquí a és un nombre o també pot ser $\pm\infty$. Suposem també que $g'(x)\neq 0$ per tot x en un interval al voltant de a excepte, potser, al punt a.
- Calculem

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

  Suposem que aquest límit existeix i val k (també pot ser $k=\pm\infty$).
- Aleshores,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=k.$$

En particular, els límits dels exemples 3, 5 i 7 anteriors es poden obtenir molt fàcilment amb aquest mètode:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1}=1.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}}=\cdots=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{n(n-1)\cdots 2}=\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x}=1.$$

Cal tenir en compte, però, que en el primer d'aquests límits hem usat que la derivada de la funció sinus és la funció cosinus i en els altres dos hem usat que la derivada de la funció exponencial de base e és ella mateixa però, per arribar a aquests resultat cal usar els valor dels límits de $\sin(x)/x$ i $(e^x-1)/x$.

9. Taxa de creixement

9.1 Velocitat de creixement: la derivada

Si modelem el comportament d'una variable y com una funció $y = y(x)$, una qüestió de màxim interès és entendre a quina velocitat creix (o decreix) la variable y en relació a la variable x. Per exemple,

- Si $y = y(t)$ és l'espai recorregut per un mòbil en un temps t, la velocitat de y en funció de t és, precisament, el que coneixem com la velocitat del mòbil. Si y s'expressa en metres i t s'expressa en segons, la velocitat s'expressarà en metres per segon.
- Si $P = P(q)$ és la producció d'un camp de cereals en funció de l'aportació d'adob q, la velocitat de P en funció de q ens indica quantes unitats augmenta P quan q augmenta en una unitat. Aquesta velocitat s'expressarà, per exemple, en tones de producció per kg d'adob.
- Si $T = T(C)$ ens indica la relació entre la temperatura T i la concentració C de CO_2 a l'atmosfera, la velocitat de creixement de T respecte de C ens indica quants graus augmenta la temperatura per cada augment d'una unitat en la concentració de CO_2. Aquesta velocitat s'expressarà, per exemple, en graus Celsius per 1 ppmv de CO_2.

No cal insistir, doncs, en la importància d'aquest concepte que, de fet, serà un dels conceptes centrals d'aquest curs. Matemàticament, si $y = y(x)$, la velocitat de creixement de y respecte de x s'anomena la **derivada** de y respecte de x. La notació que es fa servir és y' i, si es vol remarcar que la variable independent és x, aleshores s'escriu

$$\frac{dy}{dx}.$$

En resum,

> **Si $y = y(x)$ és una funció, la derivada $y' = \frac{dy}{dx}$ és la velocitat de creixement de y respecte de x. Les unitats de y' són A/B on A són les unitats de y i B són les unitats de x.**

No cal dir que sempre utilitzarem la paraula **creixement** en el sentit que inclou el **decreixement** com a creixement de signe negatiu.

Exemples:

- Si ens diuen que la superfície de boscos al Brasil ha anat variant al llarg del temps, entendrem que ens estan dient que hi ha una funció $S = S(t)$ que descriu

la superfície de bosc S com a funció del temps. Si ens diuen que la superfície de bosc ara ($t = 2015$) al Brasil és de 500 milions d'hectàrees, entendrem que ens estan dient que $S(2015) = 500 \times 10^6$ ha. Si llegim que el Brasil està perdent ara 1.6 milions d'hectàrees de bosc cada any, entendrem que ens estan dient que $S'(2015) = -1.6 \times 10^6$ ha/any.

- Si ens diuen que un cos està a 10 metres sobre el terra i està caient a una velocitat de 5 m/s, entendrem que la seva distància al terra ve donada per una funció $d = d(t)$ i que, si considerem que ara és l'instant $t = 0$ (per exemple), es compleix $d(0) = 10$ m i $d'(0) = -5$ m/s.

Hem d'anar amb compte i no confondre la velocitat (és a dir, la derivada) amb la **velocitat mitjana**. Per exemple, en els dos exemples anteriors

- Quantes ha de bosc hi haurà al Brasil l'any que ve? 498.4 milions d'ha? Segurament, no. Que la superfície de boscos al Brasil disminueixi a una velocitat de 1.6×10^6 ha/any **no** vol dir que d'aquí un any hi hagi 1.6×10^6 ha menys. En efecte, la desforestació es podria accelerar (o, més difícilment, desaccelerar) i, després d'un any, podem haver perdut més o menys de 1.6×10^6 ha.
- A quina alçada sobre el terra estarà el cos després de 1 segon? A 5 metres? No. El cos cau a 5 m/s, però això **no** vol dir que recorri 5 metres en el proper segon, perquè sabem que, de fet, s'està accelerant per efecte de la gravetat i cada vegada caurà a més velocitat.

9.2 Taxa de creixement

Sovint, veiem com el creixement d'una variable es dóna en **tant per cent**. Què significa? Per exemple, si diem

- L'atur està creixent al 0.2% anual.
- La població mundial de balenes està disminuint a un ritme del 3.1% anual.

Què signifiquen aquest 0.2% i aquest 3.1%? La resposta és senzilla: és el quocient entre la velocitat de creixement i el valor de la variable:

- Si el nombre d'aturats és $N(t)$, estem dient que $N'(t)/N(t)$ val, en aquest instant de temps actual, 0.002. Les unitats, evidentment, són anys^{-1}.
- Si el nombre de balenes és $N(t)$, estem dient que $N'(t)/N(t)$ val, en aquest instant de temps actual, 0.031. Les unitats, evidentment, són anys^{-1}.

D'aquest quocient se'n diu la **taxa de creixement**[1] o també, de vegades, la velocitat de creixement per capita, o per unitat.

$$\text{Taxa de creixement } = \frac{N'(x)}{N(x)}.$$

[1] En anglès, *growth rate*.

La taxa de creixement (que, evidentment, pot ser positiva, negativa o zero) té per unitats A^{-1}, on A són les unitats de la variable independent x.

9.3 Creixement discret i creixement continu

Considerem aquesta pregunta d'aparença senzilla:

> **Una quantitat N té un valor 1000 i està creixent al 4% anual. Quan valdrà d'aquí a un any?**

La majoria de persones contestarien 1040 i, la majoria de vegades, s'equivocarien. Intentem d'entendre quina és la resposta correcta.

Algunes variables creixen de manera **discreta**.[2] Per exemple, un dipòsit bancari de 1000€ a un interès del 4% anual (amb capitalització anual) té un valor constant de 1000€ durant tot un any i l'endemà de que es compleixi l'any fa un salt discontinu i es converteix en 1040€. Si la nostra variable N tingués aquest comportament, efectivament el valor després d'un any seria de 1040.

Però la majoria de variables que apareixen a la ciència o a la natura no creixen de manera discreta, sinó que creixen de manera **contínua**. Per exemple, les mides d'un ésser viu en creixement no creixen pas com un dipòsit bancari! En altres casos, el creixement és discret, però creix amb tants petits increments, que és millor considerar-lo com un creixement continu. La mida d'una gran colònia d'animals podria ser un exemple d'aquest tipus.

Quan el creixement és continu, hem de distingir entre **créixer amb una taxa del 4% anual** i **créixer un 4% en un any**. És cert que, de vegades, es confonen aquests dos conceptes, però són dues coses molt diferents.

En resum, quina és la resposta a la pregunta anterior? La resposta és «depèn». Depèn de que el creixement sigui discret o continu i, si és discret, depèn de quantes vegades creixi en el període de temps que considerem (un any, per exemple). La resposta concreta en cada cas l'estudiarem en el capítol següent.

[2] En matemàtiques, la paraula «discret» té el significat de *«que presenta separacions, que es compon de parts separades»* (DLC) i és el contrari de «continu».

10. El creixement exponencial

En aquest capítol concretarem més els temes de creixement discret, creixement continu i taxa de creixement que han sorgit al capítol anterior.

10.1 Creixement discret

Comencem amb la pregunta del final del capítol anterior. Dèiem que una quantitat N està creixent al 4% anual i ens preguntàvem quan valdria d'aquí un any. Vam dir que ens calia més informació. Suposem, doncs, que el creixement és discret i es produeix un cop l'any. Podem pensar que N és un dipòsit bancari o la mida d'una població que es reprodueix un cop l'any. És clar que, en lloc de prendre l'any com la unitat de temps, podríem prendre qualsevol altra unitat (mes, dia, segon, etc.). Amb aquesta informació, la resposta és clara: $N \times 1.04$.

Com que la quantitat N va canviant amb el temps, és lògic pensar-la com una funció $N = N(t)$. Si comencem a comptar el temps quan la població val $N(0) = N_0$, i si la taxa de creixement és r (a l'exemple, r valia el 4%), la resposta anterior s'escriurà

$$N(1) = N_0 \times (1 + r).$$

Més en general,

$$N(2) = N_0\,(1 + r)^2, \qquad N(3) = N_0\,(1 + r)^3, \qquad N(4) = N_0\,(1 + r)^4, \ldots$$

És a dir,

$$N(k) = N_0\,(1 + r)^k, \ k \text{ enter.}$$

En aquest exemple hi ha igualtat entre la unitat de temps i el temps de cada període de creixement. En general, aquests dos temps posen ser diferents.

Exemple 1: Tenim un cultiu amb 10^3 bacteris que es reprodueixen per divisió cada 20 minuts. Quant de temps trigarà a haver-hi 10^6 bacteris?

Prenem com a unitat de temps el minut. Aleshores, com que cada 20 minuts la població es duplica, la fórmula que ens donarà la població després de t minuts serà

$$N(t) = N_0 \times 2^{t/20}.$$

Observem que la taxa de reproducció és del 100% cada 20 minuts. Per resoldre el problema hem de resoldre aquesta equació:

$$10^6 = 10^3\, 2^{t/20}.$$

Prenent logaritmes, obtenim[1]

$$t = 60\,\frac{\log(10)}{\log(2)} \approx 199.3 \text{ min.}$$

[1] Si el creixement és estrictament discret, aquesta resposta és només aproximada, perquè després de 200 minuts hi haurà 1.024.000 bacteris i un minut abans n'hi haurà 512.000.

Considerem ara aquest exemple lleugerament diferent:

Exemple 2: Un dipòsit bancari de 10^3 euros rep un interès del 3% anual i es capitalitza cada mes. Quant de temps trigarà a duplicar-se?

Prenem com a unitat de temps l'any. Evidentment, l'interès del 3% anual és un interès del $3/12\,\% = 0.0025$ mensual. Per tant, podem aplicar la mateixa fórmula de l'exemple anterior, tenint en compte que r, que era la taxa de creixement per període, ara serà $r = 0.0025$ i l'equació a resoldre és

$$2 \times 10^3 = 10^3\,(1.0025)^{12t}.$$

Prenent logaritmes arribem a

$$t = \frac{\log(2)}{12\log(1.0025)} \approx 23 \text{ anys.}$$

Escrivim una fórmula general per a aquest cas. Suposem que la taxa de creixement és r (en % per unitat de temps) i que el creixement es produeix cada $1/n$ unitats de temps. El valor de N després de t unitats de temps serà

$$N(t) = N_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

El model de creixement que acabem d'estudiar l'anomenarem **creixement exponencial discret**. Si $r > 0$ tenim creixement, si $r < 0$, tenim decreixement.

10.2 Creixement continu

Suposem ara que una quantitat N creix amb una taxa de creixement constant, però creix contínuament o, equivalentment, els intervals de creixement són molt petits. Per exemple, la mida d'un arbre o la massa d'una substància radioactiva (en aquest segon cas la taxa serà negativa, evidentment). Per calcular $N(t)$ hauríem d'aplicar la fórmula anterior

$$N(t) = N_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

prenent un valor molt gran de n. Més exactament, hauríem de prendre el límit d'aquesta expressió quan $n \to \infty$:

$$N(t) = \lim_{n\to\infty} N_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = N_0 \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n/r}\right)^{(n/r)rt} = N_0\, e^{rt}.$$

Aquest és un **resultat fonamental**: el creixement continu amb taxa de creixement constant igual a r ve donat per la funció exponencial

$$N(t) = N_0\, e^{rt}.$$

Per aquest motiu, en diem **creixement exponencial**.

Observem que el signe de r ens distingeix entre creixement i decreixement: Si $r > 0$ hi ha creixement, si $r < 0$ hi ha decreixement. Si $r = 0$, N es manté constant.

10.3 Creixement exponencial

Fem un resum del que hem après fins ara:

- Direm que una quantitat té **creixement exponencial** quan creix contínuament amb una **taxa de creixement constant**.
- Per tant, $N(t)$ té creixement exponencial si $r = N'(t)/N(t)$ és constant. Equivalentment, si $N'(t) = rN(t)$ amb r constant.
- Si $N(t)$ té creixement exponencial amb taxa de creixement r, aleshores $N(t)$ és una funció exponencial
$$N(t) = N_0\, e^{rt}.$$

Hi ha molts exemples de creixement exponencial, si més no en un interval limitat de t. Posem un parell d'exemples:

Exemple 3: Entre els anys 2000 i 2008, el nombre d'usuaris d'Internet a la Xina va créixer a una taxa aproximadament constant del 10.24% anual. Si l'any 2000 hi havia 22.5 milions d'usuaris, feu una estimació del nombre d'usuaris després de deu anys.

Com que aquest creixement és continu i la taxa de creixement r és constant, serà un creixement exponencial donat per una equació

$$N(t) = N_0\, e^{rt}$$

on N_0 és la mida per $t = 0$. Prenem com a unitat de temps l'any i el temps $t = 0$ que sigui l'any 2000. Per tant, el nombre d'usuaris per $t = 10$ serà

$$N(10) = (22.5 \times 10^6)\, \exp(0.1024 \times 10) \approx 62.6 \times 10^6.$$

Exemple 4: La *llei de Moore* és l'observació que el nombre de transistors en un circuit integrat (un *«xip»*) creix exponencialment amb el temps. Aquest nombre valia 2300 l'any 1970 i 10 milions després de 25 anys. Calculeu la taxa de creixement.

Com que ens diuen que el creixement és exponencial, vindrà donat per l'equació

$$N(t) = N_0\, e^{rt}.$$

Prenem l'any com a unitat de temps i prenem $t = 0$ a l'any 1970. Tenim $N_0 = 2300$ i $N(25) = 10^7$. Hem de resoldre aquesta equació

$$10^7 = 2300\, \exp(25r).$$

Prenem logaritmes i arribem a

$$r = \frac{1}{25} \log \frac{10^7}{2300} \approx 0.335$$

i la taxa de creixement és del 33.5% anual. Si ara calculem el temps necessari per que el nombre de transistors es multipliqui per dos, veurem que són aproximadament 2

anys. Això ens duu a l'enunciat habitual de la llei de Moore: el nombre de transistors en un xip es duplica cada dos anys.

Exemple 5: Imaginem un actiu financer de 10^3 euros en un mercat continu que puja al 3% anual. Quant de temps trigarà a duplicar el seu valor?

Es tracta, doncs, d'un exemple anterior, però suposant que en lloc de capitalització mensual la capitalització és contínua, cada instant de temps. Això vol dir que creixerà exponencialment segons la llei

$$N(t) = N_0\, e^{rt}.$$

Prenem l'any com a unitat de temps, amb la qual cosa $r = 0.03$. Caldrà resoldre aquesta equació:

$$2 \times 10^3 = 10^3 \exp(0.03t).$$

Prenent logaritmes, la solució és

$$t = \frac{\log(2)}{0.03} \approx 23 \text{ anys.}$$

Veiem, doncs, que en aquest exemple, hi ha poca diferència entre una capitalització mensual i una capitalització contínua.

10.4 Més sobre la taxa de creixement

Hem definit la taxa de creixement com el quocient N'/N i hem après a distingir entre

- Créixer al r% anual i
- créixer un r% en un any.

Fem un càlcul per veure quina és exactament la discrepància entre aquests dos conceptes.

En un creixement continu al r% anual, tindrem creixement exponencial donat per la fórmula

$$N(t) = N_0\, e^{rt}$$

i, després d'una unitat de temps, haurem passat de N_0 a $N(1) = N_0\, e^r$. Quin percentatge de creixement hi ha hagut? El calculem amb aquesta fórmula:

$$\text{creixement relatiu en una unitat de temps } = \frac{N(1) - N_0}{N_0} = e^r - 1.$$

Si ara recordem un límit que havíem calculat en un capítol anterior, sabrem que, si r és petit,

$$e^r - 1 \approx r$$

i els dos valors són propers un de l'altre.

Tenim

- La taxa de creixement r tal com l'hem definida al capítol anterior. Si hi ha perill de confusió, en podríem dir la **taxa de creixement instantània**.

- La taxa de creixement per unitat de temps R.

Hem vist que, si r és petit, $r \approx R$ i també hem vist que la relació exacta entre r i R ve donada per les equacions

$$R = e^r - 1, \qquad r = \log(1 + R).$$

La fórmula del creixement exponencial es pot escriure en funció de r o en funció de R:

$$N(t) = N_0\, e^{rt} = N_0\, (1 + R)^t.$$

Hem de tenir present que, molt sovint, els dos conceptes es confonen. Per exemple, si llegim als diaris que el PIB de la Xina va créixer, durant molts anys, el 9.5% anual, hem de pensar que aquest valor és r o és R? La resposta és que, la majoria de vegades, és R.

Tornem ara a resoldre l'exemple 1 de l'apartat anterior:

Exemple 3, segona interpretació: Entre els anys 2000 i 2008, el nombre d'usuaris d'Internet a la Xina va créixer de manera constant un 10.24% cada any. Si l'any 2000 hi havia 22.5 milions d'usuaris, feu una estimació del nombre d'usuaris després de deu anys.

Ara entenem que aquest 10.24% és el valor de R. Podem resoldre l'exercici de dues maneres:

1. Calculem $r = \log(1 + R) = \log(1.1024)$ i apliquem

$$N(10) = (22.5 \times 10^6)\, \exp(10 \log(1.1024)) = 22.5 \times 10^6 \times 1.1024^{10}.$$

2. Raonem que si cada any creix un 10.24%, cada any el nombre d'usuaris es multiplica per 1.1024. Per tant, en 10 anys tindrem

$$N(10) = 22.5 \times 10^6 \times 1.1024^{10}.$$

Els dos mètodes ens condueixen al mateix resultat 59.6×10^6 que és una mica diferent del que havíem obtingut quan interpretàvem que 10.24% era el valor de r.

Per evitar aquestes confusions, en aquest curs adoptarem un punt de vista més matemàtic i quan ens referim a la **taxa de creixement** sempre voldrà dir el paràmetre r, a menys que especifiquem clarament que estem parlant de R. Però hem de ser conscients de que, a la pràctica, s'utilitza més R.

11. El model logístic

Al capítol anterior hem estudiat a fons el creixement exponencial $N(t) = N_0\, e^{rt}$. Aquest model s'adapta força bé a certs fenòmens com, per exemple, el creixement inicial d'una colònia d'una espècie invasiva, o l'extensió inicial d'una epidèmia, **en un espai de temps limitat**, però no pot ser un bon model a llarg termini. L'explicació és que, si $r > 0$, sabem que

$$\lim_{t\to\infty} N_0\, e^{rt} = \infty$$

i, per tant, aquest creixement exponencial no és sostenible en el temps, en cap cas.

Per tant, si volem models que s'adaptin millor al comportament efectiu del creixement dels éssers vius o les poblacions (per exemple), hem de modificar el model exponencial i hem de passar a altres models més complicats que tinguin en compte que, com que mai no disposarem de recursos il·limitats, la taxa de creixement no es pot mantenir constant a llarg termini —perquè ja sabem que una taxa constant implica que el el creixement és exponencial.

11.1 Del model exponencial al model logístic

El **model logístic** és un model molt important, que estudiarem en diversos capítols d'aquest curs. Una manera d'introduir-lo és com una modificació del model exponencial tal que la taxa de creixement no és constant, sinó que va disminuint linealment a mida que augmenta la mida de la població.

Sigui $N(t)$ la funció que denoti la mida d'una població al llarg del temps t. La taxa de creixement és

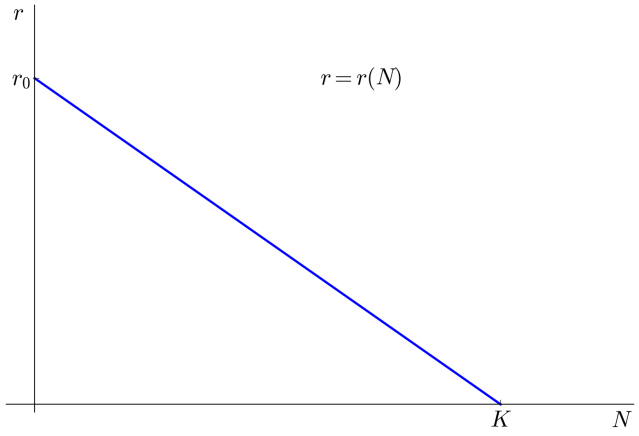
$$r = \frac{N'(t)}{N(t)}.$$

Ja sabem que si r és constant, tenim creixement exponencial. Suposem ara que r no és constant sinó que, a mida que la població N és més gran, els recursos per capita són més escassos o hi ha altres factors que fan que r vagi disminuint fins un punt en que $r = 0$. Quan arribem en aquest punt direm que la població ja ha exhaurit la capacitat del medi.

Concretem més. Sigui r_0 la taxa de creixement quan $N = 0$. Suposem que $r = 0$ quan $N = K$ (direm que K és la *«capacitat del medi»*), i suposem que el pas de r_0 a r és lineal, és a dir, segueix una línia recta.

Si calculem l'equació d'aquesta línia recta $r = r(N)$, obtenim

$$r = r_0 \left(1 - \frac{N}{K}\right).$$



Anomenarem **creixement logístic** aquell en el qual la taxa de creixement ve donada per aquesta expressió anterior. És a dir,

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right).$$

(Aquí hem canviat la notació i en lloc de r_0 hem escrit r.) És clar que aquesta equació també es pot escriure així:

$$N' = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right).$$

És a dir, en el creixement logístic

1. la velocitat de creixement és proporcional a la mida de la població (com passa en el creixement exponencial)

2. i la velocitat de creixement també és proporcional a la diferència entre 1 i el quocient N/K.

Compareu aquesta equació amb l'equació corresponent del creixement exponencial:

$$N' = rN.$$

Al creixement logístic hi apareixen dos paràmetres: r i K. El seu significat és aquest:

- r és la taxa de creixement quan la població és molt petita. Representa la taxa de creixement quan els recursos limitats del medi encara no afecten el creixement de la població i, per tant, la població creix de manera aproximadament exponencial.

- K representa la capacitat màxima del medi. A mida que la mida de la població es va acostant al valor K, la taxa de creixement va disminuint, de manera que si la població arribés a K, la taxa de creixement seria zero i la població es mantindria constant.

Igual que passava amb el model exponencial, el model logístic també té una **versió discreta** que és aquesta

$$N(t+1) = (1+R)\,N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right).$$

Per estudiar matemàticament l'equació logística és convenient fer un canvi de variable $x = N/K$. Aleshores, l'equació anterior agafa l'aspecte més senzill

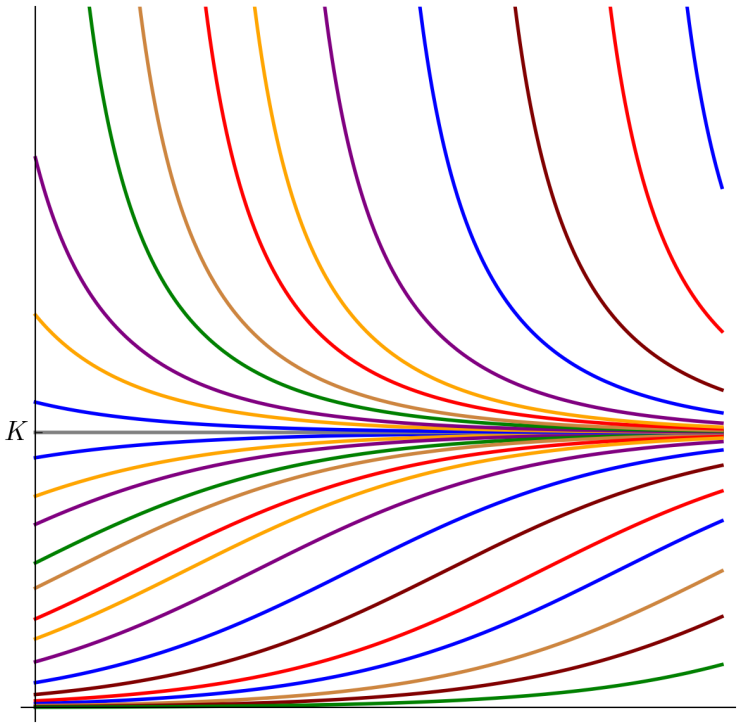
$$x_{t+1} = r x_t (1 - x_t).$$

Això ens permet fer simulacions del comportament de la població x cada unitat de temps, a partir d'un valor inicial x_0 i d'una elecció del paràmetre r.[1]

11.2 Comportament qualitatiu del model logístic

Vam definir el creixement exponencial per l'equació $N' = rN$ i vam veure que aquest creixement venia donat per una funció senzilla com és $N = N_0\, e^{rt}$. Ara hem definit el creixement logístic per una equació una mica més complicada $N' = rN(1 - N/K)$ i ens agradaria també poder disposar d'una funció $N = N(t)$. En aquest moment, encara no tenim prou eines per resoldre aquest problema. Ho farem més endavant en el curs, però podem avançar la solució, ni que sigui d'una manera qualitativa.

Aquesta descripció qualitativa està continguda en aquest dibuix:



[1] Aquestes simulacions són extraordinàriament interessants perquè ens permeten observar el que es coneix com a *comportament caòtic* del creixement logístic. Consulteu l'entrada *Logistic map* a Wikipedia.

L'eix horitzontal és el temps, l'eix vertical és N, la mida de la població. Cada corba representa l'evolució de la mida de la població a partir d'un valor inicial $N(0)$. Observem:

- Si $N(0) < K$, la població creix amb el temps. Si $N(0) > K$, la població decreix amb el temps. Si $N(0) = K$, la població és constant.
- En qualsevol cas, a llarg termini la població tendeix al valor K:

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = K.$$

- Si $N(0)$ és petit respecte de K, la població comença amb creixement exponencial (aproximadament), passa per un punt d'inflexió i s'acosta asimptòticament a K.
- Si $N(0)$ és gran respecte de K, la població decreix exponencialment (aproximadament) i s'acosta asimptòticament a K.

11.3 Altres models de creixement

Parlem ara, sense aprofundir en el seu estudi, d'altres models de creixement importants.

- **El model de von Bertalanffy.** Karl Ludwig von Bertalanffy (1901–1972) va ser un biòleg austríac que va proposar (1938) un model senzill per al creixement de la mida d'un organisme. Aquest model s'aplica, entre altres coses, a la mida dels peixos.[2] Si $L(t)$ és la longitud d'un peix en el temps t, el model afirma que la velocitat de creixement de L és proporcional a la diferència $L_\infty - L$ on $L_\infty > 0$ és una constant:

  $$L' = k(L_\infty - L).$$

  Si fem el canvi de variable $S = L_\infty - L$, aquesta fórmula es converteix en $S' = -kS$ que és la mateixa del creixement exponencial. Per tant, el model de von Bertalanffy és una petita variació del model exponencial. La fórmula per a L és

  $$L = L_\infty - (L_\infty - L_0)\exp(-kt)$$

  on observem que

  - L_0 és la mida en el temps $t = 0$.
  - L_∞ és la mida quan $t \to \infty$.
  - la funció $L(t)$ és creixent i s'acosta asimptòticament a L_∞.

  Des d'un punt de vista matemàtic, aquest model és exactament el mateix que el de la **Llei de refredament de Newton** que afirma que la velocitat amb què es

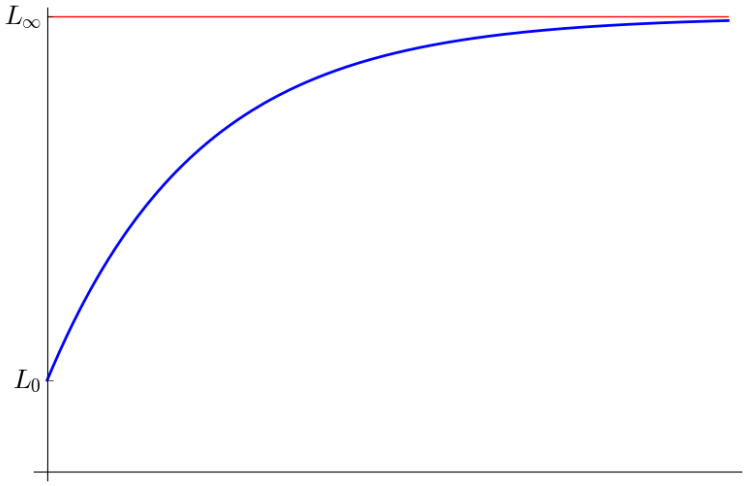
[2] Vegeu l'article *Age and Growth of the Bull Shark, Carcharhinus leucas, from Southern Gulf of Mexico*, J. Nortw. Atl. Fish. Sci., Vol. 35, 367–374. També, *Introduction to Tropical Fish Stock Assessment*, FAO Fisheries Technical Paper 306/1, apartat 3.1.

refreda (o s'escalfa) un cos és proporcional a la diferència entre la temperatura ambient i la temperatura del cos:

$$T' = k(T_{\text{amb}} - T),$$

que ens dóna que la temperatura del cos ve donada per una funció exponencial

$$T(t) = T_{\text{amb}} + (T_{\text{amb}} - T_0)\exp(-kt).$$



- **El model de Beverton-Holt.** És un model discret donat per aquesta fórmula que ens dóna la població en el temps $t+1$ a partir de la població en el temps t:

$$N(t+1) = \frac{RN(t)}{1+HN(t)}.$$

Aquest model va ser introduït per Beverton i Holt el 1957 en un estudi sobre la dinàmica de les piscifactories. Depèn de dues constants: R mesura la capacitat reproductiva i H té a veure amb la capacitat del medi. Aquesta equació té la mateixa solució que l'equació logística i, per tant, el comportament és el mateix.

Hi ha una generalització d'aquest model que s'anomena **model de Hassell**:

$$N(t+1) = \frac{RN(t)}{(1+HN(t))^c}.$$

Evidentment, aquest model es redueix al model de Beverton-Holt quan $c = 1$.

- **El model de Ricker.** Aquest model va ser introduït per Bill Ricker (que es considera el fundador de la ciència de la piscicultura) el 1954, també en relació al creixement d'una colònia de peixos. Es tracta d'un model discret

$$N(t+1) = N(t)\,\exp\left(R\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)\right)$$

on, igual que abans, R té a veure amb la capacitat de reproducció i K amb la capacitat del medi.

Exemple. El model de Ricker s'ha utilitzat per estudiar les successives generacions de salmó (*Oncorhynchus nerka*) als rius del nord del Pacífic.[3] Com que el salmó fa la posta als 4 anys, podem prendre un model de Ricker discret amb períodes de 4 anys. Imaginem que en un d'aquests estudis tenim observacions que ens donen (en milions d'individus, $t = 0$ l'any 1908, interval de temps igual a 4 anys)

$$N(0) = 0.325, \qquad N(1) = 0.431, \qquad N(2) = 0.529.$$

Calculeu els successius valors de $N(t)$ usant el model de Ricker.

Hem de resoldre aquest sistema de dues equacions amb dues incògnites:

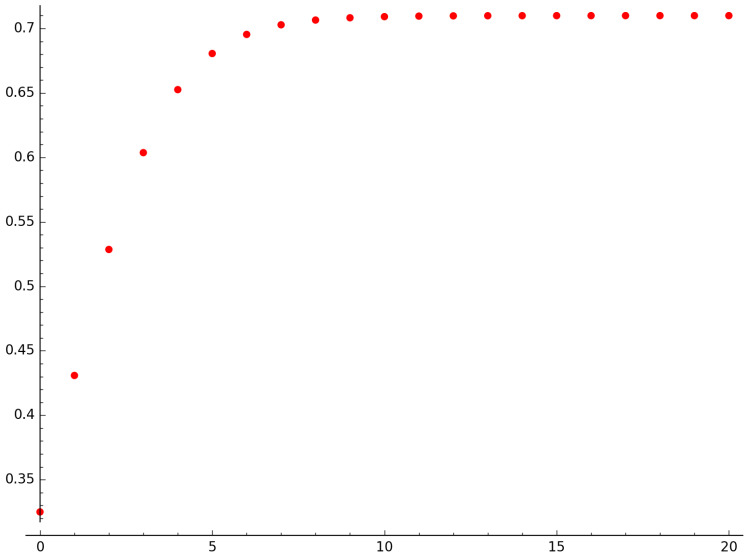
$$\begin{cases} 0.431 = 0.325 \exp\left(R\left(1 - \frac{0.325}{K}\right)\right) \\ 0.529 = 0.431 \exp\left(R\left(1 - \frac{0.431}{K}\right)\right) \end{cases}$$

La solució és

$$R \approx 0.52, \qquad K \approx 0.71.$$

Ara podem calcular la població teòrica en els períodes de 4 anys successius:

$$N(3) = 0.604,\ N(4) = 0.653,\ N(5) = 0.681,\ N(6) = 0.695,\ N(7) = 0.703, \ldots$$



11.4 Fem-ho amb sage

Un dels exercicis d'aquesta primera part demana iterar la funció logística discreta amb una població inicial $N_0 = 0.2$ fixada i diversos valors del paràmetre r. No és gens difícil programar aquest exercici amb sage.

```
sage: N0=0.2
sage: Next(r,x)=r*x*(1-x)
sage: def Logi(r):
```

[3] Vegeu el llibre *Quantitative Fisheries Stock Assessment*, Hilborn-Walters 1992.

```
....:     L=[N0]
....:     for i in [0..300]:
....:        L.append(Next(r,L[i]))
....:     return sum([point([i,L[i]]) for i in [0..300]])
sage: Logi(0.3)
sage: Logi(1.6)
sage: Logi(2.8)
sage: Logi(3.4)
sage: Logi(3.45)
sage: Logi(3.6)
```

Expliquem una mica aquest exemple. Comencem definint la població inicial $N_0 = 0.2$. A la segona línia del programa definim una funció que, a partir del valor de r i del valor de x, calcula el valor de x després d'una unitat de temps. En el model logístic, això és

$$rx(1-x).$$

A continuació, definim una funció `Logi(r)` que, a partir del valor de r, dibuixa

$$N_0,\ N_1,\ N_2, \ldots, N_{300}.$$

Finalment, fem els dibuixos per als valors de

$$r = 0.3,\ 1.6,\ 2.8,\ 3.4,\ 3.45,\ 3.6.$$

Expliquem una mica com definim la funció `Logi(r)`. Comencem amb una llista de nombres L que, d'entrada, té un únic nombre que és N_0. aleshores, anem afegint (*append*) valors a aquesta llista de manera que cada valor s'obté a partir de l'anterior per la funció logística discreta

$$N_{t+1} = rN_t(1-N_t).$$

Cal recordar que a `sage` el primer terme d'una llista L és sempre el terme $L[0]$. Quan acabem, tenim una llista amb 302 valors consecutius de la logística discreta. La darrera instrucció de la funció `Logi(r)` dibuixa tots els punts (i, N_i) per a $i = 0, \ldots, 300$.

Exercicis

A. Exercicis teòrics

I.A.1. Expresseu en forma d'una sola potència:

(a) $\dfrac{5^3 \cdot 5^{-5} \cdot 5^2}{5^4 \cdot 5^{-2}}$, (b) $(3/2)^6 \cdot (4/5)^6$, (c) $\left[(3/4)^5 \cdot (7/3)^5\right]^{-5}$, (d) $\dfrac{(2^3)^4 \cdot (3^6)^2}{(6^2)^3}$.

I.A.2. Resoleu les equacions següents:

(a) $\dfrac{3}{x^2-1} + \dfrac{5x}{x+1} = \dfrac{2x}{x-1}$, (b) $\dfrac{(x+5)^2}{(2x-3)^2} = 1$, (c) $x - \sqrt{25-x^2} = 1$

(d) $(x-1)(x-2) = 3\left(1 + \dfrac{x-2}{1-\dfrac{x-3}{x}}\right)$.

I.A.3. Sigui

$$\frac{N}{1-\frac{N}{K}} = k\, e^{rt}$$

on K, k i r són constants. Expresseu N com a funció de t.

I.A.4. Trobeu nombres a i b tals que tinguem una igualtat de funcions

$$\frac{3x-1}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}.$$

I.A.5. Resoleu les equacions exponencials següents:

$(a)\ 3^{1-x^2} = \dfrac{1}{27}$, $(b)\ 9^x - 3^x = 3(1+3^{x-1})$, $(c)\ 7^{2x+3} - 8 \cdot 7^{x+1} + 1 = 0$.

I.A.6. Resoleu les equacions logarítmiques següents:

(a) $2\log_{10} x - \log_{10}(x-16) = 2$, (b) $(x^2-x-3)\log_{10} 4 = 3\log_{10} \frac{1}{4}$,

(c) $(2+x)\log_{10} 2^{2-x} + \log_{10} 1250 = 4$, (d) $\log_2 x^2 - \log_2(x-\frac{3}{4}) = 2$.

I.A.7. Resoleu aquest sistema de dues equacions amb dues incògnites:

$$\begin{cases} 0.431 = 0.325\, \exp\left(R\left(1-\frac{0.325}{K}\right)\right) \\ 0.529 = 0.431\, \exp\left(R\left(1-\frac{0.431}{K}\right)\right) \end{cases}$$

I.A.8. Verifiqueu la igualtat de funcions

$$\frac{1+\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{2}{\sin x}.$$

I.A.9. Calculeu

(a) $\sin(\arctan x)$ en termes de x,

(b) $\tan(\arccos x)$ en termes de x.

I.A.10. Resoleu les inequacions següents:

(a) $x+1<2x-7$, (b) $-x+1\leq -4$, (c) $(3y+1)(y-2)>1$,

(d) $\dfrac{x+2}{3x-7}<0$, (e) $\dfrac{s+\pi}{s}<1$, (f) $x^3-x\geq 0$.

I.A.11. Resoleu les inequacions següents en les que intervé el valor absolut:

(a) $|x-2|\leq 3$, (b) $5\leq |x|\leq 6$, (c) $\big|1-|x|\big|<3$, (d) $|x+1|\leq |x|$.

I.A.12. Escriviu l'equació cartesiana de la recta

(a) que passa pels punts $(3,-1)$ i $(-2,1)$;

(b) de pendent $-3/5$ i que passa per $(1,-2)$;

(c) paral·lela a la recta $3y+2x+1=0$ que passa per $(1,-3)$;

(d) perpendicular a la recta $3y+2x+1=0$ que passa per $(-1,2)$;

I.A.13. Escriviu l'equació de la circumferència que té el centre a $(-1,4)$ i té radi 3. Trobeu el centre i el radi de la circumferència d'equació $(x-2)^2+y^2=16$. Trobeu el centre i el radi de la circumferència d'equació $x^2+y^2-4x+2y=11$.

I.A.14. Escriviu les equacions de les paràboles d'eix vertical tals que

(a) passa pels punts $(1,1)$, $(-1,2)$ i $(0,0)$;

(b) talla l'eix d'ordenades al punt 4 i l'eix d'abscisses als punts 1 i 2.

I.A.15. Determineu el domini de definició d'aquestes funcions:

(a) $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x^4+x^2-6}$, (b) $f(x)=\log(\tan(x))$,

(c) $f(x)=\log(x^2+3x+2)$, (d) $f(x)=(\log(x^2-1))^{3.22}$.

I.A.16. (a) Expresseu $7^{3x}\sqrt[n]{5}$ com una exponencial de base e.

(b) Expresseu $e^{0.4537t}$ com una exponencial de base 10.

(c) Expresseu $\log_{10}(0.9768t)$ com un logaritme neperià.

(d) Expresseu $\log_2(74.5x)$ com un logaritme en base 10.

I.A.17. Trobeu una funció de Monod $N = N(x)$ tal que $N(1.5) = 1350$ i $N(3.2) = 2100$.

I.A.18. Trobeu una funció de Monod $N = N(x)$ tal que $N(1.5) = 1300$ i que el seu valor estable sigui $N_\infty = 12000$.

I.A.19. Trobeu una funció potencial $M = M(P)$ tal que $M(2.2) = 7.1$ i $M(3.1) = 5.4$.

I.A.20. Trobeu una funció exponencial $P = P(u)$ tal que $P(-3.5) = 22$ i $P(2.4) = 4560$.

I.A.21. Trobeu una funció sinusoïdal $T = T(t)$ on t és el temps en dies, tal que T tingui periodicitat anual, el valor màxim tingui lloc el 12 de març i valgui 2420, i l'amplitud sigui 174.

I.A.22. Dibuixeu les gràfiques de les funcions següents: $f(x) = |(x-2)(x+3)|$ i $g(x) = |x-3| + |x+2|$.

I.A.23. Calculeu aquests límits:

(a) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1+\log x}{2+x}$, (b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x^2}$, (c) $\lim_{x\to\infty} \log \dfrac{x^2+1}{x^2}$

(d) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\log(x-1)}{\log x}$, (e) $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x-1}\,\exp(-x)$, (f) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x$

(g) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3\,e^{-x}}{1+e^{-x}}$, (h) $\lim_{x\to 0} 12\exp\left(-\dfrac{5}{x^2}\right)$, (i) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{x}\right)^x$.

I.A.24. Utilitzeu el mètode de subdivisió en un full de càlcul i trobeu amb 6 decimals la solució de l'equació

$$x + \log(x) = 0.$$

B. Exercicis d'aplicació

I.B.1. Calculeu l'índex de Shannon de biodiversitat en el cas que hi hagi 10 espècies i que totes siguin igualment abundants.

I.B.2. Calculeu la distància evolutiva entre dues seqüències d'ADN de 300 nucleòtids amb origen comú que es diferencien en 39 nucleòtids, usant el model de Jukes-Cantor.

I.B.3. La probabilitat que un individu visqui més de t unitats de temps s'acostuma a modelar amb la distribució de Weibull[4] (1951):

$$S(t) = \exp\big(-(\lambda t)^\beta\big).$$

Per a una població de *Drosophila melanogaster*, els paràmetres d'aquesta distribució (temps en dies) valen $\lambda = 0.019$, $\beta = 3.41$. Calculeu la mediana de la vida dels individus d'aquesta població, és a dir, l'edat superada pel 50% dels individus.

[4] Aquesta distribució s'utilitza en diversos àmbits. Per exemple, en meteorologia s'utilitza en la distribució de la velocitat del vent o dels màxims de pluja.

I.B.4. A l'estiu, el servei meteorològic informa de la *temperatura de xafogor*, que té en compte la temperatura i la humitat. Una manera de calcular aquesta temperatura és amb l'índex humidex:

$$H = T + 3.4 \exp\left(19.83 - \frac{5418}{R}\right) - 5.5.$$

T és la temperatura en Celsius i R és l'índex de rosada (una mesura de la humitat de l'aire) en Kelvin. Si la temperatura és de 35 graus i l'índex humidex val 42 graus, quin és l'índex de rosada?

I.B.5. Si la temperatura és de -12 graus i la temperatura de sensació W és de -21 graus, quina és la velocitat del vent? Utilitzeu la fórmula del *wind chill* de la pàgina 16.

I.B.6. Quan s'estudia la biodiversitat en un grup d'illes, s'observa que el nombre d'espècies d'un cert tipus en una illa creix en funció de la mida de l'illa. Si es dibuixa en escala logarítmica la gràfica del nombre d'espècies S en funció de la superfície A, s'obté aproximadament una recta de pendent 0.23. Si en una illa de 8 km^2 s'han comptabilitzat 20 espècies, determineu el nombre d'espècies esperat en una illa de 35 km^2.

I.B.7. La *llei de Hack* és una relació empírica de tipus potencial entre la longitud d'un riu i la superfície de la seva conca. En concret, aquesta llei afirma que la longitud és proporcional a la potència 0.57 de l'àrea de la conca. La Noguera Pallaresa té una longitud de 154 km i la seva conca té una superfície de 2820 km^2. El Cardener té una longitud de 106 km. Apliqueu la llei de Hack per estimar l'àrea de la conca del Cardener (que, en realitat, és de 1415 km^2).

I.B.8. S'ha trobat una relació al·lomètrica entre la massa del cor i la massa corporal en un grup important d'espècies d'aus, de manera que si dibuixem en escala logarítmica la gràfica de la massa del cor (en grams) com a funció de la massa corporal (en kg), obtenim aproximadament una recta. S'ha vist que si una espècie A té una massa corporal 10 vegades superior a la d'una altra espècie B, la massa del cor de l'espècie A és 8 vegades més gran que la massa del cor de l'espècie B. Quin és el pendent de la recta que hem obtingut?

I.B.9. El temps de desenvolupament dels ous del zooplàncton *Daphnia longispina* depèn de la temperatura: tres dies a 20 graus i 20 dies a 5 graus. S'han pres diverses mostres i s'ha representat en una escala logarítmica el temps de desenvolupament dels ous (en dies) en funció de la temperatura, i les observacions es disposen aproximadament sobre una recta. Escriviu una funció que relacioni el temps de desenvolupament dels ous t i la temperatura T per aquesta espècie.

I.B.10. En una mostra de 60 espècies d'arbre s'ha trobat una relació entre la densitat de la fusta i la seva resistència. S'ha observat que la densitat és proporcional a la potència 0.82 de la resistència. Quin augment de la densitat correspon a un augment del 10% en la resistència?

I.B.11. A l'article *Allometric scaling of plant life history* (Proc. Nat. Acad. Sci. USA 2007) es troba una relació al·lomètrica entre la vida mitjana d'una espècie vegetal i la

seva massa. Si dibuixem en escala logarítmica la gràfica de la vida mitjana (en dies) com a funció de la massa (en grams), obtenim aproximadament una recta de pendent 0.21. Si una espècie A té una massa 10 vegades superior a la d'una altra espècie B, quina relació podem esperar entre la vida mitjana de l'espècie A i la vida mitjana de l'espècie B?

I.B.12. Suposem que una determinada població segueix una llei de creixement com aquesta:

$$N(t) = \frac{500t}{3+t}.$$

Determineu la mida límit de la població. Feu el mateix per a una població que segueix un creixement segons la llei

$$M(t) = \frac{100}{1+9\exp(-t)}.$$

I.B.13. Determineu la mida límit d'una població que segueix una llei de creixement donada per una funció de Holling de tipus III. Feu el mateix per a una funció de Holling de tipus IV.

I.B.14. S'ha trobat una relació empírica entre l'edat t d'uns determinats arbres i la seva alçada h, donada per la funció $h(t) = 132\exp(-20/t)$ (en unes certes unitats). Determineu l'alçada límit d'aquests arbres.

I.B.15. Hall (*Ecology* Vol. 45, No. 1 (Jan., 1964), pp. 94–112) va estudiar el creixement de la població de les espècies de zooplàncton *Daphnia galeata mendota* a Base Line Lake, Michigan. A finals de la primavera, es produïa un creixement exponencial en el qual la població passava de 200 a 4000 (individus per 100 litres d'aigua) en 40 dies. Determineu la població 10 dies després del valor 200.

I.B.16. Es disposa de 70 anys de dades sobre la població al Canadà d'una certa espècie de cigonya migratòria (*Grus americana*) i s'ha vist que en aquest temps hi ha hagut un creixement exponencial amb una taxa de creixement del 4.5% anual. Si la població el 1950 era de 40 individus, quina és la població després de 60 anys?

I.B.17. En els darrers 100 anys, la producció mundial de coure ha crescut exponencialment. Si la producció el 1940 era de 2 (milions de tones per any) i el 1990 era de 10, feu una estimació de la producció l'any 2020 (si segueix la mateixa tendència).

I.B.18. S'ha estudiat força la descomposició de la fusta dels arbres morts als boscos tropicals i s'han trobat relacions de tipus exponencial entre el temps que ha passat des de la mort de l'arbre i la proporció de fusta que encara queda. En una determinada espècie, s'ha vist que la massa de fusta es redueix a la meitat en 7.3 anys. Si partim d'una tona de fusta, quanta fusta hi haurà després de 25 anys?

I.B.19. El pH d'una dissolució és una mesura de la concentració del catió H_3O^+, expressada en escala logarítmica, de manera que, per exemple, en una dissolució amb

$pH = 6$, aquesta concentració és 10 vegades més gran que en una dissolució amb $pH = 7$. Quina relació hi ha entre la concentració de H_3O^+ a un suc de llimona de $pH = 2.3$ i la d'un vinagre amb $pH = 3$?

I.B.20. A l'escala cromàtica moderna, si la freqüència del Fa és de 349.228 Hz, calculeu les freqüències del Mi i del Sol. (Recordeu que en aquesta escala, una octava es divideix en 12 parts iguals anomenades semitons. Aleshores, el Mi és un semitò més greu que el Fa i el Fa és dos semitons més greu que el Sol.)

I.B.21. Una fórmula simplificada que s'utilitza per calcular la velocitat del vent v a una alçada z a partir de la velocitat v_r a una alçada de referència z_r és aquesta:

$$\frac{v}{v_r} = \left(\frac{z}{z_r}\right)^{0.143}.$$

Fem observacions en una zona de terreny on hi ha d'anar un parc eòlic i mesurem el vent a 10 metres d'alçada. Per quin factor haurem de multiplicar aquests valors per tenir la velocitat del vent a l'alçada de les turbines dels generadors, que és de 50 metres?

I.B.22. La lluminositat d'un objectiu fotogràfic es mesura pel seu «nombre f» que es defineix com el quocient de la distància focal i el diàmetre màxim del diafragma. Un *punt* de lluminositat (en anglès: un *«stop»*) és el canvi de nombre f que multiplica per 2 la quantitat de llum que entra per l'objectiu. Si tenim un objectiu amb $f = 2$, quin és el nombre f dels objectius que tenen 1, 2, 3 punts menys de lluminositat? Quants punts de diferència hi ha entre un objectiu $f = 3.3$ i un objectiu $f = 6.1$?

I.B.23. Tenim dues poblacions A i B que comencen tenint la mateixa mida. A creix contínuament amb una taxa del 12% anual i B creix contínuament un 12% cada any. Quant de temps ha de passar fins que la població de A sigui el doble que la població de B?

I.B.24. En determinats productes, hi pot haver una discrepància important entre el preu de mercat P i el valor V del producte en funció de la seva qualitat. En aquests casos, si som capaços de mesurar V, podem prendre el quocient V/P com una mesura de la relació qualitat-preu. Observem que el quocient V/P varia entre 0 i ∞. Un valor aprop de zero indica un producte amb mala relació qualitat/preu i un valor molt gran indica un producte amb molt bona relació qualitat/preu. Ens agradaria, però, mesurar aquest concepte amb un índex I que variés entre 0 i 10, de manera que el valor $I = 5$ correspongués al cas $V = P$. Com ho podem fer?

I.B.25. En un examen de llarga durada es demana que els participants resolguin successivament una sèrie il·limitada d'exercicis. Com ho faríeu per avaluar aquest examen?

I.B.26. Volem aproximar la temperatura T de la superfície de l'aigua del llac de Banyoles al llarg de l'any mitjançant una funció sinusoïdal. Prenem com a unitat de temps t la setmana. A partir de les dades publicades per les estacions meteorològiques de l'Estartit i de Torroella de Montgrí, observem que la temperatura mitjana l'any 2016 va ser de 17.9° C i que la temperatura màxima aquell mateix any va ser de

27.2° C i es va produir a la darrera setmana de juliol. Doneu una fórmula per a la funció $T = T(t)$.

I.B.27. Utilitzeu un full de càlcul per fer 150 iteracions d'aquests models discrets i representeu-les gràficament:

(a) Model logístic

$$N_{t+1} = rN_t(1 - N_t). \qquad N_0 = 0.2;\ r = 0.3,\ 1.6,\ 2.8,\ 3.4,\ 3.45,\ 3.6.$$

(b) Model de Beverton-Holt

$$N_{t+1} = \frac{1.05N_t}{1 + 0.0025N_t/20}. \qquad N_0 = 5.$$

(c) Model de Ricker

$$N_{t+1} = N_t \exp(0.05(1 - N_t/20)). \qquad N_0 = 5.$$

Part II:

La derivada

12. La derivada: què és i com es pot calcular

El **concepte de derivada** d'una funció ja el vam introduir en el capítol 9. Recordem-ho. Si $y = f(x)$ és una funció i x_0 és un valor concret de la variable independent x, la derivada de la funció a x_0 és la velocitat amb que creix y quan $x = x_0$. Aquest valor l'expressàvem amb les notacions

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \frac{dy}{dx}\Big|_{x_0}.$$

Evidentment, aquesta derivada és un **nombre**, però si fem variar x_0, obtenim una nova funció, la **funció derivada**.

No cal dir que aquest concepte és importantíssim i, per tant, ens interessa molt

- donar una definició matemàtica precisa d'aquest concepte i
- trobar maneres de calcular les derivades de les funcions elementals.

Això és el que farem en aquest capítol.

12.1 La derivada com a límit

La idea és molt simple: suposem que $x = x_0$. La funció pren el valor $f(x_0)$. Si ara canviem el valor de x i passem a $x_0 + h$, la funció canviarà el seu valor fins a $f(x_0 + h)$. És a dir, un canvi de valor h a la variable x ha donat un canvi de valor $f(x_0 + h) - f(x_0)$ a la variable dependent y. Si ara volem calcular la velocitat de canvi hem de prendre el quocient

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

És clar que aquest quocient ens dóna la velocitat de canvi quan passem de x_0 a $x_0 + h$. Però aquesta és una velocitat **mitjana** perquè, entre x_0 i $x_0 + h$ la funció pot créixer a velocitats variables. Si volem la velocitat **instantània** en el valor $x = x_0$ hem de prendre h molt petit o, dit més ben dit, hem de prendre el límit quan $h \to 0$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Exemple. A quina velocitat creix la funció $y = x^2$ quan $x = 1$?

Segons el que acabem de dir,

$$y'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{(1 + h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \left(2 + \frac{1}{h}\right) = 2.$$

És a dir, quan $x = 1$, la funció val 1 i està creixent a velocitat 2.

Exemple. Si un cos que està en repòs a una alçada z_0 comença a caure per acció de la gravetat, la seva alçada en cada instant serà una funció de t

$$z(t) = h_0 - \frac{g}{2}\, t^2.$$

A quina velocitat està caient?

És una petita generalització de l'exercici anterior:

$$z'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{h_0 - (g/2)(t+h)^2 - (h_0 - (g/2)t^2)}{h} = -gt.$$

És a dir, a cada instant t, l'alçada del cos està disminuint a una velocitat igual a gt.

Exemple. Hem modelat el rendiment R d'un conreu en funció de la presència d'un cert nutrient S al sòl, segons una funció de Monod

$$R = \frac{\mu S}{k+S}.$$

Determineu la velocitat de creixement de R en funció de S.

Hem de calcular un límit que no és difícil:

$$R' = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\mu(S+h)}{k+S+h} - \dfrac{\mu S}{k+S}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mu hk}{h(k+S+h)(k+S)} = \frac{\mu k}{(k+S)^2}.$$

Interpretem aquest resultat. Suposem que R es mesura en tones per ha i S representa la quantitat de nitrogen present al sòl, en kg/ha. Aleshores, R' s'expressaria en «tones per ha per kg de nitrogen per ha».

Exemple. Si una quantitat creix exponencialment segons $N = e^t$, a quina velocitat creix en cada moment?

Hem de calcular la derivada de la funció e^t:

$$\frac{d}{dt}(e^t) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{t+h} - e^t}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^t(e^h - 1)}{h} = e^t \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^t.$$

Aquí hem aplicat un límit que havíem estudiat anteriorment i arribem a la conclusió que, en el creixement exponencial, la velocitat també té creixement exponencial. Dit en unes altres paraules, la derivada de la funció exponencial e^x és ella mateixa.

Com que la derivada és un límit i sabem que una funció pot no tenir límit, deduïm que hi pot haver funcions que no tinguin derivada en algun punt. Direm que **no són derivables**. Per exemple:

- Si una funció té una discontinuïtat en un punt, és clar que en aquest punt no podem parlar de velocitat de canvi de la funció. Per exemple, la funció part entera $\lfloor x \rfloor$ no es pot derivar en els punts enters, perquè la funció és discontínua en aquests punts.

- Si una funció fa un «angle» en un punt, també és clar que en aquest punt no podrem parlar de derivada. Per exemple, la funció valor absolut $|x|$ decreix a velocitat 1 en els $x < 0$ i creix a velocitat 1 en els $x > 0$. Al punt $x = 0$ la funció fa un angle i no hi pot haver derivada.
- Si la gràfica d'una funció és vertical en un punt, la velocitat de creixement en aquest punt «seria infinita» i podríem dir que la derivada val ∞ o, millor, que en aquest punt no hi ha derivada. Per exemple, la funció $\sqrt{x}$ té aquesta propietat quan $x = 0$.

Exemple. La funció $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no té derivada a $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty.$$

12.2 Interpretació geomètrica

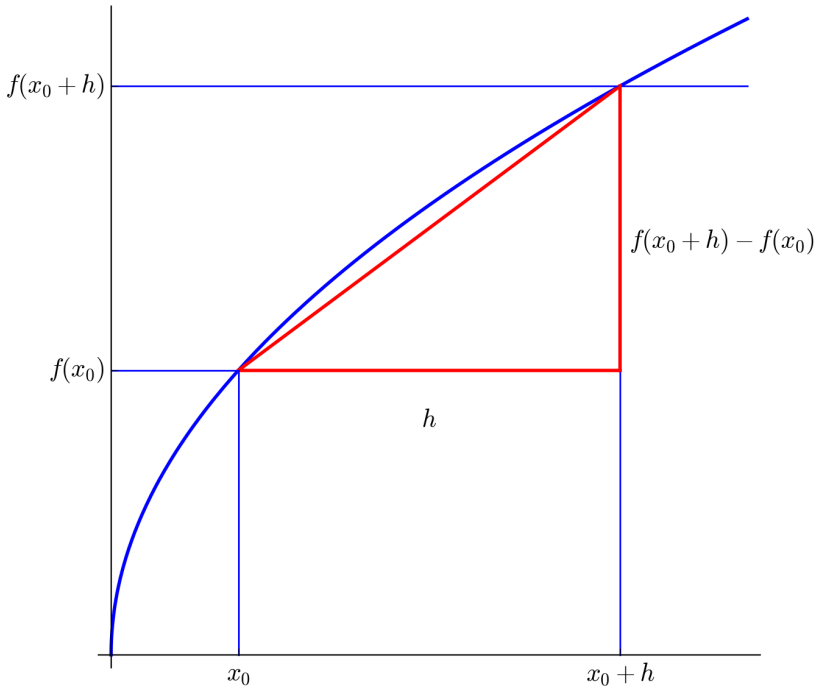
Si representem gràficament uns funció $y = f(x)$ i representem gràficament el quocient

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

es fa evident la següent propietat fonamental:

> **La derivada $f'(x_0)$ és igual al pendent de la recta tangent a la gràfica de la funció $y = f(x)$ que passa pel punt de coordenades $(x_0, f(x_0))$.**

Per tant, si coneixem la derivada d'una funció en un punt podem escriure immediatament l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquest punt.



Exemple. Calculeu l'equació de la recta tangent a la paràbola $y = x^2$ al punt $x = 1$.

Abans hem vist que la derivada val $y' = 2$. Per tant, només cal escriure l'equació de la recta de pendent 2 que passa pel punt $(1, 1)$. És aquesta: $y = 2x - 1$.

Exemple. Determineu l'equació de la recta tangent a la funció de Monod $y = 3x/(2+x)$ en el punt $x = 2$.

Segons hem vist abans, la derivada d'aquesta funció de Monod és $y' = 6/(2+x)^2 = 3/8$. Aleshores, la recta tangent té pendent $3/8$ i passa pel punt $(2, 3/2)$. És la recta $3x - 8y + 6 = 0$.

12.3 Algunes propietats elementals

- **Funcions constants.** Evidentment, la derivada d'una funció constant és **zero**. Recíprocament, si la derivada d'una funció definida en un interval és zero, això vol dir que la velocitat de creixement és zero i, per tant, la funció ha de ser constant en aquest interval.

- **Suma de funcions.** És senzill adonar-se que

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

  és a dir, la derivada d'una suma de funcions és la suma de les seves derivades. També, si multipliquem una funció per una constant k, la seva derivada queda multiplicada per aquesta mateixa constant:

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

- **Funcions amb la mateixa derivada.** Pot passar que dues funcions diferents tinguin la mateixa derivada? Certament que sí:

$$(f(x) + k)' = f'(x).$$

  Si sumem una constant a una funció, la seva derivada no canvia. D'altra banda, si dues funcions $f(x)$ i $g(x)$ (definides en un mateix interval) tenen la mateixa derivada, aleshores

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x) = 0$$

  i deduïm que les dues funcions difereixen en una constant

$$f(x) = g(x) + k.$$

- **Funcions lineals.** És clar que, com que la gràfica d'una funció lineal coincideix amb la seva recta tangent, la derivada d'una funció lineal $y = mx + b$ és igual a m. Utilitzant la definició de la derivada com a un límit arribaríem a la mateixa conclusió.

- **Polinomis i funcions potencials.** Pel mateix mètode que hem usat abans per calcular la derivada de la funció x^2 podem calcular la derivada de les funcions x^n per qualsevol n:

$$\frac{d}{dx}\, x^n = n\, x^{n-1}.$$

  Aquesta fórmula també és vàlida per a exponents negatius i, en general, per a qualsevol exponent real. En particular,

$$\frac{d}{dx}\, \sqrt{x} = \frac{d}{dx}\, x^{1/2} = \frac{1}{2}\, x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

- **Derivades successives.** La derivada d'una funció és una altra funció que també pot ser que sigui derivable. Si derivem la derivada obtenim el que s'anomena la **segona derivada**. Podem procedir successivament amb la derivada tercera, quarta, etc. La notació que s'utilitza és aquesta:

$$f''(x) = \frac{d^2x}{dx^2}; \qquad f'''(x) = \frac{d^3x}{dx^3}; \qquad \text{etc.}$$

  El significat de cadascuna d'aquestes derivades és clar: la derivada segona ens indica la velocitat a que canvia la derivada primera. En diem l'**acceleració** de la funció. La derivada tercera ens indica la velocitat a que canvia la derivada segona, o l'acceleració de la derivada primera, etc.

12.4 Equacions diferencials

Una equació diferencial és una equació tal que

- La incògnita és una funció desconeguda $f(x)$.
- A l'equació hi apareixen la variable x, la funció incògnita $f(x)$ i les seves derivades.

Per exemple, $y = y'$ és una equació diferencial i una solució d'aquesta equació és una funció que coincideixi amb la seva derivada. Ja coneixem una funció que té aquesta propietat: la funció exponencial $y = e^x$. N'hi pot haver d'altres? Sí, per a qualsevol constant k, la funció $y = ke^x$ és una solució de l'equació diferencial anterior.

Recordem que havíem definit el creixement exponencial com aquell en què la taxa de creixement és constant:

$$\frac{y'}{y} = r.$$

Això és una equació diferencial i vam veure que les solucions d'aquesta equació diferencial són les funcions exponencials $y = ke^{rx}$.

El creixement logístic també el vam definir a partir d'una equació diferencial:

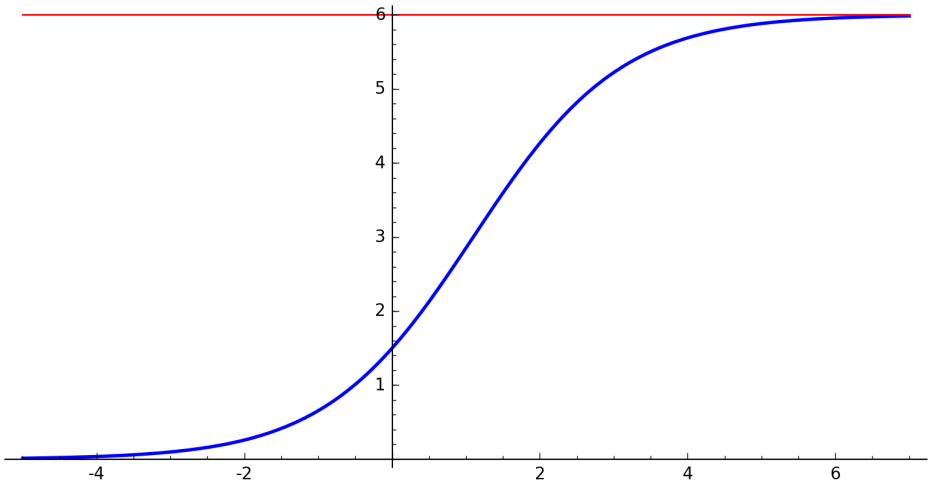
$$\frac{y'}{y} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

però aquí no vam ser capaços de trobar les solucions d'aquesta equació. Ho farem més endavant. De moment, limitem-nos a donar la solució sense explicar com l'hem trobada. La solució és l'anomenada **corba logística**, que té aquesta equació:

$$y(x) = \frac{K}{1 + k\exp(-rx)}.$$

Aquí k és una constant arbitrària. Encara que no sapiguem com trobar aquesta solució, el que sí que és senzill de fer és comprovar que aquesta funció és una solució.

Si dibuixem aquesta corba per $K = 6$, $k = 3$, $r = 1$, obtenim



Entre les propietats d'aquesta corba logística tenim

$$\lim_{x\to\infty} y = K; \qquad \lim_{x\to-\infty} y = 0.$$

12.5 Fem-ho amb sage

sage pot calcular, sovint, les derivades de funcions definides simbòlicament. Si $f(x)$ és una funció que haguem definit, podem utilitzar la sintaxi `diff(f(x),x)` o bé la sintaxi `f.diff()`.

```
sage: f(x)=(arctan(x))^2+sqrt(x)
sage: f.diff()
 x |-> 2*(1/(x^2 + 1))*arctan(x) + 1/2/sqrt(x)
sage: f.diff()(x)
 2*(1/(x^2 + 1))*arctan(x) + 1/2/sqrt(x)
sage: f.diff()(6)
 1/12*sqrt(6) + 2/37*arctan(6)
sage: g(x)=sqrt(e^x*log(1/x))
sage: view(diff(g(x),x))
```

$$\frac{e^x \log\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{e^x}{x}}{2\sqrt{e^x \log\left(\frac{1}{x}\right)}}$$

13. Creixement del producte de dos factors

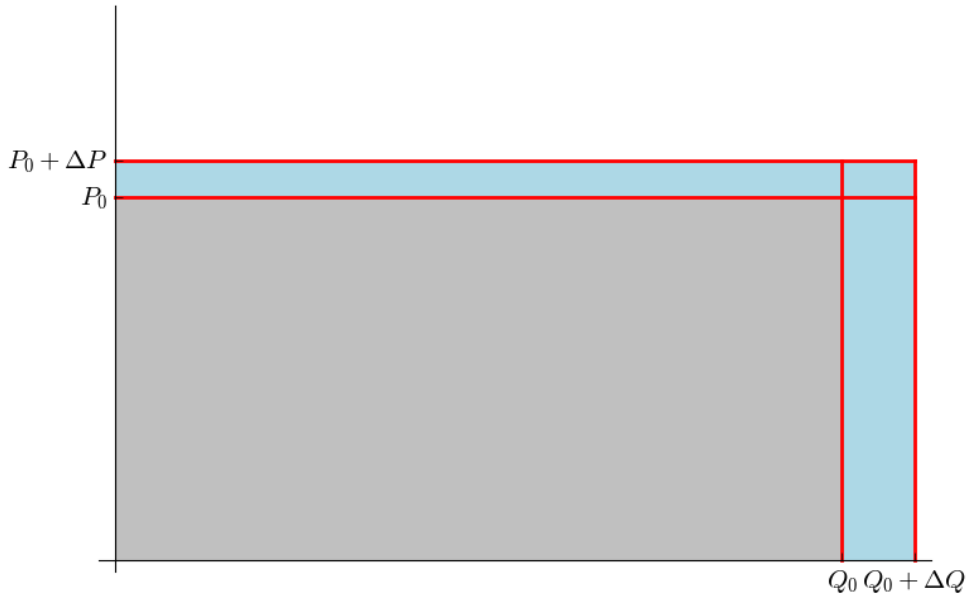
13.1 Derivada del producte de dues funcions

S'estima que l'any 2002, la *petjada carbònica*[1] per capita de la Xina estava creixent a un ritme de 0.25 tones per any^2 i la població estava creixent a una taxa del 0.6% anual. Ens preguntem quina era la taxa de creixement de la petjada carbònica global de la Xina. Designem per C aquesta petjada carbònica, mesurada en tones de CO_2 equivalent. Designem per P la població de la Xina i per Q la petjada per capita. Evidentment, tenim

$$C = Q \times P$$

i el problema consisteix en determinar la taxa de creixement o la velocitat de creixement de C si sabem que Q creix a una velocitat de 0.25 tones per any^2 i P creix al 0.6% anual.

Ens adonem fàcilment que la resposta a aquest problema no la podem obtenir a partir de cap combinació dels dos nombres 0.25 i 0.006. La millor manera d'entendre aquest problema és representar-lo gràficament. Si representem la variable Q a l'eix horitzontal i la variable P a l'eix vertical, aleshores C vindrà representat per la superfície d'un rectangle.



Si Q_0 i P_0 són els valors de les variables en el temps de referència (any 2002 en el nostre exemple), aleshores la superfície del rectangle gris representa el valor de C

[1] Consulteu `carbonfootprintofnations.com`.

en el temps de referència. Si Q_0 creix fins $Q_0 + \Delta Q$ i P_0 creix fins $P_0 + \Delta P$, aleshores el rectangle gris que representa C_0 creix perquè se li afegeix la regió blava. Aquesta regió blava representa, doncs, l'increment de C, que podem anomenar ΔC. És evident que aquesta regió blava està formada per tres rectangles i la seva superfície és

$$\Delta C = Q_0 \Delta P + P_0 \Delta Q + \Delta P \Delta Q.$$

Si ara volem determinar la velocitat de creixement de QP hem de dividir pel temps que ha transcorregut, diguem-n'hi Δt

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} = Q_0 \frac{\Delta P}{\Delta t} + P_0 \frac{\Delta Q}{\Delta t} + \Delta P \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

i ara hem de prendre Δt molt petit o, més exactament, hem de fer tendir $\Delta t \to 0$. L'últim sumand tendeix a zero i apareixen les derivades:

$$\frac{dC}{dt} = Q_0 \frac{dP}{dt} + P_0 \frac{dQ}{dt}.$$

Aquesta fórmula ens diu, doncs, com hem de calcular la **derivada d'un producte de dues funcions**. També la podem escriure així

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

13.2 Exemples

Exemple 1. Comencem amb un exemple elemental. Calculem la derivada de la funció

$$f(x) = x^2 \exp(x).$$

Sabem que la derivada de la funció x^2 és la funció $2x$ i que la derivada de la funció e^x és ella mateixa. Per tant,

$$\frac{d}{dx}(x^2 e^x) = x^2 \frac{d}{dx} e^x + \left(\frac{d}{dx} x^2\right) e^x = x^2 e^x + 2x e^x.$$

Exemple 2. Resolem ara el problema inicial sobre la petjada carbònica a la Xina. Ens pregunten sobre el creixement de C, és a dir, sobre la derivada de la funció C respecte del temps. Pel que acabem de dir:

$$\frac{d}{dt} C = \frac{d}{dt}(QP) = Q_0 \frac{dP}{dt} + P_0 \frac{dQ}{dt}.$$

Veiem que no podem calcular el que ens demanen si no ens donen informació complementària. Necessitem conèixer els valors de Q_0 o P_0. La població estimada l'any 2002 era de $P_0 = 1280$ milions de persones. La petjada carbònica per capita estimada el 2002 era $Q_0 = 2.5$ tones per habitant i per any. El creixement de Q de 0.25 tones per any^2 ens diu que $Q' = 0.25$ i un creixement de P del 0.6% anual equival a $P' = 7.68$. Per tant,

$$C' = 2.5 \times 7.68 + 1280 \times 0.25 = 339.2.$$

Si volem expressar això en tant per cent, hem de dividir per $C_0 = 2.5 \times 1280 = 3200$ milions de tones per any. El resultat final és que la petjada carbònica total de la Xina creixia al 10.6% anual.

Exemple 3. L'absorció de CO_2 als boscos del Brasil és molt important per a la climatologia del nostre planeta. Es calcula que al Brasil hi ha uns 500 milions d'hectàrees de boscos que absorbeixen unes 15.5 tones de CO_2 per ha i any. Però la desforestació fa que el Brasil perdi superfície forestal a un ritme de 1.6 milions d'ha per any. A més, s'ha observat que la presència d'espècies invasores i l'escalfament global fan disminuir la capacitat d'absorció de CO_2 dels arbres a un ritme del 0.5% cada any. Globalment, doncs, la quantitat de CO_2 que és absorbida pels boscos del Brasil està disminuint. A quin ritme?

Escrivim aquesta equació

$$A = S \times E$$

on A és la capacitat d'absorció dels boscos del Brasil en tones per any; S és la superfície de bosc en ha i E és l'eficiència del bosc, en tones per ha i per any. Totes aquestes variables són funció del temps t. Si fixem $t = 0$ en el moment present, l'enunciat ens diu que

$$\begin{aligned}
&S(0) = 500 \times 10^6 \text{ ha};\\
&E(0) = 15.5 \text{ tones/ha}\times\text{any};\\
&S'(0) = -1.6 \times 10^6 \text{ ha/any};\\
&E'(0) = -0.0775 \text{ tones/ha}\times\text{any}^2.
\end{aligned}$$

Aleshores, aplicant la regla de la derivada d'un producte:

$$\begin{aligned}
A'(0) &= S(0) \times E'(0) + S'(0) \times E(0)\\
&= 500 \times 10^6 \times (-0.0775) - 1.6 \times 10^6 \times 15.5\\
&= -63.55 \times 10^6 \text{ tones/any}^2.
\end{aligned}$$

13.3 Derivada del quocient de dues funcions

Si derivem els dos costats d'aquesta identitat

$$f(x)\left(\frac{1}{f(x)}\right) = 1$$

obtenim una fórmula per a la derivada de la funció $1/f(x)$ (vàlida, evidentment, només per als punts x tals que $f(x) \neq 0$):

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)} = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}.$$

Ara ja és senzill obtenir una fórmula per a la derivada del quocient de dues funcions:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Exemple 4. Als estudis sobre la pesca es consideren els conceptes de «estoc» S i «reclutament» R. El primer indica la part de la població de peixos (d'una determinada espècie) que són susceptibles de ser capturats i el segon indica la quantitat de peixos que s'incorporen a l'estoc, sigui perquè atenyen la mida necessària, sigui perquè entren a la zona de captures. El model més senzill que relaciona aquestes dues variables és el de Beverton-Holt de 1957 que utilitza una funció de Monod

$$R = \frac{\alpha S}{\beta + S}.$$

Calculeu a quina velocitat està creixent R quan $S = \beta$.

Ens estan preguntant la derivada R' per al valor $S = \beta$. Utilitzem la fórmula de la derivada d'un quocient

$$R' = \frac{\alpha\beta}{(\beta + S)^2} = \frac{\alpha}{4\beta}.$$

Exemple 5. Imaginem que la corba de demanda per a un determinat producte s'aproxima a $D = k/P$. A quina velocitat baixa la demanda quan $P = k/2$?

Calculem la derivada

$$\frac{dD}{dP} = -\frac{k}{P^2} = -\frac{4}{k}.$$

Interpretem aquest resultat. Suposem que la demanda D s'expressa en milers d'unitats per dia i que el preu P s'expressa en euros. Aleshores, dD/dP s'expressa en unitats per dia per euro i ens indica com creix la demanda per cada euro d'augment en el preu. Evidentment, la derivada és negativa perquè la demanda decreix quan augmenta el preu.

14. Funcions de funcions de funcions de...

14.1 Quan una variable depèn d'una altra i aquesta depèn d'una tercera

Sovint, una variable y és funció d'una altra variable $y = y(x)$ i aquesta variable x també és funció d'una tercera variable $x = x(t)$. En aquests casos, ens pot interessar conèixer el creixement de y en funció de t, és a dir, la derivada $\dfrac{dy}{dt}$. Considerem aquests exemples:

- La producció P d'un camp és funció de la quantitat de nitrogen al sòl $P = P(N)$ i la quantitat de nitrogen al sòl és funció de la quantitat d'adob que aportem al camp $N = N(P)$. Com creix P si fem créixer A?
- Una espècie invasora (o una malaltia) apareix en un punt d'una massa vegetal i s'estén en totes direccions a una certa velocitat. A quina velocitat creix la superfície afectada?
- L'aire es refreda quan s'expandeix. A quin ritme baixa la temperatura quan el volum augmenta a una certa velocitat?
- Quina relació hi ha entre la velocitat amb què creix l'alçada d'un arbre i la velocitat amb què creix el diàmetre del seu tronc?
- Si la derivada de la funció e^x és e^x i la derivada de la funció $\sin x$ és $\cos x$, què podem deduir sobre la derivada de la funció $e^{\sin x}$?

Tots aquests problemes tenen en comú que volem calcular la derivada d'una funció d'una variable, quan aquesta variable és també funció d'una segona variable. Per exemple, en el cas de la producció d'un camp tenim $P = P(N(A))$ i volem calcular la velocitat amb què varia P en funció de la variació de A:

$$P = P(N(A)), \qquad \frac{dP}{dA} = ?$$

La resposta es troba en la que es coneix com la **regla de la cadena**:

$$\text{Si } y = y(x) \text{ i } x = x(t), \text{ aleshores } \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

El nom prové de que la fórmula es pot estendre il·limitadament al cas en que $t = t(u)$, $u = u(z)$, etc.:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{du} \cdot \frac{du}{dz}.$$

14.2 Composició de funcions i la regla de la cadena

Ja sabem que hi ha una operació fonamental que podem fer amb funcions que és la *composició* de funcions. La regla de la cadena ens diu com podem calcular la derivada de la composició de dues funcions $f(g(x))$:

$$(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Si això ho escrivim en l'altra notació més clàssica, tenim

$$y = f(x),\ x = g(t); \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

i escrit d'aquesta manera, la regla sembla plausible.

Exemples

- La derivada de $\log x$ és $1/x$ i la derivada de $\sin x$ és $\cos x$. Per tant,

$$\frac{d}{dx} \log \sin x = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \sin \log x = (\cos \log x) \cdot \frac{1}{x}$$

- La derivada de e^x és e^x i la derivada de $\sin x$ és $\cos x$. Per tant,

$$\frac{d}{dx} e^{\sin x} = e^{\sin x} \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \sin e^x = (\cos e^x)\, e^x$$

- Les «cadenes» poden ser tan llargues com calgui:

$$\frac{d}{dx} \sin^3(2x^4 - 3x + 1)^{-1/3} =$$

$$3 \sin^2(2x^4 - 3x + 1)^{-1/3} \cos(2x^4 - 3x + 1)^{-1/3} \left(-\frac{1}{3}\right) (2x^4 - 3x + 1)^{-4/3}(8x^3 - 3).$$

14.3 Resolem els problemes del primer apartat

Apliquem ara la regla de la cadena als problemes que apareixen a l'inici de la lliçó.

- **Com creix la producció d'un camp amb l'addició d'adob?** P és la producció del camp, N és la quantitat de nitrogen al sòl i A és la quantitat d'adob que aboquem al camp. Podem escriure $P = P(N(A))$ i volem determinar com canvia P en funció de A. La regla de la cadena ens diu que

$$\frac{dP}{dA} = \frac{dP}{dN} \cdot \frac{dN}{dA}.$$

  Per poder obtenir resultats concrets hem de fer hipòtesis sobre les funcions $P(N)$ i $N(A)$.

– Una hipòtesi molt natural és que el contingut en nitrogen al sòl sigui una funció **lineal** de la quantitat d'adob que utilitzem:

$$N(A) = kA + r$$

on r és el nitrogen present al sòl sense addició d'adob i kA és la quantitat de nitrogen aportat per l'adob que, naturalment, serà una quantitat proporcional a la quantitat d'adob.

– La producció P com a funció de la presència de nitrogen podria modelar-se per una **funció de Monod**:

$$P = \frac{aN}{k+N}$$

on a és el límit de P quan N tendeix a infinit.

Amb aquestes hipòtesis, tindríem

$$\frac{dP}{dA} = \frac{dP}{dN} \cdot \frac{dN}{dA} = \frac{ak}{(k+N)^2}.$$

- **Com creix la superfície afectada?** Si l'espècie invasora s'expandeix en totes direccions a una velocitat v, la superfície afectada S serà aproximadament un disc de radi r i aquest radi creixerà a velocitat v. Per tant

$$S = \pi r^2,\ r' = v; \qquad S' = 2\pi r\, r' = 2\pi r\, v.$$

Aquest problema també té una versió tridimensional. Imaginem, per exemple, una substància contaminant que, a partir d'un punt a l'interior d'una massa d'aigua s'expandeix uniformement en totes direccions a una velocitat v. Aplicant la fórmula del volum de l'esfera, obtindríem que la velocitat amb què creix el volum afectat seria:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,\ r' = v; \qquad V' = 4\pi r^2\, r' = 4\pi r^2\, v.$$

- **A quina velocitat es refreda l'aire?** Per contestar aquesta pregunta hem de conèixer una mica de física de l'aire. Si consultem els articles *«Heat capacity ratio»* i *«Adiabatic process»* a Wikipedia, veurem que la fórmula que relaciona la temperatura i el volum d'una massa de gas, en les circumstàncies que ens interessen (és a dir, en circumstàncies «adiabàtiques», quan no hi ha transferència de calor ni de massa), és

$$TV^{\gamma-1} = k$$

on k és constant i el paràmetre γ val, en el cas de l'aire sec, $\gamma = 1.4$. Per tant, tenim

$$T = kV^{-0.4}.$$

Volem determinar la velocitat de canvi de la temperatura quan el volum canvia a una certa velocitat. Aplicant la regla de la cadena, si denotem per t el temps, tenim:

$$\frac{dT}{dt} = -0.4\, kV^{-1.4}\frac{dV}{dt} = -0.4\,\frac{T}{V}\,\frac{dV}{dt}.$$

El signe negatiu ens indica que quan el volum augmenta, la temperatura disminueix (l'aire es refreda quan s'expandeix) i la fórmula ens dóna la relació exacta entre les dues velocitats.

- **Quina relació hi ha entre els creixements en alçada i en diàmetre en un arbre?** Com que és un tema de gran importància a la ciència forestal, hi ha molts estudis al·lomètrics sobre la relació entre alçada H i diàmetre D en els arbres. Aquestes relacions s'utilitzen, per exemple, per estimar la massa d'un arbre a partir del gruix del tronc a una determinada alçada del terra. Una d'aquestes relacions és

$$H = 3.24\, D^{0.613}$$

que va ser obtinguda per Forstreuter el 1999 per al faig (*Fagus Sylvatica*).[1] H és l'alçada en metres i D és el diàmetre del tronc en cm, a 1.37 metres d'alçada sobre el sòl.

Si ara ens preguntem com es relaciona el creixement de H amb el de D, tenim:

$$\frac{dH}{dt} = 1.986\, D^{-0.387}\, \frac{dD}{dt}$$

i, si ens interessa la relació entre les taxes de creixement, tenim

$$\frac{1}{H}\frac{dH}{dt} = 0.613\, \frac{1}{D}\frac{dD}{dt}.$$

14.4 Derivació implícita

Fins ara hem derivat funcions que estan expressades de forma «explícita» $y = f(x)$. Una de les aplicacions de la regla de la cadena és que ens permet calcular derivades sense necessitat d'expressar la funció en forma explícita.

Per exemple, considerem $x^2 + y^2 = 4$ (que és una circumferència de radi 2 centrada a l'origen) i suposem que volem calcular la derivada de y respecte de x. Ho podem fer sense necessitat d'expressar y com a funció de x de forma explícita. Simplement, derivem la relació anterior, aplicant la regla de la cadena:

$$x^2 + y^2 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad 2x + 2yy' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = -\frac{x}{y}.$$

Exemple. Calculeu dy/dx sabent que $y^3x^2 - yx + 2y^2 = x$. Derivant aquesta equació obtenim l'equació

$$3y^2y'x^2 + 2y^3x - y'x - y + 4yy' = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y' = \frac{1 - 2y^3x + y}{3y^2x^2 - x + 4y}.$$

14.5 Derivada de la inversa d'una funció

Una altra conseqüència de la regla de la cadena és que si coneixem la derivada d'una funció, podem calcular la derivada de la seva inversa.

[1] Vegeu *Allometric Relationships of Selected European Tree Species*, institute for Environment and Sustainability, 2003.

Exemple. Sabem que la derivada de la funció e^x és e^x. La inversa de la funció exponencial és la funció log. Aleshores,

$$\exp(\log(x)) = x \;\Rightarrow\; \exp(\log(x))(\log(x))' = 1 \;\Rightarrow\; (\log(x))' = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}.$$

14.6 Derivades de totes les funcions elementals

Amb el que hem après fins ara ja podem calcular la derivada de qualsevol funció que s'expressi a partir de les funcions elementals, utilitzant sumes, productes, quocients i composicions. Cal recordar això:

- $\frac{d}{dx}(\text{const.}) = 0$
- $(f+g)' = f' + g'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$
- $(f(g))' = f'(g)\,g'$
- $\frac{d}{dx}\,x^r = rx^{r-1}$
- $\frac{d}{dx}\,e^x = e^x$
- $\frac{d}{dx}\,a^x = a^x \log a$
- $\frac{d}{dx}\,\log x = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx}\,\log_a x = \frac{1}{x \log a}$
- $\frac{d}{dx}\,\sin x = \cos x$
- $\frac{d}{dx}\,\cos x = -\sin x$
- $\frac{d}{dx}\,\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}\,\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}\,\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$

14.7 Fem-ho amb sage

Per calcular amb sage derivades de funcions definides implícitament hem de fer-ho de la manera següent. Suposem que volem calcular y' quan sabem que $x^2 + y^2 = 1$. Hem de començar dient-li a sage que y és una funció de x:

```
sage: y=function('y')(x)
```

A continuació, definim la funció donada per la relació implícita

```
sage: f(x)=x^2+y^2-1
```

i ara podem derivar aquesta funció

```
sage: g(x)=diff(f(x),x)
sage: g(x)
 2*y(x)*D[0](y)(x) + 2*x
```

Finalment, si volem aïllar el valor de y',

```
sage: solve(g(x),diff(y,x))
 [D[0](y)(x) == -x/y(x)]
```

que ens dóna $y' = -x/y$. Fem un altre exemple, extret dels exercicis al final d'aquesta part.

```
sage: y=function('y')(x)
sage: f(x)=x/(x*y+1)-2*x*y
sage: view(solve(f.diff(x),y.diff(x)))
```

$$\left[D[0](y)(x) = -\frac{2x^2y(x)^3 + 4xy(x)^2 + 2y(x) - 1}{2x^3y(x)^2 + 4x^2y(x) + x^2 + 2x}\right].$$

Resolem ara l'exemple de la velocitat a què es refreda l'aire:

```
sage: gamma,t,k=var('gamma,t,k')
sage: V=function('V')(t)
sage: T(t)=k*V^(1-gamma)
sage: view(T.diff(t)(t))
```

$$-(\gamma - 1)kV(t)^{-\gamma} D[0](V)(t).$$

```
sage: view(T(gamma=1.4).diff(t))
```

$$-\frac{0.400000000000000\, D[0](V)(t)}{V(t)^{1.40000000000000}}.$$

15. Aproximació lineal i propagació d'errors

15.1 Aproximació lineal

Les funcions més senzilles són les funcions **lineals**

$$f(x) = mx + b$$

però la realitat és sovint molt més complexa i no ve descrita per una funció d'aquestes. També pot passar que ni tan sols sapiguem quina és la funció exacta que descriu el fenomen que estem estudiant.

La pregunta que ens fem és

> **Si, com a primera aproximació, volem utilitzar una funció lineal per estudiar un fenomen, quina és la millor funció lineal que podem utilitzar?**

Exemples:

- Quina és la velocitat màxima que assolirà una allau de neu en funció de la inclinació del pendent? És una pregunta molt difícil, sobre la que s'han fet molts estudis. El model més clàssic és el de Voellmy del 1955 segons el qual la velocitat màxima ve donada per
$$v = \sqrt{h\xi(\sin\psi - \mu\cos\psi)}$$
on h és l'alçada del gruix de neu, ψ és l'angle, i μ i ξ són coeficients de fricció i turbulència (positius), respectivament. Si fixem el gruix de neu, quina funció lineal podríem prendre per estudiar aquesta velocitat per a vessants propers a 45 graus?

- Tenim una població de la qual sabem la mida i la seva taxa de creixement, però no coneixem exactament quin model de creixement segueix. Com a primera aproximació, modelem la mida de la població per una funció lineal. Quina?

- Recordem la funció que ens donava la temperatura de sensació (*wind chill*) en funció de la temperatura i la velocitat del vent (pàgina 16). Suposem que la temperatura és fixa $T = -10$. Si la velocitat està al voltant dels 20 km/h, com podem aproximar W per una funció lineal de la velocitat del vent V?

- Sabem que $\sin 0 = 0$. Sense utilitzar una calculadora, com podem trobar un valor aproximat per a $\sin 0.1$?

- Sabem que $\sqrt{49} = 7$. Sense utilitzar una calculadora, com podem trobar un valor aproximat per a $\sqrt{50}$?

La resposta ve donada per aquesta propietat:

La millor aproximació lineal d'una funció és la recta tangent a la seva gràfica.

Suposem, doncs, que volem una aproximació lineal d'una funció $y = f(x)$ per a valors de la variable x propers a a. Prendrem la **recta tangent a** $y = f(x)$ **pel punt** $(a, f(a))$:

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

i tindrem que

$$f(x) \approx L(x) \text{ si } x \approx a.$$

Si $x = a$, la funció $f(x)$ i la seva aproximació lineal $L(x)$ tenen el mateix valor i la mateixa derivada. A mida que x es vagi separant de a, la funció $f(x)$ i la seva aproximació lineal $L(x)$ es poden allunyar una de l'altra i l'aproximació lineal perdrà exactitud.

Exemples:

- Aproximació lineal de $f(x) = \sin x$ per $x \approx 0$. Com que $\sin 0 = 0$ i la derivada de sin és cos i $\cos 0 = 1$, tenim

  $$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 0 + (a - x) = x.$$

  Per tant, la millor aproximació lineal se la funció $\sin x$ per valors petits de x és la recta $L(x) = x$. Dit d'una altra manera,

  $$\sin x \approx x \text{ si } x \approx 0.$$

  En particular, $\sin 0.1 \approx 0.1$.

- Aproximació lineal de $f(x) = \sqrt{x}$ per $x \approx 49$.

  $$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}(x - a) = 7 + \frac{1}{14}(x - 49).$$

  En particular, $\sqrt{50} \approx 7.0714$.

- Aproximació lineal de la mida d'una població. Suposem que tenim una població de mida $N = 250 \times 10^6$, que creix amb una taxa de creixement del 2% anual. Si hem de fer una estimació lineal de la població en els propers mesos, farem això:

  $$N(0) = 250 \times 10^6 \qquad \frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = 0.02$$

  i l'aproximació lineal és

  $$L(t) = N(0) + N'(0)(t - 0) = 250 \times 10^6 + (0.02 \times 250 \times 10^6)t.$$

  Per exemple, d'aquí a dos mesos, l'estimació per a la població dóna $N \approx 250.8 \times 10^6$.

- Quan parlàvem de la taxa de creixement vam dir que si r és proper a zero, aleshores $r \approx e^r - 1$ i $\log(1+r) \approx r$. Ara ho podem justificar amb les aproximacions lineals de les funcions e^x i $\log(1 + x)$ a $x = 0$.

15.2 Propagació d'errors

Qualsevol mesura experimental d'una variable x té un cert marge d'error $\pm\Delta x$. Si ara, sobre aquesta variable x, avaluem una funció $y = f(x)$, quin error hem d'esperar a y? És clar que l'error $\pm\Delta x$ es «propagarà» a un error $\pm\Delta y$. La pregunta és quina relació hi ha entre Δy i Δx.

Sovint, tenim un marge d'error per al resultat final y i ens preguntem amb quina precisió hem de determinar x perquè y no sobrepassi el marge d'error que ens hem fixat.

Distingirem entre els conceptes d'**error** i **precisió** o *error relatiu*. Si l'error d'una variable x és Δx, la precisió és $\Delta x/x$. L'error té les mateixes unitats que la variable i la precisió no té unitats i s'expressa sovint en percentatge.

Exemples:

- Si coneixem un nombre $x = 10$ amb una precisió del 2%, amb quina precisió coneixem $\log x$?
- Si coneixem el radi d'una circumferència amb una precisió del 5%, amb quina precisió coneixem l'àrea limitada per aquesta circumferència?
- Volem determinar aproximadament la superfície foliar d'un arbre (evidentment, sense mesurar la superfície de totes i cadascuna de les seves fulles!). Hi ha molts estudis al·lomètrics que relacionen, per a cada espècie d'arbre, la relació entre la superfície foliar i altres mesures més fàcils de determinar, com el diàmetre del tronc. Per exemple, la referència que hem citat a la pàgina 87 ens dóna que, per als exemplars joves de faig, la superfície foliar per arbre (em metres quadrats) és
$$A = 0.307\, D^{1.803}$$
on D és el diàmetre del tronc (en cm) a 1.37 metres d'alçada sobre el sòl. Si estem mesurant D amb una precisió del 5%,[1] amb quina precisió coneixerem A?

La resposta a tot això s'obté recordant la definició de derivada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

i fent aquesta aproximació[2]

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x) \text{ si } \Delta x \approx 0.$$

[1] I com és que mesurem el diàmetre del tronc amb una precisió del 5% i no mesurem el diàmetre del tronc *exactament*? D'una banda, l'exactitud absoluta no pot existir, però també és cert que la resposta a aquesta pregunta es troba en el fet que estem eludint que qualsevol estudi experimental ha d'usar mètodes estadístics. Per tant, a la pràctica, no estarem mesurant un únic tronc, sinó una mostra de troncs, i voldrem estimar valors mitjans amb un cert marge d'error, etc. L'anàlisi estadística és un complement necessari a tot el que estudiem en aquest curs.

[2] De fet, aquí estem substituint $f(x)$ per la seva aproximació lineal.

Dit d'una altra manera, la relació entre Δy i Δx ve donada per

$$\Delta y \approx y' \, \Delta x.$$

Si el que volem és una fórmula que ens relacioni la precisió de x amb la precisió de y, n'hi ha prou amb dividir per y la fórmula anterior. Obtenim això:

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{y'x}{y} \frac{\Delta x}{x}.$$

Trobem ara la solució dels casos plantejats als exercicis anteriors:

- **Precisió del logaritme.** Tenim $x = 10 \pm 2\%$ i posem $y = \log x$. Aleshores,

$$\Delta y \approx \frac{1}{x}\Delta x, \qquad \frac{\Delta y}{y} \approx \frac{1}{y}\frac{\Delta x}{x} = \frac{0.02}{\log 10} \approx 0.0087.$$

  Per tant,

$$\log x = 2.3 \pm 0.9\%.$$

- **Precisió de l'àrea d'una circumferència.** La fórmula clàssica $S = \pi R^2$ dóna

$$\Delta S \approx 2\pi R \Delta R, \qquad \frac{\Delta S}{S} \approx \frac{2\pi R}{\pi R^2} \, \Delta R = 2 \, \frac{\Delta R}{R} = 10\%$$

  i la precisió de l'àrea és del 10%.

- **Superfície foliar.**

$$\frac{\Delta A}{A} \approx \frac{1.803 \times 0.307 \times D^{0.803}}{0.307 \times D^{1.803}} \, \Delta D = 1.803 \, \frac{\Delta D}{D} = 1.803 \times 0.05 \approx 9\%.$$

  Per tant, la precisió en la mesura de la superfície foliar serà del 9%.

15.3 Aproximació quadràtica

En lloc d'aproximar una funció $f(x)$ (per a valors propers a un valor $x = a$) per una funció lineal, com hem fet fins ara en aquest capítol, podem aproximar la funció per una funció quadràtica $Q(x) = ax^2 + bx + c$ i sembla lògic pensar que, d'aquesta manera, obtindrem una aproximació millor. Quina és la funció quadràtica que hem d'escollir?

Recordem que l'aproximació lineal de $f(x)$ al voltant del punt $x = a$ és la funció

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Aquesta funció té aquestes dues propietats

- Les dues funcions $f(x)$ i $L(x)$ tenen el mateix valor per $x = a$. És a dir, $f(a) = L(a)$.
- Les dues funcions $f(x)$ i $L(x)$ creixen a la mateixa velocitat per $x = a$. És a dir, $f'(a) = L'(a)$.

A la vista d'això, una bona aproximació quadràtica serà una funció $Q(x) = ax^2 + bx + c$ que tingui aquestes tres propietats:

- Les dues funcions $f(x)$ i $Q(x)$ tenen el mateix valor per $x = a$. És a dir, $f(a) = Q(a)$.
- Les dues funcions $f(x)$ i $Q(x)$ creixen a la mateixa velocitat per $x = a$. És a dir, $f'(a) = Q'(a)$.
- Les dues funcions $f(x)$ i $Q(x)$ creixen am la mateixa acceleració per $x = a$. És a dir, $f''(a) = Q''(a)$.

Amb aquestes tres condicions, no és difícil trobar quina és aquesta funció quadràtica. El resultat és:

$$Q(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2.$$

Observem que, si $a = 0$, la part lineal de $Q(X)$ és precisament l'aproximació lineal $L(x)$.

Exemple. Trobem l'aproximació quadràtica de $f(x) = \sqrt{1 + x}$ a l'entorn del punt $x = 0$.

Cal trobar els valors $f(0) = 1$, $f'(0) = 1/2$, $f''(0) = -1/4$. Aleshores, l'aproximació quadràtica és

$$Q(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

i podem afirmar que

$$\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \text{ si } x \approx 0.$$

15.4 Fem-ho amb sage

L'aproximació lineal o quadràtica d'una funció es pot calcular amb `sage` amb la comanda `taylor(f(x),x,a,n)` on a és el punt on volem trobar l'aproximació i $n = 1, 2$ segons si volem l'aproximació lineal o l'aproximació quadràtica. Els valors $n = 3, 4, \ldots$ ens donarien aproximacions d'ordre superior al quadràtic.

```
sage: f(x)=sqrt(1+x)
sage: taylor(f(x),x,0,1)
 1/2*x + 1
sage: taylor(f(x),x,0,2)
 -1/8*x^2 + 1/2*x + 1
```

16. Valors extrems d'una funció

16.1 Màxims i mínims

Quan modelem un fenomen per una funció $y = f(x)$ una informació important que ens pot interessar és quins són els valors màxim i mínim que pot assolir la variable y.

Exemples:

- Imaginem que estudiem el rendiment R d'una collita de cereal com a funció del contingut al sòl d'un determinat nutrient N (nitrogen, per exemple). Intuïm que tant l'absència de nutrient com l'excés de nutrient poden fer que R disminueixi. Ens interessa, doncs, trobar un valor de N que faci que R sigui màxim.

- S'ha vist que hi ha espècies que modulen la mida de la descendència en funció dels recursos disponibles per tal d'aconseguir que l'*èxit* de la reproducció sigui màxim. Entenem per èxit de la reproducció el nombre de cries que sobreviuen fins que es puguin reproduir. Un model matemàtic pot estudiar quina pot ser la mida que maximitzi l'èxit, i comparar-la amb els resultats experimentals.

- Hi ha espècies (el salmó del Pacífic, alguns pops, l'atzavara, el bambú...) que es reprodueixen una única vegada a la vida[1] i l'elecció de quin és aquest moment afecta l'èxit de la reproducció. Un model matemàtic pot estudiar quina és el moment que maximitza l'èxit, i comparar-lo amb els resultats experimentals.

- El concepte de pesca sostenible sancionat per l'ONU[2] es basa en un nombre de captures que mantingui la població en la seva mida de creixement màxim, suposant que l'estoc de peixos segueix un model logístic. Quina és aquesta mida de creixement màxim?

- En el control biològic de les plagues, una plaga és contrarestada amb la introducció d'una espècie depredadora dels individus de la plaga. La mida de la plaga i la mida de la població de depredadors estan relacionades. Matemàticament, l'optimització d'aquestes mides interdependents és una problema molt complex que involucra màxims i mínims, però va molt més enllà.

La situació també pot ser justament la contrària: estudiem un fenomen del que coneixem bé els seus valors extrems i volem utilitzar una funció per modelar aquest fenomen. Recordem, per exemple, quan volíem modelar la variació anual de temperatura per una funció sinusoïdal (pagina 37) i havíem d'utilitzar el coneixement que tenim dels valors màxims i mínims de la funció sinus.

[1] Consulteu l'article *Semelparity and iteroparity* a Wikipedia.

[2] Vegeu l'article 2 del document *Convention on Fishing and Conservation of the Living Resources of the High Seas*, United Nations 2005. Per entendre millor això, consulteu l'article *Maximum sustainable yield* a Wikipedia.

Per atacar aquests problemes, començarem introduint alguns conceptes matemàtics fonamentals.

16.2 Conceptes matemàtics sobre màxims i mínims

Sigui $y = f(x)$ una funció definida en un cert interval $[a, b]$ (o també (a, b) o qualsevol altra variant). Diem que aquesta funció **té un màxim a** $x = c$ si el valor $f(c)$ és més gran o igual que qualsevol altre valor $f(d)$ amb $d \in [a, b]$. En concepte de **mínim** es defineix anàlogament. Utilitzarem la paraula **extrems** per referir-nos indistintament a màxims i mínims. També parlarem de màxims, mínims i extrems **globals**, per distingir-los d'un altre concepte que tractarem més endavant.

Per exemple, considerem la paràbola $y = x^2$ que ve donada per una funció definida arreu, però suposem que només ens interessa el seu comportament a l'interval $[-1, 1]$. En aquest interval, la funció té:

- un màxim a $x = 1$ i un màxim a $x = -1$,
- un mínim a $x = 0$.

Però aquesta mateixa paràbola, considerada a l'interval $(-1, 1)$ no té cap màxim, i segueix tenint un mínim a $x = 0$.

En canvi, la recta $y = x$, considerada a l'interval $(-1, 1)$, no té cap extrem: cap màxim i cap mínim. Aquí, que l'interval sigui obert és fonamental perquè tenim un resultat matemàtic que diu això:

> **Una funció contínua en un interval tancat sempre té algun màxim i algun mínim.**

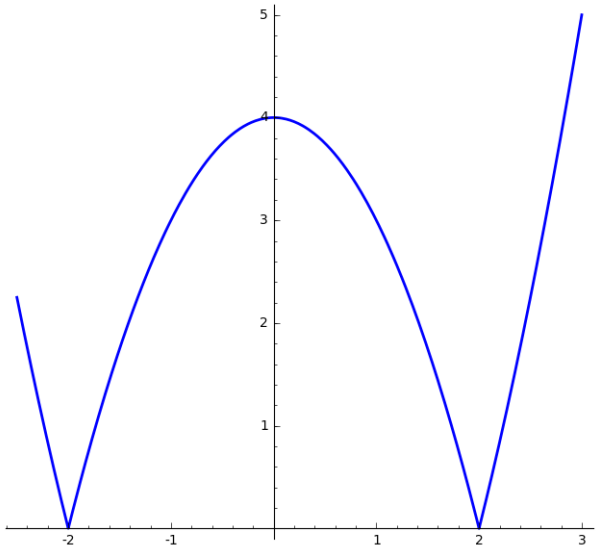
Diem que una funció $y = f(x)$ té un màxim **relatiu** a $x = c$ si el valor $f(c)$ és més gran o igual que qualsevol altre valor $f(d)$ quan d és a $[a, b]$ i d també és a algun petit interval al voltant de c. També parlarem de **mínim relatiu** o, si volem incloure els dos casos de màxim i mínim, parlarem d'**extrems relatius**. També es parla de màxims, mínims o extrems **locals**.

Exemples:

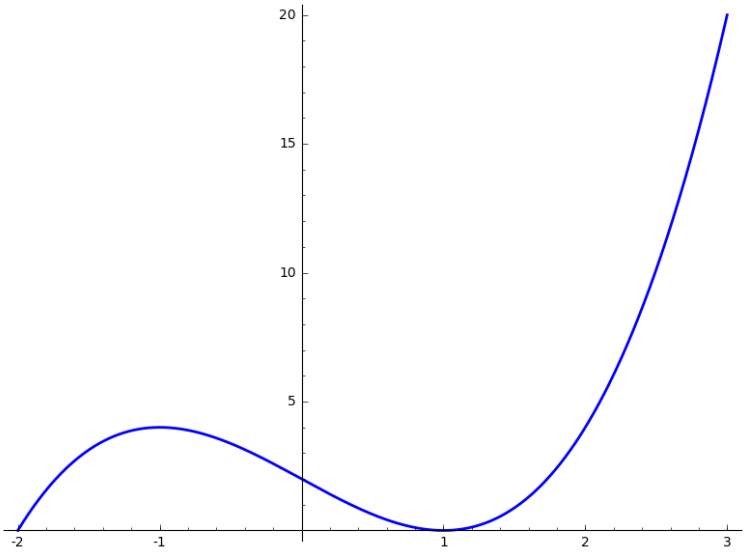
- $f(x) = |x^2 - 4|$ a l'interval $[-2.5, 3)$. Per dibuixar aquesta funció n'hi ha prou amb dibuixar la paràbola $y = x^2 - 4$ i a continuació reflectir respecte de l'eix x la part de la paràbola que està per sota d'aquest eix.

  Aquí observem això:

  - No hi ha cap màxim global. A $x = 3$ hi hauria un màxim global, però 3 no pertany a l'interval que estem considerant.
  - A $x = 2$ i $x = -2$ hi ha mínims globals i també mínims locals.
  - A $x = -2.5$ i $x = 0$ hi ha màxims locals.



- $f(x) = (x-1)^2(x+2)$ a l'interval $[-2, 3]$. Pel resultat anterior, sabem que és segur que aquesta funció tindrà algun màxim global i algun mínim global. Si dibuixem aquesta funció, obtenim això:



  Observem que

  - A $x = -2$ i $x = 1$ hi ha mínims globals que també són locals.
  - A $x = 3$ hi ha un màxim global, que també és local.
  - A $x = -1$ hi ha un màxim local (que no és global).

16.3 Extrems locals i derivada

Hi ha una relació directa entre els extrems locals d'una funció $y = f(x)$ i la derivada d'aquesta funció $f'(x)$:

Si una funció $y = f(x)$ té un extrem local a un punt interior $x = c$ i la derivada $f'(c)$ existeix, aleshores $f'(c) = 0$.

Aquí, **punt interior** és aquell punt del domini de definició de la funció que té al seu voltant tot un interval obert de punts que també estan en el domini de definició. Per exemple, si el domini de definició és $[a, b]$, aleshores tots els punts de l'interval obert (a, b) són punts interiors i els punts a i b no ho són.

Els punts on s'anul·la la derivada s'anomenen **punts crítics** de la funció. Estem dient, doncs, que els extrems locals interiors són punts crítics, sempre que la funció sigui derivable. L'explicació d'aquest resultat és clara: els punts on la derivada s'anul·la són els punts on la recta tangent a la corba $y = f(x)$ és horitzontal i això és el que passa en un màxim local i un mínim local (si són punts interiors i la funció és derivable).

Comentaris:

- Totes les hipòtesis són necessàries: el punt ha de ser interior i la derivada ha d'existir.
- Un punt crític pot no ser un extrem. Per exemple, la funció x^3 té un punt crític a $x = 0$, però aquesta funció no té extrems, ni globals ni locals, quan la considerem a tota la recta.
- Observem que l'afirmació anterior no diu res sobre els extrems globals. Els extrems locals d'una funció poden tenir interès, però si el que realment ens interessa són els extrems globals, hem de procedir d'aquesta manera:
  1. Trobem els punts crítics de la funció.
  2. Trobem els punts on la funció no té derivada.
  3. Considerem els extrems de l'interval que estem considerant (si escau).
  4. Aleshores, els extrems globals, si n'hi ha, estaran entre els punts que hem considerat a 1, 2 i 3.
- No hem d'oblidar els punts on la funció no és derivable. Per exemple, la funció $|x|$ té un mínim global i local a $x = 0$, però la funció no té punts crítics, perquè la funció no és derivable a $x = 0$ (fa un «angle»).

16.4 Teoremes de valor mig

Suposem que circulem per un túnel de 5 km on la velocitat màxima permesa és de 90 km/h. La policia detecta la nostra entrada al túnel i, després d'exactament 3 minuts, detecta la nostra sortida. Si rebem una multa per excés de velocitat, quin és el fonament teòric d'aquesta sanció?

Sigui $f(t)$ la funció que indica quina longitud del túnel hem recorregut en el temps t. Què sabem d'aquesta funció?

- Sabem que $f(0) = 0$ i $f(0.05) = 5$ (posem el temps en hores).

- Com que la longitud del túnel és de 5 km, la nostra velocitat mitjana ha estat de

$$v_m = \frac{f(0.05) - f(0)}{0.05 - 0} = 100 \text{ km/h}.$$

- La policia no sap res de la funció $f(t)$. Podem haver canviat la velocitat, ens podem haver aturat o, fins i tot, fer marxa enrere. Però com a mínim sí que sap que la funció $f(t)$ és contínua (no ens «teletransportem») i és derivable (sempre tenim «alguna» velocitat).

A partir d'aquí podem aplicar un resultat que s'anomena **teorema del valor mig** que afirma que si la nostra velocitat mitjana és de 100 km/h, necessàriament hi ha hagut algun moment en que la nostra velocitat instantània ha sigut exactament 100 km/h.

Dit amb més precisió:

> **Si $f(x)$ és una funció derivable a un interval obert que contingui $[a, b]$, existeix un punt c entre a i b tal que**
>
> $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Observem que en el cas en què $f(a) = f(b)$, aquest resultat ens diu que hi ha d'haver un punt c entre a i b tal que $f'(c) = 0$. Dit en llenguatge ordinari: Si una quantitat té el mateix valor en dos instants diferents, és segur que hi ha hagut un instant de creixement zero. Això es coneix amb el nom de **teorema de Rolle**.

Exemple: Suposem que una població de mida $N(0) = 100$ creix a una velocitat (variable) que sempre es manté per sota de 3: $|N'(t)| \leq 3$. Què podem dir de la mida de població per $t = 10$?

Pel teorema del valor mig, hi haurà un temps c entre 0 i 10 tal que

$$\left| \frac{N(10) - N(0)}{10 - 0} \right| = |N'(c)| \leq 3$$

i, per tant, podem afirmar que

$$70 \leq N(10) \leq 130.$$

17. (De-)creixement i (des-)acceleració

17.1 Creixement i decreixement

Si estudiem un fenomen que està modelat per una certa funció $y = f(x)$, és clar que ens interessa saber si y és creixent o decreixent, quan x creix. La **derivada** ens dóna la resposta, perquè la derivada, precisament, mesura la velocitat de creixement de la funció. Per tant,

> **Si $f'(x) > 0$ a un cert interval, la funció $f(x)$ és creixent en aquest interval.**
> **Si $f'(x) < 0$ a un cert interval, la funció $f(x)$ és decreixent en aquest interval.**

Els punts en que la funció passa de creixent a decreixent són punts crítics amb $f'(x) = 0$ i són màxims locals. De manera similar, els punts en que la funció passa de decreixent a creixent són punts crítics amb $f'(x) = 0$ i són mínims locals.

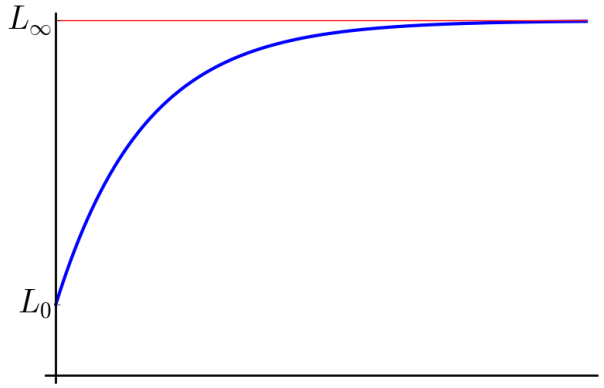
Exemple: En el model de von Bertalanffy longitud d'un peix com a funció del temps ve donada per aquesta funció:

$$L(t) = L_\infty - (L_\infty - L_0)\exp(-kt), \qquad L_\infty > L_0 > 0,\ k > 0.$$

$L(t)$ és la longitud del peix en el temps t i $L_0 = L(0)$. D'altra banda, $L_\infty = \lim_{t\to\infty} L(t)$ és la longitud a llarg termini. Si calculem la derivada d'aquesta funció, veiem que

$$L'(t) = k(L_\infty - L_0)\exp(-kt) > 0$$

i la funció és creixent. A partir d'aquestes observacions, el comportament qualitatiu d'aquesta funció està clar:



17.2 Acceleració i desacceleració

Si ja sabem que una certa funció $y = f(x)$ és creixent (si és decreixent, el raonament seria similar), encara hi ha dues possibilitats:

1. $f(x)$ pot créixer com la paràbola $y = x^2$ o com la funció exponencial $y = e^x$. En aquests casos, la velocitat de creixement va creixent. Es diu que la funció creix **acceleradament** (o amb acceleració positiva).

2. $f(x)$ pot créixer com l'arrel quadrada $y = \sqrt{x}$ o com la funció $y = \log x$. En aquests casos, la velocitat de creixement va decreixent. Es diu que la funció creix **desacceleradament** (o amb acceleració negativa).

El que distingeix un cas de l'altre és el signe de l'acceleració. Però l'acceleració ve donada per la segona derivada de la funció $f''(x)$. Per tant, el signe de la segona derivada ens distingeix entre creixement accelerat i creixement desaccelerat.

Exemple: En el model de creixement dels peixos de l'exemple anterior, la segona derivada és

$$L''(t) = -k^2(L_\infty - L_0)\exp(-kt) < 0$$

i el creixement és desaccelerat: el peix creix més de pressa quan és jove que quan és ja gran.

De fet, encara que hem partit s'una funció creixent per discutir aquest tema, no cal que la funció sigui creixent o decreixent per poder parlar d'acceleració i desacceleració.

17.3 Concavitat i convexitat

Encara que en el llenguatge no científic es parla d'acceleració i desacceleració, els termes que s'utilitzen en llenguatge matemàtic són els de **funció convexa** i **funció còncava**. Malauradament, a l'hora de decidir quin dels dos casos ($f''(x) > 0$ o $f''(x) < 0$) es considera convex i quin es considera còncau, hi ha una certa confusió. Aquesta confusió és inevitable perquè «còncau» i «convex» fan referència a objectes sòlids i no a línies. Ningú dubta sobre què és una pedra convexa o una concavitat en una paret de roca. Quin sentit té dir que la gràfica d'una funció és convexa o còncava? Depèn des d'on ens la mirem. Per exemple, la funció exponencial, mirada des de l'eix de les x sembla convexa, però mirada des de l'eix de les y sembla còncava. En alguns textos que s'utilitzen a l'ensenyament als Estats Units o al Canadà és resol aquest problema parlant de funcions *còncaves cap amunt* i funcions *còncaves cap avall*. Dit això, ha de quedar clar que dir que l'exponencial és còncava o convexa no pot ser res més que un conveni i que no hi ha unanimitat a l'hora de decidir entre una opció i l'altra.

En aquest curs, el conveni que utilitzarem és que ens mirarem les gràfiques *des de baix* i, en particular, la funció **EX**ponencial serà conv**EX**a. En resum:

> **Direm que una funció $y = f(x)$ és convexa si $f''(x) > 0$ i direm que és còncava si $f''(x) < 0$.**

Els punts en què una funció passa de convexa a còncava o viceversa són punts on $f''(x) = 0$. Els anomenarem **punts d'inflexió**.

Exemple: Considerem una funció de creixement de tipus Monod

$$Y(N) = Y_m \frac{N}{K+N}, \quad K, Y_m > 0.$$

Considerem primer el cas $N \geq 0$, que és el que més apareix a les aplicacions. Si calculem la primera i la segona derivades d'aquesta funció tenim

$$\frac{dY}{dN} = Y_m \frac{K}{(K+N)^2} > 0$$

$$\frac{d^2Y}{dN^2} = -Y_m \frac{2K}{(K+N)^3} < 0.$$

Deduïm que Y és una funció creixent i còncava. D'altra banda,

$$\lim_{N\to\infty} Y(N) = Y_m$$

i això implica que Y_m és el valor de la funció a llarg termini i també que la funció no pot superar aquest valor Y_m.

En resum, podem dir que Y és una funció que, per $N \geq 0$,

- creix sempre, perquè $Y' > 0$,
- creix limitadament, o «té un sostre», perquè $Y < Y_m$ (i Y_m és el valor a llarg termini de Y).
- creix de manera desaccelerada, perquè $Y'' < 0$.

En un llenguatge més matemàtic, diríem que la funció Y és creixent, còncava i té una asímptota horitzontal a $Y = Y_m$.

La situació quan $N < 0$ és lleugerament diferent. En primer lloc, la funció té una asímptota vertical al punt de discontinuïtat $N = -K$. La derivada segueix essent positiva arreu, i la funció és sempre creixent. En canvi, la segona derivada és negativa per $N > -K$ i és positiva per $N < -K$. Quan $N \to -K^+$, la funció $Y \to -\infty$, mentre que quan $N \to -K^-$, tenim que $Y \to \infty$. Finalment, $\lim_{N\to-\infty} Y(N) = K$.

17.4 *Diminishing returns*

La situació de l'exemple anterior apareix sovint (per exemple, a l'economia) i s'acostuma a descriure amb el terme *diminishing returns*. Aquest terme fa referència a que, si bé és cert que la funció (els *returns*) són més grans com més gran és la variable x (la inversió), els increments de la funció són cada vegada més petits (*diminishing*) quan més creix x.

Posem un parell d'exemples:

- Una empresa comença a invertir en publicitat i això fa augmentar les seves vendes molt ràpidament. Si va augmentant la seva inversió en publicitat, cada vegada augmenten més les seves vendes. Però pot arribar un moment —segur que arribarà— en què s'entri en una situació de *diminishing returns*, en la qual els mateixos augments de la despesa en publicitat produeixen només mínims increments de les vendes.

- Una empresa treu al mercat un producte que és molt millor que l'anterior i fa que les seves vendes creixin molt. Inverteix en R&D i treu nous models, cada vegada millors que generen bones vendes, fins que arriba un punt en què ja resulta molt difícil fer millores substancials en el producte, que moguin el consumidor a canviar el model actual per un de nou. Es diu que s'ha entrat en la fase de *diminishing returns*. Per exemple, es diu que això és el que està passant ara (2015) amb els fabricants de càmeres fotogràfiques digitals i amb els de PC's.

Matemàticament, la situació de *diminishing returns* fa referència a una funció creixent còncava.

18. Anàlisi qualitativa d'una funció

18.1 Els passos que hem de seguir

El que hem anat estudiant fins ara ens dóna eines per dur a terme, donada una funció $y = f(x)$, una anàlisi qualitativa de la funció que ens permet entendre el seu comportament i les seves característiques principals. Aquesta anàlisi donarà lloc a poder dibuixar aproximadament la **gràfica** de la funció.

Hem d'estudiar aquests conceptes:

1. **Domini de definició.** Hem de saber quin és el domini màxim on està definida la funció i també quin és el domini on ens interessa estudiar la funció. Per exemple, la funció de Monod
$$Y(N) = \frac{KN}{a^2 + N}$$
està definida per tot $N \neq -a^2$ i, si N representa, per exemple, la mida d'una població o la quantitat d'un cert nutrient, aleshores el domini que ens interessa és $N \geq 0$. Recordem que ja sabem exactament quins són els dominis de definició de totes les funcions elementals.

2. **Punts de discontinuïtat.** Ja sabem que les funcions elementals són contínues a tot el seu domini de definició. Per tant, el punt anterior ja ens dóna informació sobre els possibles punts de discontinuïtat.

3. **Comportament a llarg termini.** Si la funció està definida quan la variable tendeix a $\pm\infty$, calculant els límits coneixerem el seu comportament a llarg termini. Per exemple, a la funció de Monod anterior tenim
$$\lim_{N\to\infty} \frac{KN}{a^2 + N} = K$$
i veiem que a llarg termini la funció es va acostant al valor K. Matemàticament, direm que la gràfica de la funció té una asímptota horitzontal $Y = K$.

4. **Comportament prop d'un punt de discontinuïtat.** Si la funció té una discontinuïtat a $x = a$ (no està definida a $x = a$), ens interessa saber què fa la funció quan ens acostem a a. Per saber-ho, calculem els límits laterals
$$\lim_{x\to a^+} f(x), \qquad \lim_{x\to a^-} f(x).$$
Això ens permetrà saber si la funció té una discontinuïtat de salt al punt $x = a$, o una asímptota vertical. Per exemple,
$$\lim_{x\to a^+} \frac{k^2}{a - x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to a^-} \frac{k^2}{a - x} = \infty$$
i aquesta funció té una asímptota vertical $x = a$.

5. **Comportament als extrems de l'interval.** Si estem estudiant la funció en un interval $[a, b]$, ens interessa conèixer els valors $f(a)$ i $f(b)$.

6. **Punts crítics.** Recordem que són els punts on s'anul·la la derivada i poden ser extrems de la funció.

7. **Punts on no hi ha derivabilitat.** El càlcul de la derivada al punt anterior ens permet detectar si hi ha algun punt on la derivada no existeix. Això pot passar, per exemple, si la funció fa un «angle» o si hi ha una recta tangent vertical. Per exemple, la funció $\sqrt[3]{x}$ està definida per tot valor de x, però no és derivable a $x = 0$.

8. **Creixement i decreixement.** Quan coneixem els punts on s'anul·la la derivada, podem determinar quins són els punts on la derivada és positiva i quins són els punts on la derivada és negativa. Això ens dóna informació sobre els intervals on la funció és creixent i els intervals on la funció és decreixent.

9. **Valors extrems.** Amb la informació anterior ja podem conèixer els extrems locals i globals de la funció.

10. **Concavitat i convexitat.** Sabem que la distinció entre aquests dos tipus de comportament es pot fer utilitzant la segona derivada $f''(x)$. Quan aquesta segona derivada és positiva, la funció és convexa; quan és negativa, la funció és còncava.

11. **Punts d'inflexió.** Són els punts on la funció passa de convexa a còncava, o viceversa. Per tant, en aquests punts la segona derivada val zero. Però també hi ha punts on la segona derivada val zero i, en canvi, no hi ha inflexió. Per exemple, el punt $x = 0$ per a la funció x^4.

12. **Asímptotes.** Una asímptota és una recta a la qual la funció s'acosta a una distància que tendeix a zero. En els apartats anteriors ja hem detectat les possibles asímptotes horitzontals i verticals. Una asímptota obliqua per a la funció $f(x)$ serà una recta $y = mx + b$ amb $m \neq 0$, tal que

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - (mx + b)) = 0 \text{ o } \lim_{x\to-\infty}(f(x) - (mx + b)) = 0.$$

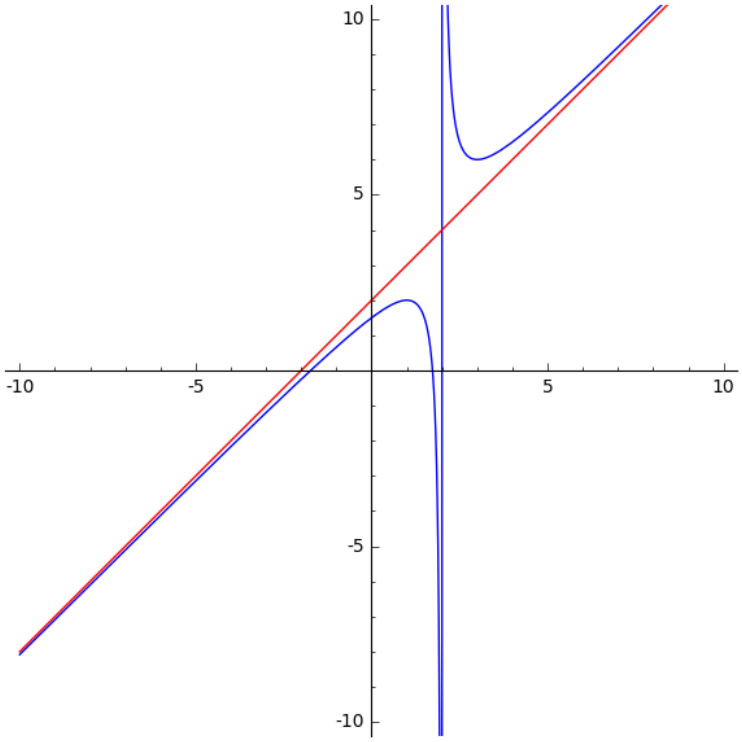
Per exemple, considerem la funció

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$$

que té una asímptota vertical a $x = 2$. Si volem determinar l'existència d'asímptotes obliqües, observem que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3}{x - 2} - mx - b = \lim_{x\to\infty} \frac{(1 - m)x^2 + (2m - b)x + 2b - 3}{x - 2}$$

i aquest límit val zero precisament si $m = 1$ i $b = 2$. Per tant, la recta $y = x + 2$ és una asímptota obliqua d'aquesta funció. De fet, la gràfica és:



18.2 Un exemple

Fem un estudi qualitatiu de la funció[1]

$$f(x) = (2-x)(2+x)^{2/5}.$$

En primer lloc, observem que les funcions potencials només estan definides per a valors positius de la variable i, en aquest cas, això donaria com a domini de definició de la funció anterior els valors $x > -2$. Ara bé, podem entendre la funció anterior com

$$f(x) = (2-x)\sqrt[5]{(2+x)^2}$$

i, d'aquesta manera, la funció està definida arreu. No hi ha punts de discontinuïtat.

El comportament a llarg termini és clar, perquè

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty.$$

Si calculem la derivada de la funció, obtenim

$$f'(x) = -\frac{6+7x}{5(2+x)^{3/5}}.$$

Observem dues coses:

[1] És una funció força artificial, que ha estat triada perquè exemplifiqui tots els conceptes que hem anat estudiant.

- La derivada no existeix quan $x = -2$.
- La funció té un únic punt crític a $x = -6/7$.

Com que la funció només pot passar de creixent a decreixent (o viceversa) en el punt crític o en el punt on la derivada no existeix, calculant la funció en tres punts convenients arribem a que

- La funció és decreixent a $(-\infty, -2)$ i a $(-6/7, \infty)$
- La funció és creixent a $(-2, -6/7)$.
- La funció té un màxim local a $x = -6/7$.

Com que els valors a llarg termini de la funció són $-\infty$ i ∞, la funció no pot tenir extrems globals. Els únics extrems locals són $x = -6/7$ (màxim local) i $x = -2$ (mínim local).

Per entendre millor què passa al punt $x = -2$ on la funció no és derivable, estudiem com és la derivada quan ens acostem a aquest punt:

$$\lim_{x\to -2^-} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to -2^+} f'(x) = \infty.$$

Això ens diu que la funció «cau» vertical al punt $x = -2$ i «s'aixeca» vertical. En aquest punt tenim, doncs, una mena de «cúspide» invertida.

Estudiem ara la concavitat i la convexitat de la funció, amb la derivada segona.

$$f''(x) = -\frac{52 + 14x}{25(2+x)^{8/5}}.$$

Observem que l'únic punt on s'anul·la aquesta derivada segona és el punt $x = -26/7$. Deduïm que la funció és

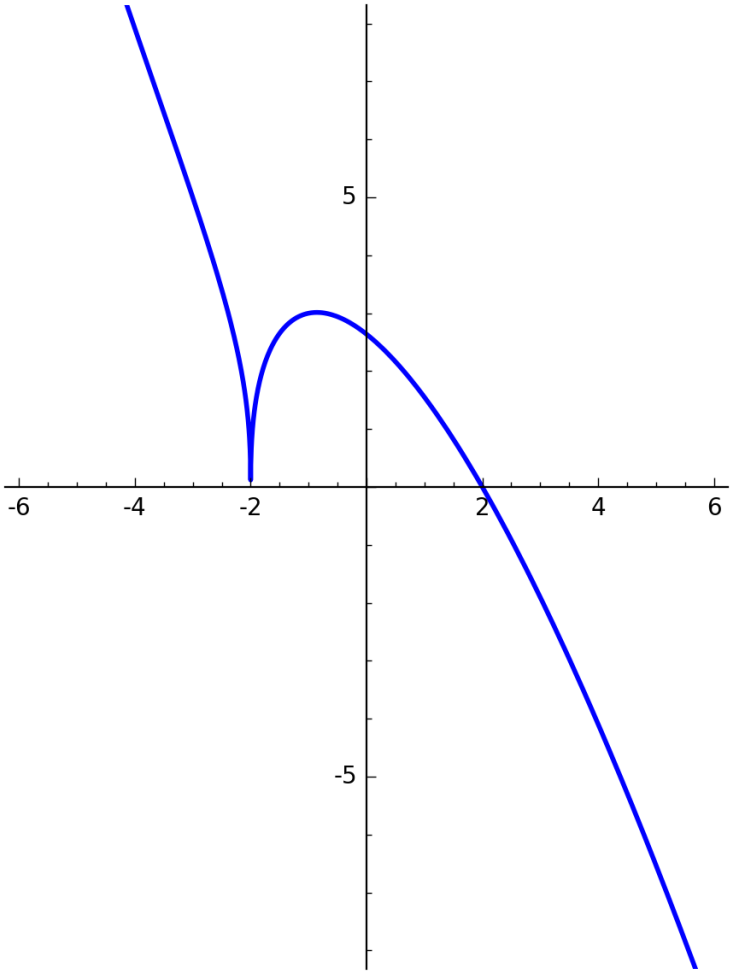
- convexa a $(-\infty, -26/7)$,
- còncava a $(-26/7, \infty)$ excepte al punt $x = -2$.

Per tant, té un punt d'inflexió a $x = -26/7$.

La darrera comprovació que fem és que la funció no té asímptotes obliqües. Suposem que $y = mx + b$ fos una asímptota obliqua. Aleshores tindríem (aplicant, per exemple, l'Hôpital)

$$0 = \lim_{x\to\pm\infty} (2-x)(2+x)^{2/5} - mx - b = \lim_{x\to\pm\infty} (2+x)\left(\frac{2-x}{(2+x)^{3/5}} - m\right) + 2m - b = \pm\infty.$$

Amb tota aquesta informació ja coneixem prou bé el comportament qualitatiu de la funció:



18.3 Fem-ho amb sage

El dibuix de la funció que hem estudiat en aquest capítol s'ha fet amb aquesta instrucció:

```
sage: plot((2-x)*((2+x)^2)^(1/5),(x,-6,6),thickness=2,
....:  aspect_ratio=1,ymax=8,ymin=-8)
```

Els recursos que sage posa al nostre abast són molt útils, però no ens eximeixen de conèixer els instruments teòrics que ens permeten entendre el comportament qualitatiu de les funcions i que hem estudiat en aquest capítol.

19. Optimització

Quan modelem un cert fenomen per una funció $Y = Y(N)$ ens pot interessar trobar valors de la variable N que maximitzin o minimitzin el valor de la funció Y. Matemàticament, es tracta de trobar els màxims i mínims de la funció, si existeixen. També és possible que ens interessi no pas el màxim o el mínim, sinó un punt d'inflexió (vegeu l'exemple 2 d'aquest capítol). D'aquest tipus de problemes en direm problemes d'**optimització**.

19.1 Exemple 1. Rendiment d'un conreu

Imaginem que volem modelitzar el rendiment Y d'una explotació en funció de la presència d'un cert recurs N. En un exemple anterior, modelitzàvem el rendiment d'un camp de blat de moro en funció de la quantitat de nitrogen al sòl amb una funció de tipus Monod $N/(k+N)$ i vàrem estudiar quin era el comportament de $Y(N)$. En molts casos, aquesta funció de Monod no és un bon model perquè és una funció que sempre és creixent, mentre que sovint ens trobem que un excés del recurs N pot produir una disminució en el rendiment. Una funció més apropiada podria ser una funció de Holling de tipus IV

$$Y(N) = \frac{N}{k^2 + N^2}, \qquad N \geq 0.$$

Observem que aquesta funció compleix

1. És contínua i és sempre positiva.

2. $Y(0) = 0$.

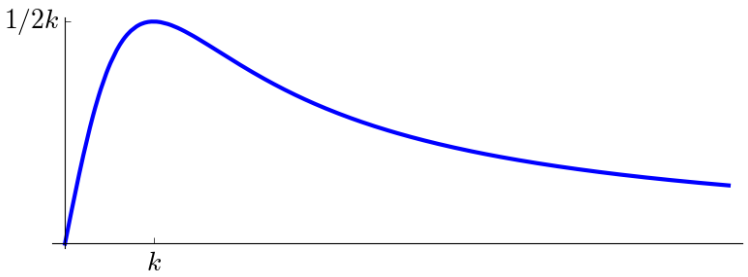
3. Quan la quantitat N és molt gran,

$$Y_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{k^2 + N^2} = 0$$

Això ens diu que hi ha d'haver un cert valor de N que doni un rendiment màxim $Y_{\max}$. Quin és aquest valor? Si derivem la funció, tenim

$$Y'(N) = \frac{k^2 - N^2}{k^2 + N^2}$$

i veiem que $N = k$ és un punt crític. Com que hi ha d'haver necessàriament un màxim, serà aquest i el rendiment màxim és $Y_{\max} = 1/2k$. No cal analitzar la segona derivada perquè ja veiem que realment la funció és creixent per $N < k$ i decreixent per $N > k$.



19.2 Exemple 2. Tractament biològic de les plagues

En algunes explotacions vitivinícoles, per tal d'evitar l'ús de pesticides, es col·loquen a les vinyes unes trampes de feromones sexuals que atrauen els insectes perjudicials. Interessa estudiar si hi ha alguna densitat de trampes que és òptima. En un estudi publicat a la revista *Crop Protection* el 2004, fet en unes extenses vinyes de Sud-àfrica, es va trobar una relació entre la densitat d (en ha^{-1}) de trampes i el nombre de captures per trampa n. Aquesta relació ve donada per aquesta funció

$$n(d) = 153.3\,\exp(-5.7/d).$$

Aquesta funció és sempre creixent perquè la seva derivada és

$$n'(d) = \frac{153.3 \times 5.7}{d^2}\,\exp(-5.7/d) > 0.$$

Per tant, no té sentit preguntar-se pel màxim de la funció: com més trampes posem, més captures hi haurà. En circumstàncies com aquesta, quan volem fer una optimització dels recursos, pot ser interessant preguntar-se pel punt d'inflexió de la funció, és a dir, per aquell punt en que entrem en una etapa de desacceleració, una etapa de *diminishing returns*. [1]

Considerem la funció general $f(x) = k\exp(-r/x)$ i calculem el seu punt d'inflexió. La segona derivada és

$$f''(x) = kr\exp(-r/x)\left(\frac{r}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right)$$

i el punt d'inflexió es troba a $x = r/2$.

19.3 Exemple 3. Pesca sostenible

A la pàgina 95 hem comentat que els tractats internacionals defineixen la pesca sostenible com aquella en que la població de peixos es manté en la seva mida de màxim creixement d'un model logístic. Mirem d'interpretar què vol dir això. En el model logístic, la població $N = N(t)$ segueix un creixement tal que

$$N' = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right).$$

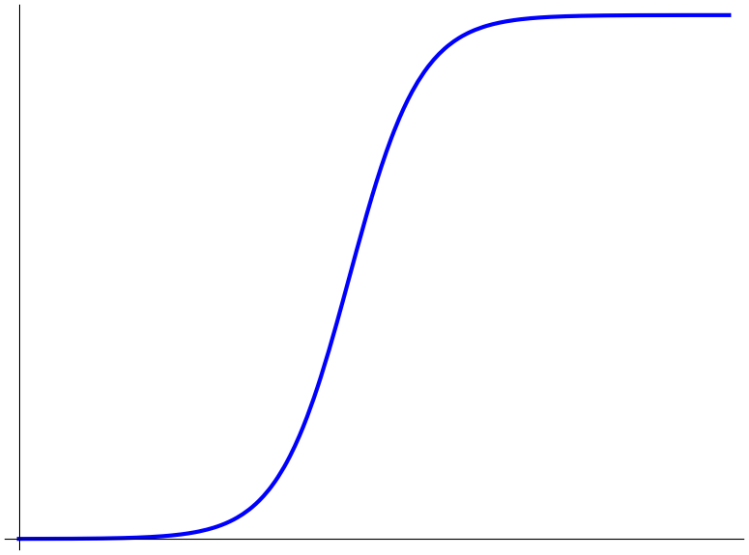
[1] Aquest tipus d'optimització que no cerca el valor màxim sinó un punt d'inflexió de la funció, l'utilitzem molt sovint a la vida quotidiana, de manera intuïtiva.

Aleshores, la població a què fan referència els tractats internacionals és el valor de N que fa que N' sigui màxim. Per calcular aquest màxim de N' hem de calcular la seva derivada, és a dir, N'':

$$N'' = rN'\left(1 - \frac{2N}{K}\right) = r^2 N\left(1 - \frac{N}{K}\right)\left(1 - \frac{2N}{K}\right).$$

Per tant, els punts on aquesta segona derivada s'anul·la són $N = 0$, K, $K/2$. En els dos primers, la velocitat de creixement és zero. Per tant, la velocitat màxima es donarà precisament quan $N = K/2$.

Aquest màxim de la velocitat N' coincideix amb un punt d'inflexió de la població N. L'aspecte que té la funció N és aquest (vegeu la secció 12.4):



19.4 Exemple 4. Distància a una corba

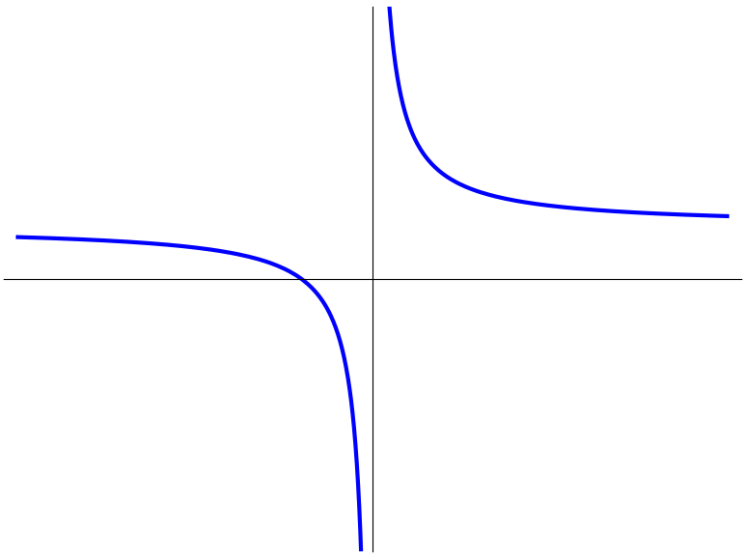
Suposem que volem determinar quin és el punt de la corba

$$y = \frac{1+x}{x}$$

que és més proper a l'origen de coordenades. Observem que la corba és realment una hipèrbola perquè la funció es pot escriure així:

$$y = \frac{1}{x} + 1.$$

Geomètricament entenem que hi ha d'haver un punt d'aquesta hipèrbola que estigui a distància mínima de l'origen.



Aquí la funció que volem minimitzar és la distància a l'origen $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ referida als punts de la hipèrbola. Podem simplificar els càlculs si pensem que els punts extrems de la funció d seran també els punts extrems de la funció d^2 i aquesta funció és més senzilla:

$$f(x) = d^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \left(\frac{1+x}{x}\right)^2 = \frac{x^4 + x^2 + 2x + 1}{x^2}.$$

Si ara derivem aquesta funció per trobar els seus punts crítics, tenim

$$f'(x) = \frac{2x^5 - 2x^2 - 2x}{x^4}$$

i, per trobar els extrems hem de trobar les solucions de $x^4 - x - 1 = 0$. Com que és una equació polinòmica de quart grau, sage pot trobar les solucions exactes amb la comanda

```
sage: solve(x^4-x-1==0,x)
```

però el resultat que obtenim és massa complicat i és millor que l'expressem en forma de nombres inexactes. Ho podem fer amb aquesta instrucció:

```
sage: [s.rhs().N() for s in solve([x^4-x-1==0],x)]
 [-0.248126062802622 - 1.03398206097597*I,
 -0.248126062802622 + 1.03398206097597*I,
 -0.724491959000516,
 1.22074408460576]
```

Obtenim dues solucions complexes i les solucions reals $a \approx -0.7245$ i $b \approx 1.2207$. Una manera més senzilla de fer-ho és aquesta altra:

```
sage: (x^4-x-1).roots(ring=RR)
 [(-0.724491959000516, 1), (1.22074408460576, 1)]
```

La distància de l'origen al punt de la hipèrbola d'abscissa a és aproximadament 0.82 i la distància de l'origen al punt de la hipèrbola d'abscissa b és aproximadament 2.19. Per tant, el punt que buscàvem és, aproximadament, el punt $(-0.72, -0.38)$.

Exercicis

A. Exercicis teòrics

II.A.1. Calculeu la funció derivada de les funcions següents:

(a) $f(x) = 6x^7 - 2x^4 + 2x + 1$

(b) $f(x) = (x^5 + 5x - 8)^{40}$

(c) $f(x) = (x^2 - 3x + 2)\, e^{3x}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^3 - x + 1}{x^2 - x + 5}$

(e) $f(x) = 2^{(x^2)} - \log_3 x$

(f) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 7x - 2}$

(g) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x^2+1}}$

(h) $f(x) = e^x \log x$

(i) $f(x) = \dfrac{e^x}{\arcsin x}$

(j) $f(x) = \arcsin x + \arccos x$

(k) $f(x) = \sqrt{\arccos x}$

(l) $f(x) = \log \sin x$

(m) $f(x) = \log \arctan x$

(n) $f(x) = e^{-x} \log(x+1)$

(o) $f(x) = (\arctan x)^2 + x^{0.172}$

(p) $f(x) = \pi\sqrt{x^3} \arccos x^2 + 1$

II.A.2. Calculeu la funció derivada de les funcions següents:

(a) $R(N) = (K + 2N) \exp(-rN^2)$

(b) $S(T) = \sin\left(\dfrac{2\pi}{L} T^2\right)$

(c) $K(P) = P^\alpha L^\beta$

(d) $v(T) = \sqrt{VT^2 - \mu \sin(T)} + \mu V$

(e) $H(u) = \dfrac{Su \log(u+1)}{K + S^2}$

(f) $L(t) = \dfrac{he^{r-t} - K}{K+1}$

II.A.3. (a) Comproveu que $y(t) = e^t - t$ és solució de l'equació diferencial $y' + y^2 = e^{2t} + (1-2t)e^t + t^2 - 1$.

(b) Comproveu que $y(x) = (1 + ce^x)/(1 - ce^x)$ és solució de l'equació diferencial $2y' - y^2 + 1 = 0$.

(c) Per a quins valors de r la funció $y(x) = e^{rx}$ és solució de l'equació diferencial $y'' + y' - 2y = 0$?

II.A.4. Calculeu $\frac{dy}{dx}$ en cadascun d'aquests casos:

(a) $x^2 + y^2 = 4$

(b) $y = x^2 + yx$

(c) $xy - y^3 = 1$

(d) $\dfrac{x}{xy+1} = 2xy$

II.A.5. Calculeu l'aproximació lineal i l'aproximació quadràtica de f al punt a en cadascun d'aquests casos:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$, $a = 0$ (b) $f(x) = e^x$, $a = 0$

(c) $f(x) = (1+x)^{-n}$, $a = 0$ (d) $f(x) = \tan(x)$, $a = \pi/4$

II.A.6. Donada la corba d'equació $f(x) = \arccos x$ i la recta $y = -x + b$, trobeu el valor de b perquè la recta sigui tangent a la corba. Determineu també el punt de tangència.

II.A.7. Suposem que mesurem x amb una precisió del 2%. En cada cas, doneu una estimació per a la precisió de y.

(a) $y = 4x^3$, $x = 1.5$ (b) $y = \log x$, $x = 20$

(c) $y = \dfrac{1}{1+x}$, $x = 4$ (d) $y = \frac{4}{3}\pi x^3$ (volum d'una esfera).

II.A.8. Representeu gràficament les funcions següents i estudieu-ne els extrems absoluts a l'interval $[0, 2]$:

(a) $f(x) = \dfrac{2x}{4x-3}$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{1-x^2}$ (c) $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x^2-4}$

(d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$ (e) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}$ (f) $f(x) = \dfrac{\log(x+1)}{x+1}$

II.A.9. Trobeu els intervals de creixement i decreixement i de concavitat i convexitat de les funcions:

(a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ (b) $f(x) = x^3 - 12x + 1$

(c) $f(x) = x^{2/3}(1-x)$ (d) $f(x) = (x+1)\,e^x$

(e) $f(x) = e^x/x$ (f) $f(x) = \log(x^2-1)$

II.A.10. Trobeu les coordenades del punt d'inflexió de la corba logística

$$y = \frac{K}{1 + k\exp(-rx)}.$$

Calculeu l'aproximació lineal en aquest punt.

II.A.11. Trobeu una funció de Holling de tipus IV que tingui un màxim per $x = 1$, que aquest màxim valgui 2 i tal que la seva aproximació lineal a $x = 0$ sigui $y = 2x$.

II.A.12. Sigui $y(t)$ una solució de l'equació diferencial $y' = 3y^2 - 2y$. Determineu el valor de y en el moment en què està decreixent el més ràpidament possible.

B. Exercicis d'aplicació

II.B.1. S'han estudiat els arbres d'una determinada espècie, en un determinat hàbitat, i s'ha trobat una relació empírica entre la seva edat en anys i la seva alçada en metres:

$$h = 23\,\exp\left(-\frac{20}{t}\right).$$

Determineu a partir de quina edat es desaccelera el creixement d'aquests arbres.

II.B.2. Els principis de la pesca sostenible adoptats per les organitzacions internacionals es basen en mantenir l'estoc de peixos en el seu punt de velocitat de creixement màxima. Si una població de peixos segueix un patró de creixement de tipus logístic

$$N(t) = \frac{100}{1 + 9e^{-t}}$$

(en unes determinades unitats), determineu la mida de la població en el moment en què la velocitat de creixement és màxima. Determineu la taxa de creixement en aquest moment.

II.B.3. Al llarg del dia, les plantes d'una explotació agrícola perden aigua per evaporació a una velocitat proporcional a $(\sqrt{t} - \sqrt{s})\sqrt{p - t}$ (t en hores, $s \leq t \leq p$) on s és l'hora de la sortida del sol i p és l'hora de la posta. Els aportem aigua a una velocitat constant k. Determineu en quin moment la velocitat de pèrdua neta d'aigua és màxima si el sol surt a les 4:30 i es pon a les 19.

II.B.4. Satterlund-Haupt (1967) van estudiar la quantitat de neu que en una nevada queda interceptada per diverses espècies de coníferes i van modelar aquesta quantitat per una funció logística

$$I = \frac{S}{1 + \exp(-k(P - P_0))}$$

on P és la quantitat de neu caiguda (en mm d'aigua) i I és la quantitat de neu interceptada pels arbres (en mm d'aigua). Per a una espècie concreta (*Douglas fir*) els coeficients que van trobar van ser $S = 2.81$ mm, $P_0 = 4.88$ mm, $k = 0.98$ mm^{-1}. Determineu quin percentatge de neu s'intercepta en una nevada que es trobi en el punt d'inflexió d'aquesta corba logística.

II.B.5. La funció logística també s'ha utilitzat a ciències socials. En un article del 2005 a la revista *Technological Forecasting & Social Change* s'estudia el nombre (acumulat) d'atacs d'un cert grup terrorista entre els anys 1975 i 2005 i s'afirma que aquesta gràfica s'aproxima a una corba logística

$$N(t) = \frac{64.87}{1 + \exp(-at)} + 2.03$$

on t és el temps des de l'inici del període d'estudi. Calculeu quin serà, segons aquest model, el nombre total d'atacs terroristes a llarg termini. Determineu també el nombre d'atacs en el moment en què la funció creix el més ràpidament possible.

II.B.6. En un article del 2013 a la revista *Cibergeo* s'estudia el nombre de botigues en uns barris de Porto Alegre (Brasil) entre els anys 1983 i 2007 i s'afirma que segueixen una corba logística

$$N(t) = \frac{4714}{1 + 40.6\exp(-0.2357\,t)}$$

on t és el temps des de l'inici del període d'estudi. Calculeu quin serà, segons aquest model, el nombre total de botigues a llarg termini. Determineu el nombre de botigues en el moment en què la funció creix el més ràpidament possible. Calculeu la taxa de creixement màxima.

II.B.7. En un estudi epidemiològic s'ha vist que la velocitat amb què creix el nombre d'infectats N és positiva i és proporcional a $N^{0.82}$, aproximadament. Decidiu si, segons aquest model, la taxa de creixement del nombre d'infectats augmenta o disminueix amb el temps i si ho fa acceleradament o desacceleradament.

II.B.8. S'ha estudiat una colònia d'aus en una illa àrtica i s'ha vist que la velocitat de creixement de la colònia és positiva i és proporcional a $N^{1.215}$, aproximadament, on N és la mida de la colònia. Decidiu si, segons aquest model, la taxa de creixement augmenta o disminueix amb el temps i si ho fa acceleradament o desacceleradament.

II.B.9. El *coeficient de potència* C_p d'un generador eòlic és el quocient entre la potència que obté i la potència del vent: $C_p = P/P_w$. La potència del vent és $P_w = \frac{1}{2}\rho S V^3$, on ρ és la densitat de l'aire, S la superfície del disc que recorren els rotors i V és la velocitat del vent. La potència que obté l'aerogenerador és $P = \frac{1}{4}\rho S(V + V_s)^2(V - V_s)$ on V_s és la velocitat del vent després de passar per la turbina. Expresseu C_p com a funció del quocient $x = V_s/V$. Trobeu el màxim de la funció $C_p(x)$. Aquest màxim es coneix com a *llei de Betz* i posa un límit superior a l'eficiència de qualsevol generador eòlic.

II.B.10. El TSR (*tip speed ratio*) d'un generador eòlic és el quocient entre la velocitat de les puntes de les aspes i la velocitat del vent. Per a cada model de generador hi ha una relació entre el coeficient de potència del generador i el TSR, $C_p = C_p(\lambda)$ on λ és el TSR. Hi ha, doncs, un TRS òptim que és el que dóna el coeficient de potència màxim per a aquell model concret. La inclinació de les aspes permet controlar el TSR per tal que el generador treballi sempre amb rendiment màxim. Per a un generador senzill de tipus Perry, un cert model teòric ens dóna

$$C_p = \frac{1.6\lambda}{1 + 1.9\lambda}\left(1 - \frac{\lambda}{3}\right).$$

Determineu quin és el TSR òptim segons aquest model i quin és el coeficient de potència màxim que pot assolir el generador.

II.B.11. Fem un model sobre l'adició d'adob a un camp de cereals. Sigui x la quantitat d'adob (kg/ha), p_g el preu del gra de cereal (€/kg), p_n el preu de l'adob (€/kg) i e_0 el cost (€/ha) d'aplicar adob. Suposem que el rendiment extra gràcies a l'adob segueix una llei de Monod del tipus $\alpha x/(1 + \beta x)$. Trobeu una fórmula per a la quantitat òptima d'adob. Suposem que $p_g = 0.126$, $p_n = 1.1$, $e_0 = 18$ i que 50 kg/ha d'adob donen un increment de producció de 400 kg/ha, mentre que l'increment màxim que ens pot donar l'adob és de 500 kg/ha. En aquestes circumstàncies, quina decisió hem de prendre? (Basat en un full informatiu del 2009 del *Pla per a la fertilització agrària a les comarques gironines*.)

II.B.12. El consum de formatge l'any 2000 als Estats Units era de 13.6 kg per persona i any i creixia a un ritme anual de 115 g per persona i any. L'any 2000, la població dels Estats Units era de 282 milions de persones i creixia a un ritme de 3 milions de persones per any. Sigui $N(t)$ el consum total de formatge als Estats Units (en kg per any). Calculeu a quina velocitat estava creixent N l'any 2000 (en kg per any^2).

II.B.13. Una illa de la zona àrtica del Canadà està coberta per una capa de gel de 14.400 km^2, amb un gruix mitjà de 426 m. La superfície de gel s'està reduint a una velocitat de 8.45 km^2 per any. També s'està aprimant: el gruix de la capa de gel es redueix en 0.5 m per any. Calculeu la velocitat de pèrdua de massa de gel (en km^3/any).

II.B.14. Els tres principals fabricants de discos durs van vendre (l'any 2014) 552 milions d'unitats, amb una velocitat de creixement de les vendes de 26 milions d'unitats per any^2. La capacitat mitjana dels discos que es van vendre va ser de 750 GB i aquesta capacitat estava creixent a un ritme de 12 GB per any^2. Determineu la velocitat a que creixia el nombre de GB venuts pels tres fabricants.

II.B.15. Considereu el model de creixement de von Bertalanffy. En aquests model, la mida L d'un individu d'edat t ve donada per

$$L(t) = L_1 - (L_1 - L_0)\,\exp(-kt)$$

on L_0, L_1 i k són constants positives i $L_1 > L_0$. Demostreu que, en aquest model, la velocitat de creixement d'un individu és proporcional a la diferència $L_1 - L$. Calculeu la taxa de creixement quan $L = (L_0 + L_1)/2$.

II.B.16. Imaginem un cultiu en què la biomassa produïda és funció del contingut de nitrogen del sòl, segons una funció desconeguda. Experimentalment, hem vist que una proporció de nitrogen de 1 gram per kg de sòl dóna una producció de 2.7 (en unes certes unitats), i que amb aquesta proporció de nitrogen, la velocitat de variació de la biomassa produïda és de 1.05 unitats per gram. Feu una estimació lineal de la producció de biomassa amb un contingut de nitrogen al sòl de 1.1 g/kg.

II.B.17. La FAO ha adoptat com a model estàndard per calcular l'evapotranspiració de referència en els conreus l'equació de Penman-Monteith

$$ET_0 = \frac{0.408\Delta(R_n - G) + \gamma\frac{900}{T+273}u_2(e_s - e_a)}{\Delta + \gamma(1 + 0.34u_2)}.$$

u_2 és la velocitat del vent a 2 metres sobre el sòl. Per conèixer el significat de les altres variables, llegiu el document *Crop evapotranspiration – Guidelines for computing crop water requirements – FAO Irrigation and drainage paper 56*. Considereu ET_0 com a funció del vent u_2 i preneu aquests valors

$$R_n = 13.28,\ G = 0,\ \Delta = 0.122,\ \gamma = 0.0666,\ T = 16.9,\ e_s = 1.997,\ e_a = 1.409$$

Escriviu una aproximació lineal de ET_0 per a valors de u_2 propers a zero.

II.B.18. Δ a l'equació de Penman-Monteith és el *pendent de la corba de pressió de vapor de saturació*, una variable molt utilitzada a física de l'aire. La *pressió de vapor de saturació* depèn de la temperatura segons la fórmula

$$e^0(T) = 0.611\,\exp\left(\frac{17.27\,T}{T + 237.3}\right).$$

Doneu una fórmula per a $\Delta(T)$. Calculeu $e^0(15 \pm 1)$.

II.B.19. Per calcular les emissions de CO_2 (en kg/kWh) d'un combustible hem d'utilitzar la fórmula $q = 3.7C/h$ on C és el contingut de carboni al combustible i h és l'energia (en kWh/kg) d'aquest combustible. Per un determinat gas natural amb $C = 0.75$ hem mesurat $h = 12 \pm 1.5$. Determineu el valor de q.

II.B.20. Hi ha una llei al·lomètrica que afirma que la velocitat de vol dels insectes, ocells, avions, etc. és proporcional a l'arrel sisena de la massa de l'objecte volador. Decidiu si el creixement de la velocitat de vol quan creix la massa és accelerat o desaccelerat.

II.B.21. Hi ha una llei al·lomètrica que afirma que el ritme cardíac dels animals és inversament proporcional a l'arrel quarta de la seva massa. Decidiu si la disminució del ritme cardíac quan creix la massa és accelerada o desaccelerada.

II.B.22. En economia, l'*ingrés marginal* IM es defineix com l'ingrés total que es produiria per la venda d'una unitat addicional d'un producte. Observeu que això es pot entendre com la derivada de l'ingrés total respecte de la quantitat produïda Q. Demostreu que, si P és el preu,

$$IM = P + Q\,\frac{dP}{dQ}.$$

Suposeu que la corba de demanda d'un producte és tal que $P = k/Q$. Calculeu l'ingrés marginal.

II.B.23. En l'estudi del control biològic de plagues s'ha considerat la funció

$$g(N) = \frac{NF}{1 + (N/a)^b}$$

on N és la mida de la població, F és la fecunditat i $g(N)$ és la mida de la població en la generació successiva. a i b són constants positives, de manera que $b = 0$ indica que la població creix exponencialment mentre que valors de $b > 0$ indiquen una dependència major de la densitat que frena el creixement. (Vegeu el capítol 2 del *Handbook of Biological Control*.) Estudieu el comportament de $g(N)/N$ (creixement/decreixement i comportament a llarg termini).

II.B.24. Suposem que hem modelat la velocitat de creixement dels individus d'una espècie per una equació diferencial

$$\frac{dW}{dt} = aW^b$$

on a i b són constants positives. Estudieu el comportament de la taxa de creixement.

II.B.25. En les espècies que es reprodueixen una única vegada a la vida, la taxa de creixement de la població r pot ser funció del moment de la reproducció t. Un model apropiat dóna

$$r(t) = \frac{\log(p(t)\,m(t))}{t}$$

on $p(t)$ és la probabilitat de sobreviure fins l'edat t i $m(t)$ és el nombre de cries fèrtils que es generen a l'edat t. Si fem les hipòtesis que $p(t) = e^{-at}$ i $m(t) = bt^c$, determineu l'edat de reproducció òptima.

II.B.26. El model de Ricker és un dels què s'utilitzen per modelar la quantitat de peixos en una explotació pesquera. Segons aquest model, el nombre de cries R d'un estoc P ve donat per

$$R(P) = \alpha P \exp(-\beta P),$$

on α i β són constants positives. Determineu el valor màxim de R. Trobeu els punts d'inflexió de R, si n'hi ha, i estudieu la convexitat de la funció.

II.B.27. Hi ha una eruga que ataca els avets del Canadà i és atacada per una certa espècie d'ocells. En un estudi sobre aquest fenomen, s'ha modelat la velocitat de depredació de les erugues per part dels ocells per aquesta funció

$$f(N) = \frac{a^2 N}{k^2 + N^2},$$

on N és la densitat d'erugues i a i k són constants. Estudieu el creixement o decreixement de la velocitat de depredació. Determineu quina és la densitat d'erugues quan la velocitat de depredació és màxima.

II.B.28. Considerem diverses espècies presents en un hàbitat. Suposem que totes estan en una situació d'equilibri, menys una d'elles que sofreix un decreixement exponencial. Sigui $p = p(t)$ la proporció d'individus d'aquesta espècie en extinció. Quina evolució té p?

Part III:

La integral

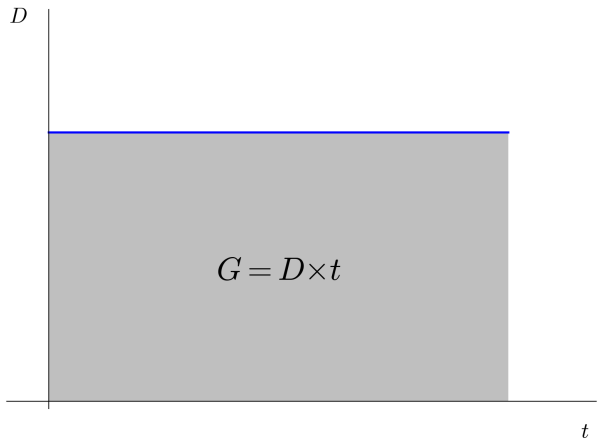
20. Multiplicar per una quantitat variable

20.1 Un exemple

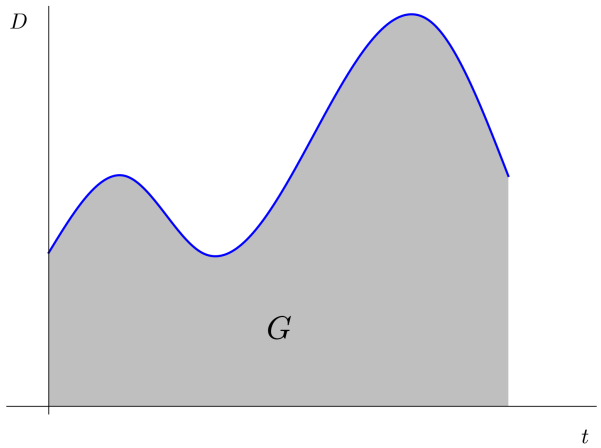
Imaginem que tenim una granja de vacum que produeix, diguem, mil litres de llet cada dia, i venem aquesta llet a 0.31€ el litre. Això ens dóna uns ingressos bruts de 310€ al dia. Quins ingressos tindrem en 30 dies? La resposta s'obté amb una multiplicació:

$$G = D \times t = 1000 \times 0.31 \times 30 = 9300\,€.$$

Gràficament, aquest resultat s'obtindria calculant la superfície d'un rectangle de base t (els 30 dies) i alçada D (els ingressos diaris).



Imaginem ara que el primer factor del producte anterior varia constantment. Per exemple, varia la producció diària o varia el preu. En aquest cas, el guany no el podem calcular per una simple multiplicació $G = D \times t$ perquè el primer factor del producte és una quantitat variable, una funció $D = D(t)$. De tota manera, la representació gràfica segueix tenint sentit i el guany és també la superfície per sota de la corba de preus:



Observem, doncs, que

La superfície entre l'eix x i una corba $y = y(x)$ generalitza el concepte de multiplicació $y \times x$ quan un dels factors és una variable que depèn de l'altre factor.

20.2 Superfície limitada per la gràfica d'una funció

Aquest concepte que hem il·lustrat en un exemple de l'economia apareix a molts altres camps.

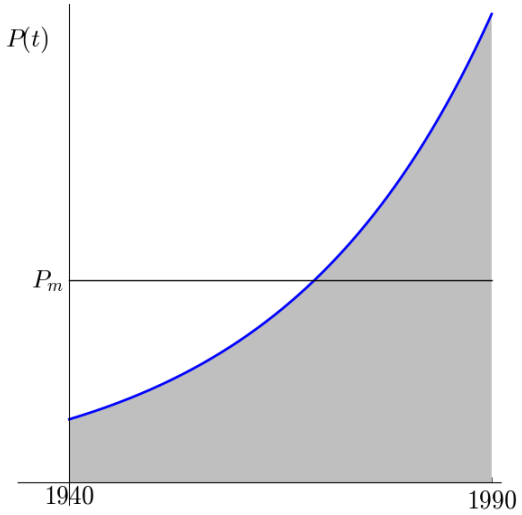
- **El treball.** Recordem que la noció física de **treball** produït per una força es defineix com el producte de la força per la distància que recorre.

  $$T = F \times d.$$

  Si la força varia al llarg de la distància, el concepte de treball segueix existint, però no es pot calcular com un simple producte, sinó que cal pensar-lo com la superfície determinada per la funció $F(d)$, igual que en l'exemple de la llet.

- **La mitjana.** Tots sabem calcular la mitjana d'uns quants nombres. Però, si tenim una variable contínua, quin és el seu **valor mitjà**? Per exemple, la producció mundial de coure ha crescut exponencialment des dels 2 milions de tones de l'any 1940 fins els 10 milions de tones l'any 1990. Quina ha estat la producció mitjana d'aquests anys? Com podem donar sentit a aquest concepte de producció mitjana?

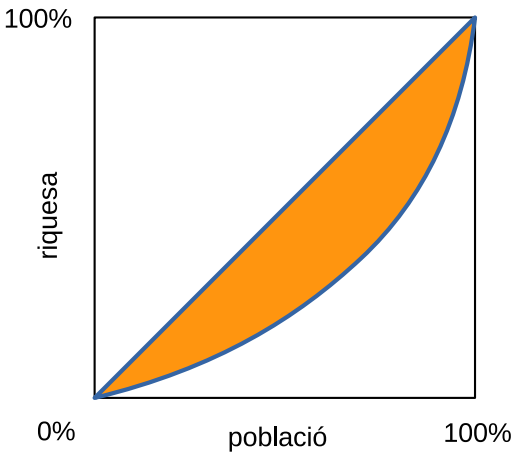
  Novament, el concepte de superfície resol aquest problema: n'hi ha prou amb dividir la producció total de tots aquests anys pel nombre d'anys. I la producció total és la superfície sota la corba exponencial $y = P(t)$ que ens dóna la producció en funció del temps.



Lògicament, la producció mitjana serà un valor P_m tal que la superfície del rectangle per sota d'aquest valor sigui la mateixa que la superfície sota la corba $y = P(t)$.

- **L'índex de Gini.** És una mesura de la desigualtat en la distribució de la riquesa en una societat. Aquest índex varia de 0 (màxima igualtat) a 1 (màxima desigualtat). Per exemple, l'índex de Gini d'Espanya valia 35.9 el 2012, mentre que el d'Ecuador era de 46.6 i el Noruega era de 25.9. Com es determina aquest índex?

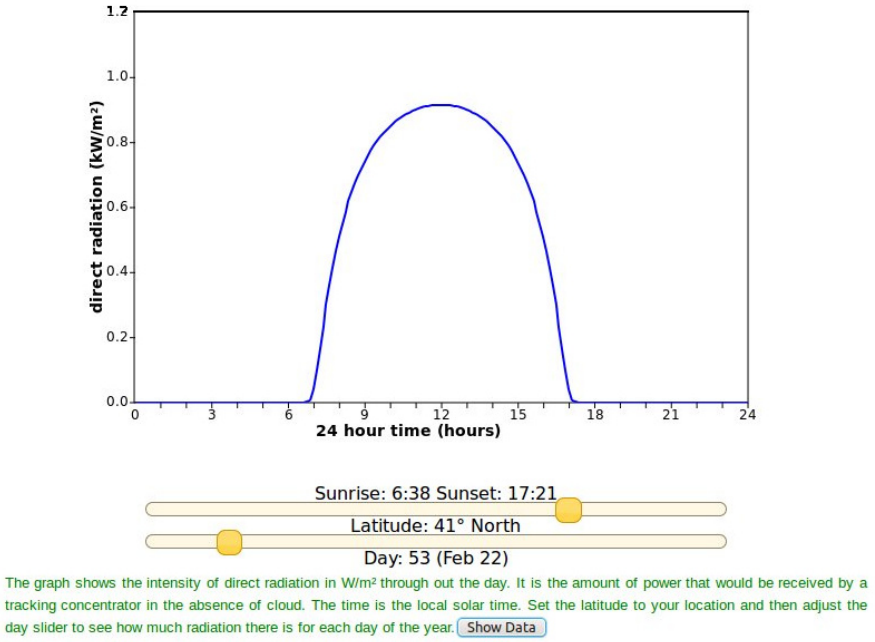
  Imaginem el percentatge de població distribuït al llarg de l'eix x, entre el 0% i el 100%, ordenat de manera que la població més pobra és a l'esquerra. A l'eix y hi representem la riquesa de la societat, també en percentatge, de 0% a 100%. Aleshores, la *corba de Lorenz* $y = y(x)$ és la corba que ens indica quin percentatge y de la riquesa té el x% de la població més pobra. Evidentment, si la riquesa estigués distribuïda igualitàriament entre la població, la corba de Lorenz seria una recta —la diagonal del quadrat— i, com més s'aparti la corba de Lorenz de la diagonal, més desigualment repartida estarà la riquesa. Una manera simple de mesurar aquesta desigualtat és considerar la superfície entre la diagonal i la corba de Lorenz. L'índex de Gini es defineix com el doble d'aquesta superfície.[1]



- **Producció d'una placa solar.** Imaginem una placa solar fixa que produeix electricitat a partir de la radiació solar que rep. Suposem que volem calcular la seva capacitat màxima de producció d'energia en un dia determinat. L'astronomia ens donarà la posició del Sol a cada moment del dia i, a partir d'aquestes dades i de l'orientació de la placa solar, podrem calcular la radiació $R(t)$ que rebrà la placa, en condicions meteorològiques òptimes. Per determinar la radiació total al final del dia haurem de «multiplicar» la radiació pel temps. Com que la radiació és variable, el que haurem de fer és calcular la superfície delimitada per la corba $y = R(t)$ quan t varia entre el moment de la sortida del Sol i el moment de la posta.[2]

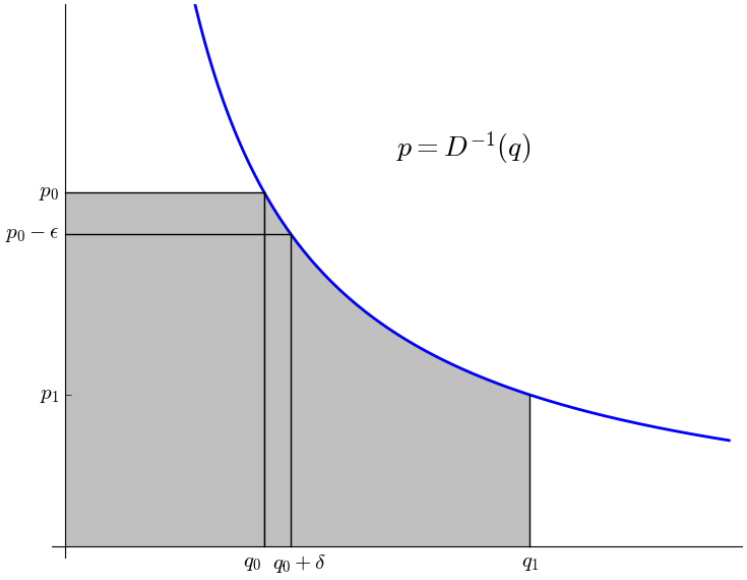
[1] El doble perquè així va de 0 a 1.

[2] Si visiteu la pàgina `www.pveducation.org/pvcdrom/properties-of-sunlight/calculation-of-solar-insolation` hi trobareu eines per fer aquests càlculs.

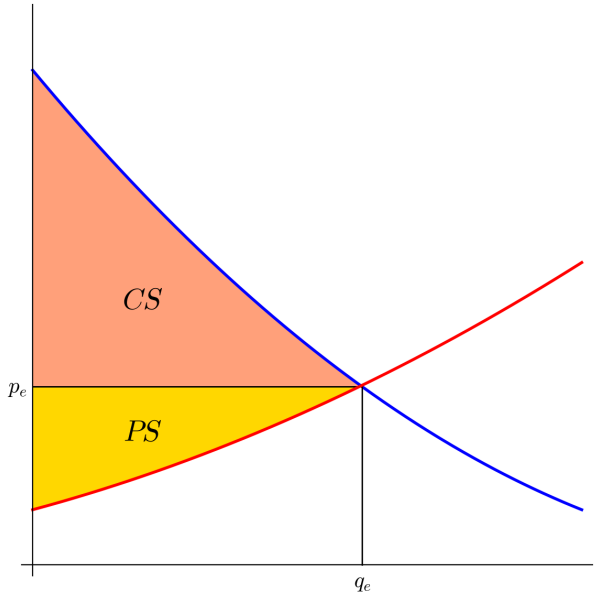


Calculador solar a `www.pveducation.org`

- Recordem la **funció de demanda** de l'economia $q = D(p)$ que ens dóna la quantitat que el mercat està disposat a comprar d'un producte o servei al preu p. Considerem la funció inversa $p = D^{-1}(q)$ i suposem que el mercat comprés a aquest preu entre $q = q_0$ i $q = q_1$. Expliquem-ho millor. Venem a un preu (alt) p_0 i tenim una demanda (baixa) q_0. Abaixem una mica el preu fins a $p_0 - \epsilon$ i tenim una demanda lleugerament superior $q_0 + \delta$. És a dir, el mercat compra una quantitat addicional igual a δ, pel fet de la rebaixa del preu igual a ϵ. Prosseguim abaixant el preu de manera contínua fins que arribem a un preu (baix) p_1 que dóna lloc a una demanda (alta) q_1. Quants diners hem recollit en tot el procés? Exactament la superfície limitada per la corba $p = D^{-1}(q)$ entre q_0 i q_1 juntament amb la superfície d'un rectangle adjacent com es veu a la figura.



Considerem ara el punt on es tallen la **corba d'oferta** (creixent, color vermell) i la **corba de demanda** (decreixent, color blau). És el punt d'equilibri (q_e, p_e) en el qual l'oferta coincideix amb la demanda. Fixem-nos ara en les superfícies groga i taronja del dibuix i pensem en quin significat tenen. La superfície CS representa el *consumer surplus* i és els diners que s'estalvien els consumidors quan el preu es situa a p_e. D'altra banda, la superfície PS representa el *producer surplus* que són els diners extres que reben els productors quan el preu es situa a p_e.



20.3 La integral

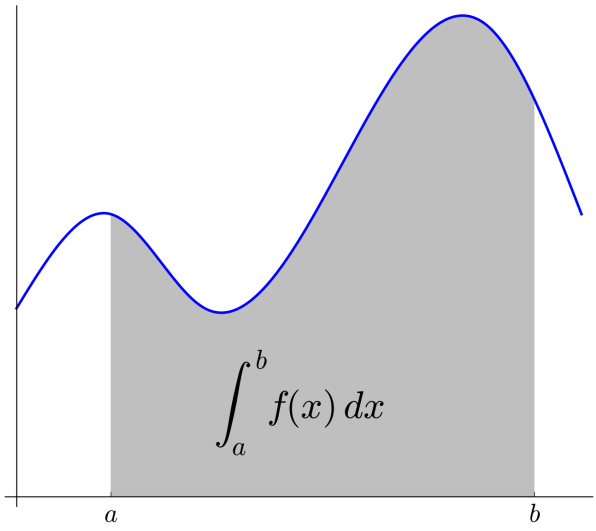
El concepte matemàtic que hi ha al darrere de tots els exemples que hem considerat a l'apartat anterior és el concepte d'**integral d'una funció**:

> **La integral d'una funció $y(x)$ entre dos valors $x = a$ i $x = b$ és l'àrea limitada per la gràfica de la funció i l'eix de les x, entre aquests dos valors. La notació que s'usa és**
>
> $$\int_a^b y(x)\,dx.$$

Els valors a i b s'anomenen **límits d'integració**.

Observacions:

- La part de la superfície que es troba per sota de l'eix x es considera, a efectes de la integral, negativa. Per exemple,
$$\int_0^{\pi} \cos x\,dx = 0$$
perquè la part de la superfície entre 0 i $\pi/2$ es cancel·la exactament amb la part de la superfície entre $\pi/2$ i π.



- La notació inclou dx, que es llegeix *diferencial de x*. Aquesta notació és útil per recordar-nos quina és la variable independent que considerem. Evidentment, si la variable fos, per exemple, t, escriuríem dt.

- Les àrees que ja coneixem ens donen valors de certes integrals, i viceversa, si som capaços de calcular una integral, tindrem l'àrea d'una figura. Per exemple,

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,r^2$$

  perquè la integral de l'esquerra representa l'àrea d'un semicercle de radi r. D'altra banda, si k és una constant,

$$\int_a^b k\,dx = k(b-a)$$

  perquè la integral de l'esquerra representa l'àrea d'un rectangle de base $b-a$ i alçada k.

- Segons el que hem dit abans, la **mitjana d'una funció** l'hem de calcular amb una integral, d'aquesta manera:

$$f_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

- Com a conveni, si $a > b$, posarem

$$\int_a^b y(x)\,dx = -\int_b^a y(x)\,dx.$$

- Les propietats elementals de l'àrea es traslladen a propietats bàsiques de la integral:

  1. Si k és una constant, $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$.

2. $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$.
3. $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.
4. Si $f(x) \leq g(x)$, aleshores $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

- La integral d'una funció $\int_a^b f(x)\,dx$ és el valor de l'àrea entre la seva gràfica i l'eix d'abscisses. Però, des d'un punt de vista matemàtic, caldria donar una definició més precisa de què és, exactament, l'àrea. Per fer-ho, es subdivideix molt finament l'interval $[a, b]$ i això dóna una descomposició de la superfície en petites bandes verticals, molt fines, cadascuna de les quals és, aproximadament, un rectangle. Aleshores, la definició rigorosa de què és l'àrea consisteix en sumar les àrees de tots aquests rectangles i prendre el límit quan el gruix de cada rectangle tendeix a zero.

  En particular, la definició matemàtica precisa de la integral necessita d'un pas al límit. Podria ser que aquest límit no existís: diríem que la funció *no és integrable*. Per exemple, la integral de la funció $y = 1/x^2$ entre -1 i 1 no existeix perquè la superfície que limita la gràfica d'aquesta funció és infinitament gran. Afortunadament, totes les funcions contínues i moltes que no són contínues són integrables.

21. Relació entre integral i derivada

21.1 El teorema fonamental del càlcul

Al llarg dels segles XVII i XVIII, diversos matemàtics com Barrow, Gregory, Newton o Leibnitz van demostrar l'existència d'una relació entre els conceptes d'**integral** i **derivada**. Aquesta relació és tan important que es coneix amb el nom de **teorema fonamental del càlcul**.

Quina és aquesta relació? Pensem que la integral d'una funció representa l'àrea entre la gràfica d'una funció i l'eix de les x's, i la derivada d'una funció representa el pendent de la recta tangent a la gràfica de la funció, dos conceptes aparentment allunyats un de l'altre. Per entendre quina és aquesta relació podem fer un exemple:

Exemple. Recordem l'exemple de la producció de llet. Cada dia les nostres vaques produeixen una certa quantitat de litres de llet, que venem a un cert preu, de manera que cada dia ingressem una quantitat de diners donada per una funció $f(t)$. Aquesta quantitat de diners és una funció del temps t, perquè la quantitat de llet varia i el preu de la llet també varia. Suposem que cada dia ingressem al banc els diners que anem obtenint a partir de la venda de la llet. Després d'un temps T, quants diners tindrem al banc? La resposta, ja ho sabem, és

$$\int_0^T f(t)\,dt.$$

Aquesta quantitat de diners és una funció de T. Diguem-n'hi $A(T)$, diners acumulats al banc després d'un temps T:

$$A(T) = \int_0^T f(t)\,dt.$$

La pregunta que ens fem ara és: com creix el saldo del nostre compte corrent? És a dir, quina és la velocitat de creixement de la funció $A(T)$. Uns instants de reflexió ens convenceran que el nostre saldo al banc creix exactament a la velocitat que marca la funció $f(t)$, que és la funció que ens diu quants diners guanyem cada dia. Si escribim això en llenguatge matemàtic, tenim

$$\frac{dA}{dT} = f(T).$$

Això és, precisament, el **teorema fonamental del càlcul**.[1] Dit d'una altra manera,

$$\frac{d}{dT}\int_0^T f(t)\,dt = f(T).$$

[1] En aquest teorema hem de suposar que $f(t)$ és una funció contínua a un interval que contingui zero. El límit inferior de la integral pot ser 0 o pot ser qualsevol altre valor a.

Exemple. Si estudiem el consum de petroli a l'Índia des del 1965 fins el 2008, veiem que la gràfica s'aproxima força a una funció com aquesta

$$f(t) = 258.5 \exp\left(\frac{t}{16.7}\right)$$

on t és el temps en anys des del 1965 i $f(t)$ és el consum en milers de barrils per dia (bbl/dia). Designem que $Q(T)$ el consum total de petroli a l'Índia quan han passat T anys des del 1965. A quina velocitat estava creixent Q l'any 2008?

En primer lloc, és clar que el consum total acumulat $Q(T)$ ve donat per una integral:

$$Q(T) = \int_0^T f(t)\,dt.$$

Ens pregunten per la velocitat de creixement de $Q(T)$ quan $T = 43$, és a dir, ens pregunten $Q'(43)$. Pet teorema fonamental del càlcul, $Q'(T) = f(T)$. Per tant,

$$Q'(43) = f(43) = 258.5 \exp\left(\frac{43}{16.7}\right) \approx 3394 \times 10^3 \text{ bbl/dia}$$

21.2 Primitives d'una funció

Si F és una funció i f és la seva derivada, direm que F és **una primitiva** de f. D'aquesta manera, els conceptes de derivada i primitiva són inversos un de l'altre:

Com que la derivada de $\sin x$ és $\cos x$, una primitiva de $\cos x$ és $\sin x$.

Observem que diem **una** primitiva, perquè una funció, en general, tindrà moltes primitives diferents: $\sin x + 2$ també és una primitiva de $\cos x$. Si coneixem una primitiva $F(x)$ d'una funció $f(x)$, totes les primitives de $f(x)$ en un interval seran de la forma $F(x) + k$, on k és qualsevol constant.

El teorema fonamental del càlcul que hem vist a l'apartat anterior ens diu que si $f(t)$ és una funció contínua, aleshores

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

és una primitiva de la funció $f(x)$. En particular, si coneixem una primitiva $G(x)$ de $f(x)$, tindrem que $G(x) = F(x) + k$ i es complirà això:

$$0 = \int_a^a f(t)\,dt = F(a) = G(a) - k$$

per tant, $k = G(a)$ i, aleshores:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) = G(b) - k = G(b) - G(a).$$

En resum:

Si coneixem una primitiva $G(x)$ d'una funció $f(x)$, podem calcular de manera immediata la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ així:

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

Aquesta relació entre primitives i integrals —que també es coneix amb el nom de **teorema fonamental del càlcul**— fa que sovint s'utilitzi la notació $\int f(x)\,dx$ per indicar les primitives de la funció $f(x)$.

Exemple. En la situació de l'exemple anterior, calculem el **consum mitjà** de petroli a l'índia en els 43 anys del 1965 al 2008. Sabem que la mitjana es calcula amb una integral:

$$f_m = \frac{1}{43}\int_0^{43} 258.5\,\exp\left(\frac{t}{16.7}\right)\,dt.$$

Pel calcular aquesta integral n'hi ha prou amb conèixer una primitiva de la funció que volem integrar. En aquest cas, podem trobar una primitiva *«a simple vista»*:

$$F(t) = 258.5 \times 16.7\,\exp\left(\frac{t}{16.7}\right)$$

Aleshores,

$$f_m = \frac{1}{43}(F(43) - F(0)) \approx 1218.$$

En general, pot ser molt difícil (o impossible) trobar una primitiva d'una funció, encara que es tracti d'una funció que s'expressi a partir de les funcions elementals. De fet, el teorema fonamental del càlcul ens diu que les funcions contínues sempre tenen una primitiva, però el problema és que hi ha casos on no podem expressar aquesta primitiva a partir de les funcions elementals.[2]

Exemple. Com determinem la velocitat de l'aigua d'un riu? A la pràctica, disposem d'un instrument de mesura de la velocitat de l'aigua però, evidentment, aquesta velocitat depèn de la profunditat a què submergim l'instrument. La velocitat és màxima a la superfície i va disminuint a mida que ens acostem al llit del riu. La física d'aquesta situació està ben estudiada per la hidrodinàmica. Hi ha un model que ens diu que, en condicions prou generals, la velocitat de l'aigua a una distància x del fons ve donada per una funció potencial[3]

$$v(x) = kx^r$$

on k és una constant que depèn del riu i r és un cert coeficient de fricció que també depèn de les característiques del riu i varia aproximadament entre 0.14 i 0.20. Aplicant això, la velocitat mitjana serà

$$v_m = \frac{1}{D}\int_0^D kx^r\,dx$$

[2]Pensem, per exemple, en una funció tan senzilla com la funció $1/x$. Sabem que $\log x$ és una primitiva però, si no coneguéssim la funció logaritme natural, no sabríem expressar la primitiva de $1/x$.

[3]Vegeu Lee et al., *Power Law Exponents for Vertical Velocity Distributions in Natural Rivers*, Engineering 2013, 5, 933–942.

on D és la fondària del riu.

És molt senzill trobar *«a ull nu»* una primitiva de la funció que volem integrar. Aleshores,

$$v_m = \frac{1}{D}\int_0^D kx^r\,dx = \frac{1}{D}\left[\frac{kx^{r+1}}{r+1}\right]_0^D = \frac{k}{r+1}\,D^r.$$

Aquí hem utilitzat la notació tradicional

$$\left[f(x)\right]_a^b = f(b) - f(a).$$

A quina distància del fons es dóna aquesta velocitat mitjana? Cal resoldre l'equació

$$\frac{k}{r+1}\,D^r = v(x) = kx^r.$$

La solució és

$$\frac{x}{D} = \left(\frac{1}{1+r}\right)^{1/r} \approx 0.4.$$

En resum, la velocitat mitjana de l'aigua d'un riu es troba a una profunditat (a comptar des de la superfície) que és el 60% de la profunditat total del riu, independentment del riu.[4] Aquesta és la justificació teòrica d'una regla pràctica que trobarem a molts manuals d'hidrologia.[5]

21.3 Fem-ho amb sage

Hem vist que si coneixem una primitiva d'una funció, ja és molt fàcil calcular la integral d'aquesta funció, gràcies al teorema fonamental del càlcul. També hem dit que trobar explícitament una primitiva d'una funció pot ser molt complicat, o impossible. Per exemple, una funció senzilla de la que la primitiva no es pot expressar a partir de les funcions elementals és la funció $\sin x^2$.

Afortunadament, a la pràctica podem calcular integrals sense necessitat de conèixer una primitiva. Recordem que la integral $\int_a^b f(t)dt$ és l'àrea limitada per la corba $y = f(t)$ i l'eix de les x's, entre $x = a$ i $x = b$. Aquesta superfície es pot aproximar tant com calgui, com hem explicat a la pàgina 128: es subdivideix molt finament l'interval $[a, b]$ i això dóna una descomposició de la superfície en petites bandes verticals, molt fines, cadascuna de les quals és, aproximadament, un rectangle. Aleshores, el valor aproximat de la integral s'obté sumant les àrees de tots aquests rectangles. Aquesta idea permet que els programes com sage calculin integrals amb facilitat.

```
sage: integral(exp(x)*cos(x),x)
 1/2*(cos(x) + sin(x))*e^x
sage: integral(exp(x)*cos(x),x,0,1)
 1/2*cos(1)*e+1/2*e*sin(1)-1/2
sage: integral(exp(x)*cos(x),x,0,1).N()
 1.37802461354736
```

[4] Observem que el resultat sí que depèn del riu, però si representem gràficament la funció $\sqrt[r]{\frac{1}{1+r}}$ per als valors de r entre 0.14 i 0.20, veurem que la funció varia molt poc de 0.4.

[5] Evidentment, el tema de la velocitat de l'aigua d'un riu és un tema important i molt més complex del que podem discutir en aquest petit exemple.

```
sage: integral(sin(x^2),(x,0,pi/2)).N()
 0.828116328842895
sage: integral(e^x*sin(x)^3*cos(x),x)
1/34*cos(4*x)*e^x-1/10*cos(2*x)*e^x-1/136*e^x*sin(4*x)+1/20*e^x*sin(2*x)
sage: integral(e^x*sin(x)^3*cos(x),x,0,pi/2)
 11/85*e^(1/2*pi) + 6/85
sage: integral(e^x*sin(x)^3*cos(x),x,0,pi/2).N(digits=30)
 0.693120602242574920120039909809
```

22. Càlcul de primitives —1—

En la majoria de casos pràctics, la millor manera de calcular la integral d'una funció complicada **no** és intentar trobar una primitiva de la funció per poder aplicar el teorema fonamental del càlcul, sinó que és utilitzar un programa de càlcul matemàtic com sage. Malgrat això, és convenient ser capaç de trobar primitives d'algunes funcions especialment simples. En aquesta lliçó estudiarem algunes estratègies per fer-ho.

22.1 Primitives trivials

Cada vegada que hem calculat la derivada d'una funció elemental, hem calculat també una primitiva. Per exemple, la coneguda fórmula

$$\frac{d}{dx}\, x^r = r x^{r-1}$$

ens diu que

$$\int x^r\, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \text{ si } r \neq -1.$$

Anàlogament, com que sabem que la derivada de $\log x$ és x^{-1}, també sabem que

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + C.$$

(Observem el valor absolut, necessari perquè $\log x$ només està definit per a $x > 0$ mentre que $1/x$ també està definida per $x < 0$.) D'aquest tipus de primitives en direm *primitives trivials*. Fem-ne una llista:

- $\int k\, dx = kx + C$
- $\int (f(x)+g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$
- $\int x^r\, dx = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + C$
- $\int e^x\, dx = e^x + C$
- $\int a^x\, dx = \dfrac{a^x}{\log a} + C$
- $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + C$

22.2 Primitives immediates

Hi ha funcions que s'assemblen molt a les de l'apartat anterior i per a les quals el càlcul d'una primitiva és molt senzill. Per exemple, sabem que una primitiva de e^x

és e^x, però si tenim la funció $\exp(3x+1)$, qui és una primitiva seva? La resposta és molt senzilla: $\exp(3x+1)/3$. Direm que són primitives *immediates*. Posem uns quants **exemples**:

- $\int e^{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x+1} + C$
- $\int \sin(2x+1)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + C$
- $\int \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C$
- $\int (2x+1)^r\,dx = \frac{1}{2(r+1)}(2x+1)^{r+1} + C, \quad r \neq -1$
- $\displaystyle\int \frac{1}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\log|2x+1| + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{2+3x^2}\,dx = \int \frac{1/2}{1+\frac{3x^2}{2}}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\right) + C$

Recordem que quan apliquem la regla de la cadena per derivar una funció $f(g(x))$ obtenim un producte $f'(g(x))g'(x)$. Això ens permet afirmar que

$$\int f'(g(x))g'(x)\,dx = f(g(x)).$$

Aquesta observació ens permet calcular primitives que tinguin aquest aspecte. Posem alguns **exemples**:

- $\displaystyle\int \frac{x}{3x^2+5}\,dx = \frac{1}{6}\log|3x^2+5| + C$
- $\int \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}(\sin x)^2 + C$
- $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\log|\cos x| + C$
- $\int xe^{3x^2+1}\,dx = \frac{1}{6}e^{3x^2+1} + C$

22.3 Primitives de funcions racionals

Recordem que una funció racional es una funció que s'expressa com el quocient de dos polinomis. Hi ha una estratègia que permet trobar una primitiva de qualsevol funció d'aquest tipus. N'aprendrem només els casos més senzills. Suposem que volem trobar una primitiva de la funció

$$f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)}.$$

Per fer-ho, observem que

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

i, per tant,

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-3)}\,dx = -\log|x-2| + \log|x-3| + C = \log\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C.$$

Aquest mètode es pot utilitzar per trobar una primitiva de qualsevol funció racional del tipus

$$\frac{ax+b}{(x-r)(x-s)}, \quad r \neq s.$$

Per fer-ho, escrivim

$$\frac{ax+b}{(x-r)(x-s)} = \frac{A}{x-r} + \frac{B}{x-s}$$

i determinem quins són els valors de les constants A i B. El cas $r = s$ s'ha de fer d'una manera una mica diferent. Per exemple,

$$\int \frac{1}{x^2-2x+1}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \int (x-1)^{-2}\,dx = -(x-1)^{-1} + C.$$

$$\int \frac{x}{x^2-2x+1}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \log|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

Finalment, si el denominador és un polinomi de segon grau sense arrels reals, l'estratègia és reduir-ho al cas x^2+1, que sabem que dóna lloc a la funció $\arctan x$. Això ho aconseguim amb el mètode de completació de quadrats que vam veure a la pàgina 12. Per **exemple**:

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

No estudiarem casos més complicats que aquests perquè, en general, és preferible resoldre'ls usant sage.

23. Càlcul de primitives —2—

23.1 Integració per canvi de variable

Suposem que volem calcular la superfície d'un quart de cercle de radi 1. Ja sabem, per la geometria elemental, que aquesta superfície val $\pi/4$ però, ni no sabéssim aquest resultat, hauríem de resoldre la integral

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Aquesta funció $\sqrt{1-x^2}$ no té una primitiva immediata, però podem trobar la seva primitiva fent el que es coneix com un **canvi de variable**. El canvi de variable que resol aquest problema concret consisteix en introduir una nova variable θ tal que

$$x = \sin\theta.$$

Aleshores, a la integral anterior, hem de substituir cada x pel seu valor en funció de θ. És a dir:

- Hem de substituir $\sqrt{1-x^2}$ per $\sqrt{1-\sin^2\theta} = \cos\theta$.
- Hem de substituir dx per $d(\sin\theta) = \cos\theta\,d\theta$. De fet, la notació dx serveix perquè no oblidem que hem de fer aquest canvi.
- Hem de substituir els límits d'integració $x = 0$ i $x = 1$, pels seus valors corresponents en la variable θ: $\theta = 0$ i $\theta = \pi/2$.

Aleshores,

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta.$$

D'aquesta manera, obtenim una nova integral que pot ser més fàcil o més difícil que la integral original. En aquest exemple concret, aquesta integral es pot resoldre aplicant una fórmula de trigonometria que diu

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1.$$

Per tant,

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin(2\theta)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Fem un segon exemple. Suposem que volem trobar una primitiva de $x\sqrt{2x-1}$. Podem fer el canvi $u = 2x-1$, amb la qual cosa $du = 2\,dx$ i tenim

$$\int x\sqrt{2x-1}\,dx = \int \frac{u+1}{2}\sqrt{u}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{4}\int (u^{3/2} + u^{1/2})\,du = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2}\right) + C.$$

23.2 Integració per parts

Recordem la regla de derivació d'un producte de dues funcions:

$$(uv)' = u'v - uv'.$$

Si interpretem aquesta regla en termes de primitives, ens diu que

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$$

que és una fórmula que, en alguns casos, ens pot ser útil per a calcular una integral. Aquesta fórmula s'acostuma a escriure en aquesta forma equivalent:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Se'n diu la **fórmula d'integració per parts** perquè, per aplicar aquest mètode, hem de separar la funció a integrar en dues parts.

Fem un exemple. Suposem que busquem una primitiva de $x \sin x$, és a dir,

$$\int x \sin x\,dx.$$

Fem això

$$u = x; \quad dv = \sin x\,dx.$$

Aleshores,

$$du = dx; \quad v = \int dv = \int \sin x\,dx = -\cos x$$

i la fórmula d'integració per parts ens diu

$$\int x \sin x\,dx = (-\cos x)x - \int (-\cos x)\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Un segon exemple podria ser aquest: $\int \log x\,dx$. Separem en dues parts així: $u = \log x$, $dv = dx$. La fórmula d'integració per parts ens dóna

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int x\,\frac{1}{x}\,dx = x\log x - x + C.$$

23.3 Integrals impròpies

Quin sentit pot tenir una integral com aquesta

$$\int_a^\infty f(x)\,dx\ ?$$

Geomètricament, aquesta integral correspondria a la superfície de la regió entre l'eix x i la corba $y = f(x)$, a partir del punt $x = a$. Aquesta regió és il·limitada per la dreta

però, com veurem, pot tenir una superfície finita. La manera natural d'entendre aquesta superfície és com un **límit**:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Posem un exemple.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} (1 - b^{-1}) = 1.$$

En canvi,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \log b = \infty.$$

Direm que la integral és **divergent**.

D'aquestes integrals se'n diuen **integrals impròpies**. Un altre exemple seria aquest:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

que, a primera vista, pot no semblar una integral impròpia perquè no hi apareix el símbol ∞, però ho és perquè la funció que volem integrar no està definida a $x = 0$ i, de fet, tendeix a infinit quan x tendeix a 0^+. Aquesta integral també pretén calcular la superfície d'una regió il·limitada. La resoldríem així:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0^+} (2 - 2\sqrt{a}) = 2.$$

Aquestes integrals impròpies apareixen a molts àmbits. Per exemple, a probabilitat.

Exemple. En molts casos d'una espècie animal sotmesa a l'acció d'un depredador, s'ha vist que l'esperança de vida dels individus d'aquesta espècie es pot modelar força bé pel que en estadística es coneix com la *distribució exponencial*. En aquesta distribució, la probabilitat que un individu superi l'edat t ve donada per una funció

$$f(t) = \exp(-rt).$$

En aquestes condicions, la vida mitjana (o esperança de vida) es calcula com

$$T_m = -\int_0^\infty t\,f'(t)\,dt.$$

En un cert estudi sobre el ratolí de bosc (*Apodemus sylvaticus*) del Parc Natural de Sant Llorenç de Munt i la Serra de l'Obac, s'ha trobat (temps en dies)

$$f(t) = \exp(-0.0032t).$$

Si volem determinar l'esperança de vida segons aquest model estadístic, hem de calcular aquesta integral impròpia:

$$-\int_0^\infty t\,f'(t)\,dt = 0.0032 \int_0^\infty t\exp(-0.0032t)\,dt$$

Per fer-ho, comencem buscant aquesta primitiva:

$$\int te^{-rt}\,dt.$$

Aquí és útil fer integració per parts

$$u = t; \quad dv = e^{-rt}\,dt; \quad du = dt; \quad v = -\frac{e^{-rt}}{r}.$$

Aleshores, la fórmula d'integració per parts ens dóna

$$\int te^{-rt}\,dt = -\frac{te^{-rt}}{r} - \frac{e^{-rt}}{r^2}.$$

Per tant, si r és positiu, tenim

$$r\int_0^\infty te^{-rt}\,dt = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-rt}\left(x+\frac{1}{r}\right)\right]_0^b = \frac{1}{r}.$$

En la situació del ratolí de bosc, aquesta vida mitjana és $1/0.0032 = 312.5$ dies.

23.4 Fem-ho amb sage

sage també permet calcular, en molts casos, integrals impròpies. Ja hem vist abans que ∞ es pot expressar en sage amb dues o's minúscules oo o amb la paraula Infinity. Observem com faríem el càlcul del final de l'apartat anterior.

```
sage: r=var('r')
sage: integral(x*e^(-r*x),x,0,oo)
 Is r positive, negative or zero?
sage: assume(r>0)
sage: integral(x*e^(-r*x),x,0,oo)
 r^(-2)
sage: reset('r')
sage: r=var('r')
sage: assume(r<0)
sage: integral(x*e^(-r*x),x,0,oo)
 ValueError: Integral is divergent.
```

Observem aquests altres exemples:

```
sage: integral(1/x,x,1,oo)
 ValueError: Integral is divergent.
sage: integral(1/x^2,x,1,oo)
 1
sage: integral(1/sqrt(x),x,0,1)
 2
sage: integral(e^(-x^2),x,-oo,oo)
 sqrt(pi)
```

Exercicis

A. Exercicis teòrics

III.A.1. Calculeu les primitives següents:

(a) $\int \frac{2\,dx}{3x^4}$; (b) $\int \frac{5}{\sqrt{5-x}}\,dx$; (c) $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$;

(d) $\int \frac{6x}{x^2+4}\,dx$; (e) $\int \tan(2x)\,dx$; (f) $\int \sin(2x)\cos(2x)\,dx$;

III.A.2. Calculeu aquestes primitives utilitzant integració per parts o per canvi de variable:

(a) $\int x^3 \log x\,dx$; (b) $\int \arcsin x\,dx$;

(c) $\int (x^2+5x-9)\,e^{-2x}\,dx$; (d) $\int e^x \cos x\,dx$;

(e) $\int x \arctan x\,dx$; (f) $\int \frac{e^x}{(e^x-3)^2}\,dx$.

III.A.3. Calculeu les primitives de les funcions racionals següents:

(a) $\int \frac{2x+5}{x^2-5x+6}\,dx$; (b) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$;

(c) $\int \frac{1}{x^4-1}\,dx$; (d) $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$;

III.A.4. En cadascun dels casos següents, calculeu l'àrea de la regió limitada per les corbes que es donen:

(a) $y^2 = 2x$ i $x^2 = 2y$; (b) $y = x(3+x^2)$, $y = 0$, $x = 2$;

(c) $y = \frac{1}{2+x^2}$, $y = \frac{x^2}{3}$; (d) $y = e^x$, $y = e^{-x}$ i $x = \log 2$;

(e) $y = x^2 - 4$, $y = 4 - x^2$; (f) $x = 8 + 2y - y^2$, $x = 0$, $y = -1$, $y = 3$;

III.A.5. Donada la funció

$$f(x) = \frac{1}{2}\,e^x - 2e^{-x},$$

calculeu l'àrea del domini de forma triangular que limiten la corba $y = f(x)$ i els eixos de coordenades.

III.A.6. Calculeu el valor de a per tal que l'àrea definida entre $x = 0$ i $x = 1/2$ per la corba $f(x) = \frac{a}{1+4x^2}$ sigui igual a l'àrea definida entre $x = 0$ i $x = 3$ per la corba $g(x) = \sqrt{9-x^2}$.

B. Exercicis d'aplicació

III.B.1. Sigui $B(t)$ una funció positiva de $t \geq 0$. Per exemple, $B(t)$ pot ser la quantitat de biomassa en una parcel·la, en funció del temps. Determineu taxa de creixement mitjana de $B(t)$ entre $t = 0$ i $t = t_1$.

III.B.2. La teoria de Haldane (1957) sobre el *cost de la selecció natural* planteja la situació següent. Suposem una població estable amb dos al·lels presents en proporcions p_0 i $q_0 = 1 - p_0$. Apareix un canvi en el medi que perjudica el segon al·lel (però no el primer), de manera que la població amb aquest segon al·lel passa a tenir una taxa de creixement negativa $-\epsilon$. Això vol dir que les proporcions dels dos al·lels aniran variant en el temps: $p(t)$, $q(t)$. A cada nova generació, es «perdrà» una proporció ϵq d'individus amb l'al·lel menys apte, fins que s'acabaran extingint seguint un model logístic $q' = -\epsilon qp$ (vegeu l'exercici II.B.28). La suma d'aquestes pèrdues és el que Haldane anomena el *cost* de la selecció natural:

$$C = \int_0^\infty \epsilon q \, dt.$$

Utilitzeu les propietats de la integral per comprovar que C es pot escriure com

$$C = \int_{p_0}^1 \frac{1}{p} \, dp.$$

Calculeu C si $p_0 = 10^{-6}$.

III.B.3. Si en una comunitat s'ha determinat experimentalment que la corba de Lorenz s'aproxima a $L(x) = 0.8x^2 + 0.2x$, calculeu l'índex de Gini d'aquesta comunitat.

III.B.4. Segons l'informe *Wealth, Income, and Power*, l'any 2010 l'u per cent de la població mundial acumulava el 35.4% de la riquesa. Si pensem que la riquesa mundial està distribuïda segons una corba de Lorenz potencial $y = x^r$, determineu aquesta corba i calculeu l'índex de Gini mundial l'any 2010.

III.B.5. Per estudiar l'augment de la concentració de CO_2 a l'atmosfera s'utilitzen les dades de l'observatori de Mauna Loa, a les illes Hawaii. S'ha vist que la concentració (q, en ppm) s'aproxima força bé a una funció

$$q(t) = 0.0125\, t^2 + 0.5813\, t + 310$$

on t és el temps en anys des de l'any 1950. Determineu la concentració mitjana de CO_2 a l'atmosfera de Mauna Loa des de l'any 1950 fins l'any 2010.

III.B.6. Consultant les estadístiques sobre la temperatura superficial de l'aigua del mar a la platja de Barcelona en el període 1974–2013 (IDESCAT) es veu que aquesta temperatura s'aproxima a $17.3 + f(t)$ graus, on $f(t)$ és una corba periòdica com aquesta

$$f(t) = 5.5 \sin\left(\frac{2\pi(t + 32)}{52}\right)$$

on t és el temps en setmanes a partir del primer de gener. Determineu la temperatura mitjana de l'aigua entre les setmanes 24 i 37.

III.B.7. Buidem per gravetat un dipòsit cilíndric vertical i volem saber el temps que trigarà a buidar-se. La física ens diu que, en aquestes circumstàncies, la velocitat a que surt el líquid per l'aixeta que hi ha a la part inferior del dipòsit és una funció lineal del temps

$$v = \alpha - \beta t$$

on α i β són constants positives que tenen aquests valors

$$\alpha = \sqrt{2gh_0}; \qquad \beta = \frac{a}{A}\, g.$$

h_0 és l'alçada del líquid a l'inici de l'operació, A és la secció del dipòsit, a és la secció efectiva de l'aixeta i g és l'acceleració de la gravetat. Determineu el temps que triga el dipòsit a buidar-se.

III.B.8. Volem determinar la quantitat d'energia solar que incideix sobre una superfície (per exemple, una placa solar) en un dia. Com que es tracta d'un problema molt difícil, el resoldrem sense tenir en compte l'efecte de l'atmosfera i en el cas d'una superfície horitzontal sobre la que incideix el sol des de que surt fins que es pon. En aquestes circumstàncies, la quantitat d'energia solar depèn de:

- La latitud λ del lloc.
- El dia de l'any n.
- L'hora solar $T = t + E$, on t és el temps (ordinari) i E és la discrepància que aproximadament només depèn de n.
- L'energia que arriba del sol a la Terra que, per simplificar, suposarem que és fixa $I_0 = 1367$ W/m^2. (De fet, varia en $\pm 3\%$ al llarg de l'any.)
- L'angle Z amb què incideix la llum del sol, és a dir, l'angle entre la vertical i els rajos de sol.
- L'hora de la sortida del sol i l'hora de la posta, que es produeixen quan $Z = \pm\pi/2$.
- la declinació del sol δ.

Aquestes variables estan relacionades entre elles. Tenim aquestes fórmules fonamentals

$$\delta = \frac{23.45}{180}\,\pi \sin\left(\frac{2\pi(284+n)}{365}\right).$$

$$\cos(Z) = \sin(\lambda)\sin(\delta) + \cos(\lambda)cos(\delta)\cos(\omega).$$

Aquí ω és el temps solar expressat en radiants a partir del migdia, és a dir

$$\omega = \frac{12 - T}{12}\,\pi.$$

Amb tota aquesta informació, calculeu la quantitat d'energia solar que incideix sobre una placa horitzontal de 1 m^2 situada al cim del Puigmal ($\lambda = 42.383°$), el dia 21 de febrer (si l'atmosfera no existís!).

III.B.9. Quan dibuixem en escala semilogarítmica la producció eòlica mundial d'electricitat entre els anys 1989 i 2012 obtenim, amb força aproximació, una recta. Si la producció el 1989 va ser de 2.6 TWh i la producció el 2012 va ser de 545 TWh, calculeu la producció total en tots aquests anys.

III.B.10. Suposem que les corbes d'oferta i demanda d'un cert producte s'aproximen a

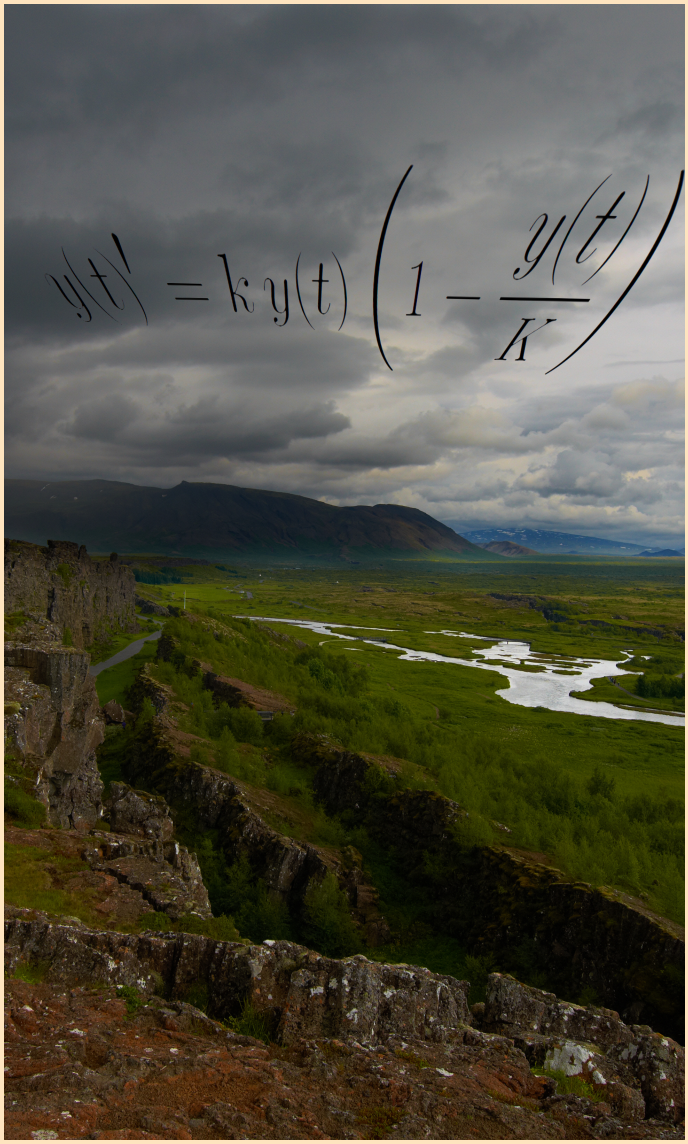
$$S(p) = p - 1; \qquad D(p) = \frac{6 - p}{p}.$$

Determineu, segons aquest model, el preu d'equilibri p_e, la demanda d'equilibri q_e, el *consumer surplus* CS i el *producer surplus* PS.

III.B.11. Comença a ploure i plou cada vegada amb més intensitat, aproximadament segons una funció $I = 4 \cdot 10^{-6}\, t^3$ on t és el temps en minuts i I és la intensitat de pluja en $\mathrm{l/m^2\,min}$. Calculeu quanta pluja haurà caigut en els primers 60 minuts.

Part IV:

Equacions diferencials



24. Conceptes bàsics i exemples

24.1 Coses que ja sabem

A l'apartat 12.4 ja hem après que una **equació diferencial** és una equació tal que

- La incògnita és una funció desconeguda $f(x)$.
- A l'equació hi apareixen la variable x, la funció incògnita $f(x)$ i les seves derivades $f'(x)$, $f''(x)$, etc.

Direm que són equacions diferencials **ordinàries** perquè la funció incògnita és una funció d'una única variable.

Ja hem vist alguns exemples d'equacions diferencials:

- L'equació del **creixement exponencial**

  $$y' = ry$$

  és una equació diferencial i les seves solucions vam veure que eren les funcions $y = ke^{rx}$ per a qualsevol valor de la constant k. Aquesta equació es pot escriure de maneres equivalents:

  $$\frac{y'}{y} = r; \qquad \frac{dy}{dx} = ry; \qquad dy = ry\,dx.$$

  Tanmateix, la formulació $y'/y = r$ no és exactament equivalent a la formulació inicial $y' = ry$ perquè la possibilitat $y = 0$ està contemplada a la formulació inicial però no a la segona formulació.

- L'equació del **creixement logístic**

  $$y' = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

  és una equació diferencial. A la pàgina 79 vam dir que les seves solucions són les funcions

  $$y = \frac{K}{1 + ke^{-rt}}$$

  per a qualsevol valor de la constant k. Però no vam dir ni com havíem arribat a aquesta solució ni si n'hi podia haver d'altres.

- Cada problema de càlcul de la **primitiva d'una funció** és també una equació diferencial. En efecte, si volem calcular $\int y\,dx$ utilitzant una primitiva de la funció $y(x)$, hem de resoldre l'equació diferencial $z' = y$.

Aquests tres exemples corresponen a equacions diferencials **de primer ordre** que són les que només fan intervenir la primera derivada de la funció incògnita. En canvi, la llei de Newton de la dinàmica $F = ma$ la podem entendre com una equació diferencial **de segon ordre**. En efecte, si tenim un cos de massa m que es mou per l'acció d'una força F, per conèixer la seva posició $x(t)$ hauríem de resoldre l'equació

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

que és una equació diferencial que involucra la segona derivada de la funció incògnita.

Les equacions diferencials de primer ordre que apareixen en els tres exemples anteriors són de la forma

$$y' = F(x, y)$$

on F és una funció contínua i $y = y(x)$ és una funció incògnita. Aquestes són les equacions que més estudiarem en aquest curs. En els tres exemples hem vist que teníem infinites solucions. Això és un fet general:[1]

- Una equació diferencial $y' = F(x, y)$ té sempre infinites solucions. Anomenarem **solució general** la família de totes les solucions. A la solució general hi apareixerà un paràmetre k.
- Cadascuna de les solucions concretes d'una equació diferencial $y' = F(x, y)$ direm que són **solucions particulars** de l'equació.
- Si considerem una equació diferencial $y' = F(x, y)$ i fixem unes **condicions inicials**, hi ha una única solució particular que satisfà aquestes condicions inicials. Fixar unes condicions inicials vol dir fixar el valor de la funció y per a un cert valor de la variable x.

Posem un exemple senzill. L'equació $y' = ry$. La solució general és $y = ke^{rx}$. Les solucions $y = e^{rx}$, $y = -2e^{rx}$, $y = \pi e^{rx}$, etc. són solucions particulars. Si fixem, per exemple, les condicions inicials $y(1) = -1$, aleshores hi ha una única solució amb aquestes condicions inicials, que és la funció $y = -e^{-r}e^{rx} = -e^{r(x-1)}$.

24.2 Hi ha equacions diferencials arreu

Les equacions diferencials són omnipresents a la ciència. Molt sovint, les lleis de la natura, de l'economia, de les dinàmiques socials,etc., s'expressen com a equacions diferencials. Posem alguns exemples (que siguin prou senzills per cabre dins del marc d'aquest curs).

- Els **models de població** que ens diuen com evoluciona la mida d'una població vénen donats per equacions diferencials que relacionen la mida de la població i

[1] Els comentaris que fem a continuació no tenen un rigor matemàtic complet. Per formular correctament el que es coneix com a *teorema d'existència i unicitat de solucions d'una equació diferencial ordinària* caldria utilitzar un llenguatge matemàtic molt més precís, fer hipòtesis de continuïtat, de diferenciabilitat, parlar de solucions locals, d'intervals de definició, etc. No ho farem perquè creiem que en aquest curs tan elemental no és recomanable que ens exigim aquest nivell de rigor.

la seva taxa de creixement. Per exemple, l'equació del creixement exponencial o la del creixement logístic.

- La llei de Newton de la **dinàmica** $F = ma$ és una equació diferencial de segon ordre que ens relaciona la segona derivada de la posició d'un cos amb la força que s'exerceix sobre ell.

- La llei de la **gravitació** de Newton que regeix el moviment dels cossos celestes es pot formular com una equació diferencial de segon ordre.

- La llei de Newton del **refredament** d'un cos afirma que un cos situat en un ambient més fred es refreda a una velocitat proporcional a la diferència entre la seva temperatura i la de l'ambient. Això és pot escriure com una equació diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_A).$$

- El moviment d'un **pèndol** o el d'una **molla** estan regits per equacions diferencials de segon ordre. En particular, si θ és l'angle que forma amb la vertical un pèndol de longitud L, es compleix

$$L\theta'' + g\sin(\theta) = 0.$$

  Si tenim un cos de massa m sotmès a l'acció d'una molla, la seva distància x al punt d'equilibri compleix que

$$mx'' = -kx,$$

  on k és una constant que depèn de la «força» de la molla.

- El model de creixement de **von Bertalanffy** ve donat per l'equació diferencial $L' = k(L_\infty - L)$, que és idèntica a la de la llei de Newton del refredament.

- D'entre les moltes equacions diferencials que apareixen a l'economia, podem citar l'equació de **Solow-Swan** (1956)

$$\frac{dk}{dt} = sf(k) - (n + \delta)k$$

  que intenta modelar l'evolució del capital per capita k al llarg del temps, sota unes certes hipòtesis. En aquesta equació $f(k)$ és la producció per capita, s és la proporció d'aquesta producció que es reinverteix, n és la taxa de creixement de la població i δ és la taxa de depreciació del capital.[2] Observem que, si $s = 0$, tenim l'equació del decreixement exponencial. Per poder utilitzar aquesta equació cal tenir algun model per a la funció $f(k)$ que relaciona capital i productivitat. Per exemple, el model de Cobb-Douglas (1927) de la pàgina 16 pren una funció potencial $f(k) = Ak^\alpha$.

- El model més simple per modelitzar la **contaminació d'una conca fluvial**, es basa en una equació diferencial del tipus

$$\frac{dQ}{dt} = E(t) - S(t)$$

[2] Podeu aprendre més coses sobre aquest model al llibre *Economic Growth* de Robert J. Barro i Xavier Sala i Martin.

on $Q(t)$ és la quantitat de contaminant (com a funció del temps), $E(t)$ és la funció que ens mesura el contaminant que entra a la conca i $S(t)$ és la funció que ens mesura el contaminant que surt de la conca.

- Els models d'**extensió d'una epidèmia** utilitzen equacions diferencials. Per exemple:

$$\frac{dI}{dt} = kI(1 - rI)$$

on $I(t)$ és el nombre d'infectats i l'equació ens diu que la velocitat amb què creix el nombre d'infectats és proporcional al nombre d'infectats i al nombre de no infectats. La **difusió d'un rumor** es pot modelar per equacions del mateix tipus.

- En una reacció química del tipus $A + B \to C$, la llei d'acció de masses ens diu que la velocitat amb què es crea l'espècie C és proporcional a les concentracions de A i de B. Això ho podem escriure com una equació diferencial

$$\frac{d[C]}{dt} = k([A]_0 - [C])([B]_0 - [C])$$

on $[C]$ és la concentració de C i $[A]_0$ i $[B]_0$ són les concentracions inicials de A i B, respectivament.

Si tenim equacions diferencials, també tindrem **sistemes d'equacions diferencials**. Per exemple

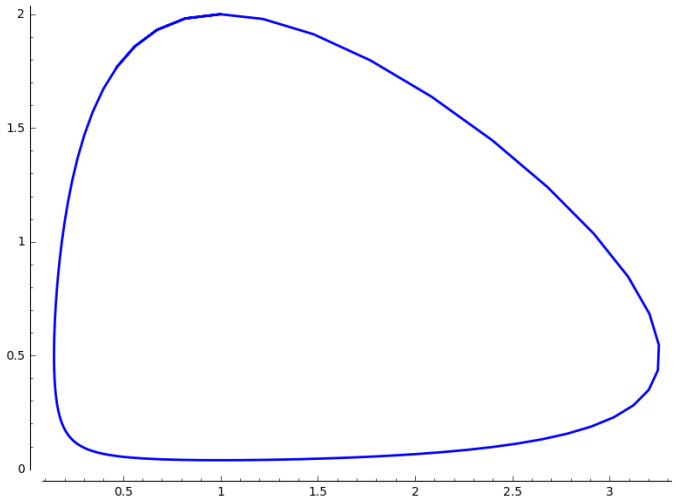
- El clàssic **model depredador-presa** de Lotka-Volterra (1910, 1920). Tenim una funció $x = x(t)$ que ens dóna el nombre de preses (per exemple, conills) en un hàbitat i una altra funció $y = y(t)$ que ens dóna el nombre de depredadors (per exemple, guineus) en aquest mateix hàbitat.

  El creixement d'aquestes dues funcions està interrelacionat, degut a la dependència recíproca que tenen els depredadors i les preses. Les equacions que governen aquestes funcions són

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x - \beta xy \\ y' &= \delta xy - \gamma y \end{aligned}$$

  A la primera equació, el paràmetre α és la taxa de reproducció dels conills i el paràmetre β és la taxa de depredació dels conills per les guineus. A la segona, δ és la taxa de reproducció de les guineus i γ és la taxa de mort de les guineus.

  Una solució particular d'aquest sistema d'equacions és una parella (x, y) de funcions de t que es poden entendre com les equacions d'una corba (parametritzada) al pla. En funció dels valors dels paràmetres α, β, γ i δ i de les condicions inicials, aquesta corba pot ser una corba tancada (parlarem d'una **solució periòdica**). Per exemple, aquí tenim una d'aquestes solucions periòdiques:



Observem que el sistema va passant periòdicament per situacions de moltes guineus/poc conills, molt poques guineus/molt pocs conills, molts conills/poques guineus i altre cop moltes guineus/poc conills.

- Unes equacions similars s'utilitzen en el que es coneix com a **model SIS d'una epidèmia**, que és aquell en què hi ha una població sana S susceptible de ser infectada i una població infectada I que es recupera a una taxa constant, de manera que es pot tornar a infectar.

$$\begin{aligned} S' &= \alpha I - \beta IS \\ I' &= \beta IS - \alpha I \end{aligned}$$

Aquí la població total $S+I$ és constant, per tant, aquest sistema de dues equacions es pot reduir a una única equació de tipus logístic $I' = kI(1-rI)$. Un model més complicat és el **model SIR d'una epidèmia** en la que els sans es poden infectar i els infectats poden recuperar-se i convertir-se en immunes. Si R és el nombre de recuperats, les tres variables S, I, R compliran unes equacions com aquestes

$$\begin{aligned} S' &= -\alpha SI \\ I' &= \alpha SI - \beta I \\ R' &= \beta I \end{aligned}$$

- Si, com a resultat d'una sèrie de mutacions, diversos **tipus genètics** conviuen en un hàbitat en les proporcions $x_1, \ldots, x_n$, podem pensar que el creixement de cada població dependrà de la seva mida x_i i també de la diferència entre la seva aptitud f_i i la mitjana de les aptituds de tots els tipus. Podem modelar aquesta situació amb un sistema d'equacions diferencials

$$x_i' = k_i x_i \Big(f_i - \sum_j x_j f_j \Big); \quad i = 1, \ldots, n$$

on x_i és la mida de la població de tipus i i f_i és la seva aptitud.[3]

[3] Vegeu Peter Schuster, *Mathematical modeling of evolution. Solved and open problems*, Theory Biosci. (2011) 130:71–89.

24.3 Resolem l'equació del creixement exponencial

Ja sabem que la solució general de l'equació diferencial $y' = ry$ és $y = ke^{rx}$. Vegem ara com podem arribar a aquesta conclusió, utilitzant un recurs tècnic molt simple. En primer lloc, escrivim l'equació en aquesta forma equivalent

$$dy = ry\,dx.$$

Aleshores, si suposem que $y \neq 0$, podem escriure l'equació en aquesta altra forma equivalent

$$\frac{dy}{y} = r\,dx.$$

Aquesta igualtat serà equivalent a aquesta:

$$\int \frac{dy}{y} = \int r\,dx.$$

Aquestes dues integrals indefinides les sabem calcular:

$$\log|y| + k_1 = rx + k_2$$

on k_1, k_2 són constants arbitràries. Si les agrupem al costat dret de l'equació, tenim

$$\log|y| = rx + k_3$$

on ara k_3 és una constant arbitrària. Aquesta igualtat és equivalent a

$$|y| = e^{rx+k_3} = e^{rx}\,e^{k_3} = Ke^{rx}.$$

Com que k_3 és una constant arbitrària, e^{k_3} és una constant positiva arbitrària, que podem anomenar K. Si ara eliminem el valor absolut del terme de l'esquerra, obtenim

$$y = \pm Ke^{rx}.$$

Observem ara que $k = \pm K$ és una constant diferent de zero arbitrària. Hem arribat a la conclusió que

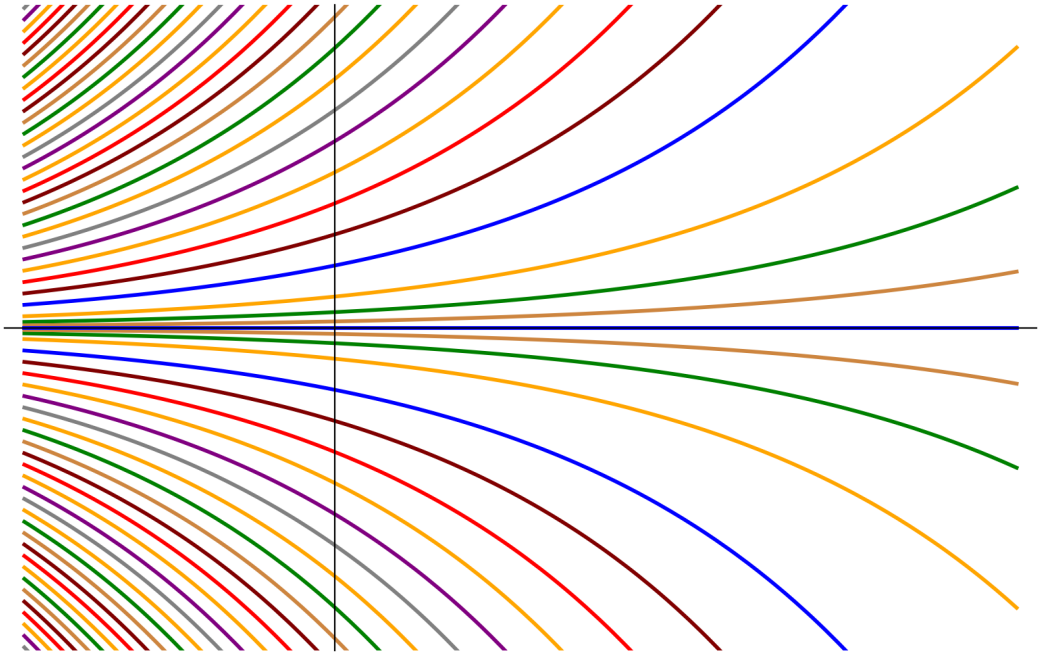
$$y = ke^{rx}.$$

Si ara recordem que al començament d'aquest procés havíem suposat que $y \neq 0$ i si observem que $y = 0$ també és una solució de l'equació, arribem a la conclusió que **totes** les solucions de l'equació inicial són

$$y = k\,e^{rx}$$

on ara k és una constant arbitrària (positiva, negativa o zero).

Donant valors a la constant k obtindrem les **solucions particulars**. Cada solució particular és una corba exponencial i per cada parella de valors (x_0, y_0) existeix una única solució particular y amb $y(x_0) = y_0$. Si dibuixem les gràfiques de totes aquestes solucions particulars, omplirem el pla amb corbes exponencials. Per cada punt del pla hi passa una solució particular de l'equació, i només una.



25. Resolució d'algunes equacions diferencials autònomes

En general, trobar expressions explícites de les solucions d'una equació diferencial pot ser molt difícil o impossible. El mètode que hem utilitzat per a l'equació del creixement exponencial permet resoldre certs tipus d'equacions a partir de calcular dues integrals. En particular, aquest mètode es pot utilitzar per a les **equacions autònomes** que són les de la forma

$$y' = g(y)$$

i, més en general, per a les **equacions separables** que són les de la forma

$$y' = f(x)g(y).$$

En aquest capítol veurem alguns exemples.[1]

25.1 Resolem l'equació del creixement logístic

L'equació logística

$$y' = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right).$$

és autònoma i la podem resoldre com vam fer amb l'exponencial.

- Escrivim l'equació així

  $$\frac{dy}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)} = r\,dx.$$

  Fent això hem descartat els casos $y = 0$ i $y = K$, que també són solucions de l'equació logística. Al final, caldrà recordar aquestes dues solucions.

- Integrem els dos costats de l'equació.

  $$\int \frac{dy}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)} = \int r\,dx = rx + C_0.$$

  La integral de l'esquerra es pot calcular pel mètode de les fraccions simples

  $$\frac{1}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)} = \frac{1}{y} + \frac{1/K}{1 - \frac{y}{K}}.$$

  $$\int \frac{dy}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)} = \log|y| - \log\left|1 - \frac{y}{K}\right| = \log\left|\frac{y}{1 - \frac{y}{K}}\right|.$$

[1] Cal dir que la discussió que farem aquí és essencialment *heurística*. Si el lector vol una justificació matemàticament rigorosa del que fem en aquests exemples, ha de consultar textos més teòrics sobre equacions diferencials ordinàries.

- Per tant,
$$\frac{y}{1-\frac{y}{K}} = Ce^{rx}$$
on $C \neq 0$ és una constant arbitrària.

- Ara ens cal aïllar y de l'expressió anterior. El resultat és
$$y = \frac{K}{\frac{K}{C}e^{-rx}+1}.$$

- Si ara calculem el valor d'aquesta funció per $x = 0$ observem que $y(0) = CK/(C+K)$. Designem y_0 aquest valor inicial, que és un valor arbitrari $\neq 0$. Aleshores, la funció y també es pot escriure així
$$y(x) = \frac{K}{1+ke^{-rx}}, \qquad k = \left(\frac{K}{y_0}-1\right).$$

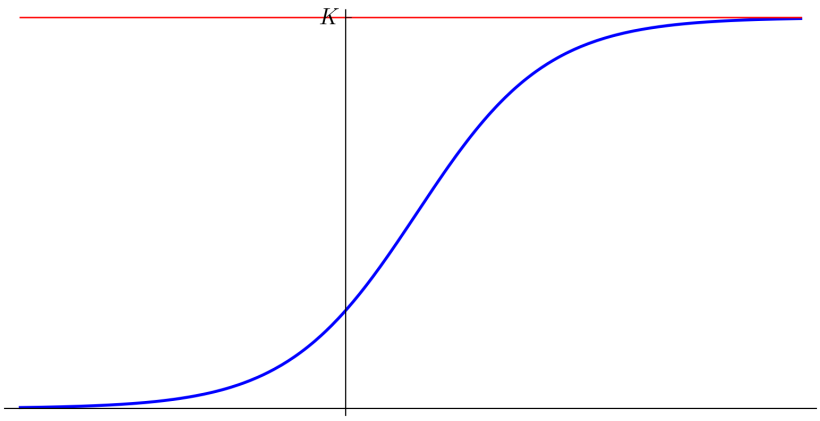
- Finalment, ens cal afegir les dues solucions que hem descartat al principi. La solució $y = K$ ja està inclosa a la fórmula anterior, agafant $y_0 = K$. Només falta afegir la solució $y = 0$.

Hem arribat a la conclusió que la **solució particular** de l'equació logística amb les condicions inicials $y(0) = y_0$ és

$$y(x) = \frac{K}{1+\left(\frac{K}{y_0}-1\right)e^{-rx}} \text{ si } y_0 \neq 0,$$
$$y(x) = 0 \text{ si } y_0 = 0.$$

Mirem com són aquestes solucions i d'aquesta manera completarem el nostre estudi de l'equació logística que ha anat apareixent en diversos moments d'aquest curs. Suposem que $K > 0$ (el cas $K < 0$ és anàleg).

1. Hi ha dues solucions constants: $y = 0$ i $y = K$.
2. Si $0 < y_0 < K$, la solució és una corba —la corba «logística»— que té aquesta forma



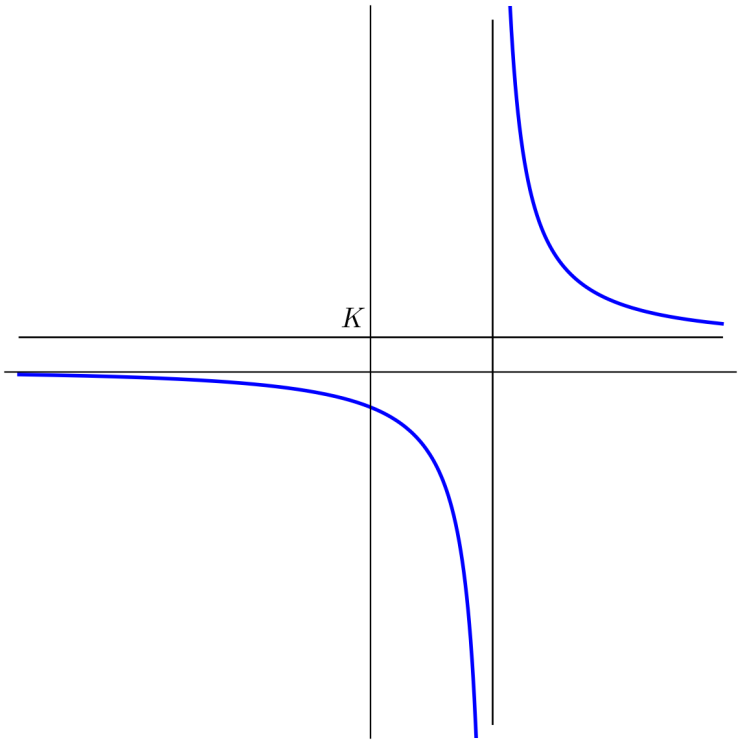
Aquesta corba tendeix a K quan $x \to \infty$ i tendeix a 0 quan $x \to -\infty$.

3. La solució és ben diferent si $y_0 > K$ o $y_0 < 0$. En aquests casos la solució particular té una discontinuïtat —una asímptota vertical— al punt $x = a$ i a ve donat per

$$a = \frac{1}{r} \log\left(1 - \frac{K}{y_0}\right)$$

de manera que la corba té dues branques. Per a valors $x < a$ la funció és negativa i tendeix a $-\infty$ quan $x \to a^-$. Per a valors $x > a$, la funció és positiva (de fet és $> K$) i tendeix a ∞ quan $x \to a^+$.

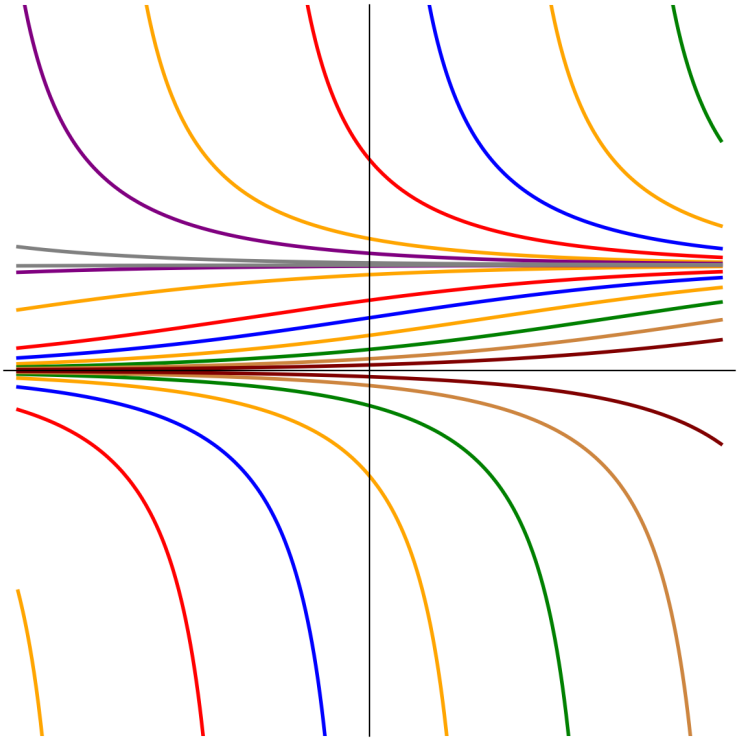
La forma de la gràfica és la que s'observa en aquesta representació que hem fet amb sage.



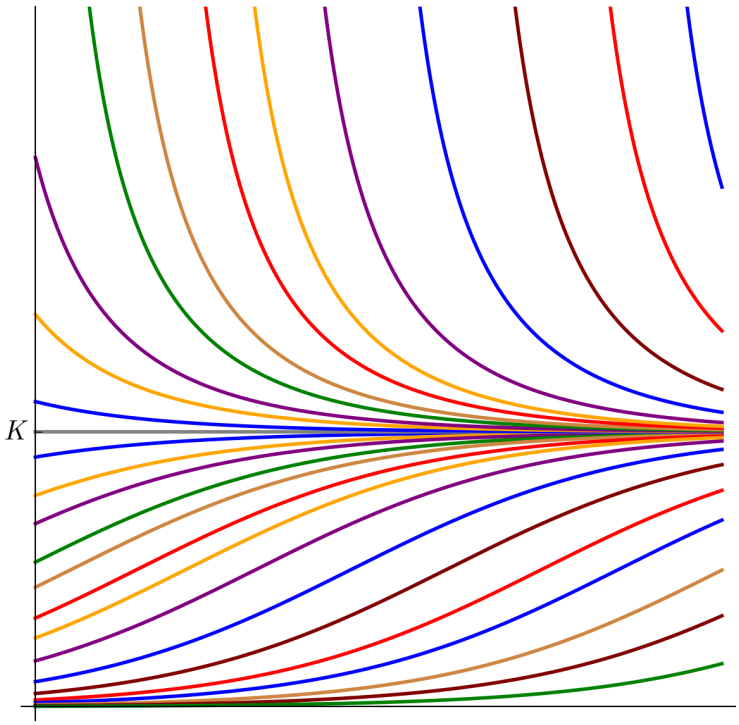
Veiem que, igual que abans, aquesta corba tendeix a K quan $x \to \infty$ i tendeix a 0 quan $x \to -\infty$. D'altra banda, el comportament quan ens acostem a la discontinuïtat $x = a$ ja l'hem explicat i el podem escriure així:

$$\lim_{x \to a^+} = \infty, \qquad \lim_{x \to a^-} = -\infty.$$

Si dibuixem totes les solucions, omplim el pla amb corbes solució, de manera que per cada punt del pla passa una solució particular de l'equació logística:



Si les variables x, y són positives (per exemple, en el cas del model logístic de creixement d'una població), aquest dibuix es converteix en el que ja havia aparegut a la pàgina 60.



25.2 Contaminació d'un llac

Suposem que hi ha un vessament continuat d'un contaminant al riu Ter i volem conèixer com evolucionarà la contaminació a l'aigua del Ter més avall de l'envasament de Sau. En tota la seva magnitud, és un problema molt complex, però farem una sèrie de simplificacions per tal d'obtenir un primer model d'aquesta situació.

Suposem que a Sau hi ha $V = 120$ milions de m^3 d'aigua i que aquest volum es manté constant. Hi entra l'aigua (contaminada) del Ter a un ritme constant de $q = 5$ m^3 per segon i en surt aigua al mateix ritme. Fem la hipòtesi que la contaminació es reparteix uniformement per tota l'aigua de Sau. Això no serà cert, però admetem aquesta hipòtesi simplificadora per fer el problema més accessible. Volem determinar l'evolució de la concentració del contaminant a l'aigua que surt de l'embasament.

Designem per $x = x(t)$ la concentració del contaminant a l'aigua que surt de l'embasament. És una funció del temps que comença amb el valor $x(0) = 0$ perquè suposem que abans de l'inici del vessament no hi ha contaminació. Fem aquestes consideracions:

- La quantitat de contaminant present a l'embasament de Sau és xV.
- La quantitat de contaminant que entra a l'embasament per unitat de temps és aq, on a és la concentració de contaminant al Ter, que suposem que és constant.
- La quantitat de contaminant que surt de l'embasament per unitat de temps és xq.
- La variació de contaminant a l'embasament ve donada per la derivada

$$\frac{d}{dt}(xV).$$

- La variació de contaminant a l'embasament ve donada per la diferència entre el contaminant que entra i el que en surt.

La conclusió és que s'ha de complir aquesta equació diferencial

$$\frac{d}{dt}(xV) = aq - xq.$$

La solució particular d'aquesta equació diferencial amb les condicions inicials $x(0) = 0$ en donarà la funció $x(t)$ que calcula la concentració de contaminant a l'aigua que surt de l'embasament.

Aquesta equació diferencial és autònoma i es pot resoldre pel mateix mètode que les equacions dels exemples anteriors. Comencem escrivint l'equació en la forma

$$\frac{dx}{a-x} = \frac{q}{V}\,dt.$$

Integrem els dos costats i obtenim

$$-\log|a-x| = \frac{q}{V}t + C$$

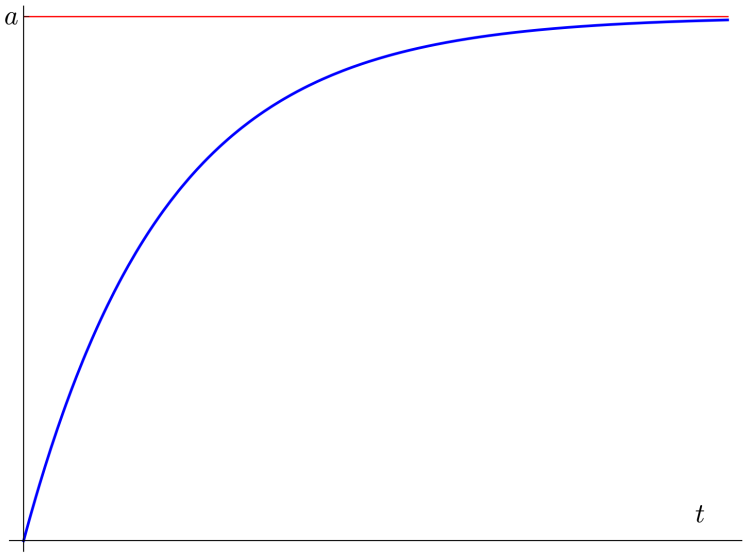
que ens dóna la solució general

$$x = a - k \exp\left(-\frac{q}{V}t\right).$$

Les condicions inicials $x(0) = 0$ impliquen que la constant k val $k = a$. Per tant, la solució particular que ens interessa és

$$x(t) = a(1 - \exp(-qt/V)).$$

És a dir, la contaminació a l'aigua que surt de l'embasament comença amb el valor $x(0) = 0$ i s'acosta asimptòticament al valor $x(\infty) = a$ seguint una corba de tipus exponencial. D'aquesta manera, si coneixem el valor de a (concentració del contaminant al Ter) podem calcular efectivament el valor de x (concentració del contaminant a l'aigua que surt de l'embasament de Sau) en qualsevol instant de temps t. Si dibuixem aquesta funció obtenim



Què passa si aturem el vessament al Ter quan la contaminació a Sau val x_0? L'equació diferencial

$$\frac{d}{dt}(xV) = aq - xq$$

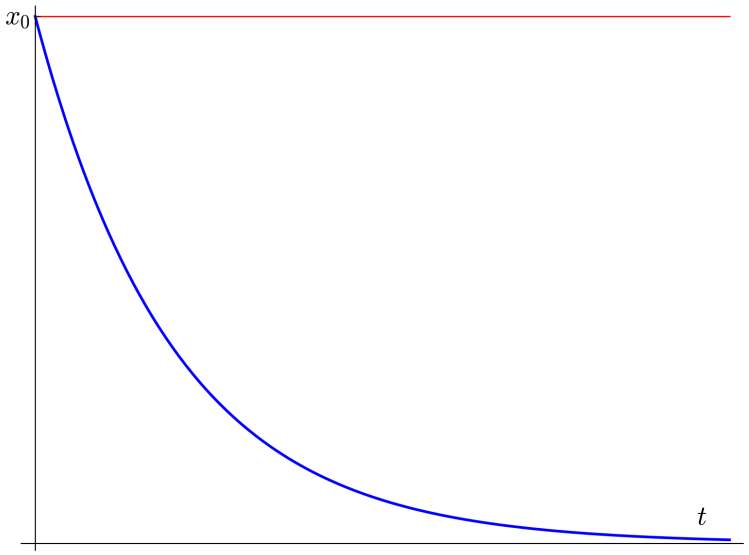
seguirà essent vàlida i la solució general seguirà essent

$$x = a - k \exp\left(-\frac{q}{V}t\right)$$

però ara tenim $a = 0$ i les condicions inicials seran $x(0) = x_0$. Tindrem

$$x(t) = x_0 \exp(-qt/V).$$

La contaminació a l'aigua de sortida començarà amb el valor x_0 i tendirà exponencialment a zero a llarg termini. La corba serà



25.3 Una generalització del model logístic

La corba logística presenta una simetria que no sempre s'adapta a les observacions: l'etapa d'acceleració fins el punt d'inflexió és simètrica de l'etapa de desacceleració a partir del punt d'inflexió. En moltes situacions pràctiques, això no és el que s'observa i s'han proposat models del tipus

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \left(\frac{N}{K}\right)^s\right).$$

Per exemple

- J. R. Usher el 1980 va proposar una equació com aquesta per a determinar la dosi òptima de radioteràpia en el tractament de tumors. El paràmetre $s > 0$ depèn del tipus de tumor.[2]
- En un estudi de l'alçada (en funció de l'edat) dels pins de Monterrey (*Pinus radiata*) a Nova Zelanda, es va trobar que una equació com aquesta amb valors de s entre 0.6 i 0.9 s'adaptava millor a les observacions.[3]
- En un estudi[4] del ritme de vendes de les parcel·les d'una gran urbanització es va veure que una equació com aquesta amb $s = 5.85$ donava un millor model que el de la corba logística.

Observem que si $s = 1$ retrobem l'equació logística. Aquesta generalització de l'equació logística és també una equació autònoma que es pot resoldre pel mateix

[2]Vegeu G. W. Swan, *Optimization of Human Cancer Radiotherapy*, Lect. Notes Biomath. 42, 1981.

[3]Vegeu Oscar García, *Height growth of Pinus radiata in New Zealand*, New Zeal. J. Forestry. Sci. 29(1): 131–145 (1999).

[4]Vegeu Robert B. Banks, *Growth and Diffusion Phenomena: Mathematical Frameworks and Applications*, Springer 1994, p. 112.

mètode que hem usat en el cas logístic. Comencem escrivint l'equació d'aquesta manera

$$\frac{dN}{N(K^s - N^s)} = \frac{r}{K^s}\, dt.$$

Ara integrem els dos costats de l'equació. La integral de la dreta és senzilla, però la integral de l'esquerra requereix que fem el canvi de variable $N^s = M$ que la converteix en la integral

$$\frac{1}{s}\int \frac{1}{M(K^s - M)}\, dM = \frac{1}{sK^s}\int \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{K^s - M}\right) dM = \frac{1}{sK^s}\log\left|\frac{M}{K^s - M}\right|.$$

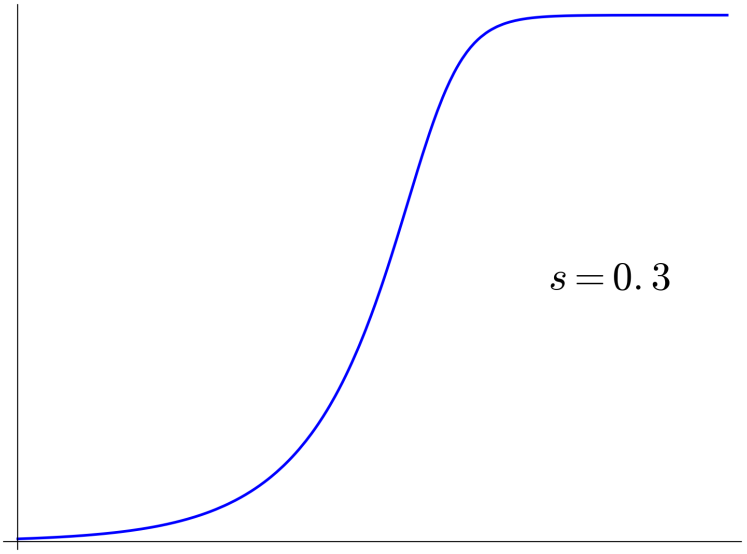
Desfent el canvi, obtenim

$$\frac{1}{sK^s}\log\left|\frac{N^s}{K^s - N^s}\right| = \frac{r}{K^s}t + C.$$

Si ara prosseguim igual que ho fèiem en el cas de la logística, arribem a la solució general

$$N = \frac{K}{(1 + k\exp(-rst))^{1/s}}.$$

Si dibuixem aquesta funció veiem que és una mena de corba logística «descompensada» en la que les fases d'acceleració i desacceleració no són simètriques una de l'altra.



25.4 Fem-ho amb sage

sage té diverses eines per resoldre equacions diferencials ordinàries. La més bàsica és la funció desolve(). Per exemple, si volem resoldre l'equació del creixement exponencial $y' = re^x$, fem això:

```
sage: r=var('r')
sage: y=function('y')(x)
```

```
sage: desolve(diff(y,x)==r*y,y,ivar=x)
 _C*e^(r*x)
```

La presència d'una variable r a l'equació ens obliga a declarar quina és la variable independent. Ho fem amb `ivar=x`. Resolem ara l'equació logística.

```
sage: K,r,t=var('K,r,t')
sage: N=function('N')(t)
sage: desolve(diff(N,t)==r*N*(1-(N/K)),N,ivar=t)
 -(log(-K + N(t)) - log(N(t)))/r == _C + t
```

Observem que la solució ens ve donada en forma implícita. Això és així en totes les equacions separables.

```
sage: K,r,t,s=var('K,r,t,s')
sage: N=function('N')(t)
sage: desolve(diff(N,t)==r*N*(1-(N/K)^s),N,ivar=t)
 (s*log(N(t)) - log(-K^s + e^(s*log(N(t))))/(r*s) == _C + t
```

26. Equilibri i estabilitat

26.1 Equilibris d'una equació diferencial

El concepte d'**equilibri** pot ser molt ampli però per a nosaltres, quan parlem de sistemes governats per una equació diferencial, un estat d'equilibri voldrà dir un estat en què la variable que estem estudiant es manté **constant**. Per tant,

> **Els equilibris d'una equació diferencial són les solucions constants d'aquesta equació diferencial.**

Determinar els equilibris d'una equació diferencial és, en general, força més senzill que resoldre l'equació. Si y és un equilibri, y és constant i, per tant, $y' = 0$. Substituint $y' = 0$ a l'equació, podem trobar els valors de y, que seran els equilibris de l'equació.

26.2 Alguns exemples

- **Equilibris del creixement exponencial.** L'equació és

  $$y' = ry$$

  (amb $r \neq 0$) i $y' = 0$ ens dóna una única solució $y = 0$. Per tant, aquest és l'únic equilibri de l'equació.

- **Equilibris del creixement logístic.** L'equació és

  $$y' = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

  (amb $r \neq 0$). Si substituïm $y' = 0$ veiem que hi ha exactament dos equilibris: $y = 0$ i $y = K$. Si la població és 0 o K, es manté constant, i aquests són els dos únics casos en què la població es pot mantenir constant.

- **Creixement logístic amb emigració proporcional.** Suposem que tenim una població que segueix un model de tipus logístic en el que una certa proporció m de la població emigra (o és capturada) i abandona la població. El creixement d'aquesta població vindrà donat per una equació diferencial com aquesta:

  $$N' = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - mN$$

  on r és la taxa de reproducció, K és la capacitat del medi i m, com ja hem dit és la proporció de la població que emigra cada unitat de temps. Podríem resoldre aquesta equació (és una equació autònoma) però ara ens preocupem dels seus equilibris. Posem $N' = 0$ i resolem l'equació que s'obté

  $$0 = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - mN.$$

Els equilibris són

$$N_1 = 0; \qquad N_2 = K\left(1 - \frac{m}{r}\right).$$

Si N representa la mida d'una població, només hem de considerar els valors amb $N \geq 0$. Per tant,

- Si $m \geq r$, l'únic equilibri és $N = 0$.
- Si $m < r$, hi ha dos equilibris: $N = 0$ i $N = K(1 - (m/r))$.

- **Creixement logístic amb emigració constant.** En el model anterior hem suposat que l'emigració és proporcional a la població. També podem considerar un model en què l'emigració és constant igual a M individus per unitat de temps:

$$N' = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - M.$$

Els equilibris d'aquest (interessant) model els podem trobar resolent una equació de segon grau

$$rN^2 - rKN + KM = 0.$$

Observem que aquest model es pot aplicar sense canvis a una població de peixos, de manera que el paràmetre M no representaria l'emigració, sinó l'extracció de peixos (la pesca). Conèixer els estats d'equilibri en funció del valor de M ens pot ajudar a entendre el concepte de pesca sostenible.

- **El model de Levins de metapoblacions.** El 1969 l'ecòleg Richard Levins va proposar un model de dinàmica de poblacions que considerava que hi havia un cert nombre d'hàbitats disponibles perquè els habiti una subpoblació. En cada moment hi ha una certa proporció p d'hàbitats ocupats i la proporció complementària $1-p$ d'hàbitats buits. Aquesta proporció p varia amb el temps perquè un determinat hàbitat ocupat pot quedar buit per extinció de la subpoblació i un determinat hàbitat buit pot quedar ocupat per migració. Aleshores, l'equació de Levins que governa el comportament de la funció p és

$$p' = cp(1 - p) - mp$$

que és essencialment la mateixa equació del creixement logístic amb emigració proporcional que hem considerat abans. És fàcil determinar els equilibris. Si $m \geq c$, l'únic equilibri és $p = 0$. En canvi, si $m < c$, a banda de l'equilibri trivial $p = 0$ tenim una segona situació d'equilibri $p = 1-(m/c)$ en la qual hi ha sempre la mateixa proporció m/c d'hàbitats lliures.[1]

- **L'efecte Allee.** Els models de població que hem estudiat fins ara —exponencial i logístic— tenen un defecte fonamental: quan la població és molt petita, com que els recursos per capita són immensos, el creixement és exponencial i, conseqüentment, no hi ha risc d'extinció. En canvi, l'experiència ens diu que quan una població queda reduïda a una mida molt petita, hi ha un gran risc d'extinció. Més enllà d'això, Warder Clyde Allee —un dels pioners de l'ecologia— va dur a

[1] Consulteu l'article *Metapopulation* a `wikipedia.org`.

terme diversos experiments que van posar de manifest que sovint succeeix exactament el contrari del que prediuen els models logístic i exponencial: la densitat de població i la cooperació entre individus actuen positivament sobre la taxa de reproducció. Aquest fenomen té diverses explicacions: cooperació a l'hora d'aconseguir aliment, cooperació a l'hora de defensar-se dels depredadors, etc. Se'n diu l'*efecte Allee*.[2]

És possible trobar un model de població que incorpori aquestes idees. Per exemple, l'equació diferencial

$$N' = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)\left(\frac{N}{A} - 1\right)$$

s'obté afegint un terme extra a l'equació logística. Vegem el significat de cada terme:

- $N' = rN$ ens dóna el creixement exponencial. r és la taxa de reproducció.
- El terme següent $1-(N/K)$ ens diu que la taxa de reproducció no és constant perquè, a mida que la població creix i s'acosta a la capacitat del medi K, la taxa va disminuint. Fins aquí, tenim l'equació logística.
- El terme addicional que hem inclòs per tenir en compte l'efecte Allee és $(N/A) - 1$ que fa que, si la població cau per sota del *llindar d'extinció* A, la taxa de creixement es converteix en negativa i la població s'extingirà.

És fàcil calcular els equilibris d'aquest model. Prenem $N' = 0$ i resolem l'equació que s'obté. Hi ha tres equilibris: $N = 0$ i $N = K$ (que ja existien en el model logístic) i un tercer equilibri $N = A$.

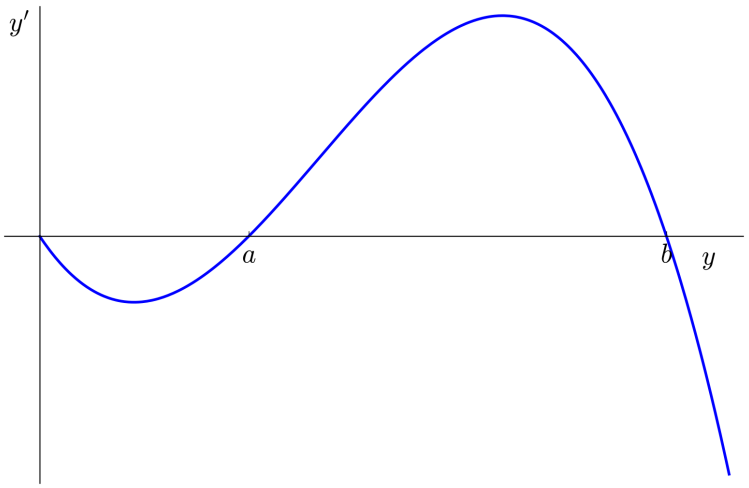
26.3 Estabilitat d'un equilibri

Ja sabem que hi ha dos tipus d'equilibri: estable i inestable. La diferència entre aquests dos tipus és la següent:

> **Un equilibri és estable si quan ens apartem lleugerament de l'equilibri el sistema tendeix a retornar a l'equilibri. És inestable si quan ens apartem lleugerament de l'equilibri el sistema tendeix a allunyar-se encara més de l'equilibri.**

Com podem determinar si un equilibri és estable o inestable? Suposem que y és la solució general d'una equació diferencial i que y_e és un equilibri. Per decidir si és estable o inestable, hem d'estudiar el comportament de y' en funció de y a un petit entorn del punt d'equilibri $y = y_e$. Per exemple, imaginem que quan expressem y' en funció de y obtenim una corba com aquesta

[2] Per a més informació, vegeu l'entrada *Allee effect* a `wikipedia.org`.



Els equilibris es produeixen quan $y' = 0$ per tant veiem que hi ha tres equilibris: 0, a i b. Observem això:

- Si ens apartem una mica del valor $y = 0$ veiem que la corba està per sota de l'eix horitzontal. Això vol dir que $y' < 0$ i, per tant, y és decreixent. Això vol dir que y retornarà cap el valor $y = 0$. En conclusió, l'equilibri $y = 0$ és **estable**.
- Si ens apartem una mica del valor $y = a$, cap a un valor de y una mica superior, veiem que la corba està per sobre de l'eix horitzontal. Això vol dir que $y' > 0$ i, per tant, y és creixent. Això vol dir que y s'allunyarà encara més del valor $y = a$. En conclusió, l'equilibri $y = a$ és **inestable**.
- Si ens apartem una mica del valor $y = b$, cap a un valor de y una mica superior, veiem que la corba està per sota de l'eix horitzontal. Això vol dir que $y' < 0$ i, per tant, y és decreixent. Això vol dir que y retornarà cap el valor $y = b$. Si ens apartem una mica del valor $y = b$, cap a un valor de y una mica inferior, veiem que la corba està per sobre de l'eix horitzontal. Això vol dir que $y' > 0$ i, per tant, y és creixent. Això vol dir que y retornarà cap el valor $y = b$. En conclusió, l'equilibri $y = b$ és **estable**.

En el cas de les equacions autònomes, aquest estudi és molt fàcil de fer perquè aquestes equacions tenen la forma

$$y' = g(y)$$

i n'hi ha prou amb estudiar el valor de la derivada de la funció g en els punts d'equilibri. Suposem que y_e és un punt d'equilibri. Aleshores,

- Si $\dfrac{dg}{dy}(y_e) > 0$, l'equilibri és inestable.
- Si $\dfrac{dg}{dy}(y_e) < 0$, l'equilibri és estable.

Repassem ràpidament l'estabilitat dels equilibris que hem trobat en els exemples de l'apartat anterior.

- **Exponencial.** L'únic equilibri és $y = 0$, que és inestable.
- **Logístic.** Hi ha dos equilibris: $y = 0$ i $y = K$. El primer és inestable i el segon és estable.
- **Logístic amb emigració proporcional.** Si $m \geq r$, l'únic equilibri és $y = 0$ que és estable. Si $m < r$ hi ha dos equilibris: $y = 0$ que és inestable i $y = K(1 - (m/r))$ que és estable.
- **logístic amb emigració constant.** Si $M > K/4$, no hi ha equilibris. Si $M = K/4$, hi ha un únic equilibri $N = K/2$, que és inestable. Si $M < K/4$ hi ha dos equilibris $N_1 < K/2$, inestable i $N_2 > K/2$, estable.
- **L'equació d'Allee.** Els equilibris $y = 0$ i $y = K$ són estables. L'equilibri $y = A$, que representa que la població està exactament en el llindar d'extinció, és inestable.

Exercicis

A. Exercicis teòrics

IV.A.1. Trobeu la solució general $y(t)$ de les equacions diferencials següents:

(a) $y' - t\sin t = 0$, (b) $y' = 2t$, (c) $y' = 4y^2$,
(d) $y' = ty$, (e) $y' = \frac{1}{2}y(100 - y)$, (f) $y' = (y^2 - 1)/2$,
(g) $y' = y^2\cos(t)$, (h) $y' = 4y - y^3$.

IV.A.2. Trobeu la solució particular $y(t)$ d'aquestes equacions diferencials amb les condicions inicials donades. Estudieu el comportament d'aquesta solució particular quan $t \to \pm\infty$.

(a) $t^2dt + 2ydy = 0,\ y(0) = -2.$ (b) $y' = y\sin t,\ y(\pi) = -3.$
(c) $y' = 8t^3e^{-2y},\ y(1) = 0.$ (d) $y' = -1/y,\ y(0) = -1.$

IV.A.3. Resoleu l'equació diferencial $y' = ry\log(K/y)$ ($r > 0$ i $K > 0$ són constants i $y > 0$) i expresseu el resultat en funció de $y(0)$. (És l'*equació de Compertz*, que s'ha utilitzat per modelar el creixement dels tumors i, més en general, el creixement d'una població amb recursos limitats.)

IV.A.4. Considereu l'equació diferencial $y' = 3y^{2/3}$. Resoleu-la. Trobeu dues solucions particulars amb les condicions inicials $y(0) = 0$ (en aparent contradicció amb el teorema d'unicitat de solucions).

IV.A.5. Trobeu els equilibris de l'equació diferencial $y' = y(2 - y)$ i estudieu-ne l'estabilitat. Resoleu-la.

IV.A.6. Considereu l'equació diferencial $y' = y^2 - 6y + 5$. Trobeu els seus equilibris i estudieu-ne l'estabilitat. Trobeu la solució particular amb les condicions inicials $y(1) = 0$.

IV.A.7. Considereu l'equació diferencial $y' + 2\sqrt{y} = y$. Trobeu els seus equilibris i estudieu-ne l'estabilitat. Trobeu la solució particular amb les condicions inicials $y(1) = 0$. (Indicació: feu el canvi de variable $z = \sqrt{y}$.)

IV.A.8. Considereu l'equació diferencial $y' = y^2 - y - 6$. Trobeu els seus equilibris i estudieu-ne l'estabilitat. Feu un dibuix de les seves solucions.

IV.A.9. Considereu aquest sistema de dues equacions diferencials

$$x' = -3f(t)$$
$$y' = 2yf(t)$$

on $f(t) \neq 0$ és una funció desconeguda. Determineu y com a funció de x.

B. Exercicis d'aplicació

IV.B.1. Un model de difusió d'un rumor assenyala que la rapidesa amb què s'escampa és proporcional al producte de la població P que ha escoltat el rumor i la població que no l'ha escoltat. Plantegeu una equació diferencial per a la funció $P(t)$, segons aquest model. Un poble té 1000 habitants i a les 8 del matí 80 persones han escoltat un rumor. Al migdia la meitat del poble ha escoltat el rumor. Segons aquest model, a quina hora tindrem que el 90% de la població haurà escoltat el rumor?

IV.B.2. En una reacció química elemental, les molècules de dos reactius A i B formen una molècula del producte $C : A + B \to C$. La llei d'acció de masses afirma que la velocitat de reacció és proporcional al producte de les concentracions (mol/l) de A i B. Denoteu per $x(t)$ la concentració de C i per a i b les concentracions inicials de A i B, respectivament. (a) Plantegeu una equació diferencial per a la funció $x(t)$. (b) Resoleu-la distingint els casos $a = b$ i $a \neq b$. (c) Trobeu $x(t)$ en el cas $a = b$ si sabem que $x(20) = a/2$.

IV.B.3. Suposem que a l'embassament de Sau hi ha 120 milions de metres cúbics d'aigua (no contaminada), que el Ter hi entra amb un cabal de 5 metres cúbics per segon i que l'embassament desaigua a la mateixa velocitat. Si hi ha un vessament continuat d'un contaminant al Ter de manera que l'aigua que entra a l'embassament a partir d'un moment conté 0.005 g/cm^3 d'aquest contaminant, calculeu en quin moment la concentració de contaminant a l'aigua de l'embassament serà de 0.001 g/cm^3. Apliqueu el model estudiat en el curs.

IV.B.4. En les condicions de l'exercici anterior, suposem que el vessament al Ter s'atura precisament quan la concentració a l'aigua que surt de Sau és de 0.001 g/cm^3. Quant de temps haurà de passar fins que l'aigua que surt de Sau tingui una concentració de contaminant de 0.0001 g/cm^3?

IV.B.5. Fem la hipòtesi que la població de senglars de les Gavarres creix segons un model logístic amb un coeficient de reproducció aproximat de $r = 6.2\%$ anual. Volem autoritzar una proporció de captures per any que faci que la població estable de senglars es redueixi a la quarta part. Quina ha de ser aquesta proporció?

IV.B.6. Els antropòlegs han utilitzat la corba logística per modelar el creixement de diverses poblacions antigues (dels *Pueblo* del sud-oest dels actuals Estats Units a l'imperi romà). Suposem que, en un d'aquests estudis, una població va arribar a una mida estable de 400 milers d'habitants i que, quan la població era de 100 milers d'habitants, creixia a una velocitat tal que, si el creixement s'hagués mantingut exponencial, la població s'hauria multiplicat per dos en 60 anys. Determineu quants anys van haver de passar perquè la població es dupliqués efectivament, segons el model logístic.

IV.B.7. S'estima que la mida estable d'una determinada especie de peixos en una zona pesquera seria de 8×10^6 kg, però la sobreexplotació ha reduït la mida de la població a només 2×10^6 kg. Suposem que s'acorda una moratòria de pesca i que la població comença a créixer segons un model logístic, amb una taxa de

reproducció de $r = 0.71$ (temps en anys). (a) Calculeu la biomassa de la població després d'un any. (b) Quant de temps ha de passar perquè la biomassa sigui de 4×10^6 kg?

IV.B.8. Ha aparegut una especie invasora de papallona que, en el seu estat de larva, necessita parasitar una especie concreta de formigues. (Seria el cas, per exemple, de la reintroducció de la *Maculina arion* a Anglaterra, després de la seva extinció el 1979.) Hem identificat els hàbitats possibles per aquesta papallona i volem estudiar la seva extensió utilitzant el model de Levins de metapoblacions. Observem que quan el 1% dels hàbitats està ocupat, la velocitat de creixement de la proporció d'hàbitats ocupats és de 9×10^{-3} any^{-1} i quan el 10% dels hàbitats està ocupat, aquesta velocitat és de 45×10^{-3} any^{-1}. Determineu quin serà, segons aquest model, el percentatge estable d'hàbitats ocupats a llarg termini.

IV.B.9. Uns ambientòlegs estudien la repoblació d'un llac amb 400 peixos quan han passat T i $2T$ anys des de la repoblació. Han estimat que la població s'ha triplicat després dels primer període de temps i ha arribat a 2000 peixos després del segon període de temps. Suposem un model de creixement logístic. Feu una estimació de la mida estable de la població de peixos, a llarg termini.

IV.B.10. Fóra molt interessant poder detectar en una especie la presència de l'efecte Allee i calcular el llindar d'extinció, abans que l'especie ja l'hagi superat. Això és molt difícil, però s'ha pogut fer en alguns casos.[3] Suposem que estudiem la taxa efectiva de creixement d'una població durant molts anys i observem que quan expressem N'/N com a funció de N obtenim la corba

$$-6 \times 10^{-7} N^2 + 0.0013\, N - 0.062.$$

Expliqueu per què això indica la presència de l'efecte Allee i determineu el llindar d'extinció.

IV.B.11. En uns estudis clàssics sobre el creixement de determinats tumors en ratolins,[4] s'ha modelat aquest creixement amb l'equació de Gompertz i s'han determinat experimentalment els paràmetres $r = 6.3\%$ (taxa de creixement, en dies) i $K = 109\,\text{cm}^3$ (mida límit teòrica del tumor). Feu una estimació, segons aquest model, del temps necessari perquè un tumor d'aquest tipus de $3\,\text{mm}^3$ multipliqui la seva mida per 100.

[3] Vegeu J.S. Brashares, J.R. Werner, A.R.E. Sinclair, *Social 'meltdown' in the demise of an island endemic: Allee effects and the Vancouver Island marmot*, J of Animal Ec. 2010.

[4] Vegeu A.K. Laird, *Dynamics of tumor growth*, Br J of Cancer 1964.

Part V:

Vectors i matrius

27. Vectors, rectes, plans

27.1 Vectors en qualsevol dimensió

Ja coneixem els vectors del pla: donats dos punts del pla A i B, podem parlar del **vector** que neix a A i acaba a B. En podem dir

$$\overrightarrow{AB}.$$

Si coneixem les coordenades dels dos punts A i B, coneixerem també les coordenades del vector $\overrightarrow{AB}$. Si $A = (a_1, a_2)$ i $B = (b_1, b_2)$, aleshores les coordenades del vector $\overrightarrow{AB}$ són $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$. Podem escriure

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

o també podem usar la notació

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1)\,\overrightarrow{i} + (b_2 - a_2)\,\overrightarrow{j}$$

que utilitza els vectors unitaris bàsics $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$.

Tot això ho podem fer també en l'espai de tres dimensions. En aquest cas, els punts i els vectors vindran determinats no per dues coordenades, sinó per tres. Si $A = (a_1, a_2, a_3)$ i $B = (b_1, b_2, b_3)$, aleshores

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) = (b_1 - a_1)\,\overrightarrow{i} + (b_2 - a_2)\,\overrightarrow{j} + (b_3 - a_3)\,\overrightarrow{k}$$

on ara tenim tres vectors unitaris bàsics $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$.

Els vectors es poden **sumar** i **multiplicar per escalars**. És a dir, podem fer operacions com aquestes

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, \qquad \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}, \qquad r\overrightarrow{v}$$

i, més en general, podem fer **combinacions lineals** de vectors

$$r_1\overrightarrow{v}_1 + r_2\overrightarrow{v}_2 + \cdots + r_k\overrightarrow{v}_k$$

on els coeficients $r_1, \ldots, r_k$ són nombres reals arbitraris.

Observem que aquests dos conceptes de **punt** i **vector**, encara que conceptualment són diferents, comparteixen una mateixa representació matemàtica. Un punt A es pot descriure com el vector que uneix l'origen de coordenades amb el punt A i viceversa, un vector $\overrightarrow{v}$ es pot descriure com el punt que té les seves mateixes coordenades. Per exemple, podem parlar del punt $(1, -1, 2)$ o del vector $(1, -1, 2)$. D'una manera abstracta, tant un punt com un vector són simplement una parella de nombres (en el pla) o una terna de nombres (a l'espai).

Res no ens impedeix que, això que hem fet al pla i a l'espai de tres dimensions, ho fem també en un **espai de n dimensions**. En aquest cas, cada punt de l'espai vindrà determinat per les seves n coordenades i cada vector tindrà també n coordenades.

De vegades, aquest concepte de «vectors en un espai de n dimensions» es veu com una cosa estranya i incomprensible: «Existeix la cinquena dimensió?» Aquesta incomprensió prové de no haver entès correctament el concepte de **dimensió**. La idea fonamental de dimensió és aquesta: **dimensió és el nombre de paràmetres continus, independents, necessaris per especificar un objecte del nostre camp d'estudi**. Posem alguns exemples:

- Si hem de comprar cable de coure, haurem d'especificar la llargada i el gruix. És a dir, haurem de donar dos paràmetres (continus, independents) que és el mateix que donar un punt (o un vector) de l'espai de dues dimensions.

- Si hem de comprar un tauler de fusta haurem d'especificar llargada, amplada i gruix (dimensió tres) però si el tauler no és escairat, haurem d'especificar més paràmetres, per exemple, les longituds de tres dels quatre costats, el gruix i dos angles (dimensió 6).[1] Si volem que les quatre cantonades estiguin arrodonides, haurem d'especificar un paràmetre extra —el radi de la circumferència d'arrodoniment— i tindrem que un tauler com aquest vindrà donat per un vector en un espai de dimensió igual a 7.

- Si hem d'encarregar un neumàtic per al cotxe, haurem d'especificar una sèrie de paràmetres com ara P225/50R16-91S. De tots aquests paràmetres, n'hi ha tres que són continus i independents: $(225, 50, 16)$. Per tant, podem pensar cada mida de neumàtic com un punt d'un espai de dimensió tres.

- Un observatori meteorològic envia, cada cinc minuts, informació sobre pressió atmosfèrica, temperatura, humitat, velocitat del vent, direcció del vent i radiació solar. Són sis paràmetres (continus, independents) i formen un vector en un espai de dimensió sis.

- En un estudi ornitològic capturem exemplars d'au d'una determinada espècie i prenem nota de les seves mesures bàsiques (longitud, pes, mida del bec, envergadura, etc.) que poden donar lloc a sis o set paràmetres: un vector en un espai de dimensió sis o set.

- En cada instant de temps, les cotitzacions de les 30 empreses que estan incloses a l'índex Dow Jones formen un vector en un espai de dimensió 30.

La conclusió és que treballar amb espais de dimensió arbitràriament gran no és cap elucubració, sinó que és una activitat matemàtica natural, de gran interès pràctic.

[1] Fixem-nos que els paràmetres han de ser «independents». Si donem els quatre costats, el gruix i dos angles, tenim 7 paràmetres, però no són independents perquè la longitud del quart costat ja queda determinada pels altres paràmetres. D'aquesta manera, la dimensió no és 7, sinó que és 6.

27.2 El producte escalar

A banda de la suma de vectors, els vector admeten una operació molt interessant que s'anomena **producte escalar**. Si $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ són dos vectors (d'un mateix espai), el seu producte escalar s'indica amb alguna d'aquestes dues notacions clàssiques

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}, \qquad \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle.$$

Normalment, utilitzarem la primera notació. Les propietats fonamentals d'aquesta operació són:

- El producte escalar de dos vectors és un escalar (no un vector!). D'aquí li ve el nom.
- El producte escalar es pot calcular immediatament a partir de les coordenades dels vectors. Si $\overrightarrow{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ i $\overrightarrow{w} = (w_1, \ldots, w_n)$, aleshores

  $$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n.$$

- El producte escalar compleix la propietat commutativa: $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v}$.
- El producte escalar es comporta, respecte de les altres operacions entre vectors (suma i producte per escalars), de la manera esperada:

  $$\overrightarrow{u} \cdot (r\overrightarrow{v} + s\overrightarrow{w}) = r(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) + s(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}).$$

- El producte escalar està molt relacionat amb la mesura de distàncies. Si designem $d(A, B)$ la distància entre els punts A i B, aleshores

  $$d(A, B)^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

  Dit d'una altra manera, si denotem per $|\overrightarrow{v}|$ la **longitud** (o **mòdul**, o **norma**) del vector $\overrightarrow{v}$, es compleix

  $$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}.$$

  Això no és més que una reformulació del clàssic teorema de Pitàgores.

- El producte escalar està molt relacionat amb la **perpendicularitat**: els vectors perpendiculars són els que donen zero quan els multipliques.
- El producte escalar està molt relacionat amb la mesura d'angles. Suposem que tenim dos vectors $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ i denotem per α la mesura de l'angle que formen. Aleshores, es compleix aquesta fórmula bàsica

  $$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{v}| \cos(\alpha).$$

  Amb aquesta fórmula, si coneixem les coordenades de dos vectors, podem calcular immediatament l'angle que formen. Observem que, a partir d'aquesta fórmula, és clar que dos vectors són perpendiculars exactament quan el seu producte escalar és zero.

En certa manera, el producte escalar és el fonament de tota la geometria elemental d'angles i distàncies.

27.3 Fem-ho amb sage

Podem treballar amb vectors de qualsevol dimensió, calcular productes escalars i longituds de vectors. La sintaxi apropiada la podem veure en aquests exemples:

```
sage: u=vector([1,1,0,-1,-3,3])
sage: u
 (1, 1, 0, -1, -3, 3)
sage: norm(u)
 sqrt(21)
sage: norm(u).N()
 4.58257569495584
sage: v=vector([0,1,1,-2,-2,4])
sage: u*v
 21
sage: u-2*v
 (1, -1, -2, 3, 1, -5)
sage: def angle(x,y):
....:   return arccos(x*y/(norm(x)*norm(y)))
....:
sage: angle(u,v).N()
 0.453961251572380
```

28. Geometria en 3D

28.1 Rectes i plans en 3D

En aquest apartat considerarem com són les equacions de rectes i plans en un espai de tres dimensions. Com hem dit abans, podríem estudiar, sense més complicació, el cas general d'una dimensió n arbitrària, però per simplicitat ens restringirem a la dimensió tres.

Equació d'un pla

L'equació general d'un pla en dimensió 3 és

$$ax + by + cz = d.$$

Aquest pla està format, lògicament, per tots els punts de coordenades (x, y, z) que satisfacin aquesta equació. Observem:

- Si fem variar el valor del terme independent d, obtindrem tots els plans paral·lels al pla $ax + by + cz = d$. En particular, el pla paral·lel que passa per l'origen és el pla $ax + by + cz = 0$.
- El vector $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ és perpendicular al pla. Direm que és un **vector normal** al pla. Per comprovar-ho, traslladem el pla a l'origen: $ax + by + cz = 0$, prenem ara un vector $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ que estigui contingut en aquest pla i, finalment, observem que $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Equació d'una recta

Hi ha dues maneres d'expressar una recta en dimensió tres. En primer lloc, ho podem fer com a intersecció de dos plans: si donem les equacions de dos plans (diferents i no paral·lels), les dues equacions, simultàniament, determinaran una recta. Per exemple, la recta

$$\begin{cases} x - 5y = -18 \\ 4x + z = 7 \end{cases}$$

La segona manera consisteix en donar un punt de la recta P i un **vector director** $\overrightarrow{v}$ de manera que tots els punts de la recta s'obtindran sumant al punt P múltiples del vector director. Per exemple

$$(x, y, z) = (2, 4, -1) + t(1, 5, -4).$$

En aquesta equació hi apareix un paràmetre t que pot prendre qualsevol valor. Direm que és una **equació paramètrica** de la recta.

28.2 Exemples

- **Pla perpendicular a una recta.** Trobeu l'equació del pla que passa pel punt $A = (1, 1, -2)$ i és perpendicular a la recta que passa pels punts $B = (0, 1, 2)$ i $C = (1, -1, 3)$.

  La recta que passa per B i C té com a vector director el vector $\overrightarrow{BC} = (1, -2, 1)$. Els plans perpendiculars a aquest vector són els plans $x - 2y + z = d$, per a qualsevol valor de d. De tots aquests plans, l'únic que passa per A és el pla $x - 2y + z = -3$.

- **Pla determinat per tres punts.** Trobeu l'equació del pla que passa pels punts $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, -2, -2)$ i $C = (3, 1, -1)$.

  Aquest pla tindrà una equació $ax+by+cz = d$. Hem de determinar els valors dels coeficients a, b, c i d per tal que les coordenades dels tres punts que ens donen compleixin l'equació del pla. Ho podem fer resolent un sistema (compatible) de tres equacions amb quatre incògnites. La solució és el pla $x - y + z = 1$.

- **Costats i angles d'un triangle.** Trobeu les longituds dels costats i la mesura dels angles del triangle que té per vèrtex els punts $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, -2, -2)$ i $C = (3, 1, -1)$.

  Comencem determinant els vectors $\overrightarrow{AB} = (0, -3, -3)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 0, -2)$ i $\overrightarrow{BC} = (2, 3, 1)$. Les longituds d'aquests vectors (que són les longituds dels costats del triangle) les podem trobar usant el producte escalar

  $$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2};$$
  $$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2};$$
  $$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}.$$

  Per calcular l'angle α que formen els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ tornem a utilitzar el producte escalar.

  $$\alpha = \arccos \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|} = \arccos(1/2) = 60^\circ.$$

  Per calcular l'angle β que formen els vectors $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$ tornem a utilitzar el producte escalar.

  $$\beta = \arccos \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\,|\overrightarrow{BC}|} = \arccos(2/\sqrt{7}) \approx 40.89^\circ.$$

  El tercer angle no cal calcular-lo perquè sabem que la suma dels tres angles d'un triangle val 180° i, per tant, aquest tercer angle val $\approx 79.10^\circ$.

- **Angle entre dos plans.** Trobeu l'angle entre els plans $x+y+z = 2$ i $2x+y-z = -5$.

  L'angle entre dos plans serà el mateix que l'angle entre els seus vectors normals. Aquests vectors normals són els vectors $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$ i $\overrightarrow{v} = (2, 1, -1)$ i l'angle

que formen és

$$\alpha = \arccos \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{v}|} = \arccos(\sqrt{2}/3) \approx 61.9^\circ.$$

- **Distància d'un punt a un pla.** Trobeu la distància del punt $A = (-1, 2, 2)$ al pla $2x - y - z = 6$.

  El vector normal al pla és el vector $\overrightarrow{n} = (2, -1, -1)$. La recta que passa pel punt A i és perpendicular al pla és la recta

  $$(x, y, z) = (-1, 2, 2) + t(2, -1, -1).$$

  El punt on aquesta recta talla el pla és el punt corresponent a $t = 2$, és a dir, és el punt $B = (3, 0, 0)$. La distància entre A i el pla serà la distància entre els punts A i B, que val $2\sqrt{6}$.

- **Distància entre dues rectes.** Trobeu la distància entre aquestes dues rectes

  $$(2, 1, 0) + r(-1, 1, 1)$$
  $$(1, 0, -1) + s(0, -1, 2)$$

  Hem de trobar un punt $P = (2 - r, 1 + r, r)$ a la primera recta i un punt $Q = (1, -s, -1+2s)$ a la segona recta de manera que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sigui perpendicular als vectors directors de les dues rectes. Resolent un sistema de dues equacions obtenim que aquests punts són $P = (16/7, 5/7, -2/7)$ i $Q = (1, -1/7, -5/7)$. Aleshores, la distància entre les dues rectes serà la distància entre aquests dos punts: $d = 3\sqrt{2/7}$.

28.3 Dimensions superiors a tres

Tot el que hem fet fins ara es pot fer amb vectors de n dimensions, per a qualsevol valor de n. La principal diferència estarà en que, de la mateixa manera que a l'espai de dimensió 3 tenim rectes i plans, en un espai de dimensió n tindrem exactament $n - 1$ tipus diferents d'objectes intermedis entre els punts i l'espai total. En direm **subespais de dimensió** k, per $k = 1, \ldots, n-1$. Així, els subespais de dimensió 1 seran les rectes, els de dimensió 2 seran els plans, hi haurà els subespais de dimensió 3, 4, etc. fins els subespais de dimensió màxima, que seran els de dimensió $n - 1$. Aquests darrers subespais s'anomenen **hiperplans**.

De la mateixa manera que una equació al pla representa una recta i una equació a l'espai 3D representa un pla, una equació a l'espai de dimensió n representa un hiperplà. Per exemple, si considerem vectors en l'espai de dimensió 7 (és a dir, vectors amb 7 coordenades), aquesta equació

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + \sqrt{5}x_5 - x_6 + (1/3)x_7 = -\pi$$

determinarà un hiperplà amb vector normal $(2, -3, 1, -2, \sqrt{5}, -1, 1/3)$.

Quan passem de l'espai de tres dimensions a un espai de dimensió superior, cal anar amb compte amb les possible interseccions dels subespais. Per exemple, dos plans en

3D es tallen, en general, en una recta, però en dimensió 4 podem tenir dos plans que es tallin en un únic punt. La fórmula general que governa tot això és aquesta. Suposem que X i Y són subespais d'un espai de dimensió n, de dimensions r i s respectivament. Aleshores, o bé X i Y no es tallen o es tallen en un subespai Z que pot tenir qualsevol dimensió entre $\max(0, r+s-n)$ i $\min(r, s)$. Per exemple, dos plans en dimensió 4 poden tallar-se en un punt, en una recta o en un pla. Un subespai de dimensió 3 i un pla en dimensió 4 es poden tallar en una recta o en un pla, etc.

29. Introducció al *clustering*

29.1 Plantejament del problema

Suposem que tenim un gran nombre de dades empíriques sobre individus que sabem o creiem que pertanyen a dues o tres (o més) poblacions diferents. L'objectiu és desenvolupar algun mètode per assignar cadascun d'aquests individus (i d'altres individus que estudiem en el futur) a la seva població. Posem alguns exemples per entendre millor de què estem parlant.

- Tenim bases de dades sobre l'aspecte visual de molts tumors al pit i els oncòlegs voldrien disposar d'un mètode per deduir, a partir de l'anàlisi visual i amb una bona probabilitat d'encert, si un tumor al pit és maligne o no ho és.
- Disposem d'una gran base de dades meteorològiques sobre una zona i voldríem identificar un determinat nombre de situacions meteorològiques estàndard.
- En un jaciment arqueològic hem trobat restes de ceràmica que pertanyen a dues civilitzacions diferents. Analitzem un gran nombre de mostres i en determinem el contingut de diversos metalls (alumini, ferro, magnesi, etc.), amb la intenció de trobar un criteri que ens permeti assignar cada peça a la civilització a què pertany.
- Hem trobat diversos exemplars d'una planta que voldríem saber si pertany a una varietat coneguda (i, en cas afirmatiu, a quina). Estudiem un determinat nombre de propietats d'aquests exemplars i necessitem una manera de comparar-les amb les de les varietats conegudes.
- Tenim una gran base de dades sobre els clients d'una empresa i voldríem categoritzar aquests clients agrupant-los en un petit nombre de *models*, de cara a fer campanyes de màrqueting més eficients.
- Volem classificar les ciutats europees segon la seva eficiència ecològica. Per a cadascuna d'elles mesurem un nombre de variables (percentatge de reciclatge, contaminació de l'aire, contaminació acústica, ús d'energies renovables, etc.). Volem determinar si, a partir d'aquestes variables, podem classificar les ciutats en diversos grups.

El *clustering* és el conjunt de tècniques matemàtiques que s'utilitzen per atacar aquesta mena de problemes.

La primera cosa que observem és que es tracta d'un problema clarament *multidimensional*. En efecte, si en els exemples anteriors trobéssim una única variable que ens distingís entre els diversos clústers, el problema seria trivial. Per exemple: Suposem que volem distingir químicament el vi fet amb *garnatxa* del vi fet amb *carinyena*. Si,

per exemple, detectéssim que el vi de garnatxa conté sempre una determinada antocianina característica, mentre que el vi de carinyena no la conté mai, aleshores no caldria fer *clustering*: n'hi hauria prou amb detectar analíticament la presència o absència d'aquesta antocianina concreta. En els casos reals, aquesta situació no es dóna i cal considerar un gran nombre de variables, de manera que el problema es converteix en multidimensional.

Considerem amb més detall un altre exemple.[1] Volem caracteritzar el suc de les taronges, les mandarines i els seus híbrids a partir de l'anàlisi química dels carotenoides que contenen. Procedim d'aquesta manera:

1. Seleccionem un gran nombre de varietats de taronges (T), mandarines (M) i híbrids (H). En l'estudi citat, 12 varietats de T, 6 de M i 14 de H. Fem una extracció de suc, en condicions experimentals perfectament controlades.

2. Identifiquem 12 tipus de carotenoide presents en els sucs d'aquests cítrics. Utilitzant anàlisi cromatogràfica determinem les quantitats de cadascun d'aquest 12 carotenoides en el suc de cadascuna de les 32 varietats de cítrics.

3. El resultat experimental consisteix, doncs, en 32 vectors (un per a cada varietat) de dimensió 12 (una per a cada carotenoide). Així,

$$v_{28} = (a_{28}^1, a_{28}^2, \ldots, a_{28}^{12})$$

vol dir que el suc de la varietat 28 (que és la *taronja sanguina*) té un contingut igual a a_{28}^1 del carotenoide número 1, (*neocrom*), un contingut igual a a_{28}^2 del carotenoide número 2, (*anterxantina*), etc. Com que aquests 28 vectors en dimensió 12 no els podem visualitzar, les seves propietats cal estudiar-les utilitzant les eines de la geometria en dimensió 12.

4. Imaginem que el contingut de, diguem, β-criptoxantina (que és el carotenoide número 10 de la nostra llista) s'hagués distribuït així entre les 32 varietats (l'eix horitzontal indica el contingut en β-criptoxantina i cada lletra indica una de les 32 mostres):

Aleshores, veuríem (a simple vista, sense cap necessitat d'analitzar matemàticament el resultat) que hi ha exactament tres **clústers** formats per les tres categories que volem estudiar i que, per tant, el contingut en aquest carotenoide concret ens classifica els cítrics en taronges, mandarines i híbrids.

Però el resultat experimental no és com en el gràfic anterior, sinó que s'assembla mes a aquest altre:

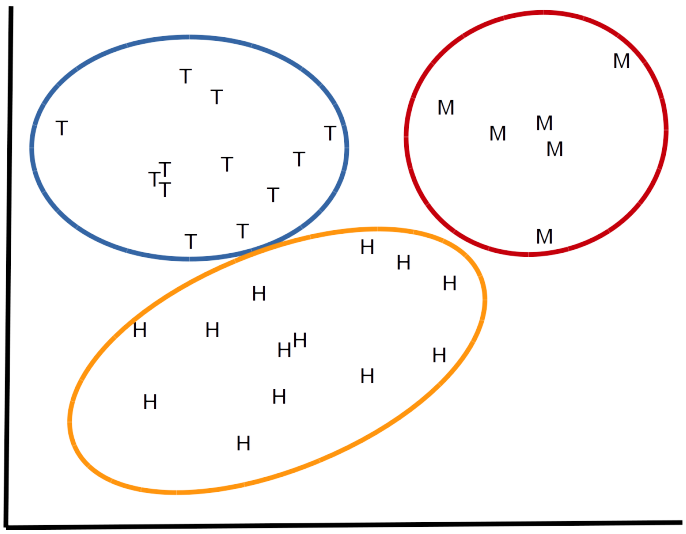
[1] El que ve a continuació està basat en l'article K. L. Goodner, R. L. Rouseff, H. J. Hofsommer, *Orange, Mandarin, and Hybrid Classification Using Multivariate Statistics Based on Carotenoid Profiles*, J. Agric. Food Chem. 49 (2001),1146–1150.

M H H M H M HT H MH T H HT HT TT T M T H MT TH H HT T H

Aquí, no veiem clústers evidents perquè ni la β-criptoxantina ni, de fet, cap carotenoide aïllat ens distingeix les tres famílies de cítrics.

5. Cal utilitzar, com a mínim, **dos** carotenoides. Imaginem que n'agafem dos de concrets i aleshores cada cítric ens dóna un punt del pla, que és el punt de coordenades (x, y) on x és la quantitat del primer carotenoide escollit i y és la quantitat del segon. Suposem que obtinguéssim una gràfica com la següent en la que sí que s'observessin tres clústers relativament ben diferenciats corresponents a les tres famílies de cítrics que volem caracteritzar. Si això passés, tindríem el problema resolt amb la utilització de dues variables i la teoria matemàtica del clustering pràcticament seria supèrflua.

   Però els resultats experimentals ens diuen que amb dues variables tampoc no n'hi ha prou, ni amb tres, ni amb quatre.



En conclusió: ens calen eines matemàtiques per poder determinar (sense «veure-ho») si uns punts de l'espai de n dimensions s'agrupen en diversos clústers. Aquestes eines matemàtiques formen el que es coneix com a **clustering** i són eines que, en l'actualitat, tenen una importància immensa en les àrees de l'anàlisi de dades (*big data, data mining, machine learning,* bioinformàtica, etc.).

29.2 Estandardització

Suposem que els resultats d'unes observacions són una sèrie de punts $v_1, \ldots, v_n$ en un espai de dimensió m. Cada punt (o vector, com n'hi vulguem dir) representa una observació i els seus components representen els valors de cadascuna de les variables que hem mesurat en aquesta observació. En tot el que farem a partir d'ara pensarem que aquestes variables són numèriques o, més ben dit, són nombres reals. El cas de

variables no numèriques també és molt important a la pràctica, però no el considerarem, per no complicar l'exposició.

Imaginem que estem fent un estudi de voltors comuns i de cada exemplar hem pres una sèrie de mesures (llargada, pes, envergadura, llargada de la cua, llargada del bec), de manera que el convertim en un vector com aquest

$$v = (102.5\,\text{cm},\ 8.42\,\text{kg},\ 2.55\,\text{m},\ 27.2\,\text{cm},\ 7.6\,\text{cm}).$$

Immediatament ens adonem que no podrem operar amb aquests punts (per exemple, calcular la distància entre dos d'ells) perquè

- Estem utilitzant unitats de mesura diferents (metres i centímetres) i, encara pitjor, magnituds diferents (longitud i pes).
- Les escales de mesura de cada variable no són comparables. Per exemple, una diferència d'un cm a l'envergadura és insignificant, però una diferència d'un cm a la mida del bec és molt notable.

Per tant, abans de començar a treballar amb aquestes dades ens cal expressar-les de manera que els diversos components siguin plenament compatibles. La resposta és utilitzar un mètode que es coneix com a **estandardització**.

Suposem que tenim un gran nombre de valors d'una variable $x_1, \ldots, x_n$, expressats en unes certes unitats. Calculem aquests dos valors estadístics fonamentals:

1. La **mitjana** dels valors
$$\mu = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$
2. La **desviació típica** dels valors
$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \mu)^2 + \cdots (x_n - \mu)^2}{n-1}}.$$

El significat de la mitjana és ben conegut. La desviació típica ens mesura com es dispersen els valors respecte de la mitjana: una desviació típica petita indica que els nombres $x_1, \ldots, x_n$ estan força agrupats al voltant de la seva mitjana, mentre que una desviació típica[2] gran indica que els nombres $x_1, \ldots, x_n$ estan força allunyats de la seva mitjana. Observem que μ i σ tenen les mateixes unitats que la variable inicial.

Per estandarditzar, substituïm cada valor x_i per la seva estandardització x_i'

$$x_i' = \frac{x_i - \mu}{\sigma}.$$

Observem que els valors x_i' no tenen unitats. Són valors estandarditzats i, per això mateix, totalment comparables amb els valors estandarditzats de qualsevol altra mesura que haguem pres, independentment de les seves unitats.

[2]Aquí no ens podem entretenir discutint la distinció entre estadístics mostrals i paràmetres poblacionals. Hem de deixar-ho per als cursos d'estadística.

29.3 El mètode *k-means*

En aquesta introducció superficial a les tècniques de clustering només explicarem[3] un únic mètode, potser el més clàssic de tots, anomenat *k-means*. En aquest mètode cal haver decidit a la bestreta el nombre de clústers que volem trobar (si no ho sabem, també hi ha mètodes per determinar-lo, però no els estudiarem). Diguem-n'hi k.

Tenim inicialment una col·lecció de n punts d'un espai de dimensió m, $v_1, \ldots, v_n$ i suposem que, si cal, els hem aplicat el procés d'estandardització descrit a l'apartat anterior. Hem decidit que volem agrupar aquests punts en k clústers. Aleshores, fem això:

1. Tenim una partició en clústers **aproximada** $C_1, \ldots, C_k$.
2. Per a cada clúster C_j, determinem el seu **baricentre**, que és el punt que té per coordenades les mitjanes de les coordenades de tots els punts del clúster. D'aquest baricentre n'hi diem b_j.
3. Per a cada punt x_i, calculem les **distàncies** $d(x_i, b_j)$ d'aquest punt a tots els baricentres.
4. Definim uns **nous clústers** C'_j de la manera següent. Si el baricentre més proper al punt x_i és el baricentre b_{j_0}, assignem el punt x_i al clúster C'_{j_0}.
5. Repetim el procés tornant a començar pel pas 1.

Veiem que tenim un **procés iteratiu** en el qual, presumiblement, anirem trobant clústers cada vegada «millors». El concepte de millor és aquest: un clúster és millor si els seus punts s'agrupen força bé al voltant del seu baricentre. Expliquem això una mica millor. Una bona mesura de la «bondat» d'una agrupació en clústers és aquesta. Definim

$$r = \text{ suma de les distàncies de cada punt al baricentre del seu clúster.}$$

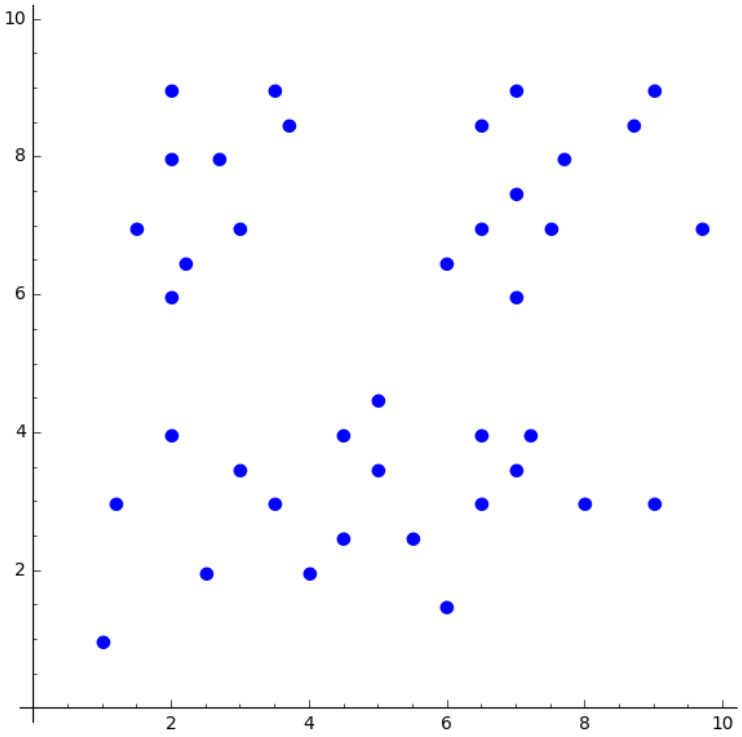
Com més petit sigui el valor de r, millor serà la distribució en clústers. El procés que acabem de descriure fa disminuir el valor de r i, per tant, va obtenint clústers cada vegada «millors». Per completar la descripció del mètode hem de tenir en compte això:

- Per iniciar el procés, escollim a l'atzar k punts entre els punts $v_1, \ldots, v_n$, els prenem com a baricentres i comencem pel pas 3. El resultat a què arribem dependrà d'aquesta elecció inicial dels centres.
- En el moment que els clústers no canviïn quan repetim el procés, haurem acabat.
- No hi ha garantia que el procés ens condueixi al millor resultat possible. A cada iteració, el procés fa disminuir el valor de r. Per tant, el procés ens conduirà a un *mínim local* de r, que podria ser diferent del *mínim global*. A la pràctica, el que fem és aplicar aquest procés moltes vegades (recordem que cada vegada que apliquem el procés començarem amb uns centres diferents i, per tant, podem arribar a resultats diferents) i quedar-nos amb el resultat que doni el valor de r més petit.

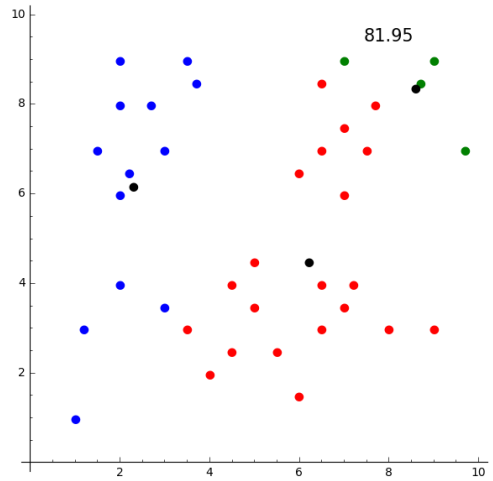
[3] Molt rudimentàriament!

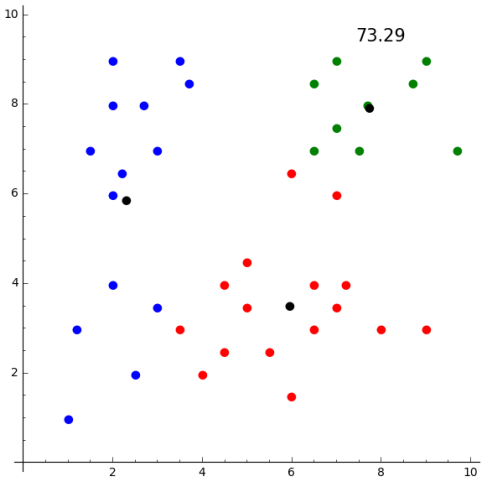
- Es molt senzill programar aquest mètode amb qualsevol llenguatge que coneguem. Els llenguatges més especialitzats (com és R) ja el duen incorporat.

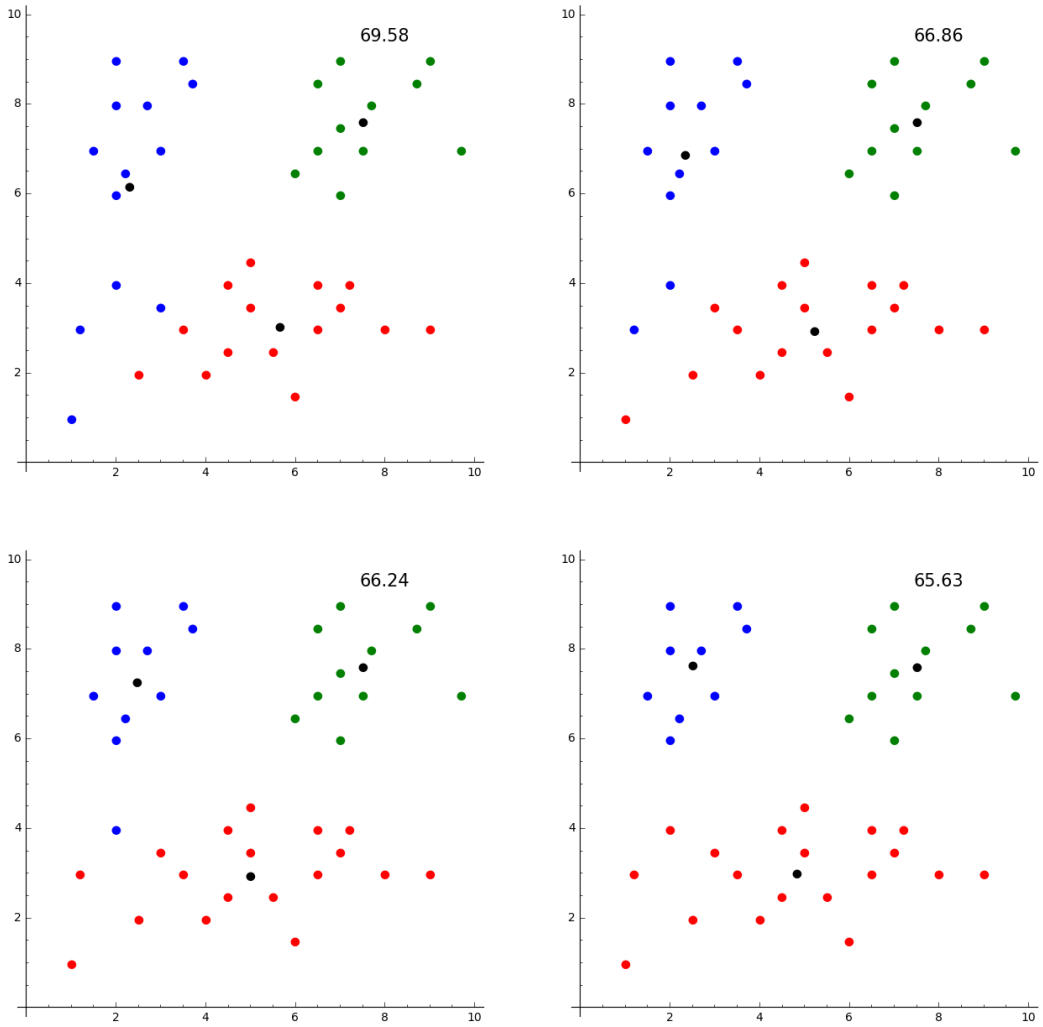
Fem un exemple en dimensió dos, de manera que puguem veure com a cada iteració ens anem acostant a la «bona» distribució en clústers. Comencem amb un cert nombre de punts del pla que «visualment», sembla que es distribueixin en tres clústers.



Posem en marxa el procés i observem què passa a cada nova iteració. Els tres clústers estan pintats de color blau, vermell i verd, respectivament; els tres centres són els punts de color negre i el valor de r apareix, en cada cas, a la part superior.







29.4 Fem-ho amb sage

L'eina idònia per als tipus de problemes que hem estudiat en aquest capítol és el programa R. Tanmateix, sage pot invocar R, de manera que, sense sortir de sage, podem executar comandes de R, per exemple la comanda `sage: r.kmeans()` invoca la comanda `kmeans` del programa R. D'altra banda, el mètode *k*-means és molt simple de programar. Com a exemple, els dibuixos de l'exemple anterior estan generats amb aquest codi sage:

```
sage: def random_between(j,k):
....:     a=int(random()*(k-j+1))+j
....:     return a
sage: def d(a,b):
....:     return sqrt((a[0]-b[0])^2+(a[1]-b[1])^2)
sage: def dibuixa(L,c):
....:     if len(L)==1:
....:         return plot(100,(x,0,10),ymax=10,ymin=0,aspect_ratio=1)+
....:         text(r'$\bullet$',L[0],fontsize=20,color=c)
....:     return text(r'$\bullet$',L[0],fontsize=20,color=c)+dibuixa(L[1:],c)
```

```
sage: A=[(1,1),(1.2,3),(2,4),(4,2),(5,4.5),(6,1.5),(6.5,4),(7,3.5),
....: (7.2,4),(8,3),(9,3),(3,3.5),(2.5,2),(3.5,3),(5,3.5),
....: (4.5,4),(5.5,2.5),(6.5,3),(4.5,2.5)]
sage: B=[(2,6),(2.2,6.5),(3,7),(3.5,9),(3.7,8.5),(2.7,8),(1.5,7),(2,9),(2,8)]
sage: C=[(7,6),(6,6.5),(9.7,7),(9,9),(8.7,8.5),(7.7,8),(6.5,8.5),(7,9),
....: (7.5,7),(6.5,7),(7,7.5)]
sage: L=A+B+C
sage: def agrupa(M):
....:   K0=[L[i] for i in [0..len(L)-1] if d(L[i],M[0])<min(d(L[i],M[1]),
....:   d(L[i],M[2]))]
....:   K1=[L[i] for i in [0..len(L)-1] if d(L[i],M[1])<min(d(L[i],M[0]),
....:   d(L[i],M[2]))]
....:   K2=[L[i] for i in [0..len(L)-1] if d(L[i],M[2])<min(d(L[i],M[0]),
....:   d(L[i],M[1]))]
....:   return [K0,K1,K2]
sage: def troba_centres(H):
....:   c=[]
....:   for i in [0,1,2]:
....:      a=sum([H[i][j][0] for j in [0..len(H[i])-1]])/len(H[i])
....:      b=sum([H[i][j][1] for j in [0..len(H[i])-1]])/len(H[i])
....:      c.append((a,b))
....:   return c
sage: def error(X):
....:   centres=troba_centres(X)
....:   return sum([d(centres[0],X[0][i]) for i in [0..len(X[0])-1]])+
....:   sum([d(centres[1],X[1][i]) for i in
....:   [0..len(X[1])-1]])+sum([d(centres[2],X[2][i]) for i in [0..
....:   len(X[2])-1]])
sage: a=random_between(0,len(L)-1)
sage: b=random_between(0,len(L)-1)
sage: c=random_between(0,len(L)-1)
sage: M=[L[a],L[b],L[c]]
sage: centres=M
sage: acabat=False
sage: while not acabat:
....:   R=agrupa(centres)
....:   CC=troba_centres(R)
....:   if centres==CC:
....:     acabat=True
....:   centres=CC
sage: dibuixa(R[0],'blue')+dibuixa(R[1],'red')+dibuixa(R[2],'green')+
....: dibuixa(CC,'black')+text(round(error(R),2),(8,9.5),fontsize=15,
....: color='black')
```

30. Matrius

Tots estem familiaritzats amb les presentacions de dades numèriques en forma de «graella» o «taula de doble entrada», de manera que les dades estan organitzades en files i columnes. El concepte matemàtic que hi ha al darrere d'això és el concepte de **matriu**:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3.1 & 0 & 7.2 \\ 1.9 & 2.0 & 1.2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2/7 & -1/2 \\ 1/2 & 6\pi \\ \cos(2.5) & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0.759 \\ 0.245 \\ 0.908 \end{pmatrix}, \quad (2\ 1\ -1).$$

Parlarem de matrius de n files i m columnes i, si $n = m$, parlarem de **matrius quadrades**. Si volem escriure una matriu *genèrica* utilitzarem la notació del doble subíndex:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij})\,.$$

D'aquesta manera, el terme a_{ij} de la matriu $A = (a_{ij})$ és el que es troba a la fila i i a la columna j. Observem que les matrius amb una única fila i les matrius amb una única columna es poden entendre com si fossin vectors. Si una matriu té n files i m columnes, direm que és una matriu $n \times m$.

30.1 Operacions algebraiques amb matrius

El concepte matemàtic de matriu transcendeix completament el de «graella de nombres» perquè les matrius estan dotades d'unes operacions similars a la suma i el producte de nombres i aquestes operacions són les que expliquen la immensa utilitat de les matrius en molts camps de la ciència.

- Si dues matrius A i B tenen la mateixa «mida» (és a dir, el mateix nombre de columnes i el mateix nombre de files), podem definir la seva **suma** $A + B$ a partir de sumar cada terme de A amb el terme de B que es troba a la mateixa fila i la mateixa columna. És a dir, si $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$, aleshores $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$. Si dues matrius tenen mides diferents, no es poden sumar.

- Podem **multiplicar** una matriu $1 \times n$ per una matriu $n \times 1$ així:

$$(a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1n}) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}.$$

  Observem que aquesta multiplicació és, en el fons, el mateix que el producte escalar de vectors.

- La multiplicació anterior es pot generalitzar al cas d'una matriu A que tingui tantes columnes com files té una matriu B. Més concretament, sigui $A = (a_{ij})$ una matriu $n \times m$ i sigui $B = (b_{ij})$ una matriu $m \times k$, aleshores podem multiplicar aquestes dues matrius $AB = (c_{ij})$ a base de multiplicar (en el sentit del punt anterior) cada fila de la matriu A per cada columna de la matriu B. La fórmula concreta seria
$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}.$$
Observem que pot passar que la multiplicació AB sigui possible, però la multiplicació BA no ho sigui.
- Finalment, podem multiplicar una matriu A (de qualsevol mida) per un escalar r simplement multiplicant tots els seus termes per r: $r\,(a_{ij}) = (ra_{ij})$.

Aquestes operacions conserven les propietats fonamentals de les operacions de nombres reals, **amb alguna diferència important**.

1. La suma de matrius i la multiplicació per escalars compleixen aquestes conegudes propietats
   - $A+B = B+A$ (propietat commutativa), $(A+B)+C = A+(B+C)$ (propietat associativa).
   - $r(A+B) = rA+rB$; $(r+s)A = rA+sA$; $1A = A$; $r(sA) = (rs)A$.
   - $A+(0) = A$ i $A-A = (0)$, on (0) indica una matriu de la mida apropiada amb tots els termes igual a zero.

   Evidentment, aquestes fórmules només tenen sentit si les matrius que hi apareixen tenen mides compatibles per tal que les operacions siguin possibles.
2. La multiplicació de matrius també compleix aquestes conegudes propietats
   - $(AB)C = A(BC)$ (propietat associativa), $A(B+C) = AB+AC$ (propietat distributiva).
   - $r(AB) = (rA)B = A(rB)$.
   - Per a cada valor n hi ha una matriu $n \times n$ anomenada I o «matriu identitat» amb la propietat que $AI = A$ i $IB = B$, si A i B són matrius de mida convenient. Aquestes matrius I són
$$(1),\quad \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \cdots,\ \begin{pmatrix}1&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&1\end{pmatrix},\quad \cdots$$
3. En canvi, cal anar amb molt de compte perquè les matrius es comporten diferent dels nombres en aquests dos aspectes:
   - El producte de matrius **no** compleix la propietat commutativa. És a dir, és fàcil trobar dues matrius A i B tal que $AB \neq BA$. Per exemple
$$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

- El producte de dues matrius pot ser igual a zero (és a dir, una matriu on tots els seus termes són zero) sense que cap de les dues matrius sigui igual a zero. Per exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

30.2 La matriu inversa

Per resoldre l'equació $3x = 5$ diem que «passem el 3 dividint al costat dret» i obtenim $x = 5/3$. Si volem analitzar millor el que realment estem fent direm que multipliquem els dos costats de l'equació per l'invers de 3, és a dir per $1/3$. Aleshores, obtenim $x = (1/3)3x = (1/3)5 = 5/3$. Imaginem que ara volem resoldre una equació similar amb matrius 2×2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De fet, ho podem fer exactament igual: multiplicant els dos costats de l'equació per la **matriu inversa** de $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, però cal parar atenció en dos aspectes:

1. Quina és la matriu inversa de la matriu $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$?
2. Com que la multiplicació de matrius no compleix la propietat commutativa, hem d'anar amb molt de compte de multiplicar les matrius en l'ordre correcte.

Discutim el primer punt. Suposem que A és una matriu quadrada. La inversa de A és una matriu A^{-1} que té aquesta propietat

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

De la mateixa manera que el número 0 no admet invers, també hi ha matrius que no tenen inversa. Per exemple, la matriu $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ no pot tenir inversa perquè, si en tingués, arribaríem a aquest absurd: com que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

també tindríem

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En conclusió, hi ha matrius que tenen inversa i altres que no en tenen. Quines? En el cas de les matrius 2×2, la resposta és relativament simple. Observem que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} = \Delta I,\ \Delta = ad - bc$$

Per tant, les matrius 2×2 que tenen inversa són aquelles amb $\Delta \neq 0$ i la inversa es calcula d'aquesta manera senzilla

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Aquest número $\Delta = ab - cd$ s'anomena el **determinant** de la matriu. Les matrius invertibles són exactament aquelles que tenen determinant diferent de zero.

En el cas general de les matrius **quadrades** de mida qualsevol, la situació és essencialment la mateixa

- Hi ha una funció (complicada) anomenada el **determinant** que assigna a cada matriu A un nombre $\det(A)$ que té la propietat fonamental
$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$
Per a les matrius 2×2 i 3×3 aquesta funció és
$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$
$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + cdh + bfg - ceg - afh - bdi.$$
Per a les matrius més grans, la fórmula de càlcul del determinant és massa complicada i el càlcul del determinant el farem, naturalment, amb un ordinador.
- Les matrius invertibles són exactament les que tenen determinant $\neq 0$.
- Hi ha una forma complicada de trobar efectivament la inversa d'una matriu que tingui determinant $\Delta \neq 0$. Per a les matrius 2×2 i 3×3 la inversa ve donada per
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix}$$
que, com veiem, ja és massa complicada per calcular-la sense l'ajuda de l'ordinador.

Utilitzant les propietats de les operacions amb matrius, el concepte de matriu inversa, i anant amb compte amb l'ordre en què multipliquem les matrius, podem resoldre fàcilment algunes equacions amb matrius. Per exemple, Suposem que A, B, C, K i M són matrius quadrades de la mateixa mida i busquem una matriu quadrada X d'aquesta mateixa mida tal que
$$AB(XC - K) + XC = 3M.$$
Podem procedir d'aquesta manera
$$\begin{aligned} AB(XC - K) + XC &= 3M \\ ABXC - ABK + XC &= 3M \\ ABXC + XC &= 3M + ABK \\ (ABX + X)C &= 3M + ABK \\ ABX + X &= (3M + ABK)C^{-1} \\ (AB + I)X &= (3M + ABK)C^{-1} \\ X &= (AB + I)^{-1}(3M + ABK)C^{-1} \end{aligned}$$

30.3 Fem-ho amb sage

Per especificar una matriu en sage n'hi ha prou amb llistar els seus elements per files (i recordar que la primera fila és la fila zero i la primera columna és la columna zero).

```
sage: E=matrix([[2,3,1],[5,2,3],[1,2,0]])
sage: E
 [2 3 1]
 [5 2 3]
 [1 2 0]
sage: E[0,2]
 1
sage: E[1,0]
 5
sage: det(E)
 5
sage: E^(-1)
 [-6/5  2/5   7/5]
 [ 3/5 -1/5  -1/5]
 [ 8/5 -1/5 -11/5]
sage: E*E^(-1)
 [1 0 0]
 [0 1 0]
 [0 0 1]
sage: E*E^(-1)==identity_matrix(3)
 True
sage: F=matrix([[0,-1],[1,1],[5,-2]])
sage: E*F
 [ 8 -1]
 [17 -9]
 [ 2  1]
sage: K=matrix([[4,4],[-4,-3]])
sage: L=matrix([[3,4],[-2,-3]])
sage: D=matrix([[3,0,-1],[2,1,4]])
sage: F*(K*L)^(-1)*D+identity_matrix(2)
[ 15/2 1  5/2]
[  3/4 1 -1/4]
[197/4 7 69/4]
```

31. Aplicacions lineals i vectors propis

31.1 Aplicacions lineals

Suposem que tenim una matriu $n \times m$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

i un vector $\overrightarrow{v}$ de dimensió m

$$\overrightarrow{v} = (v_1, \ldots, v_m)$$

(o un punt de l'espai de dimensió m, que és essencialment el mateix). Si escrivim aquest vector en forma d'una matriu d'una única columna, aleshores podem considerar la multiplicació de matrius $A\overrightarrow{v}$ i considerar que el resultat és un vector de dimensió n

$$A\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{w}.$$

D'aquesta manera, una matriu la podem pensar com una funció que transforma vectors en vectors. En direm una **aplicació lineal** o també una **transformació lineal**.

Una aplicació lineal direm que és **ortogonal** si no modifica ni la dimensió ni la longitud dels vectors. És a dir, A ha de ser una matriu quadrada tal que $||\overrightarrow{v}|| = ||A\overrightarrow{v}||$.

Exemples:

- Considerem la transformació lineal de vectors del pla donada per la matriu

  $$A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

  on r és un escalar diferent de 0 i de 1. Evidentment, $A\overrightarrow{v} = r\overrightarrow{v}$ i aquesta transformació lineal és una **homotècia** perquè multiplica tots els vectors per un factor constant.

- Considerem la transformació lineal de vectors del pla donada per la matriu

  $$A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

  amb $r \neq s$. Aquesta transformació és una homotècia en la direcció de la primera coordenada i una homotècia diferent en la direcció de la segona coordenada.

- Considerem la transformació lineal de vectors del pla donada per la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que converteix el vector (x, y) en el vector (y, x). Geomètricament, es tracta de la **reflexió** respecte de la diagonal del primer quadrant. Observem que aquesta transformació lineal, a diferència de les dues anteriors, no modifica les longituds dels vectors. És una transformació **ortogonal**. La reflexió respecte de qualsevol recta que passi per l'origen també es pot expressar com a una transformació ortogonal donada per una matriu apropiada.

- Una **rotació** de centre a l'origen de coordenades també és una transformació ortogonal. En concret, la rotació d'angle θ ve donada per la matriu

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Per exemple, el resultat d'aplicar la rotació d'angle $\pi/3$ al vector $\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$ és

$$R_{\pi/3}(\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1 - 3\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{i} + \frac{3 + \sqrt{3}}{2}\overrightarrow{j}.$$

Aquest mateix concepte d'aplicació lineal ens permet entendre els **sistemes d'equacions lineals** com **equacions matricials** molt senzilles. En efecte, aquest sistema lineal de n equacions amb m incògnites

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

és equivalent a aquesta única equació matricial

$$A\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$$

amb $A = (a_{ij})$, $\overrightarrow{v} = (x_1, \ldots, x_m)$, $\overrightarrow{w} = (b_1, \ldots, b_m)$. En particular, si A fos una matriu quadrada invertible, la solució seria $\overrightarrow{v} = A^{-1}\overrightarrow{w}$.

31.2 Vectors propis i valors propis

Considerem a partir d'ara les transformacions lineals donades per una matriu **quadrada** A. En general, aquesta aplicació lineal pot girar, reflectir, estirar o comprimir els vectors de manera complexa. Si tenim un vector que **no canvia de direcció** quan li apliquem la transformació A, direm que es tracta d'un **vector propi**. Aquest concepte és extraordinàriament important. Donem-ne una definició molt precisa.

> **Un vector $\overrightarrow{v} \neq 0$ direm que és un vector propi per a la matriu A si $A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$ per algun escalar λ. Aquest escalar λ direm que és el valor propi de $\overrightarrow{v}$.**

Observem que, si $\overrightarrow{v}$ és un vector propi, tots els múltiples seus (diferents de zero) també ho són.

Exemples:

- Una rotació al pla (d'angle $\neq 0$, $\pi/2$, és clar) no pot tenir vectors propis perquè tots els vectors (diferents de $\overrightarrow{0}$) canvien de direcció.
- Una reflexió al pla respecte d'una recta té només dos vectors propis $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{w}$ (i els seus múltiples, és clar). En efecte, els únics vectors que no canvien de direcció són els de l'eix de reflexió (que es queden igual) i els perpendiculars a l'eix de reflexió (que canvien de signe i, per tant, no canvien de direcció). Els valors propis corresponents són 1 i -1. Per exemple, la reflexió respecte la diagonal del primer quadrant té
  - vectors propis de valor propi 1, que són els múltiples no nuls del vector $(1,1)$,
  - vectors propis de valor propi -1, que són els múltiples no nuls del vector $(1,-1)$.
- En una homotècia tots els vectors són vectors propis amb el mateix valor propi.
- En una transformació del tipus $A = \left(\begin{smallmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right)$ amb $r \neq s$, hi ha dos vectors propis: $\overrightarrow{u} = (1,0)$ de valor propi r i $\overrightarrow{v} = (0,1)$ de valor propi s.

Com podem determinar els vectors propis d'una matriu? El mètode per trobar-los es basa en el que es coneix com el **polinomi característic** de la matriu. Es tracta del polinomi definit així

$$q(x) = \det(A - xI)$$

on A és la matriu en qüestió, I és la matriu identitat (de la mateixa mida que A) i x és la variable del polinomi. Per exemple, si $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, el seu polinomi característic és aquest

$$q(x) = \det(A - xI) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1-x & -1 \\ 2 & -1-x \end{pmatrix} = x^2 + 1$$

La importància d'aquest polinomi rau en aquest fet:

Les solucions de l'equació $q(x) = 0$ són els valors propis de la matriu A.

L'explicació és ben senzilla: un vector propi de valor propi λ és un vector $\overrightarrow{v} \neq 0$ tal que

$$A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v} = \lambda I\overrightarrow{v}.$$

Per tant,

$$(A - \lambda I)\overrightarrow{v} = 0$$

i això ens diu que la matriu $A - \lambda I$ no pot ser invertible i, en conseqüència, el seu determinant ha de ser zero. Però el seu determinant és $q(\lambda)$.

Tenim, doncs, un mètode per trobar els vectors propis d'una matriu. Practiquem-lo en tres exemples de matrius 2×2.

Exemple. Trobem els vectors propis de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Seguim aquests passos

1. Calculem el polinomi característic de la matriu.

$$q(x) = \det \begin{pmatrix} -3-x & -2 \\ 4 & 3-x \end{pmatrix} = x^2 - 1.$$

2. Els valors propis seran les solucions de $q(x) = 0$. En aquest cas, hi ha dos valors propis: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

3. Per a cada valor propi, trobem els vectors propis corresponents resolent un sistema d'equacions.

   - Vectors propis de valor propi $\lambda_1 = 1$. Són els vectors $\overrightarrow{v}$ tals que $A\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$. Si posem $\overrightarrow{v} = (a, b)$, aquests vectors han de complir

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

     Això és un sistema d'equacions lineals, compatible indeterminat. Les seves solucions són tots els vectors múltiples de $\overrightarrow{v} = (1, -2)$.

   - Vectors propis de valor propi $\lambda_2 = -1$. Són els vectors $\overrightarrow{v}$ tals que $A\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v}$. Si posem $\overrightarrow{v} = (a, b)$, aquests vectors han de complir

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}.$$

     Això és un sistema d'equacions lineals, compatible indeterminat. Les seves solucions són tots els vectors múltiples de $\overrightarrow{v} = (1, -1)$.

4. En conclusió, els vectors propis de la matriu A són

   - Els múltiples (diferents del vector zero) de $(1, -2)$ són vectors propis de valor propi 1.
   - Els múltiples (diferents del vector zero) de $(1, -1)$ són vectors propis de valor propi -1.

Exemple. Trobem els vectors propis de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seguim aquests passos

1. Calculem el polinomi característic de la matriu.
$$q(x) = \det \begin{pmatrix} 3-x & -1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} = x^2 - 4x + 4.$$
2. Els valors propis seran les solucions de $q(x) = 0$. En aquest cas, hi ha un únic valor propi: $\lambda = 2$.
3. Per a cada valor propi, trobarem els vectors propis corresponents resolent un sistema d'equacions. Com que només hi ha un valor propi, només hem de resoldre aquest sistema
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix}.$$
Això és un sistema d'equacions lineals, compatible indeterminat. Les seves solucions són tots els vectors múltiples de $\overrightarrow{v} = (1, 1)$.
4. En conclusió, els vectors propis de la matriu A són els múltiples (diferents del vector zero) de $(1, 1)$ i el seu valor propi és 2.

Exemple. Trobem els vectors propis de la matriu
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Seguim aquests passos

1. Calculem el polinomi característic de la matriu.
$$q(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & -1 \\ 2 & -1-x \end{pmatrix} = x^2 + 1.$$
2. Els valors propis seran les solucions de $q(x) = 0$. En aquest cas, no hi ha solucions. Per tant, no hi ha valors propis i, en conseqüència, no hi ha vectors propis.

Tot això que hem fet és vàlid també per a matrius quadrades de qualsevol mida.

31.3 Fem-ho amb sage

Podem multiplicar una matriu per un vector, si tenen les mides apropiades.

```
sage: E=matrix([[2,3,1],[5,2,3],[1,2,0]])
sage: v=vector([1,0,-1])
sage: E*v
 (1, 2, 1)
```

Si tenim una matriu quadrada, podem calcular el seu polinomi característic, els valors propis i els vectors propis.

```
sage: charpoly(E)
```

```
 x^3 - 4*x^2 - 18*x - 5
sage: E.eigenvalues()
 [-2.469360621242111?, -0.2991522192549519?, 6.768512840497063?]
sage: E.eigenvectors_right()
 [(-2.46936062124211?, [(1, -1.85582677428444?, 1.09811970161122?)], 1),
 (-0.29915221925495?, [(1, -0.28316665589945?, -1.44965225155658?)], 1),
 (6.76851284049706?, [(1, 1.40215132492074?, 0.562058865734840?)], 1)]
```

Interpretem aquest últim resultat. En primer lloc, estem calculant els vectors propis *per la dreta* perquè nosaltres sempre considerem que quan multipliquem una matriu A per un vector v el vector és a la dreta: Av. Els valors propis són, aproximadament, -2.469, -0.299, 6.769. Els interrogants al final indiquen que sage coneix internament els valors exactes d'aquests valors propis, Els nombres 1 a la dreta de cada fila indiquen que els valors propis són *simples*, és a dir, no repetits. Finalment, per a cada valor propi tenim un vector propi. Per exemple, per al valor propi -2.469, un vector propi és el vector

$$\overrightarrow{v} = (1, -1.85582677428444?, 1.09811970161122?).$$

La situació és una mica diferent si treballem amb una matriu de nombres inexactes. Per exemple, prenem la mateixa matriu d'abans però substituïm el terme 2 pel terme 2.0.

```
sage: E=matrix([[2.0,3,1],[5,2,3],[1,2,0]])
```

Si li demanem que calculi els valors propis obtenim els mateixos resultats d'abans, sense els interrogants. Això vol dir que es tracta de nombres inexactes. A més, sage ens avisa que estem treballant amb nombres inexactes i que no pot garantir que el resultat sigui correcte.

```
sage: E.eigenvalues()
 UserWarning:  Using generic algorithm for an inexact ring, which will
 probably give incorrect results due to numerical precision issues.
 [6.76851284049706, -0.299152219254952, -2.46936062124211]
```

Si ara li demanem els vectors propis, no es limita a avisar-nos, sinó que refusa fer-ho.

```
sage: E.eigenvectors_right()
 NotImplementedError:  eigenspaces cannot be computed reliably for
 inexact rings
```

Si volem que, malgrat els riscos, sage calculi els vectors propis, hem de dir que la matriu és de RDF (*nombres reals de doble precisió*).

```
sage: E=matrix(RDF,[[2.0,3,1],[5,2,3],[1,2,0]])
sage: E.eigenvectors_right()
 [(6.768512840497064,
    [(-0.5519945378497666, -0.7739798725950621, -0.3102534238356669)], 1),
 (-0.2991522192549521,
    [(-0.5606245242943896, 0.15875017175966485, 0.812710603921203)], 1),
 (-2.469360621242112,
    [(0.4207046550354353, -0.7807549628808617, 0.46198407025396426)], 1)]
```

32. Matriu de Leslie i matriu de mobilitat social

32.1 Matriu de Leslie d'una població estructurada

Recordem el *model exponencial discret*

$$x(t+1) = r\,x(t)$$

que apareix quan una població es multiplica per una quantitat constant r cada període de temps. Per exemple, un cultiu de bacteris que es dupliquen ($r = 2$) cada unitat de temps. Matemàticament, l'estudi de l'evolució d'aquest model és molt senzill i ja el vàrem fer a l'apartat 10.1. Si comencem amb N_0 individus, cada unitat de temps la població vindrà donada per aquesta successió

$$N_0,\ rN_0,\ r^2N_0,\ r^3N_0, \ldots, r^kN_0, \ldots$$

de manera que la població tendirà a infinit de manera exponencial i, en particular, la població després de k unitats de temps serà igual a r^kN_0.

Aquest model pressuposa que la població és *homogènia* en el sentit que tots els seus individus tenen el mateix comportament reproductiu. A la pràctica, sovint, la situació és diferent perquè, per exemple, els individus més joves potser encara no són capaços de reproduir-se. Podríem generalitzar el model anterior *estructurant* la població en dos nivells: individus joves (J) i individus adults (A), de manera que la seva reproducció podria venir regulada d'aquesta manera

- Els individus joves no es reprodueixen.
- Després d'una unitat de temps, el 20% dels individus joves es converteixen en adults i l'altre 80% ha mort. El 60% dels individus adults ha sobreviscut i l'altre 40% ha mort.
- Els individus adults tenen una taxa de reproducció igual a r cada unitat de temps. És a dir, cada adult dóna lloc a r individus (joves, és clar) cada unitat de temps.

Com podríem descriure matemàticament el comportament d'aquesta *població estructurada*? Ens cal considerar dues variables

$$J(t) = \text{nombre d'individus joves al temps } t.$$
$$A(t) = \text{nombre d'individus adults al temps } t.$$

D'aquesta manera, la mida de la població a l'instant t ja no és un nombre, sinó que és un **vector** de dimensió 2

$$\overrightarrow{N(t)} = (J(t), A(t))$$

i volem saber com evoluciona aquest vector amb el pas del temps.

Després d'una unitat de temps,[1] les dues variables $J(t)$ i $A(t)$ hauran canviat de valor i, d'acord amb les tres normes anteriors, valdran

$$\begin{cases} J(t+1) = rA(t) \\ A(t+1) = 0.2\,J(t) + 0.6\,A(t) \end{cases}$$

Què podem dir sobre la població a llarg termini? Aquí l'anàlisi ja no sembla tan senzill com en el cas del model exponencial.

El primer pas per poder analitzar aquesta situació és adonar-se que la podem escriure en **forma matricial** d'aquesta manera:

$$\begin{pmatrix} J(t+1) \\ A(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J(t) \\ A(t) \end{pmatrix}.$$

Si designem per L la matriu $\left(\begin{smallmatrix} 0 & r \\ 0.2 & 0.6 \end{smallmatrix}\right)$, podem escriure aquesta equació matricial en la forma

$$\overrightarrow{N(t+1)} = L\,\overrightarrow{N(t)}$$

que s'assembla molt a l'expressió del model exponencial discret, canviant la taxa de creixement, que és un nombre, per L, que és una matriu 2×2.

Aquest tipus de matrius L que ens descriuen l'evolució d'una població estructurada per edats s'anomenen **matrius de Leslie**, en honor de Patrick H. Leslie, un matemàtic que va treballar a Oxford als anys 30 i 40 del segle XX, als inicis de l'ecologia matemàtica.

Després d'aquest exemple, ja no hi ha d'haver cap dificultat en entendre que la situació pot estendre's a una població estructurada en un nombre de nivells superior a 2. Per poder plantejar la matriu de Leslie corresponent només ens cal conèixer

- La taxa de fertilitat de cada nivell de població. En l'exemple anterior, la fertilitat dels joves (0) i la dels adults (r).
- La taxa de supervivència de cada nivell de població. En l'exemple anterior, la supervivència dels joves (20%) i la dels adults (60%).

Exemple. El gran gall de les praderies (*Tympanuchus cupido*) és un ocell de la família dels fasiànids que habita al centre de l'Amèrica del Nord. En un estudi sobre aquestes aus, s'ha dividit les femelles en tres grups d'edat (C, J, A) i s'ha estudiat la supervivència i la fecunditat de cada grup d'edat, en cada període de temps. S'ha vist que les cries més joves (C) encara no són fèrtils, tenen una probabilitat de supervivència del 15% i passen al segon grup després d'un període de temps. Els individus del segon grup d'edat (J), tenen una probabilitat de supervivència del 38% i una mitjana de cries femelles de 1.87 per femella cada període de temps. Passen al tercer grup d'edat després d'un període de temps. Finalment, la probabilitat de supervivència de les femelles adultes (A) és del 45% per període de temps i tenen 2.21 cries femelles per període.

[1] Recordem que estem considerant models *discrets* i que només considerem la situació de la població en instants $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, etc.

En aquest cas, la mida de la població en cada instant de temps serà un vector de dimensió 3

$$\overrightarrow{N} = (C, J, A)$$

i la informació que ens donen queda recollida en aquesta matriu de Leslie

$$\begin{pmatrix} 0 & 1.87 & 2.21 \\ 0.15 & 0 & 0 \\ 0 & 0.38 & 0.45 \end{pmatrix}.$$

32.2 Matriu de mobilitat social

La mateixa idea de les poblacions estructurades per edat i de la matriu de Leslie s'utilitza en altres contextos. Per exemple, a sociologia i economia es parla de la **matriu de mobilitat social** per referir-se a una matriu completament anàloga a la de Leslie. Posem uns quants exemples.

- En una gran universitat hi ha becaris (B), professors lectors (L) i professors permanents (P). Cada curs, la política de contractació de la universitat és aquesta:

  1. Es renoven automàticament tots els contractes dels professors permanents, excepte un 6% que són jubilacions, defuncions o baixes voluntàries.
  2. Per cada 10 professors permanents es contracta un nou becari. Per cada 20 professors lectors es contracta un nou becari.
  3. Es renova el contracte del 70% dels becaris, es contracta com a lectors el 2% dels becaris i a la resta de becaris no se'ls renova el contracte.
  4. Un 10% dels lectors passen a ser professors permanents, a un 80% se'ls renova el contracte i a la resta de lectors no se'ls renova el contracte.

  Volem estudiar l'evolució de la plantilla de professorat en aquesta universitat. La plantilla serà un vector

  $$\overrightarrow{N} = (B, L, P)$$

  i tindrem una matriu de Leslie (o de mobilitat social) L de manera que

  $$\overrightarrow{N(t+1)} = L\,\overrightarrow{N(t)}.$$

  La informació que ens donen és suficient per escriure aquesta matriu:

  $$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.05 & 0.1 \\ 0.02 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.94 \end{pmatrix}.$$

- En un estudi sobre mobilitat social[2] es va estudiar l'ocupació de 697 parelles pare/fill. Les ocupacions es van estructurar en tres categories E (empleats o professionals),[3] O (obrers) i P (pagesos). Els resultats de l'estudi es poden expressar

[2] Vegeu J. C. Goyder, J. E. Curtis (1977) *Occupational mobility in Canada over four generations*, Canadian Rev. Soc. Anthr. 14(3), 303–319.

[3] *«White collar»* a l'estudi original.

en una taula de doble entrada:

		Fill		
		E	O	P
Pare	E	78	39	11
	O	64	137	14
	P	58	107	189

Això **no** és una matriu de Leslie o de mobilitat social. Hem de convertir aquests nombres absoluts en percentatges. Obtenim

$$L = \begin{pmatrix} 0.6094 & 0.2977 & 0.1638 \\ 0.3047 & 0.6372 & 0.3023 \\ 0.0859 & 0.0651 & 0.5339 \end{pmatrix}.$$

D'on surten aquests nombres? Per exemple, per obtenir el coeficient 0.3047 que ocupa la segona fila, primera columna, hem fet això. Hi ha 128 pares empleats (suma de la primera fila de la taula de doble entrada) i d'aquests n'hi ha 39 que tenen el fill obrer. Això vol dir que el 30.47% dels empleats tenen fills obrers.

Tenim, doncs, que L és la matriu de mobilitat social que es desprèn de l'estudi. En efecte, observem que la població de pares es distribueix en 128 empleats, 215 obrers i 354 pagesos i la població de fills es distribueix en 200 empleats, 283 obrers i 214 pagesos. Tenim

$$L \begin{pmatrix} 128 \\ 215 \\ 354 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 283 \\ 214 \end{pmatrix}.$$

- En una ciutat hi ha un sistema de bicicletes de lloguer (*«bicing»*) en el qual els usuaris poden agafar una bicicleta a qualsevol dels seus punts d'aparcament i retornar-la a qualsevol altre punt. L'orografia de la ciutat i les necessitats dels usuaris fan que, normalment, moltes bicicletes es retornin a llocs diferents del lloc d'origen. Per tal de planificar el transport nocturn de bicicletes d'una zona a una altra, es fa un estudi de la dinàmica de les bicicletes. Es divideix la ciutat en quatre grans zones: zona alta A, zona baixa B, zona est E i zona oest W i s'observa que cada dia passa aproximadament el següent:
  - De les bicicletes que surten de A, el 10% es retornen a A, el 60% es retornen a B, el 20% es retornen a E i el 10% es retornen a W.
  - De les bicicletes que surten de B, el 2% es retornen a A, el 50% es retornen a B, el 35% es retornen a E i el 13% es retornen a W.
  - De les bicicletes que surten de E, el 10% es retornen a A, el 25% es retornen a B, el 25% es retornen a E i el 40% es retornen a W.
  - De les bicicletes que surten de W, el 15% es retornen a A, el 20% es retornen a B, el 40% es retornen a E i el 25% es retornen a W.

  D'aquesta manera, podem construir una matriu 4×4 L que ens doni, a partir de la quantitat de bicicletes que hi ha a cada sector a l'inici del dia $\overrightarrow{N} = (A, B, E, W)$,

la quantitat de bicicletes que hi haurà a cada sector al final del dia $L\overrightarrow{N}$. Aquesta matriu, amb la informació que es desprèn de l'estudi anterior, és

$$L = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.02 & 0.10 & 0.15 \\ 0.60 & 0.50 & 0.25 & 0.20 \\ 0.20 & 0.35 & 0.25 & 0.40 \\ 0.10 & 0.13 & 0.40 & 0.25 \end{pmatrix}$$

- Lewis Richardson va ser un matemàtic britànic que, entre moltes altres coses, va desenvolupar models matemàtics dels conflictes bèl·lics. El que es coneix com a *model de Richardson de la cursa d'armaments* pretén donar un model de la quantitat d'armament que acumulen les diverses nacions, com a funció del temps. Per simplicitat, considerem només tres nacions A, B, C. Richardson argumenta que la quantitat d'armament que cada nació tindrà després d'una unitat de temps depèn de tres factors

  1. L'armament que ja té, multiplicat per un coeficient d'obsolescència o de reducció per motius de pressupost.
  2. L'armament que acumula com a resposta a l'armament que tenen les nacions que considera hostils.
  3. L'augment d'armament que, de manera constant, algunes nacions poden tenir, independentment de l'armament que tinguin les altres nacions (reposició de l'armament obsolet, etc.).

  El tercer factor fa que aquesta situació no sigui exactament igual a les altres que hem estudiat abans. Podem expressar matricialment aquesta situació d'aquesta manera (imaginem un exemple concret)

$$\begin{pmatrix} A(t+1) \\ B(t+1) \\ C(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 5 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(t) \\ B(t) \\ C(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.15 \\ 0.05 \end{pmatrix}.$$

  Què observem en aquestes matrius? D'una banda, observem que B és especialment bel·licista. D'entrada, està multiplicant el seu armament per 5 independentment de l'armament de les altres nacions. També, el seu creixement armamentístic «vegetatiu» és el triple del de les altres nacions (0.15 en front de 0.05). Finalment, està reaccionant a l'armament de A i de C (coeficients 0.2 i 0.1, respectivament). C no es preocupa de l'armament de A (i viceversa), però sí del de B, i està retirant una quarta part del seu armament (coeficient 0.25). Finalment, A està retirant la meitat del seu armament cada període de temps i està responent a l'armament de B, però menys del que ho fa C.

33. Comportament a llarg termini

Amb les matrius de Leslie i de mobilitat social que hem vist al capítol anterior, hem substituït l'equació del model exponencial discret

$$N(t+1) = r\,N(t)$$

per un altre model que s'hi assembla molt

$$\overrightarrow{N(t+1)} = L\,\overrightarrow{N(t)}$$

en el qual la mida de la població no és un escalar sinó que és un **vector** i la taxa de creixement tampoc no és un escalar sinó que és una **matriu**. En el cas del model exponencial va ser molt senzill investigar com va evolucionant la població amb el pas del temps i ens agradaria poder desenvolupar una anàlisi similar en el cas matricial.

Si ara volem conèixer la població en els temps $t+1, t+2, \ldots$, haurem de considerar les potències de la matriu L

$$N(t+1) = L\,N(t),\ N(t+2) = L^2 N(t),\ \ldots,\ N(t+k) = L^k N(t),\ \ldots$$

Evidentment, podem calcular explícitament les potències successives de la matriu L, però fóra interessant tenir un model matemàtic que ens permeti predir què succeirà quan $k \to \infty$, sense haver de calcular les potències L^k.

33.1 Potències i vectors propis

L'eina matemàtica per entendre el comportament de les potències d'una matriu és la teoria dels vectors propis i valors propis que hem estudiat en un capítol anterior. Vegem-ho en un exemple.

Considerem aquesta matriu

$$L = \begin{pmatrix} 1.5 & 2 \\ 0.08 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suposem que volem calcular $L^k\overrightarrow{v}$ per qualsevol valor de k i també per a $k \to \infty$. Suposem que $\overrightarrow{v} = (105, 1)$. Utilitzant l'ordinador podem veure que

$$L\overrightarrow{v} = (159.5, 8.4),\ L^2\overrightarrow{v} = (256, 12.8),\ L^3\overrightarrow{v} = (409.6, 20.5),$$
$$L^4\overrightarrow{v} = (655.4, 32.8),\ L^5\overrightarrow{v} = (1048.6, 52.4),\ L^6\overrightarrow{v} = (1677.7, 83.9),\ \ldots$$

i, a banda d'observar que les xifres van creixent, aquest càlcul no ens dóna prou informació sobre què és el que realment està passant.

Comencem calculant els valors propis i els vectors propis d'aquesta matriu L. A partir del polinomi característic de L i seguin el procediment que hem estudiat arribem a que hi ha aquests vectors propis

1. Els múltiples de $\overrightarrow{v_1} = (20, 1)$ són vectors propis de valor propi 1.6.
2. Els múltiples de $\overrightarrow{v_2} = (5, -4)$ són vectors propis de valor propi -0.1.

Recordem que això vol dir que

$$L\overrightarrow{v_1} = 1.6\,\overrightarrow{v_1}, \qquad L\overrightarrow{v_2} = -0.1\,\overrightarrow{v_2}.$$

En particular, sobre aquests vectors és molt senzill calcular l'efecte de L^k:

$$L^k\overrightarrow{v_1} = (1.6)^k\,\overrightarrow{v_1}, \qquad L^k\overrightarrow{v_2} = (-0.1)^k\,\overrightarrow{v_2}.$$

Però el que ens interessa és $L^k\overrightarrow{v}$. Observem això

$$\overrightarrow{v} = (105, 1) = 5(20, 1) + (5, -4) = 5\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}.$$

Per tant,

$$L^k\overrightarrow{v} = 5L^k\overrightarrow{v_1} + L^k\overrightarrow{v_2} = 5(1.6)^k(20, 1) + (-0.1)^k(5, -4)$$

i això és una fórmula concreta per a $L^k\overrightarrow{v}$ que és vàlida per a qualsevol valor de k. Què observem?

1. Quan k és molt gran, el coeficient $(-0.1)^k$ és pràcticament zero i podem afirmar que
$$L^k\overrightarrow{v} \approx 5\,(1.6)^k\,(20, 1) \to \infty.$$
2. Si k és gran,
$$L^{k+1}\overrightarrow{v} \approx 1.6\,L^k\overrightarrow{v}.$$

La situació que hem vist en aquest exemple és força general, si realment la matriu té el nombre màxim de vectors propis que pot tenir (2 en el cas d'una matriu 2×2, 3 en el cas d'una matriu 3×3, etc.).

Apliquem això al cas d'una matriu de Leslie o de mobilitat social. Suposem que tenim una població estructurada N (és un vector, però ometem la fletxa) i que la seva evolució ve donada per

$$N(t + 1) = L\,N(t)$$

on L, la matriu de Leslie, és una matriu quadrada $n \times n$.

- Suposem que la matriu L té exactament n valors propis diferents $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
- Anomenarem **valor propi dominant** el valor propi que tingui el valor absolut més gran. Suposem que és λ. Sigui $\overrightarrow{v}$ un vector propi de valor propi λ.
- Independentment de la població inicial,[1] la població a llarg termini tindrà una taxa de creixement igual a λ. És a dir, si k és gran,
$$N(k + 1) \approx \lambda N(k).$$
És a dir, la població, encara que sigui un vector, es comportarà com en un model exponencial de taxa λ.

[1] Això no és exactament cert. Fallaria, per exemple, si la població inicial fos igual a zero i també fallaria si la població inicial, casualment, fos un vector propi de valor propi diferent de λ. A la pràctica experimental, aquestes dues situacions són improbables.

- Independentment de la població inicial,[2] la distribució de la població en els diversos nivells, a llarg termini, tendirà a la distribució donada pel vector propi $\overrightarrow{v}$.

33.2 Exemples

Estudiem el comportament a llarg termini en els exemples del capítol anterior.

- **(El gran gall de les praderies)** Aquí teníem una població estructurada en tres edats (C, J, A), que evolucionava segons una matriu de Leslie

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1.87 & 2.21 \\ 0.15 & 0 & 0 \\ 0 & 0.38 & 0.45 \end{pmatrix}.$$

  Calculem els vectors propis i els valors propis d'aquesta matriu.

$$\begin{aligned} (1, -0.4273, 0.2027),\ \lambda &= -0.3510 \\ (1, 165.2398, -139.8179),\ \lambda &= 0.0009 \\ (1, 0.1875, 0.2034),\ \lambda &= 0.8002 \end{aligned}$$

  El valor propi dominant és $\lambda = 0.8$. Això ens diu que, a llarg termini, la població es multiplicarà per 0.8 a cada període de temps. És a dir, la població de cada nivell es multiplicarà per 0.8. Com que $0.8 < 1$, la població s'extingirà.

  Un vector propi corresponent al valor propi dominant és $(1, 0.19, 0.20)$. Això vol dir que, a llarg termini, la població es distribuirà en aquesta proporció. Per exemple, si tenim una població total de 1390 individus, es repartiran en 1000 individus del nivell C, 190 del nivell J i 200 del nivell A.

- **(Professors d'universitat)** Hi havia tres nivells B, L i P i les normes de contractació cada curs queden reflectides en una matriu de Leslie

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.05 & 0.1 \\ 0.02 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.94 \end{pmatrix}.$$

  Calculem els vectors propis i els valors propis d'aquesta matriu.

$$\begin{aligned} (1, -0.1967, 0.0814),\ \lambda &= 0.6983 \\ (1, -4.9406, 3.4298),\ \lambda &= 0.7920 \\ (1, 0.1372, 2.3888),\ \lambda &= 0.9457 \end{aligned}$$

  El valor propi dominant és $\lambda = 0.946$. Això ens diu que, a llarg termini, el nombre de professors de cada nivell es multiplicarà per 0.946 a cada període de temps. Per tant, anirà baixant lentament.

[2] Aquí també s'aplica la nota anterior.

Un vector propi corresponent al valor propi dominant és $(1, 0.14, 2.39)$. Això vol dir que, a llarg termini, la plantilla de professorat es distribuirà en aquesta proporció. Per exemple, si tenim un total de 3530 professors, es repartiran en 1000 becaris, 140 lectors i 2390 professors permanents, aproximadament. Aquesta anàlisi ens permet detectar les mancances d'aquesta política de contractació: reducció constant de plantilla i nombre insuficient de professors lectors.

- **(Oficis de pares i fills)** Distingíem entre pagesos, obrers i professionals i teníem una matriu experimental L que ens relacionava la professió del pare amb la del fill.

$$L = \begin{pmatrix} 0.6094 & 0.2977 & 0.1638 \\ 0.3047 & 0.6372 & 0.3023 \\ 0.0859 & 0.0651 & 0.5339 \end{pmatrix}.$$

  Aquí el valor propi dominant és 1, com ha de ser perquè en aquest model no hi ha creixement de població entre pares i fills. El que interessa és conèixer quina seria la distribució d'oficis a llarg termini, si la situació de l'estudi es perllongués durant moltes generacions. Un vector propi del valor propi 1 és $(1, 1.12, 0.34)$ per tant, la població s'acabaria repartint de manera que per cada empleat hi hauria 1.12 obrers i 0.34 pagesos.

- **(Bicing)** La matriu que ens explica el moviment de bicicletes entre les quatre zones de la ciutat és

$$L = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.02 & 0.10 & 0.15 \\ 0.60 & 0.50 & 0.25 & 0.20 \\ 0.20 & 0.35 & 0.25 & 0.40 \\ 0.10 & 0.13 & 0.40 & 0.25 \end{pmatrix}$$

  El valor propi dominant és 1, com ha de ser perquè en aquest model no hi ha ni augment ni disminució de bicicletes. Un vector propi de valor propi 1 és $(1, 4.26, 3.80, 2.90)$. Això vol dir que, si no apliquem cap mesura correctiva de transport nocturn de bicicletes, a llarg termini, de cada 1200 bicicletes (aproximadament), n'hi haurà 100 a la zona alta, 426 a la zona baixa, 380 a la zona est i 290 a la zona oest.[3]

33.3 Fem-ho amb sage

Resolem els quatre exemples anteriors amb sage.

```
sage: A=matrix(RDF,[[0,1.87,2.21],[0.15,0,0],[0,0.38,0.45]])
sage: B=matrix(RDF,[[0.7,0.05,0.1],[0.02,0.8,0],[0,0.1,0.94]])
sage: C=matrix(RDF,[[0.6094,0.2977,0.1638],
....: [0.3047,0.6372,0.3023],
[0.0859,0.0651,0.5339]])
sage: D=matrix(RDF,[[0.10,0.02,0.10,0.15],[0.60,0.50,0.25,0.2],
```

[3] Estrictament parlant, en aquest exemple no podríem aplicar la teoria que hem desenvolupat, perquè la matriu anterior només té dos valors propis i no quatre. De tota manera, un refinament de la teoria (que no estudiarem) ens permet resoldre també aquests casos.

```
....: [0.2,0.35,0.25,0.40],[0.1,0.13,0.4,0.25]])
sage: A
 [ 0.0 1.87 2.21]
 [0.15  0.0  0.0]
 [ 0.0 0.38 0.45]
sage: B
 [ 0.7 0.05  0.1]
 [ 0.02 0.8  0.0]
 [ 0.0  0.1 0.94]
sage: C
 [0.6094 0.2977 0.1638]
 [0.3047 0.6372 0.3023]
 [0.0859 0.0651 0.5339]
sage: D
 [ 0.1 0.02  0.1 0.15]
 [ 0.6  0.5 0.25  0.2]
 [ 0.2 0.35 0.25  0.4]
 [ 0.1 0.13  0.4 0.25]
sage: A.eigenvectors_right()
 [(0.8001576416931175,
  [(-0.9637999732392762, -0.18067689221836866, -0.1960751697749675)],1),
  (-0.3510654132649406,
  [(0.9040094832345003, -0.38625685516573527, 0.18322798929085068)],1),
  (0.0009077715718234064,
  [(-0.004619825483303375, -0.7633790746535266, 0.6459342424687123)],1)]
sage: B.eigenvectors_right()
 [(0.6983036217141203,
  [(0.9780927886680308, -0.19235548112018513, 0.07958558687737832)],1),
  (0.7959518780392945,
  [(-0.16401668103293, 0.8103346817365105, -0.5625444266170723)],1),
  (0.9457445002465843,
  [(0.38560495631231606, 0.052915198262701885, 0.9211453736844124)],1)]
sage: C.eigenvectors_right()
 [(1.0000000000000004,
  [(-0.6481415332583796, -0.7286787024945016, -0.22122364565390876)],1),
  (0.3320693975624182,
  [(-0.7576550133975228, 0.6423975363022798, 0.11525747709524344)],1),
  (0.4484306024375822,
  [(-0.6995961594867555, -0.014789235208111403, 0.7143853946948675)],1)]
sage: D.eigenvectors_right()
 [(1.0000000000000004,
  [(-0.15432583857010407, -0.6573613090506916, -0.5864895429186637,
  -0.4473138282680879)],1), (0.13469732336181842 + 0.1396088897246559*I,
  [(-0.3130549513931328 + 0.29038532236416076*I, 0.7608827171231797,
  -0.011079383818814743 - 0.19856275194835768*I,-0.4367483819112306 -
  0.09182257041580322*I)],1), (0.13469732336181842 - 0.1396088897246559*I,
  [(-0.3130549513931328 - 0.29038532236416076*I, 0.7608827171231797,
  -0.011079383818814743 + 0.19856275194835768*I,-0.4367483819112306 +
  0.09182257041580322*I)],1), (-0.16939464672363683,
  [(-0.1132693413892941, 0.17334242046374104, -0.7211653532016027,
  0.661092274127156)],1)]
```

En conclusió:

- El valor propi dominant de A és ≈ 0.8 i un vector propi és $\approx (-0.96, -0.18, -0.20)$

o, equivalentment, $\approx (1, 0.19, 0.20)$.

- El valor propi dominant de B és ≈ 0.946 i un vector propi és $\approx (0.386, 0.053, 0.921)$ o, equivalentment, $\approx (1, 0.14, 2.39)$.
- El valor propi dominant de C és 1 i un vector propi és $\approx (-0.65, -0.73, -0.22)$ o, equivalentment, $\approx (1, 1.124, 0.341)$.
- En el cas de C, apareixen valors propis no reals (`I` indica la unitat imaginària $i = \sqrt{-1}$, però el valor propi dominant és 1, amb vector propi

$$\overrightarrow{v} \approx (-0.154, -0.657, -0.586, -0.447)$$

o, equivalentment, $\overrightarrow{v} \approx (1, 4.26, 3.80, 2.90)$.

Exercicis

A. Exercicis teòrics

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

V.A.1. Calculeu (a mà)

(a) GH

(b) HG

(c) $A^{-1}DF - DEF$

(d) $(E - J)F(B + 2A)$

(e) $F(KL)^{-1}D + I$ (I és la matriu identitat.)

(f) A^k per qualsevol valor de $k > 0$. Utilitzeu la fórmula

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

V.A.2. Trobeu el valor de la matriu quadrada X tal que

(a) $AX = 2X - L$

(b) $AXC + BXC = K$

(c) $A^2X + AX + X = I$

V.A.3. Escriviu aquest sistema d'equacions en forma matricial i resoleu-lo matricialment:

$$\begin{cases} 4x - 2y &= -2 \\ -3x + y &= 0 \end{cases}$$

V.A.4. Apliqueu la transformació lineal donada per la matriu E al vector $\mathbf{k} - \mathbf{i}$.

V.A.5. Trobeu els valors propis i els vectors propis de les matrius A, B, C, K, L, M.

V.A.6. Trobeu un vector de longitud 1 en la direcció del vector $(1, 2, 3)$.

V.A.7. Calculeu les longituds dels costats del triangle de vèrtex $A = (2, 1, 5)$, $B = (-1, -3, 7)$, $C = (2, -4, 1)$. Calculeu també els seus angles.

V.A.8. Escriviu la matriu d'una rotació en sentit horari al pla, amb angle de rotació de 22 graus. Apliqueu aquesta rotació al vector $-1.6\mathbf{i} + 4.2\mathbf{j}$.

V.A.9. Considereu els vectors de l'espai $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ i $3\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Calculeu les seves longituds i l'angle que formen.

V.A.10. Determineu l'equació del pla que passa pel punt $(1, 1, -1)$ i és perpendicular al vector $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

V.A.11. Trobeu equacions paramètriques i cartesianes de la recta de l'espai que passa pels punts $A = (1, -1, 3)$ i $B = (2, 4, -1)$.

V.A.12. Trobeu l'equació del pla que passa pel punt $(1, 1, 0)$ i és perpendicular a la recta que passa pels punts $A = (1, -1, 3)$ i $B = (2, 4, -1)$.

B. Exercicis d'aplicació

V.B.1. En una gran empresa productora de vi estem monitoritzant la fermentació del most en tres grans dipòsits. Prenem mostres i mesurem el contingut de glucosa, fructosa, àcid màlic, àcid tartàric, glicerol, àcid acètic, àcid succínic i alcohol. Estandarditzem els resultats i els valors que obtenim per aquests tres dipòsits són, respectivament,

$$A = (0.56, -0.12, 0.05, -0.21, -0.32, 0.01, 0.17, 0.01)$$
$$B = (0.48, 0.00, 0.07, -0.23, -0.44, 0.07, 0.13, 0.11)$$
$$C = (0.49, -0.09, 0.06, -0.22, -0.46, 0.02, 0.15, 0.04)$$

Decidiu si el most del dipòsit C s'assembla més al del dipòsit A o al del dipòsit B. Raoneu la resposta.[4]

V.B.2. Considerem aquests punts del pla: $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (3, 2)$, $D = (2, 3)$. Apliqueu manualment el mètode k-means a aquests quatre punts, amb $k = 2$, començant amb els punts A i B, fins que el mètode finalitzi. A cada iteració, calculeu el valor de r.

V.B.3. A l'adreça `archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Wine` trobareu una base de dades que conté els valors de 13 variables (alcohol, àcid màlic, magnesi, fenols, etc.) de 178 mostres de vi que procedeixen de tres varietats diferents. Es tracta d'utilitzar k-means amb $k = 3$ per intentar identificar les mostres de cada varietat. Descarregueu-vos aquesta base de dades i utilitzeu el programa *R* per distribuir les mostres en tres clústers. Compareu amb l'atribució correcta, que també figura a la base de dades.

[4] Inspirat en l'article de A. Urtubia *et al.* titulat *Monitoring large scale wine fermentations with infrared spectroscopy*, Talanta 64 (2004), 778–784.

V.B.4. El peix escorpí (*Pterois volitans*) és un peix verinós que és una espècie invasiva i destructiva a algunes zones del Carib. En un estudi sobre aquesta espècie (Morris, Shertzer, Rice 2011) es va estructurar la població de femelles en tres nivells d'edat: larva (L), jove (J) i adult (A) i es van estudiar els paràmetres de reproducció i supervivència. La fase de larva dura 1 mes i la probabilitat que una larva sobrevisqui és de 3×10^{-5}. La probabilitat que un exemplar jove sobrevisqui un mes més és 0.777 i cada mes un 7.1% dels joves es converteixen en adults. Només els adults són fèrtils i cada adult produeix 35000 larves cada mes. Podem pensar que els adults sobreviuen indefinidament. Escriviu una matriu de Leslie que descrigui l'evolució d'aquesta població.

V.B.5. Estudiem una població de peixos classificats en A (alevins, acabats de néixer), J (joves, encara no fèrtils) i F (adults, fèrtils). Suposem que el 25% dels alevins i el 50% dels joves sobreviuen i suposem que el adults fèrtils F tenen 8 cries i són retirats. Escriviu una matriu de Leslie que descrigui l'evolució d'aquesta població.

V.B.6. Els tres nivells bàsics d'empleats a una empresa informàtica són (A) software engineer, (B) senior engineer i (C) staff engineer. Imaginem que la política d'aquesta empresa funcionés així: cada any, 1) Es renoven el 95% dels contractes de nivell C, i per cada 10 enginyers de nivell C es contracta un nou enginyer de nivell A. 2) es renoven el 70% dels contractes de nivell A i es contracta com a nivell B el 2% dels de nivell A. 3) Un 5% dels contractes de nivell B passen a nivell C i un 80% dels contractes de nivell B es renoven. Escriviu una matriu L que descrigui l'evolució dels contractes de nivells A, B i C en aquesta empresa.

V.B.7. Una població d'aus es troba repartida entre dues zones humides properes A i B. Hem observat que cada dia aproximadament un 70% de les aus de A es traslladen a B i un 50% de les aus de B es traslladen a A. Descriviu en forma matricial l'evolució de les dues zones humides d'un dia al següent. Si entre A i B hi ha un total de 240 aus i aquest règim migratori es manté indefinidament, quina distribució d'aus hem d'esperar a llarg termini?

V.B.8. Dividim la població d'isards femella en un parc natural en dos grups d'edat: joves (durant el primer any de vida) i adultes, i hem determinat experimentalment que l'evolució anual de la població de femelles segueix una matriu de Leslie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

Interpreteu el significat d'aquesta matriu. Trobeu la taxa de creixement d'aquesta població. Cada any, durant una setmana, s'autoritza la cacera d'una quantitat de femelles adultes que es determina aplicant un percentatge h al total de femelles adultes presents. Quin ha de ser el valor de h si volem que la població es mantingui estable? (Per simplificar l'exercici, hem suposat que després d'un any les femelles ja són fèrtils, mentre que en realitat no ho són fins els 3 o 4 anys d'edat.)

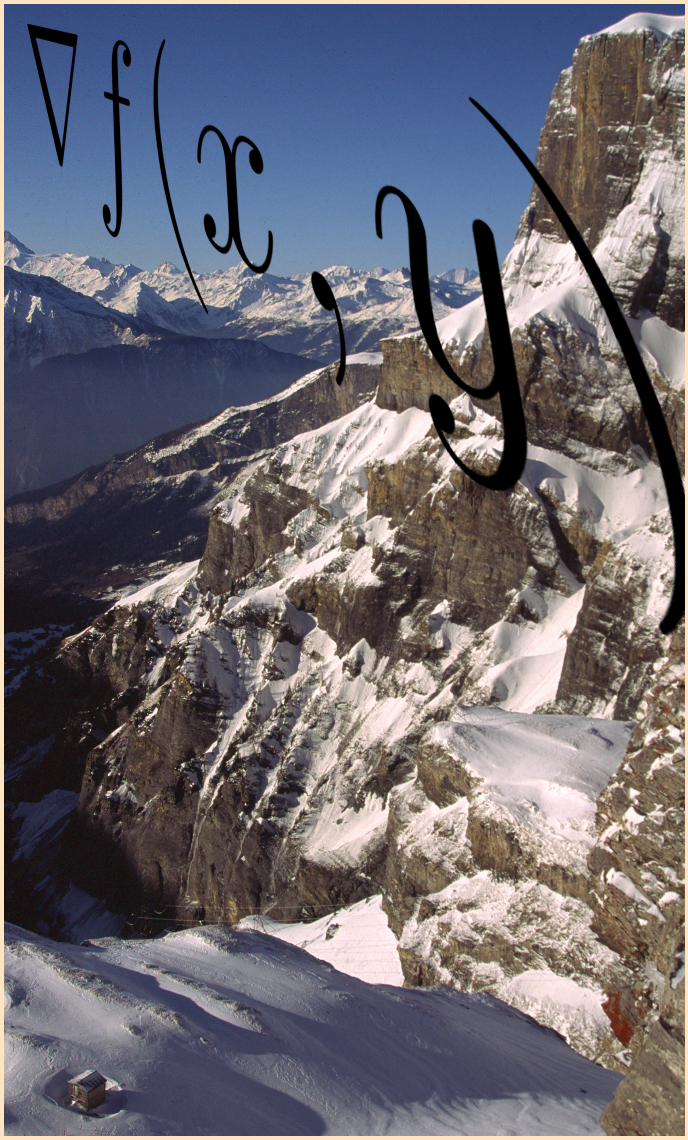
V.B.9. Una companyia de lloguer de cotxes té tres punts de recollida i entrega de vehicles, que anomenarem A, B i C. S'ha observat que, dels clients que lloguen

el cotxe a A, el 10% el torna a B i el 10% el torna a C. D'entre els que lloguen el vehicle a B, el 30% el torna a A i el 50% el torna a C. Finalment, dels que lloguen el vehicle a C, el 20% el torna a A i el 60% a B. Si no fem cap trasllat de vehicles d'una seu a l'altra, com s'acabarà distribuint el parc de vehicles a llarg termini?

V.B.10. Suposem que tenim una gran bassa d'aigua contaminada (de volum constant) amb una filtració que fa que cada mes un 5% de l'aigua de la bassa arribi a un aqüífer pròxim. A la bassa hi ha una depuradora que neteja un 10% del material tòxic cada mes. Formuleu un model teòric (discret) de l'evolució de la quantitat de contaminant a la bassa i a l'aqüífer. Quina proporció del producte tòxic que hi havia inicialment a la bassa acabarà a llarg termini a l'aqüífer?

Part VI:

Funcions de diverses variables



34. Representacions gràfiques

34.1 Quan una variable depèn de dues o més variables

Al llarg d'aquest curs hem estudiat funcions del tipus $y = y(x)$ en les quals una variable y depèn d'una altra variable x. És una situació molt interessant que cal haver entès perfectament, però a ningú se li escapa que les necessitats de la ciència ens condueixen, la majoria de vegades, a situacions en les què una variable y depèn de dues, tres, o vint-i-cinc variables

$$y = y(a, b, c, \ldots).$$

Parlarem, en aquests casos, de funcions de dues, tres o vint-i-cinc variables o, en general, de funcions de diverses variables.

L'objectiu d'aquesta darrera part del curs és familiaritzar-nos amb aquestes funcions i veure fins a quin punt els mètodes que hem après a utilitzar amb les funcions d'una única variable poden estendre's a les funcions de diverses variables. Comencem posant alguns exemples.

- Els models econòmics estudien **funcions de producció** que expressin la producció Q com a funció del capital invertit K i del treball utilitzat L. Una funció clàssica d'aquest tipus és la funció de producció CES

  $$Q(K, L) = F(aK^r + (1 - a)L^r)^{1/r}.$$

  Aquesta funció té diversos paràmetres F, a, r que estan relacionats, respectivament, amb els conceptes de productivitat, repartiment entre els dos factors de producció K i L i «elasticitat de substitució» (que mesura la possibilitat de substitució d'un dels factors per l'altre).

- Ja coneixem la funció que ens dóna la temperatura de sensació (*wind chill*) com a funció de la temperatura i la velocitat del vent.

  $$W(T, V) = 13.12 + 0.6215\,T - (11.37 - 0.3965\,T)\,V^{0.16}.$$

  Es tracta d'una funció de dues variables.

- En un estudi[1] es va determinar la concentració de O_2 dissolt a l'aigua d'un llac concret com a funció de la profunditat i de l'època de l'any. D'aquesta manera, es va obtenir una funció empírica de dues variables

  $$C = C(P, t)$$

  que dóna la concentració C com a funció de la profunditat a l'aigua del llac P i el dia de l'any t.

[1] Vegeu L. K. Hembre i R. O. Megard, *Seasonal and diel patchiness of a Daphnia population. An acoustic analysis*, Limnol. Oceanogr. 48(6), 2003, 2221–2233.

- Un mapa meteorològic isobàric és una representació gràfica de la pressió atmosfèrica que hi ha a cada punt d'una zona geogràfica, en un instant donat. Aquesta pressió atmosfèrica podem considerar-la, doncs, com una funció de dues variables

$$P = P(L, l)$$

on L i l són, respectivament, la latitud i la longitud del punt on volem saber la pressió. Si, en lloc d'un mapa isobàric fix volem un mapa en moviment, que ens indiqui la pressió atmosfèrica de cada punt per a un interval de temps, tindrem una funció de tres variables

$$P = P(L, l, t).$$

- Una fotografia digital en blanc i negre (més correctament, en *escala de grisos*) és un rectangle de píxels i, per a cada píxel, un nivell de lluminositat. Podem entendre-la com una funció

$$N = N(x, y)$$

que assigna, al píxel de coordenades (x, y), el seu nivell de lluminositat. Si, en lloc d'una fotografia digital, tenim un vídeo, hi haurà la variable temps i el vídeo estarà perfectament determinat per una funció de tres variables

$$N = N(x, y, t).$$

- En els exemples d'aquest curs hem considerat diverses vegades la producció d'un camp (per exemple, de cereals) com a funció $P = P(Q)$ de la presència al sòl d'un cert nutrient (per exemple, el nitrogen), però és clar que un model més realista hauria de tenir en compte la presència de diversos nutrients (per exemple, el fòsfor, el potassi, el sofre...). De fet, en agricultura es consideren 12 nutrients essencials que són al sòl i que s'haurien de controlar. En aquest model més complet, la producció seria una funció

$$P = P(Q_1, Q_2, \ldots, Q_{12}).$$

- La longitud d'un vector és una funció de les seves coordenades. Per exemple, en el cas d'un vector de dimensió 3,

$$|\overrightarrow{(x, y, z)}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

- L'índex *Dow Jones Industrial Average DJIA* es calcula en funció de les cotitzacions de les accions de 30 empreses concretes $p_1, \ldots, p_{30}$. La funció és aquesta

$$DJIA = \frac{p_1 + \cdots + p_{30}}{d}$$

on d és una constant que en aquests moments (febrer del 2017) val

$$d = 0.14602128057775.$$

Tenim, doncs, una funció de trenta variables. En canvi, l'índex *Nasdaq Composite* es determina a partir de les cotitzacions de més de 3000 empreses tecnològiques. Per tant, aquest índex és una funció de més de 3000 variables.

- A la pàgina 117 vam presentar l'equació de Penman-Monteith que utilitza la FAO per calcular l'evapotranspiració del sòl:

$$ET_0 = \frac{0.408\Delta(R_n - G) + \gamma\frac{900}{T+273}u_2(e_s - e_a)}{\Delta + \gamma(1 + 0.34u_2)}.$$

  Veiem que és una funció de diverses variables: velocitat del vent, temperatura, radiació solar, flux de calor del sòl, humitat, etc.

- En els estudis d'eficiència tèrmica d'un edifici ens interessa conèixer la pèrdua de calor a les canonades d'aigua calenta. Aquesta pèrdua de calor ve donada per una funció de diverses variables

$$q = \frac{\pi\Delta}{\frac{\log(D/D_0)}{2k} + \frac{1}{hD}}.$$

  D_0 és el diàmetre exterior de la canonada, D és el diàmetre exterior de la capa aïllant de la canonada, Δ és la diferència entre la temperatura de l'aigua calenta que circula per la canonada i la temperatura ambient, k és la conductivitat tèrmica de l'aïllament i h és el coeficient de transferència de calor de la superfície de l'aïllament a l'aire.[2]

- La fórmula que s'ha proposat[3] per estimar la superfície corporal A (en m^2) d'un ésser humà d'alçada H cm i pes W kg és

$$A = 0.007184\, W^{0.425} H^{0.725}.$$

- Una fórmula que s'utilitza[4] per mesurar la temperatura d'equilibri tèrmic del cos humà —és a dir, aquella en la que no notaríem ni fred ni calor— és

$$T = 31 - 0.155\, PR$$

  on P és la producció metabòlica de calor en W/m^2 i R és la mesura de l'aïllament tèrmic de la vestimenta que es dugui. R es mesura en unes unitats anomenades clo, (1 clo=0.155 $K\,m^2/W$). Per exemple, una persona dormint ($P = 50$) en un sac de duvet ($R = 5$) tindria una temperatura d'equilibri de $-7.8°C$, mentre que una persona caminant de pressa ($P = 180$) amb roba d'estiu ($R = 0.4$) tindria una temperatura d'equilibri de $19.8°C$.

34.2 Alguns conceptes bàsics

Hi ha una sèrie de conceptes bàsics sobre funcions d'una variable que tenen validesa per a funcions de diverses variables, pràcticament sense fer cap canvi.

[2] Aquest exemple és més complicat del que sembla a primera vista perquè h depèn de la temperatura de la canonada aïllada i aquesta temperatura depèn de q. Calcular aquesta pèrdua de calor és un problema clàssic d'enginyeria.

[3] Vegeu B. M. Nigg i W. Herzog, *Biomechanics of the Musculoskeletal System*, 1998.

[4] Vegeu *Clothing insulation* a Wikipedia.org.

- **Domini de definició** Una funció de diverses variables $f(x, y, z, \ldots)$ estarà definida per a certs valors de les variables $x, y, z, \ldots$ (que poden ser tots). Fora d'aquests valors, pot ser que la funció no tingui sentit, o simplement que no ens interessi estudiar-la. Per exemple, la funció
$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2xy$$
està definida per a qualsevol valor de les variables x, y, z, però el domini de definició de la funció
$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$
està format pels punts del pla (x, y) tals que $x^2 + y^2 \leq 1$. Aquests punts són els punts de l'interior de la circumferència de radi 1 centrada a l'origen i també els punt d'aquesta circumferència.

- **Límits** Funcionen igual que en el cas d'una variable:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}}} = 0.$$

- **Continuïtat** Podem parlar de funcions contínues, que seran aquelles tals que el valor de la funció en un punt qualsevol coincideix amb el límit de la funció quan ens acostem a aquest punt.

- **Operacions amb funcions** Les mateixes operacions que consideràvem per a funcions d'una variable —suma, resta, multiplicació, divisió i composició— tenen ple sentit en el cas de diverses variables. A partir de les funcions elementals d'una variable podem obtenim una varietat il·limitada de funcions de diverses variables:
$$f(x, y, z) = \frac{\sin(xy)(e^z + 1)}{z^2 + \cos(y)}.$$

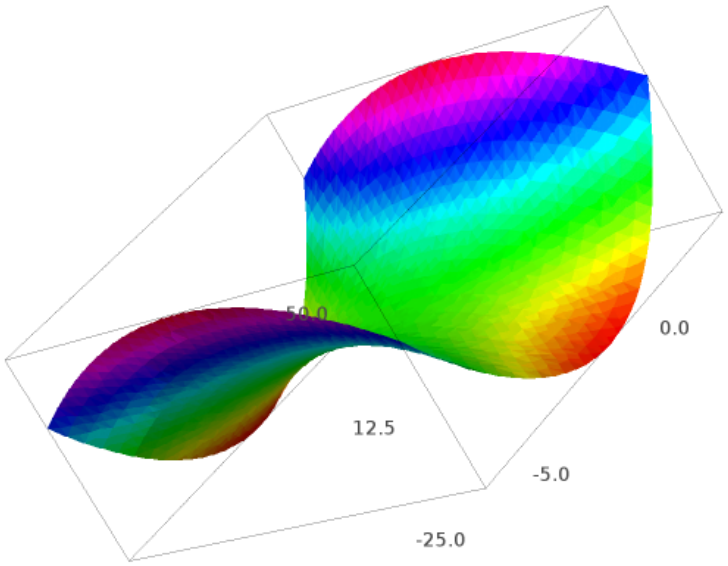
34.3 Representacions gràfiques

No hi ha dubte que, en el cas d'una funció d'una variable, la representació gràfica és una eina magnífica que ens permet visualitzar la funció i entendre el seu comportament. En el cas de funcions de diverses variables, la representació gràfica esdevé difícil, excepte quan es tracta de funcions de **dues** variables. En efecte, si tenim una funció
$$z = f(x, y)$$
podem actuar de manera similar a com ho fèiem a l'hora de dibuixar la gràfica d'una funció d'una variable. Representem les variables dependents x, y en un pla i, en l'espai de tres dimensions, dibuixem el punt $(x, y, f(x, y))$. El que obtenim, en general, és una **superfície** en 3D, de la mateixa manera que la gràfica d'una funció $y = f(x)$ és una **corba** en 2D. Utilitzant un programa de dibuix 3D podem arribar a visualitzar relativament bé una funció $z = f(x, y)$, principalment si podem moure la imatge.

Per exemple, la comanda

```
sage: plot3d(2*x^2-y^2,(x,-5,5),(y,-5,5),adaptive=True,
....: color=rainbow(60,'rgbtuple'))
```

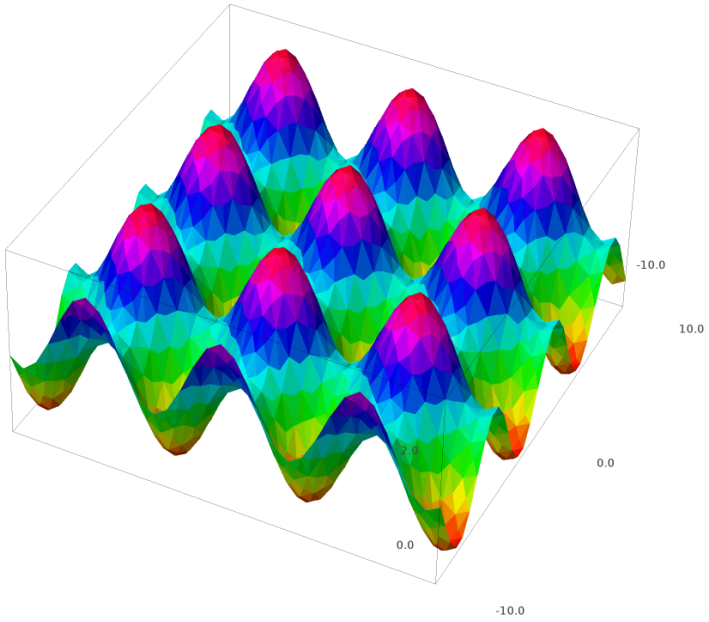
produeix un dibuix de la superfície representada per la funció $z = 2x^2 - y^2$.



La comanda

```
sage: plot3d(sin(x)+cos(y),(x,-10,10),(y,-10,10),adaptive=True,
....: color=rainbow(60,'rgbtuple'))
```

produeix un dibuix de la superfície representada per la funció $z = \sin(x) + \cos(y)$.

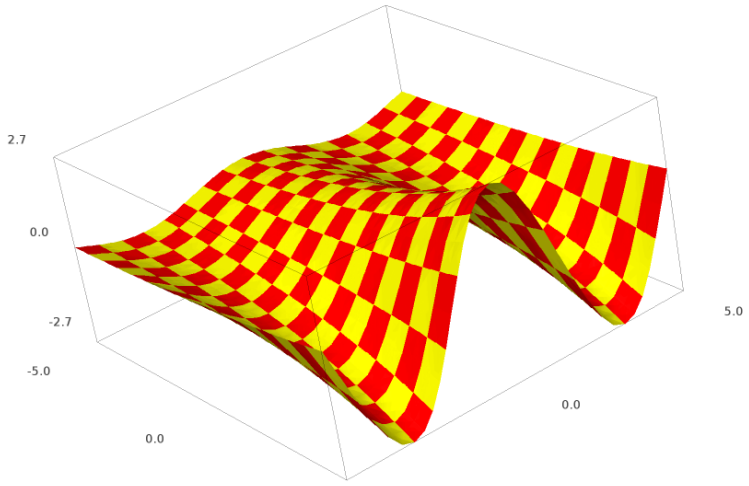


I la comanda

```
sage: plot3d(exp(x/5)*cos(y),(x,-5,5),(y,-5,5),adaptive=True,
```

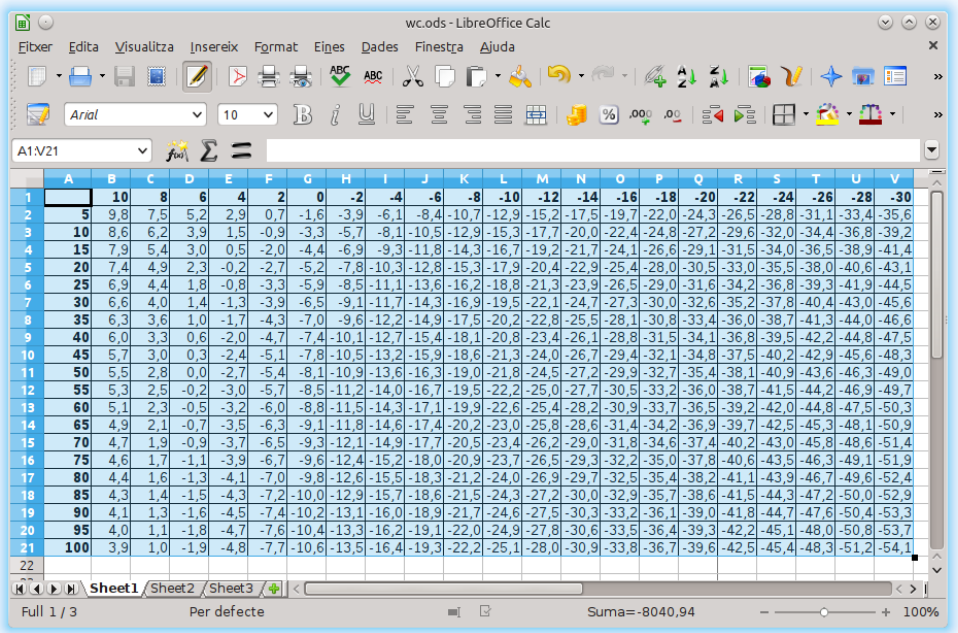
```
....: color=['red','yellow'])
```

produeix un dibuix de la superfície representada per la funció $z = \exp(x/5)\cos(y)$.



Hi ha altres eines de visualització que cal tenir presents:

- **Taula de doble entrada.** Considerem, per exemple, la funció que ens dóna la temperatura de sensació a partir de la temperatura i la velocitat del vent. En casos com aquest, pot ser molt útil representar els valors de la funció en una taula de doble entrada com aquesta, feta amb un full de càlcul.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1		**10**	**8**	**6**	**4**	**2**	**0**	**-2**	**-4**	**-6**	**-8**	**-10**	**-12**	**-14**	**-16**	**-18**	**-20**	**-22**	**-24**	**-26**	**-28**	**-30**
2	**5**	9,8	7,5	5,2	2,9	0,7	-1,6	-3,9	-6,1	-8,4	-10,7	-12,9	-15,2	-17,5	-19,7	-22,0	-24,3	-26,5	-28,8	-31,1	-33,4	-35,6
3	**10**	8,6	6,2	3,9	1,5	-0,9	-3,3	-5,7	-8,1	-10,5	-12,9	-15,3	-17,7	-20,0	-22,4	-24,8	-27,2	-29,6	-32,0	-34,4	-36,8	-39,2
4	**15**	7,9	5,4	3,0	0,5	-2,0	-4,4	-6,9	-9,3	-11,8	-14,3	-16,7	-19,2	-21,7	-24,1	-26,6	-29,1	-31,5	-34,0	-36,5	-38,9	-41,4
5	**20**	7,4	4,9	2,3	-0,2	-2,7	-5,2	-7,8	-10,3	-12,8	-15,3	-17,9	-20,4	-22,9	-25,4	-28,0	-30,5	-33,0	-35,5	-38,0	-40,6	-43,1
6	**25**	6,9	4,4	1,8	-0,8	-3,3	-5,9	-8,5	-11,1	-13,6	-16,2	-18,8	-21,3	-23,9	-26,5	-29,0	-31,6	-34,2	-36,8	-39,3	-41,9	-44,5
7	**30**	6,6	4,0	1,4	-1,3	-3,9	-6,5	-9,1	-11,7	-14,3	-16,9	-19,5	-22,1	-24,7	-27,3	-30,0	-32,6	-35,2	-37,8	-40,4	-43,0	-45,6
8	**35**	6,3	3,6	1,0	-1,7	-4,3	-7,0	-9,6	-12,2	-14,9	-17,5	-20,2	-22,8	-25,5	-28,1	-30,8	-33,4	-36,0	-38,7	-41,3	-44,0	-46,6
9	**40**	6,0	3,3	0,6	-2,0	-4,7	-7,4	-10,1	-12,7	-15,4	-18,1	-20,8	-23,4	-26,1	-28,8	-31,5	-34,1	-36,8	-39,5	-42,2	-44,8	-47,5
10	**45**	5,7	3,0	0,3	-2,4	-5,1	-7,8	-10,5	-13,2	-15,9	-18,6	-21,3	-24,0	-26,7	-29,4	-32,1	-34,8	-37,5	-40,2	-42,9	-45,6	-48,3
11	**50**	5,5	2,8	0,0	-2,7	-5,4	-8,1	-10,9	-13,6	-16,3	-19,0	-21,8	-24,5	-27,2	-29,9	-32,7	-35,4	-38,1	-40,9	-43,6	-46,3	-49,0
12	**55**	5,3	2,5	-0,2	-3,0	-5,7	-8,5	-11,2	-14,0	-16,7	-19,5	-22,2	-25,0	-27,7	-30,5	-33,2	-36,0	-38,7	-41,5	-44,2	-46,9	-49,7
13	**60**	5,1	2,3	-0,5	-3,2	-6,0	-8,8	-11,5	-14,3	-17,1	-19,9	-22,6	-25,4	-28,2	-30,9	-33,7	-36,5	-39,2	-42,0	-44,8	-47,5	-50,3
14	**65**	4,9	2,1	-0,7	-3,5	-6,3	-9,1	-11,8	-14,6	-17,4	-20,2	-23,0	-25,8	-28,6	-31,4	-34,2	-36,9	-39,7	-42,5	-45,3	-48,1	-50,9
15	**70**	4,7	1,9	-0,9	-3,7	-6,5	-9,3	-12,1	-14,9	-17,7	-20,5	-23,4	-26,2	-29,0	-31,8	-34,6	-37,4	-40,2	-43,0	-45,8	-48,6	-51,4
16	**75**	4,6	1,7	-1,1	-3,9	-6,7	-9,6	-12,4	-15,2	-18,0	-20,9	-23,7	-26,5	-29,3	-32,2	-35,0	-37,8	-40,6	-43,5	-46,3	-49,1	-51,9
17	**80**	4,4	1,6	-1,3	-4,1	-7,0	-9,8	-12,6	-15,5	-18,3	-21,2	-24,0	-26,9	-29,7	-32,5	-35,4	-38,2	-41,1	-43,9	-46,7	-49,6	-52,4
18	**85**	4,3	1,4	-1,5	-4,3	-7,2	-10,0	-12,9	-15,7	-18,6	-21,5	-24,3	-27,2	-30,0	-32,9	-35,7	-38,6	-41,5	-44,3	-47,2	-50,0	-52,9
19	**90**	4,1	1,3	-1,6	-4,5	-7,4	-10,2	-13,1	-16,0	-18,9	-21,7	-24,6	-27,5	-30,3	-33,2	-36,1	-39,0	-41,8	-44,7	-47,6	-50,4	-53,3
20	**95**	4,0	1,1	-1,8	-4,7	-7,6	-10,4	-13,3	-16,2	-19,1	-22,0	-24,9	-27,8	-30,6	-33,5	-36,4	-39,3	-42,2	-45,1	-48,0	-50,8	-53,7
21	**100**	3,9	1,0	-1,9	-4,8	-7,7	-10,6	-13,5	-16,4	-19,3	-22,2	-25,1	-28,0	-30,9	-33,8	-36,7	-39,6	-42,5	-45,4	-48,3	-51,2	-54,1
22																						

Cada fila representa una velocitat del vent, de 5 km/h a 100 km/h, en intervals de 5 km/h. Cada columna representa una temperatura, de 10°C a −30°C, en intervals de 2°C.

- **Seccions.** Si, a la superfície $z = f(x, y)$, fem que una de les tres variables sigui constant, tindrem una **corba** plana que serà la intersecció d'aquesta superfície amb un pla. Per exemple, considerem la funció anterior

$$z = 2x^2 - y^2.$$

  - Si prenem $z = k$ constant, tenim la corba plana $2x^2 - y^2 = k$, que és una hipèrbola. Per tant, les seccions horitzontals de la superfície són hipèrboles.
  - Si prenem $x = k$ constant, tenim la corba plana $z = 2k^2 - y^2$, que és una paràbola amb un màxim. Per tant, tallant la superfície amb un pla vertical $x = k$ obtenim paràboles.
  - Finalment, si fem $y = k$ constant, tenim la corba plana $z = 2x^2 - k^2$, que és una paràbola amb un mínim. Per tant, tallant la superfície amb un pla vertical $y = k$ obtenim paràboles.

  Si estudiem les seccions verticals $x = k$ i $y = k$ de la funció $z = \exp(x/5)\cos(y)$ ens adonarem que les primeres són corbes cosinus i les segones són corbes exponencials i entendrem, sense necessitat de recórrer a cap programa de dibuix 3D que la gràfica d'aquesta funció serà una corba cosinus que es desplaça per un eix i la seva amplitud es va fent cada vegada més petita o més gran segons una funció exponencial.

- **Corbes de nivell.** És un mètode clàssic que té molt avantatges. Les corbes de nivell s'utilitzen als mapes topogràfics i també als mapes meteorològics. Són una bona manera de representar en un paper una funció de dues variables. La idea és senzilla. Si tenim una funció $y = f(x, y)$, una **corba de nivell** d'aquesta funció és una corba plana

$$f(x, y) = k$$

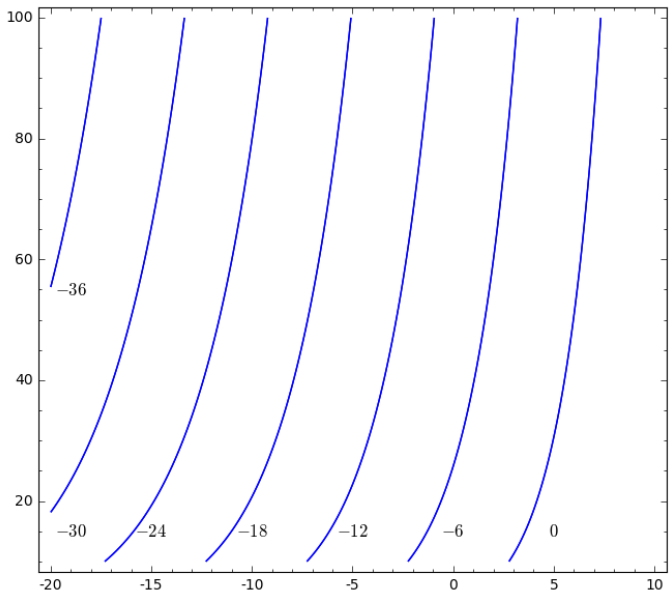
  on k és una constant. Prenent diversos valors de la constant k, tenim corbes de nivell diverses que poden dibuixar-se en un pla de coordenades.

  Considerem, per exemple, la funció que ens dóna la temperatura de sensació $W(T, V)$ en funció de la temperatura i la velocitat del vent, que hem representat més amunt en una graella, donaria corbes de nivell com les de la figura següent. Cada corba de nivell està dibuixada amb una comanda com aquesta:

```
sage: implicit_plot(W(T,V)-k,(x,-20,10),(y,10,100),aspect_ratio=0.3)
```

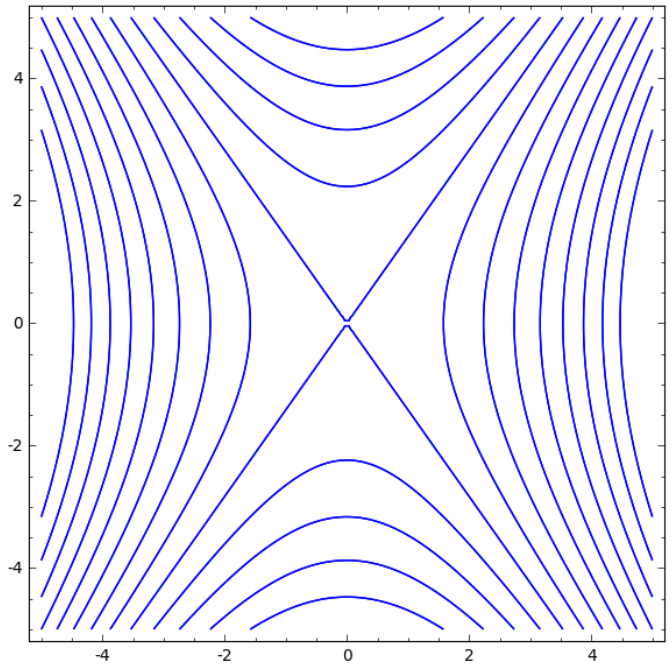
  La gràfica conté les corbes de nivell corresponents a

$$W = 0, -6, -12, -18, -24, -30, -36, -42.$$



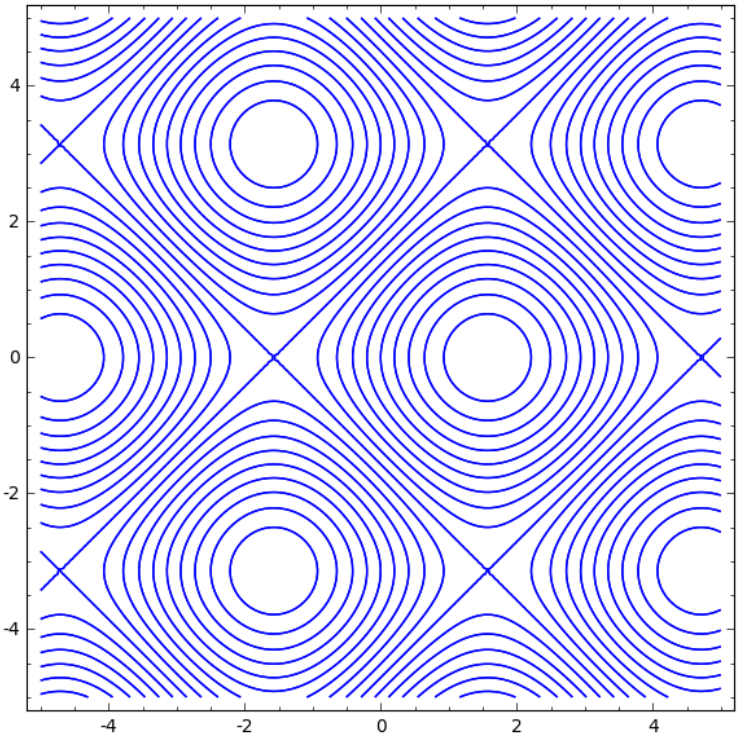
Per exemple, els punts que estan sobre la corba de nivell $W = -18$ ens donen les combinacions de T i V que donen $W = -18$. Quan ens movem per una corba de nivell, sempre tenim la mateixa temperatura de sensació. Amb un cert entrenament,[5] una gràfica de corbes de nivell ens permet visualitzar amb força claredat el comportament d'una funció de dues variables.

Aquí tenim corbes de nivell d'altres funcions que han aparegut en aquest capítol:

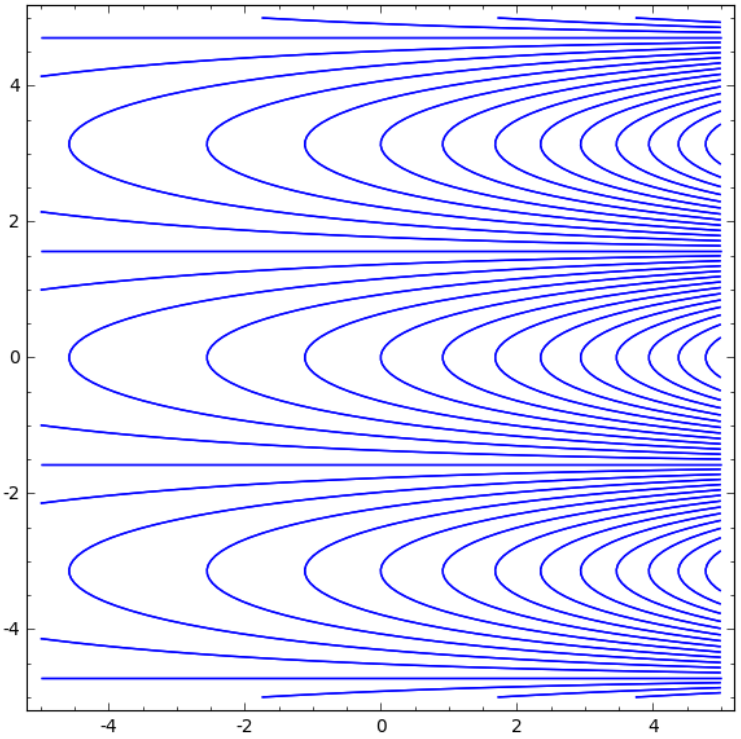


La funció $2x^2 - y^2$.

[5] Per exemple, els excursionistes que estan acostumats a utilitzar mapes topogràfics són capaços d'imaginar la forma del terreny a partir de la informació del mapa.



la funció $\sin(x) + \cos(y)$.



La funció $\exp(x/5)\cos(y)$.

34.4 Fem-ho amb sage

Al llarg del capítol ja hem vist quines instruccions de sage podem utilitzar per representar funcions de dues variables. D'una banda, tenim la instrucció plot3d() de dibuix en 3D. Per dibuixar corbes de nivell és útil la comanda implicit_plot() que ja havíem usat en algun capítol anterior.

Per estalviar feina en els dibuixos anteriors, hem definit una funció que dibuixa directament corbes de nivell:

```
sage: y=var('y')
sage: def corbes_nivell(f,x0,x1,y0,y1,L,h):
....:     P=[]
....:     for i in range(len(L)):
....:       P.append(implicit_plot(f(x,y)-L[i],(x,x0,x1),(y,y0,y1),
....:          aspect_ratio=h))
....:     return sum(P)
```

Aquí L és una llista dels valors de k per als que volem dibuixar la corba de nivell $f(x,y) = k$.

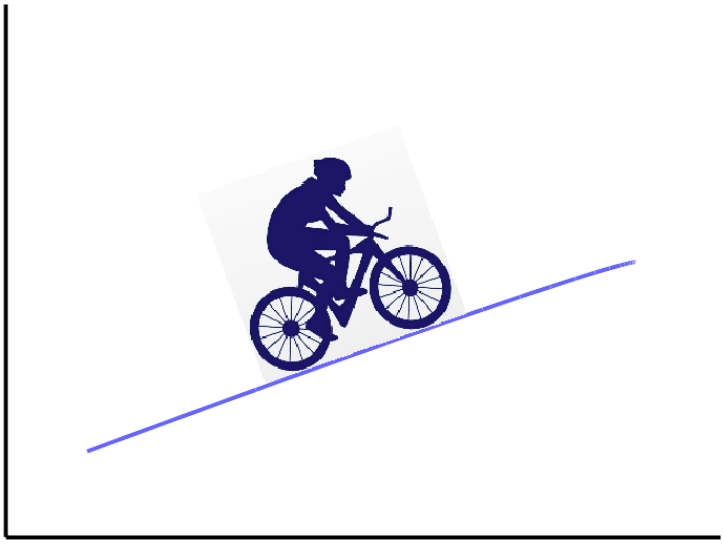
35. Derivades quan hi ha diverses variables

35.1 Quan hi ha diverses variables, hi ha diverses derivades

Ja sabem que el concepte de derivada d'una funció **d'una variable** és un concepte que té una importància fonamental perquè és la mesura de la velocitat amb què creix aquesta funció quan creix la variable de la que depèn. Aquest concepte fonamental, té també sentit quan hi ha dues o més variables? Podem parlar de derivada quan tenim, per exemple, una funció $z = z(x, y)$? Què voldrà dir, en aquest cas, la «velocitat de creixement»?

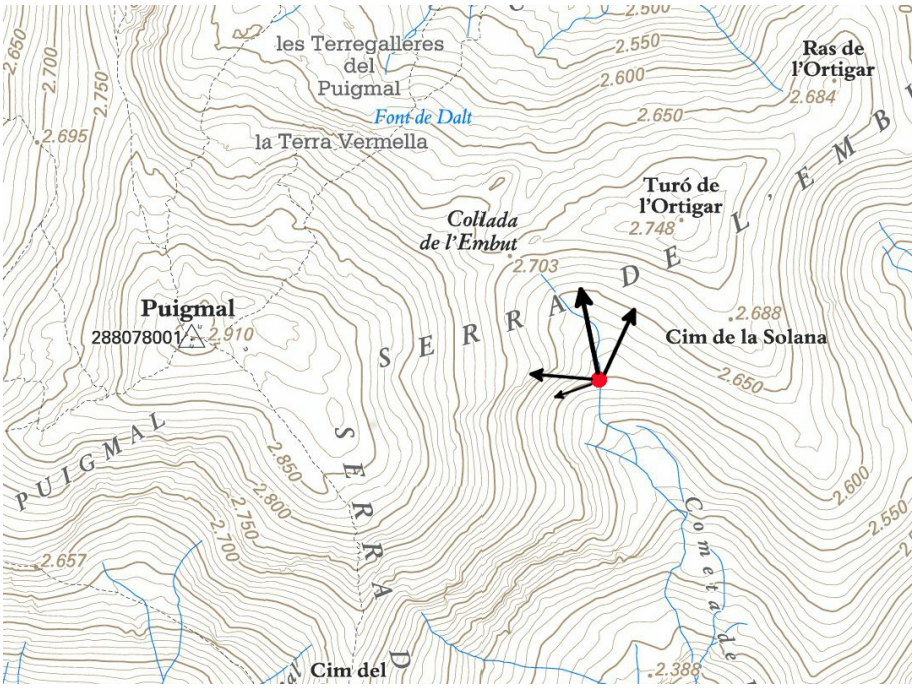
Si hi reflexionem un instant, entendrem que si volem parlar de derivada quan hi ha diverses variables hem de canviar algunes coses. De fet, no podrem parlar de la derivada, sinó que tindrem diversos conceptes de derivada. L'explicació quedarà clara amb l'exemple següent.

- Imaginem un ciclista que puja per la carretera de Vallter. Quan es trobi exactament al quilòmetre 4 d'aquesta ascensió clàssica haurà de fer front a un pendent del 12%. Aquest 12% ja sabem que és la derivada de l'alçada respecte de la longitud de la ruta (mesurada sobre l'horitzontal).



- Imaginem ara un ciclista de muntanya que està pujant al Puigmal i es troba a la cota 2.600, al punt vermell del mapa següent i preguntem-nos, igual que abans, a quin pendent ha de fer front.

La resposta és: **depèn**. Depèn de quin camí segueixi. Si pedala en direcció a la Collada de l'Embut, tindrà un pendent moderat. Si va més cap a l'esquerra trobarà un pendent molt més fort. Si va més cap a la dreta, el pendent no serà tan fort. Finalment, si segueix una corba de nivell, a la dreta o a l'esquerra, es mantindrà a la mateixa alçada i el pendent serà zero. Veiem, doncs, que el pendent depèn de la direcció. De fet, canviant la direcció, el pendent pot prendre qualsevol valor entre $-m$ i m, on m és el pendent màxim.



Veiem, doncs, que si bé la velocitat de creixement d'una funció d'una variable, en un

punt concret, és un nombre (la derivada), quan tenim funcions de dues o més variables, no podem parlar de derivada, perquè la velocitat de creixement depèn de la **direcció** que considerem.

35.2 Derivada direccional i derivades parcials

Segons el raonament que acabem de fer, si tenim una funció de diverses variables

$$y = f(x_1, \ldots, x_n),$$

i donem un vector

$$\overrightarrow{v} = (v_1, \ldots, v_n)$$

amb tantes coordenades com variables tingui la funció f, té sentit parlar de la velocitat de creixement de y en la direcció indicada pel vector $\overrightarrow{v}$. Escriurem

$$D_{\overrightarrow{v}} y$$

i direm que es tracta d'una **derivada direccional** de la funció.

La manera de calcular aquesta derivada direccional és senzilla d'entendre. Es tracta de considerar aquesta funció **d'una única variable** t:

$$g(t) = f(x_1 + tv_1, \ldots, x_n + tv_n).$$

Aleshores, la derivada direccional en la direcció $\overrightarrow{v}$ és la derivada d'aquesta funció.

$$D_{\overrightarrow{v}} y = \frac{d}{dt}\, g(t).$$

Per simplificar la notació, considerem a partir d'ara que estem parlant d'una funció de **dues** variables (però tot el que direm és vàlid, sense cap canvi, per a funcions de tres o tres-centes variables). Si tenim, doncs, una funció

$$z = f(x, y)$$

podem considerar la seva derivada en qualsevol direcció del pla. Hi dues direccions «especials» que són les direccions que segueixen els eixos de coordenades x i y, respectivament. En direm **derivades parcials** respecte de x i respecte de y. La notació utilitza el símbol específic ∂:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}.$$

La derivada parcial respecte de x la podem entendre com la derivada de la funció z **suposant que** y **és constant**, i la derivada parcial respecte de y la podem entendre com la derivada de la funció z **suposant que** x **és constant**. D'aquesta manera, les regles de derivació que coneixem per a funcions d'una variable ens permeten calcular les derivades parcials immediatament.

Exemple. Considerem la funció de dues variables

$$z = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}.$$

Les seves dues derivades parcial seran

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2-2y^2}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{\sqrt{4-x^2-2y^2}}.$$

Observem, doncs, que una funció de dues variables té **dues** derivades parcials que tornen a ser funcions de dues variables. Això vol dir que cadascuna d'elles té dues derivades parcials, que seran **derivades parcials segones** de la funció inicial. En conclusió, una funció de dues variables té **quatre** derivades parcials segones, que es denoten així:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

- En condicions força generals (n'hi ha prou que les segones derivades parcials siguin funcions contínues), les **derivades parcials creuades** són iguals:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

- Les quatre derivades parcials segones es poden escriure en forma de matriu 2×2 (o $n \times n$ si estem parlant de funcions de n variables). La matriu que formen s'anomena **matriu hessiana** de la funció.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

35.3 El gradient

Seguim suposant, per simplificar la notació, que tenim una funció de dues variables

$$z = z(x, y).$$

S'anomena **vector gradient** de la funció, o simplement **gradient** de la funció, el vector que té per coordenades les derivades parcials de la funció. La notació utilitza el símbol específic ∇:

$$\nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

Recordem que, per a cada valor de les variables independents x, y, el gradient és un **vector**.

Exemple. Si $z = e^{2x}\cos(y)$, aleshores

$$\nabla z = (2e^{2x}\cos(y), -e^{2x}\sin(y))$$

i si, per exemple, $(x, y) = (0, \pi/2)$, el vector gradient en aquest punt val

$$\nabla z|_{(0,1)} = (0, -1).$$

Les propietats d'aquest vector que ens interessa recordar són aquestes:

- El gradient ens permet calcular les **derivades direccionals** segons aquesta fórmula que utilitza el producte escalar.

$$D_{\overrightarrow{v}} z = \frac{(\nabla z) \cdot \overrightarrow{v}}{|v|}.$$

- El vector gradient apunta en la direcció[1] de **màxim pendent**, és a dir, en la direcció en la que la funció creix més ràpidament. Aquest màxim pendent, aplicant la fórmula anterior, val

$$m = D_{\nabla z} z = |\nabla z|.$$

  És a dir, el gradient ens indica la direcció de màxim pendent i la seva longitud és el pendent màxim.

- La direcció de pendent zero és la direcció **perpendicular** al gradient. En altres paraules, les corbes de nivell són perpendiculars al gradient.

- La direcció de màxim pendent negatiu és la direcció oposada al vector gradient.

Exemple. Considerem la funció $z = 2x^2 - y^2$ i el punt $(1, -1)$. Comencem calculant les derivades parcials.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y.$$

Per tant, el vector gradient és

$$\nabla z = (4x, -2y)$$

En el punt $(1, -1)$ aquest gradient val $\nabla z = (4, 2)$ i, per tant, la direcció de creixement màxim és la direcció donada pel vector $4\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$, que és la mateixa direcció que el vector $2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$. La direcció de decreixement màxim és la del vector $-2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$.

La velocitat de creixement màxim és

$$|\nabla z| = |4\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}| = 2\sqrt{5}.$$

La direcció de creixement zero (és a dir, la direcció de la corba de nivell) en aquest punt és la direcció perpendicular a $2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$. És a dir, la direcció marcada pel vector $\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$.

Finalment, quina seria la velocitat de creixement en la direcció del vector $\overrightarrow{u} = (-1, 1)$? Cal calcular la derivada direccional

$$D_{(-1,1)} z = \frac{(\nabla z) \cdot (-1, 1)}{|(-1, 1)|} = \frac{(4, 2) \cdot (-1, 1)}{|(-1, 1)|} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}.$$

[1] Hauríem de dir el **sentit**.

35.4 Fem-ho amb sage

Les derivades parcials es poden calcular amb la mateixa instrucció `diff()` del cas d'una variable. També tenim la comanda `gradient()`.

```
sage: z(x,y)=sqrt(4-x^2-2*y^2)
sage: diff(z(x,y),x)
 -x/sqrt(-x^2 - 2*y^2 + 4)
sage: diff(z(x,y),y)
 -2*y/sqrt(-x^2 - 2*y^2 + 4)
sage: z.gradient()
 (x, y) |-> (-x/sqrt(-x^2 - 2*y^2 + 4), -2*y/sqrt(-x^2 - 2*y^2 + 4))
sage: z.gradient()(1,-1)
(-1, 2)
```

36. Pla tangent i aproximació lineal

36.1 Pla tangent

Entre les primeres aplicacions de la derivada que vam considerar en el cas d'una variable hi ha la determinació de la recta tangent i, com a conseqüència, l'aproximació lineal de funcions. En el cas de dues variables podem parlar de **pla tangent** a la gràfica d'una funció en un punt.

Suposem que tenim una funció $z = z(x, y)$ i un punt (x_0, y_0). En aquest punt, la funció valdrà $z_0 = z(x_0, y_0)$. Voldríem trobar l'equació del pla que passa pel punt (x_0, y_0, z_0) i és tangent a la gràfica de la funció $z = z(x, y)$. Recordem que l'equació d'un pla en 3D té la forma

$$ax + by + cz = d$$

on els coeficients a, b, c, d són nombres indeterminats. Si $c \neq 0$, podem escriure aquesta equació en la forma

$$z = A + Bx + Cy$$

on ara A, B, C són nombres indeterminats. Igual que passava en el cas d'una variable, els coeficients B i C s'identifiquen a les **derivades parcials** de la funció z. És a dir, el pla tangent té la forma

$$z = A + \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} x + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} y.$$

En aquesta equació encara hi ha un coeficient indeterminat A, però aquest coeficient es pot calcular perquè sabem que el pla ha de passar pel punt concret (x_0, y_0, z_0). El resultat final és que l'equació del pla tangent és aquesta:

$$z = z_0 + \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} (x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} (y - y_0).$$

Exemple. Trobem el pla tangent a la gràfica de la funció $f(x, y) = \sin(x) + \cos(y)$ en el punt $(0, \pi/2)$.

Comencem calculant el gradient de la funció en aquest punt:

$$\nabla f(x, y) = (\cos(x), -\sin(y)) = (1, -1).$$

Aleshores, l'equació del pla tangent és

$$z = A + x - y$$

i aquest pla ha de passar pel punt $(0, \pi/2, 0)$. Això ens dóna $A = \pi/2$ i el pla tangent que busquem és

$$z = \frac{\pi}{2} + x - y.$$

Si, en lloc d'una funció de dues variables tenim una funció de n variables, no parlarem de pla tangent, sinó d'*hiperplà* tangent. Si tenim n variables, la gràfica de la funció està en un espai de dimensió $n+1$ i un hiperplà en aquest espai és una varietat lineal de dimensió n.

36.2 Aproximació lineal

En el cas de les funcions d'una variable, l'aproximació lineal consistia en aproximar la funció per una funció lineal, és a dir, una recta. La millor aproximació lineal s'obté quan aquesta recta és la recta tangent a la gràfica. Vam arribar a aquesta fórmula

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

on a és l'abscissa del punt de tangència. Quan tenim una funció de dues variables, la gràfica de la funció és una superfície en 3D i la millor aproximació lineal d'una funció $f(x,y)$ s'obtindrà prenent el pla tangent a la gràfica de la funció, en el punt de referència. L'equació del pla tangent ja la coneixem per l'apartat anterior i arribem a la conclusió que l'aproximació lineal d'una funció $f(x,y)$ en un punt (a,b) vindrà donada per

$$f(x,y) \approx f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(a,b)}(x-a) + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(a,b)}(y-b).$$

Exemple. Volem aproximar la funció $z = x^2y + 2xe^y$ al punt $(2,0)$. Hem de començar calculant les derivades parcials de la funció en aquest punt.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 2e^y = 2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2xe^y = 8.$$

En el punt $(2,0)$ la funció val $z = 4$. Aleshores, l'aproximació lineal serà

$$z \approx 4 + 2(x-2) + 8y = 2x + 8y.$$

Si la funció que estudiem té n variables, l'aproximació lineal també tindrà n variables.

36.3 La regla de la cadena

Recordem que la regla de la cadena ens permetia trobar la derivada de la composició de dues funcions. La situació era aquesta. Teníem una funció $y = y(x)$ en la qual la variable x era funció d'una tercera variable $x = x(t)$, i volíem determinar la derivada de y respecte de t. La regla de la cadena ens diu que aquesta derivada és igual al producte de la derivada de y respecte de x i la derivada de x respecte de t:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Quins canvis hem de fer quan tenim funcions de diverses variables? Ben pocs. N'hi ha prou amb substituir la multiplicació anterior pel **producte escalar**. Més concretament, suposem que tenim una funció de dues variables $z = z(x,y)$ i suposem que

cadascuna d'aquestes dues variables és funció d'una tercera variable $x = x(t)$, $y = y(t)$. Aleshores,

$$\frac{dz}{dt} = (\nabla z) \cdot (x', y') = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

La situació podria ser encara més complicada. Podríem tenir una funció $z = z(x, y)$ en la qual les dues variables fossin funció de **dues** noves variables: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. En aquest cas, la millor manera d'expressar la regla de la cadena és de manera matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Exemple. Recordem (pàgina 218) la fórmula que s'utilitza per estimar la superfície corporal:

$$A = 0.007184\, W^{0.425} H^{0.725}.$$

En una certa societat, l'alçada mitjana d'un noi de 13 anys és 154.3 cm i el seu pes mitjà és de 43.3 kg. Volem trobar una fórmula que ens doni la velocitat de creixement de la superfície corporal. És a dir, volem conèixer dA/dt. La regla de la cadena ens diu això:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial W}\frac{dW}{dt} + \frac{\partial A}{\partial H}\frac{dH}{dt}.$$

Determinem ara el gradient de A:

$$\nabla A = \left(0.0030532 W^{-0.575} H^{0.725},\ 0.0052084 W^{0.425} H^{-0.275}\right) = (0.013500, 0.006463).$$

Apliquem la regla de la cadena:

$$\frac{dA}{dt} = 0.013500 W' + 0.006463 H'.$$

D'aquesta manera, com que hi ha molts estudis sobre el creixement en alçada i en pes, coneixem també com creix la superfície de la pell.

Totes aquestes fórmules es poden generalitzar sense canvis importants al cas de funcions amb un nombre arbitrari de variables.

36.4 Fem-ho amb sage

Considerem l'exercici anterior que demanava trobar l'aproximació lineal de la funció $z = x^2y + 2xe^y$ al punt $(2, 0)$. El podem resoldre amb sage amb aquesta comanda:

```
sage: z(x,y)=x^2*y+2*x*e^y
sage: L=taylor(z,(x,2),(y,0),1)
sage: L(x,y)
 2*x+8*y
```

Per resoldre l'exercici de la superfície corporal, podem fer això:

```
sage: A(W,H)=0.007184*W^0.425*H^0.725
sage: t=var('t')
sage: W=function('W')(t)
```

```
sage: H=function('H')(t)
sage: diff(A(W,H),t).subs(W==43.3,H==154.3)
 0.00646265625279537*D[0](H)(t) + 0.0135001940086864*D[0](W)(t)
sage: view(_)
```

$$0.00646265625279537\, D[0]\,(H)\,(t) + 0.0135001940086864\, D[0]\,(W)\,(t)$$

37. Optimització en diverses variables

Quan estudiàvem funcions d'una variable, una de les aplicacions importants de la derivada va ser l'optimització, és a dir, la determinació dels màxims i mínims d'una funció. En el cas de les funcions de diverses variables, la derivada que hem estudiat en els capítols precedents també és una eina fonamental en l'optimització, però alguns detalls són una mica més complicats.

37.1 Domini de definició i punts interiors

La primera complicació que apareix en el cas de diverses variables és la forma del domini de definició. En el cas d'una variable, les funcions que apareixen a la pràctica estan definides a tota la recta o potser a una col·lecció d'intervals. En el cas de, per exemple, dues variables, les funcions poden estar definides en regions del pla que poden tenir una forma més o menys complicada.

Per exemple, la funció

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - 2y^2}$$

està definida a tots els punts (x, y) del pla tals que

$$x^2 + 2y^2 \leq 1.$$

Aquesta regió està formada pels punts de l'el·lipse $x^2 + 2y^2 = 1$ i per tots els punts de l'interior d'aquesta el·lipse. En un altre exemple, podem estar estudiant una funció $g(p,q) = 5p^2q^3$ on p i q són proporcions, és a dir, nombres entre 0 i 1. Aleshores, encara que la funció g, des d'un punt de vista matemàtic, està definida arreu, el domini de definició on ens interessa la funció és el quadrat

$$0 \leq p \leq 1, \quad 0 \leq q \leq 1.$$

Al domini de definició d'una funció distingirem entre els **punts interiors** i els punts de la **frontera**. Un punt és interior quan al seu voltant hi ha tot un petit disc de punts on la funció està definida. En els exemples anteriors, la frontera per a la funció $f(x,y)$ és una el·lipse i la frontera per a la funció $g(p,q)$ està formada pels quatre costats d'un triangle.

37.2 Màxims i mínims locals

Un argument geomètric similar al del cas d'una variable ens diu que si una funció de diverses variables té un màxim local o un mínim local en un punt interior del domini de definició, el pla tangent[1] a la gràfica de la funció serà horitzontal. Si recordem

[1] Si es tracta d'una funció de més de dues variables, parlarem de l'hiperplà tangent.

l'equació del pla tangent, veiem que aquest pla és horitzontal quan totes les derivades parcials són iguals a zero.

Un **punt crític** d'una funció de diverses variables és un punt en el que totes les derivades parcials de la funció són iguals a zero. Els punts interiors on la funció té un extrem local són punts crítics de la funció. Per trobar els punts crítics d'una funció de diverses variables $z(x_1, \ldots, x_n)$ haurem de resoldre un sistema d'equacions.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Un cop haguem trobat els punts crítics de la funció, hem de decidir si són màxims o mínims locals. En el cas de les funcions d'una variable, la derivada segona ens podia resoldre aquest problema. En el cas de diverses variables, utilitzarem el **criteri de la matriu hessiana**. Recordeu que aquesta matriu està formada per les derivades segones de la funció.

Sigui H la matriu hessiana d'una funció calculada en un punt crític P i suposem que H és invertible. Aleshores

- Si tots els valors propis de H són positius, la funció té un mínim local a P.
- Si tots els valors propis de H són negatius, la funció té un màxim local a P.
- Si H té valors propis positius i valors propis negatius, P és un **punt de sella**. Això vol dir que a P hi ha direccions en les que la funció té un màxim local i direccions en les que la funció té un mínim local.

Considerem, per exemple, el cas de dues variables $z = z(x, y)$. La matriu hessiana serà una matriu 2×2

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Suposem que $P = (x_0, y_0)$ és un punt crític de la funció. Avaluem la matriu hessiana en aquest punt i obtenim una matriu

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

on a, b, c, d són nombres. Per decidir si P és màxim local o mínim local hauríem de veure si els valors propis d'aquesta matriu són positius o negatius. Ho podem fer calculant els valors propis, però de fet no és necessari calcular-los explícitament per saber si són positius o negatius. Podem utilitzar aquest criteri senzill:

- Si $\det(H) > 0$ i $a > 0$, aleshores P és un mínim local.
- Si $\det(H) > 0$ i $a < 0$, aleshores P és un màxim local.
- Si $\det(H) < 0$, aleshores P és un punt de sella.

37.3 Exemple: biodiversitat dels ratolins

A Catalunya, a banda del ratolí domèstic, hi viuen tres espècies de ratolí: el ratolí de bosc (*Apodemus sylvaticus*), el ratolí lleonat (*Apodemus flavicolis*), i el ratolí mediterrani (*Mus spretus*). En un estudi de biodiversitat, volem calcular l'índex de Shannon de diversos hàbitats, referit a aquestes tres espècies. Quins són els valors màxim i mínim que pot prendre aquest índex?

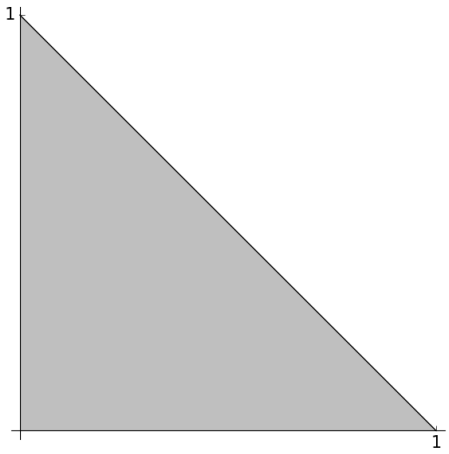
Recordem que, en el cas de tres espècies, l'índex de Shannon es calcula amb la funció

$$S = -p_1 \log(p_1) - p_2 \log(p_2) - p_3 \log(p_3)$$

on p_1, p_2, p_3 són les proporcions de cadascuna de les tres espècies en l'hàbitat d'estudi. Observem que S és, de fet, una funció de dues variables perquè

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Podem prendre $S = S(p_1, p_2)$ i $p_3 = 1 - p_1 - p_2$. D'altra banda, com que p_1, p_2 són proporcions, variaran entre 0 i 1 i la seva suma ha de complir $p_1 + p_2 \leq 1$. Per tant, el domini de definició de la funció $S(p_1, p_2)$ és la regió triangular del pla de vèrtex $(0, 0)$, $(1, 0)$ i $(0, 1)$.



Una altra observació que cal fer és quin valor té S quan alguna de les tres proporcions és igual a zero. Observem que

$$\lim_{x \to 0} x \log(x) = 0.$$

per tant, quan alguna proporció és igual a zero, podem simplement ometre el terme que la conté. Aquest límit també ens permet afirmar que la funció S és contínua i, en conseqüència, tindrà màxim absolut i mínim absolut en el triangle de definició. Volem determinar quins són. Seguim aquests passos:

- Calculem els **punts crítics** de la funció.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial p_1} = \log(p_3) - \log(p_1) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial S}{\partial p_2} = \log(p_3) - \log(p_2) = 0 \end{cases}$$

La solució d'aquestes equacions és $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$. En aquest punt la funció val $\log(3)$.

- No és estrictament necessari, però podríem usar el criteri de la **matriu hessiana** per decidir si aquest punt és un màxim local, un mínim local o un punt de sella. La matriu hessiana és

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_3} & -\frac{1}{p_3} \\ -\frac{1}{p_3} & -\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

  i, aplicant el criteri, veiem que la funció té un màxim local a $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$.

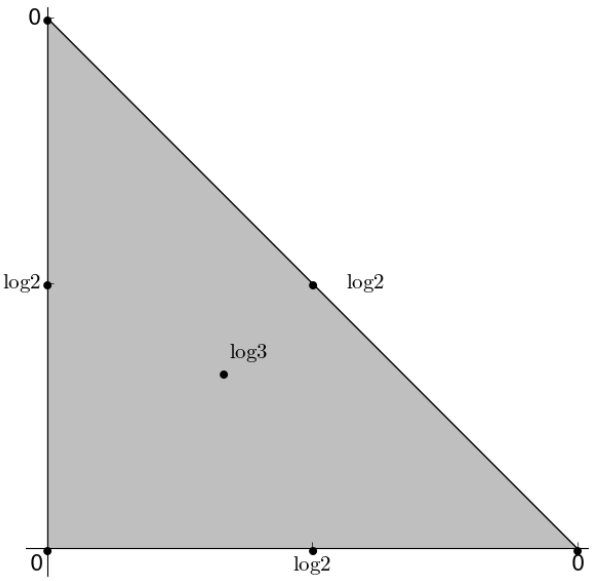
- Ara ens cal estudiar el comportament de la funció als **punts de la frontera** del domini de definició. La frontera està formada per les tres arestes del triangle on està definida la funció. En primer lloc, als tres vèrtex del triangle, la funció val zero. Considerem, per exemple, l'aresta $p_2 = 0$. Quan la restringim a aquesta aresta, la funció es converteix en una funció d'una variable:

$$S(p_1) = -p_1 \log(p_1) - (1 - p_1) \log(p_1).$$

  Analitzem aquesta funció a l'interval $(0, 1)$ amb les eines de les funcions d'una variable. Obtenim que aquesta funció té un màxim relatiu a $p_1 = 1/2$ i en aquest punt la funció val $\log(2)$. Les altres tres arestes donarien resultats equivalents.

- Finalment, hem arribat a la conclusió que el màxim absolut i el mínim absolut de la funció estaran en aquesta llista:

  1. Els tres vèrtex del triangle, corresponents a que només hi ha present una de les tres espècies de ratolí. En aquest cas, $S = 0$.
  2. Els punts mitjos de les tres arestes del triangle, corresponents a que només hi ha dues espècies presents, i cadascuna té un 50% de la població. En aquests punts, $S = \log(2)$.
  3. El punt $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$. En aquest punt, $S = \log(3)$.



Examinant aquests 7 candidats, arribem a la conclusió de el valor mínim de S és $S = 0$ i el valor màxim de S és $S = \log(3) \approx 1.01$. El mínim es dóna quan només hi ha present una única espècie i el màxim es dóna quan les tres espècies estan representades en la mateixa proporció.[2] Aquesta mateixa anàlisi l'hauríem pogut fer amb un nombre qualsevol n d'espècies i el resultat hauria estat anàleg: el mínim de S és $S = 0$, quan només hi ha una única espècie present, i el màxim de S és $S = \log(n)$ quan les n espècies estan representades de manera equitativa.

[2] Tanmateix, un resultat ben natural.

Exercicis

A. Exercicis teòrics

VI.A.1. Calculeu el gradient ∇f per a cadascuna de les funcions següents:

(a) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; (b) $f(r,s) = r\log(r^2+s^2)$;
(c) $f(x,t) = \arctan(x\sqrt{t})$; (d) $f(\alpha,\beta) = \sin\alpha\cos\beta$.

VI.A.2. Calculeu les derivades direccionals de les funcions següents en els punts indicats i en les direccions donades:

(a) $f(x,y) = x + 2xy - 3y^2$, $(x_0,y_0) = (1,2)$, $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$;
(b) $f(x,y) = e^x\cos(\pi y)$, $(x_0,y_0) = (0,-1)$, $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$;

VI.A.3. Trobeu la derivada direccional de $f(x,y,z) = x^2 - yz + z^2x$ en el punt $P = (1,-4,3)$ i en la direcció de P a $Q = (2,-1,8)$.

VI.A.4. En quina direcció, des de $(0,1)$, creix més ràpidament $f(x,y) = x^2 - y^2$?

VI.A.5. Calculeu les matrius hessianes de les funcions:

(a) $f(x,y) = x^4 - 3x^2y^3$; (b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$; (c) $f(x,y) = \log(3x+5y)$.

VI.A.6. Trobeu l'equació del pla tangent a la superfície en el punt que s'especifica:

(a) $z = 4x^2 - y^2 + 2y$, $P = (-1,2,4)$.
(b) $z = e^{x^2-y^2}$, $P = (1,-1,1)$.
(c) $z^2 = 4x^2 - y^2 + 2y$, $P = (1,1,\sqrt{5})$.

VI.A.7. Calculeu la linealització d'aquestes funcions als punts indicats:

(a) $f(x,y) = \sqrt{x} + 2y$; $P = (1,0)$.
(b) $f(x,y) = \sin(x^2y)$; $P = (\pi/2,0)$.

VI.A.8. Calculeu l'aproximació lineal de $f(x,y) = \sin(x+2y)$ al punt $(0,0)$ i utilitzeu-la per donar una estimació de $f(-0.1,0.2)$. Compareu amb el valor exacte.

VI.A.9. Trobeu els extrems locals i els punts de sella de les funcions següents:

(a)$f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$; (b)$f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$;
(c)$f(x,y) = 5 + 4x - 2x^2 + 3y - y^2$; (d)$f(x,y) = e^x\sin y$;

VI.A.10. (a) Trobeu els extrems relatius i els punts de sella de la funció $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 + 3y^2 - 4$.

(b) extrems relatius

(c) Considereu la superfície $z = f(x, y)$. Si us trobeu en el punt $(-1, 1, -4)$, en quina direcció heu d'anar per davallar pel màxim pendent? Si en comptes de davallar volguéssiu mantenir la mateixa altitud, en quina direcció hauríeu d'anar?

VI.A.11. Calculeu els màxims i mínims absoluts de $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 1$ al domini

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

VI.A.12. Calculeu els extrems absoluts de $f(x, y) = 4x^2 - 9y^2$ al domini

$$D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}.$$

VI.A.13. Utilitzeu la regla de la cadena per calcular $\frac{du}{dt}$ en aquests casos:

(a) $u = \exp(xy)$, $x = 3t^2$, $y = t^3$.

(b) $u = x^2 - 3xy + 2y^2$, $x = \cos t$, $y = \sin t$.

(c) $u = x + 4\sqrt{xy} - 3y$, $x = t^3$, $y = 1/t$.

VI.A.14. Utilitzeu la regla de la cadena per calcular $\partial u/\partial t$, $\partial u/\partial s$ si $u = \log(xy/2)$, $x = \sin(t)\cos(s)$, $y = 1 + st$.

B. Exercicis d'aplicació

VI.B.1. S'ha estudiat el rendiment d'una collita com a funció de les concentracions de nitrogen N i fòsfor P al sòl, i s'ha trobat una relació empírica (en unes certes unitats)

$$Y(N, P) = kNP\exp(-0.5N - P)$$

on k és una constant positiva. Trobeu els valors de N i P que maximitzen la collita.

VI.B.2. Les corbes de nivell d'una funció de producció s'anomenen *isoquantes*. Dibuixeu les isoquantes d'una funció de producció CES $Q = F(aK^r + (1 - a)L^r)^{1/r}$ amb $a = 0.3$, $r = 0.5$. Useu sage.

VI.B.3. A més de l'índex de Shannon, un altre índex que s'utilitza per mesurar la diversitat és l'índex de Simpson

$$H = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^2\right)^{-1}.$$

Repetiu el mateix exercici de les tres espècies de ratolí, amb l'índex de Simpson en lloc de l'índex de Shannon. És a dir, determineu quin són els valors màxims i mínim d'aquest índex quan hi ha tres espècies.

VI.B.4. Hi ha una fórmula[3] que dóna la mínima temperatura de supervivència (en absència de vent) com a funció de la producció metabòlica de calor M (en W/m^2) i la conductància tèrmica g (en $\mathrm{mol}/m^2 s$) de la roba d'abric que es dugui:

$$T = 36 - \frac{(0.9M - 12)(g + 0.95)}{27.8g}.$$

M varia entre 50 (persona dormint) fins a 400 (caminant en pujada), g varia entre 0.45 (cos nu) fins a 0.04 (plumó molt gruixut). Representeu aquesta funció utilitzant corbes de nivell. Dibuixeu seccions d'aquesta funció per a $M = 200$ (persona caminant) i per a $g = 0.14$ (persona amb roba de teixit polar).

VI.B.5. Utilitzant la teoria de l'exercici anterior, imagineu una persona que camina i va abrigat, de manera que $M = 100$ i $g = 0.1$. Va augmentant el seu ritme de manera que M creix a una certa velocitat $M' = 0.2\, W/m^2 s$ i, simultàniament, la roba que du va quedant amarada de suor, de manera que g també creix a velocitat $g' = 0.0002\, \mathrm{mol}/m^2 s^2$. Calculeu la velocitat amb què canvia la temperatura de supervivència.

VI.B.6. En el model de Holling de 1959, el nombre de captures d'un depredador en un interval de temps T s'expressa com

$$P = \frac{aNT}{1 + aT_0N},$$

on a és una mesura de l'agressivitat del depredador, N és la densitat de preses i T_0 és el temps que el depredador dedica a cada presa. Estudieu com es comporta P quan augmenten (per separat) cadascuna de les variables a, N, T, T_0.

VI.B.7. Segons el model de Voellmy (vegeu la pàgina 90), la velocitat màxima que assoleix una allau ve donada per

$$v = \sqrt{h\xi(\sin\psi - \mu\cos\psi)}$$

on h és l'alçada del gruix de neu, ψ és el pendent, i ξ i μ són coeficients de turbulència i fricció (positius), respectivament. Estudieu el comportament de v en funció dels diversos paràmetres.

VI.B.8. Estem pujant una muntanya amb una temperatura de -3 graus i un vent de 15 km/h. A mida que pugem, la temperatura baixa a un ritme de 1 grau cada cent metres i el vent augmenta a un ritme de 7 km/h cada cent metres. A quin ritme disminueix la temperatura de sensació? (Utilitzeu la fórmula de la pàgina 16.)

VI.B.9. Estem a 35 graus i la temperatura de rosada és $R = 300K$. La temperatura està pujant 2 graus per hora i R està baixant 2 graus per hora. Calculeu a quina velocitat està canviant la temperatura de xafogor H. (Utilitzeu la fórmula de la pàgina 68.)

[3] Aquesta fórmula apareix al llibre *Calculus For Biology and Medicine* de Claudia Neuhauser, que no cita la font original.

Solucions als exercicis

I. Les funcions elementals

I.A.1. (a) 5^{-2}; (b) $(6/5)^6$; (c) $(4/7)^{25}$; (d) 6^6

I.A.2. (a) $(7 \pm \sqrt{13})/6$; (b) $x = 8,\ -2/3$; (c) $x = 4,\ -3$; (d) $x = -1$.

I.A.3. $\dfrac{ke^{rt}}{1 + \dfrac{k}{K}e^{rt}}$

I.A.4. $a = -2,\ b = 5$

I.A.5. (a) $x = \pm 2$; (b) $x = 1$; (c) $x = -1,\ -2$

I.A.6. (a) $x = 80,\ 20$; (b) $x = 0,\ 1$; (c) $x = \pm 1$; (d) $x = 1,\ 3$

I.A.7. $K = 0.7116,\ R = 0.5196$

I.A.8.

I.A.9. (a) $x/\sqrt{1 + x^2}$; (b) $\sqrt{1 - x^2}/x$

I.A.10. (a) $x > 8$; (b) $x \geq 5$; (c) $x > (5 + \sqrt{61})/6$ o $x < (5 - \sqrt{61})/6$; (d) $-2 < x < 7/3$; (e) $s < 0$; (f) $-1 \leq x \leq 0$ o $x \geq 1$

I.A.11. (a) $-1 \leq x \leq 5$; (b) $-6 \leq x \leq -5$ o $5 \leq x \leq 6$; (c) $-4 < x < 4$; (d) $x \leq -1/2$

I.A.12. (a) $2x + 5y = 1$; (b) $3x + 5y + 7 = 0$; (c) $3y + 2x + 7 = 0$; (d) $2x - 3y - 7 = 0$

I.A.13. $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0$; $C = (2, 0),\ r = 4$; $C = (2, -1),\ r = 4$

I.A.14. (a) $2y = 3x^2 - x$; (b) $y = 2x^2 - 6x + 4$

I.A.15. (a) $x \geq 0$, excepte $x = \sqrt{2}$; (b) $x = a + k\pi$ amb k enter i $0 < a < \pi/2$; (c) Tot x excepte $[-2, -1]$; (d) $|x| \geq \sqrt{2}$

I.A.16. (a) $\exp(3x \log 7 + \frac{\log 5}{n})$; (b) $10^{0.197t}$; (c) $\log(0.9768t)^{0.4343}$; (d) $\log_{10}(74.5x)^{3.322}$

I.A.17. $N = 4119.23\, x/(3.077 + x)$

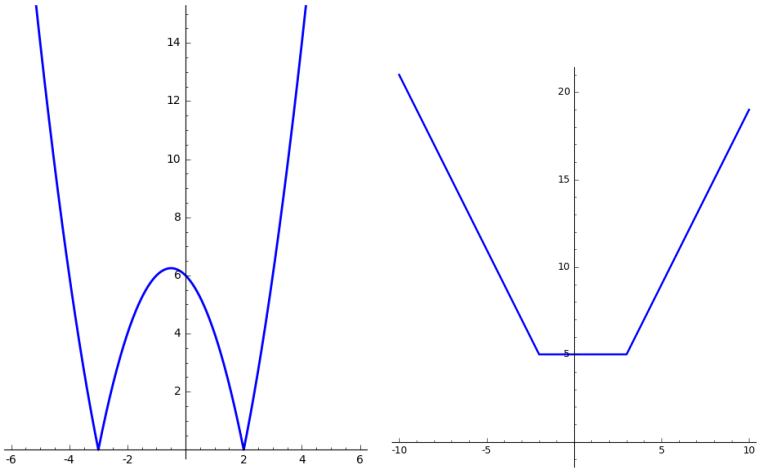
I.A.18. $N = 12000\, x/(12.346 + x)$

I.A.19. $M = 13.321\, P^{-0.798}$

I.A.20. $P = 520.766\, \exp(0.9041\, u)$

I.A.21. $T(t) = 2333 + 87 \sin(0.111\pi + (2\pi t/365))$

I.A.22.



I.A.23. (a) $-\infty$; (b) 0; (c) 0; (d) $-\infty$; (e) 0; (f) $-\infty$; (g) 0; (h) 0; (i) e^2

I.A.24. 0.567143

I.B.1. $S = 2.3$

I.B.2. $d = 0.143$

I.B.3. 47.27 dies.

I.B.4. 292.4° K

I.B.5. $V = 23.1$ km/h.

I.B.6. 28

I.B.7. 1464 km^2.

I.B.8. 0.903

I.B.9. $t = 181\ T^{-1.37}$

I.B.10. 8.13%

I.B.11. La vida mitjana de A serà 1.6 vegades superior a la de B

I.B.12. $N_\infty = 500$; $M_\infty = 100$

I.B.13. a, 0.

I.B.14. $h_\infty = 132$

I.B.15. $N = 423$

I.B.16. $N = 595$

I.B.17. 26.3×10^6 tones.

I.B.18. 93 kg.

I.B.19. La concentració de H_3O^+ al suc de llimona és 5 vegades més gran que al vinagre.

I.B.20. Mi= 329.627 Hz, Sol=391.995 Hz.

I.B.21. 1.26

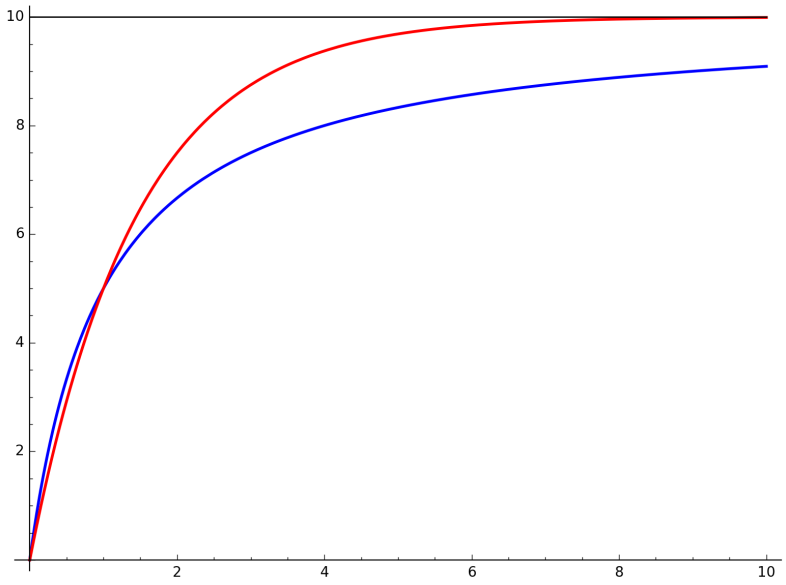
I.B.22. 2.83, 4, 5.66. 1.77 punts.

I.B.23. 104 anys

I.B.24. Aquest exercici té moltes solucions possibles. Per exemple, podem usar una funció de Monod o una funció exponencial:

$$I = \frac{10x}{1+x}, \qquad I = 10(1-2^{-x})$$

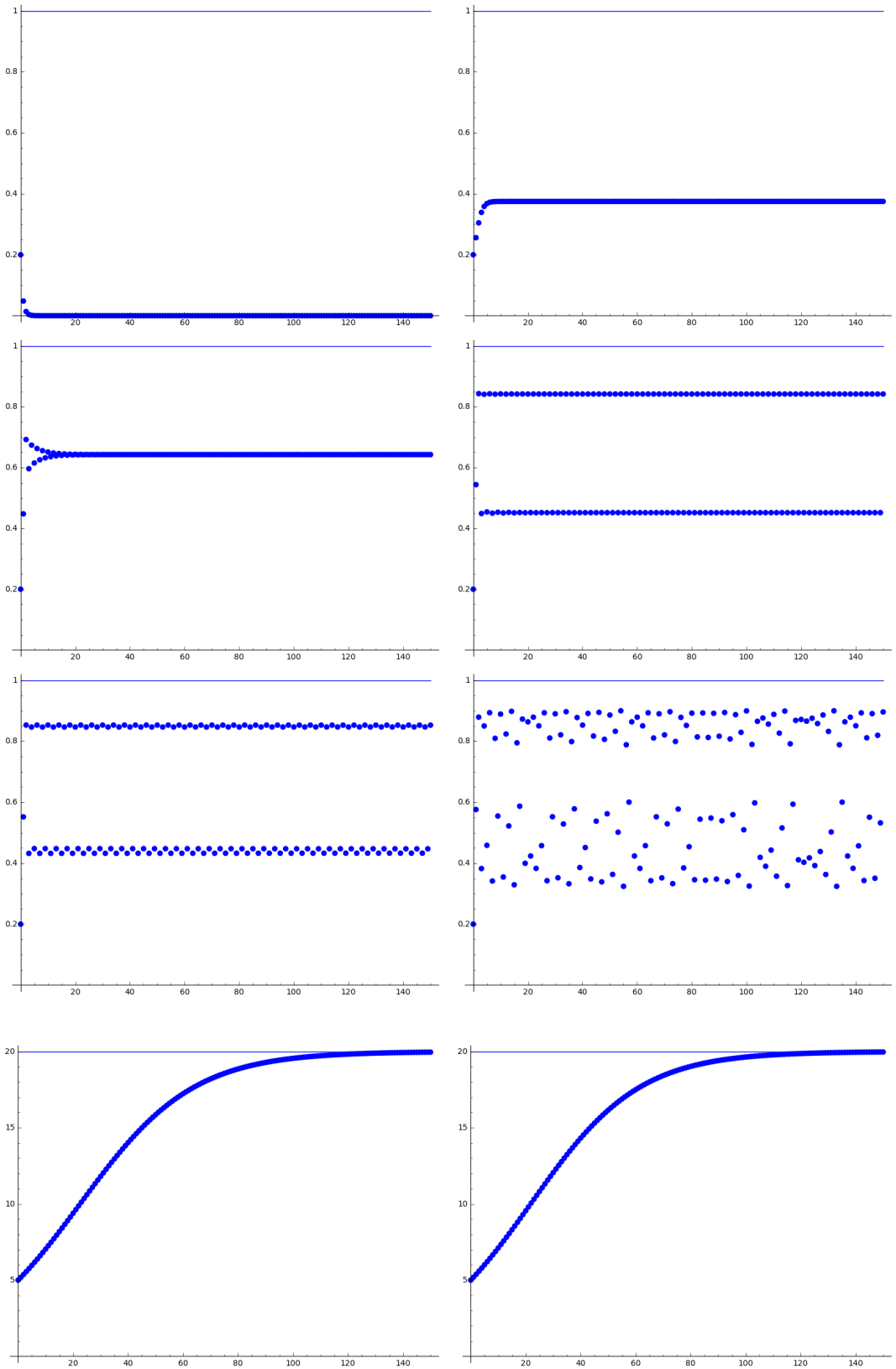
La diferència entre aquestes dues funcions es pot veure en la gràfica següent (l'exponencial està dibuixada en color vermell). Possiblement, la solució millor és l'exponencial.



I.B.25. Donem 1 punt per cada resposta correcta. Això ens dóna una nota n que va de zero a un nombre molt gran T. Volem convertir n en una nota final N que vagi de 0 a 10. Podem fer-ho amb una funció exponencial o amb una funció de Monod. També ho podríem fer amb una funció lineal entre 0 i T, però aquesta no és la millor opció (per què?). Possiblement, la solució millor és l'exponencial. En tot cas, necessitem prendre una decisió. Per exemple, podem fixar el valor de n que correspon al 5.

I.B.26. $T(t) = 17.9 + 9.3\sin(\pi(t-17)/26)$

I.B.27.


1
0.8
0.6
0.4
0.2
20
40
60
80
100
120
140
20
15
10
5

II. La derivada

II.A.1. (a) $42x^6 - 8x^3 + 2$; (b) $40(x^5 + 5x - 8)^{39}(5x^4 + 5)$: (c) $e^{3x}(3x^2 - 7x + 3)$;

(d) $(-2x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 13x - 4)/(x^2 - x + 5)^2$; (e) $2^{x^2+1}x\log(2) - (x\log(3))^{-1}$;

(f) $(6x - 7)/2\sqrt{3x^2 - 7x - 2}$; (g) $\dfrac{-x^2 + 4x + 1}{3(x-2)^{2/3}(x^2+1)^{4/3}}$;

(h) $e^x(\log(x) + 1/x)$; (i) $e^x(\arcsin(x) - (1 - x^2)^{-1/2})(\arcsin(x))^{-2}$; (j) 0;

(k) $-(2\sqrt{\arccos(x)(1 - x^2)})^{-1}$; (l) $1/\tan(x)$; (m) $(\arctan(x)(1 + x^2))^{-1}$;

(n) $e^{-x}\left(\dfrac{1}{x+1} - \log(x+1)\right)$; (o) $\dfrac{2\arctan(x)}{1+x^2} + 0.172x^{-0.828}$;

(p) $\dfrac{3\pi}{2}\sqrt{x}\arccos(x^2) - 2x\pi\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x^4}}$.

II.A.2. (a) $2e^{-rN^2}(-rNK - 2rN^2 + 1)$; (b) $\dfrac{4\pi}{L}T\cos\left(\dfrac{2\pi}{L}T^2\right)$;

(c) $\alpha P^{\alpha-1}L^{\beta}$; (d) $\dfrac{2VT - \mu\cos(T)}{2\sqrt{VT^2 - \mu\sin(T)}}$; (e) $\dfrac{S}{K+S^2}\left(\dfrac{u}{u+1} + \log(u+1)\right)$;

(f) $-\dfrac{he^{r-t}}{K+1}$.

II.A.3. (c) $r = 1$ i $r = -2$.

II.A.4. (a) $-x/y$; (b) $(2x + y)/(1 - x)$; (c) $y/(3y^2 - x)$;

(d) $\dfrac{2x^2y^3 + 4xy^2 + 2y - 1}{-x^2 - 2x^3y^2 - 4x^2y - 2x}$.

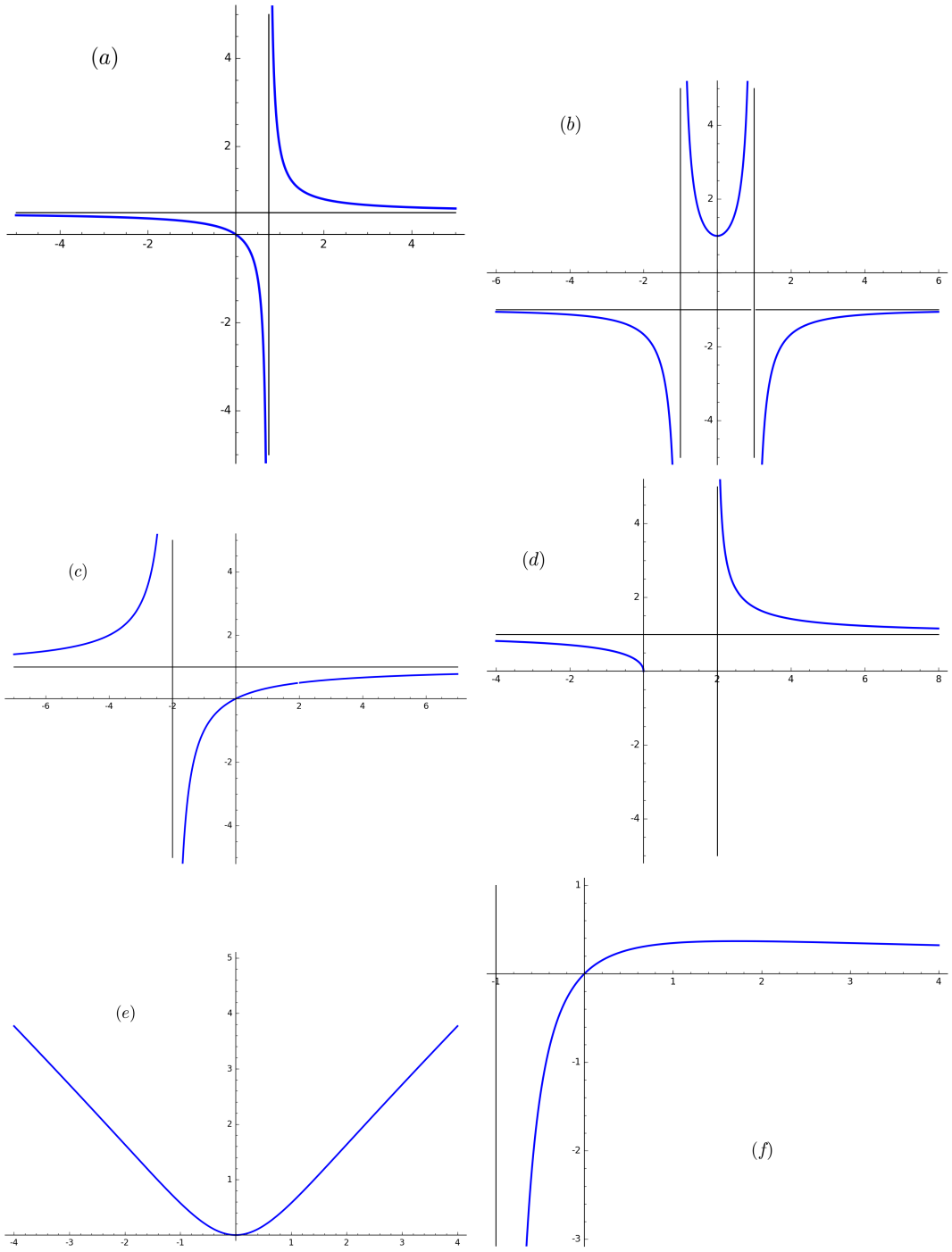
II.A.5. (a) $1 + 2x + 4x^2$; (b) $1 + x + \frac{x^2}{2}$; (c) $1 - nx + \dfrac{n(n+1)}{2}x^2$;

(d) $1 - \dfrac{\pi}{2} + 2x$; $1 - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi^2}{8} + (2 - \pi)x + 2x^2$.

II.A.6. $b = \pi/2$, $P = (0, \pi/2)$.

II.A.7. (a) 6%; (b) 0.67%; (c) 1.6%; (d) 6%.

II.A.8. (a) No té ni màxim ni mínim. (b) No té ni màxim ni mínim. (c) Té un mínim a $x = 0$; no té màxim. (d) Té màxim i mínim a $x = 0$. (e) Mínim a $x = 0$, màxim a $x = 2$. (f) Mínim a $x = 0$ i màxim a $x = e - 1$.



II.A.9. (a) Convexa arreu; creixent per $x > 1/3$, decreixent per $x < 1/3$. (b) Convexa per $x > 0$, còncava per $x < 0$; creixent per $|x| > 2$, decreixent per $|x| < 2$. (c) Definida per $x > 0$. Còncava arreu; creixent per $x < 2/5$, decreixent per $x > 2/5$. Si entenem $x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}$, també podem definir la funció per $x \leq 0$. Aleshores, la funció és decreixent per $x < 0$, convexa si $0 < -0.2$ i còncava si $-0.2 < x < 0$. (d) Convexa per $x > -3$, còncava per $x < -3$; creixent per $x > -2$, decreixent per $x < -2$. (e) Definida per $x \neq 0$. Convexa per $x > 0$, còncava per $x < 0$; creixent per $x > 1$, decreixent per $x < 1$. (f) Definida per $|x| > 1$. Còncava arreu; creixent per $x > 1$, decreixent per $x < -1$.

II.A.10. $P = (\log(k)/r, K/2)$. $L(x) = (rK/4)x + (K/4)(2 - \log(k))$.

II.A.11. $y = 2x/(x^2 - x + 1)$

II.A.12. $y = 1/3$

II.B.1. A partir dels 10 anys.

II.B.2. $N = 50$, 50%.

II.B.3. A les 13:23, aproximadament.

II.B.4. 29%

II.B.5. 67, aproximadament. 34, aproximadament.

II.B.6. 4714, 2357, 11.8%

II.B.7. Disminueix acceleradament.

II.B.8. Augmenta acceleradament

II.B.9. $C_p = \frac{1}{2}(1 + x - x^2 - x^3)$. $C_{\max} = 16/27 = 59.3\%$

II.B.10. $\lambda = 0.84$, $C_p = 37.3\%$.

II.B.11. La quantitat òptima d'adob ve donada per $x = (\sqrt{\alpha p_g p_n} - p_n)/\beta p_n$. De fet, amb els valors concrets del problema, obtenim $x = 14.25$ que dóna una despesa de 33.68 €/ha, mentre que el rendiment extra és de 33.56 €/ha. En conclusió, en aquestes circumstàncies és millor no adobar.

II.B.12. 73.23×10^6 kg/any^2.

II.B.13. 10.8 km^3/any.

II.B.14. 26124 milions de GB per any^2.

II.B.15. $r = 2k$.

II.B.16. 2.805

II.B.17. $3.5049 + 0.2238u_2$.

II.B.18. $\Delta = 2504(T + 237.3)^{-2} \exp(17.27T/(T + 237.3))$. 1.706 ± 0.110.

II.B.19. 0.23 ± 0.03.

II.B.20. Desaccelerat.

II.B.21. Desaccelerada (la disminució).

II.B.22. $IM = 0$.

II.B.23. És sempre una funció decreixent, que tendeix a zero quan $N \to \infty$.

II.B.24. Si $b = 1$, la taxa de creixement és constant. Si $b > 1$, la taxa creix. Si $b < 1$, la taxa decreix desacceleradament. En tots els casos, si $b \neq 1$, la taxa de creixement té acceleració positiva.

II.B.25. $t = eb^{-1/c}$.

II.B.26. El valor màxim és $\alpha/e\beta$. Hi ha un punt d'inflexió a $P = 2/\beta$. La funció és còncava per $P < 2/\beta$ i convexa per $P > 2/\beta$.

II.B.27. La velocitat creix per $N < k$ i decreix per $N > k$. La densitat quan la velocitat és màxima és $N = k$.

II.B.28. Logística.

III. La integral

III.A.1. (a) $-2/(9x^3) + C$; (b) $-10\sqrt{5-x} + C$; (c) $\log(e^x + 1) + C$; (d) $3\log(x^2 + 4) + C$; (e) $-(1/2)\log|\cos(2x)| + C$; (f) $(1/4)\sin^2(2x) + C$.

III.A.2. (a) $(1/4)x^4\log(x) - (1/16)x^4 + C$; (b) $x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$; (c) $-e^{-2x}(x^2/2 + 3x + 3) + C$; (d) $(e^x/2)(\sin(x) + \cos(x)) + C$; (e) $(1/2)(x^2\arctan(x) + \arctan(x) - x) + C$; (f) $-(e^x - 3)^{-1} + C$.

III.A.3. (a) $-9\log|x-2| + 11\log|x-3| + C$; (b) $\log(x^2+x+1) + C$; (c) $-(1/2)\arctan(x) + (1/4)\log|(x-1)/(x+1)| + C$; (d) $(1/3)\log|(x-1)/(x+2)| + C$.

III.A.4. (a) 4/3; (b) 10; (c) 0.6482; (d) 1/2; (e) 64/3; (f) 92/3.

III.A.5. 1/2.

III.A.6. $a = 18$.

III.B.1. $(1/t_1)\log(B(t_1)/B(0))$.

III.B.2. a

$$C = \int_0^\infty \epsilon q\, dt = \int_0^\infty \frac{\epsilon q}{q'}\, q'\, dt = -\int_0^\infty \frac{1}{p}\, q'\, dt = -\int_{q_0}^0 \frac{1}{p}\, dq = \int_{p_0}^1 \frac{1}{p}\, dp.$$

$C = 13.8$.

III.B.3. 0.27

III.B.4. $y = x^{43.48}$. $I = 0.955$.

III.B.5. 342.44

III.B.6. 22.03° C.

III.B.7. $T = \frac{A}{a}\sqrt{2h_0/g}$.

III.B.8. 379.6 Wh. Per obtenir aquest resultat hem de calcular

$$\int_{t_0}^{t_1} \cos(Z)\, dt$$

on t_0 i t_1 són l'hora de la sortida/posta del sol. És millor fer un canvi de variables:

$$\int_{\omega_0}^{-\omega_0} \cos(Z)\frac{dt}{d\omega}\, d\omega$$

on ara $\cos(Z) = 0$ per $\omega = \pm\omega_0$. Tenim $\lambda \approx 0.739723$, $n = 52$, $\delta \approx -0.195936$, $a = \sin\lambda\sin\delta \approx -0.131234$, $b = \cos\lambda\cos\delta \approx 0.724522$, $\omega_0 = \arccos(-a/b) \approx 1.388659$.

III.B.9. 2333.9 TWh

III.B.10. $p_e = 2.45$, $q_e = 1.45$, $CS = 1.82$, $PS = 1.05$.

III.B.11. 12.96 l/m^2

IV. Equacions diferencials

IV.A.1. (a) $y = \sin(t) - t\cos(t) + k$;
(b) $y = t^2 + k$;
(c) $y = -1/(4t + k)$;
(d) $y = k\exp(t^2/2)$;
(e) $y = 100/(1 + k\exp(-50t))$, $y = 0$;
(f) $y = (e^t + k)/(e^t - k)$, $y = -1$;
(g) $y = -1/(\sin(t) + k)$, $y = 0$;
(h) $y = \pm 2/\sqrt{1 + k\exp(-8t)}$, $y = 0$.

IV.A.2. (a) $y = -\sqrt{4 - (t^3/3)}$;
(b) $y = -3\exp(-1 - \cos(t))$;
(c) $y = (1/2)\log(4t^4 - 3)$;
(d) $y = -\sqrt{1 - 2t}$.

IV.A.3. $y = K\exp\left(\log(y(0)/K)\, e^{-rt}\right)$, $y = K$.

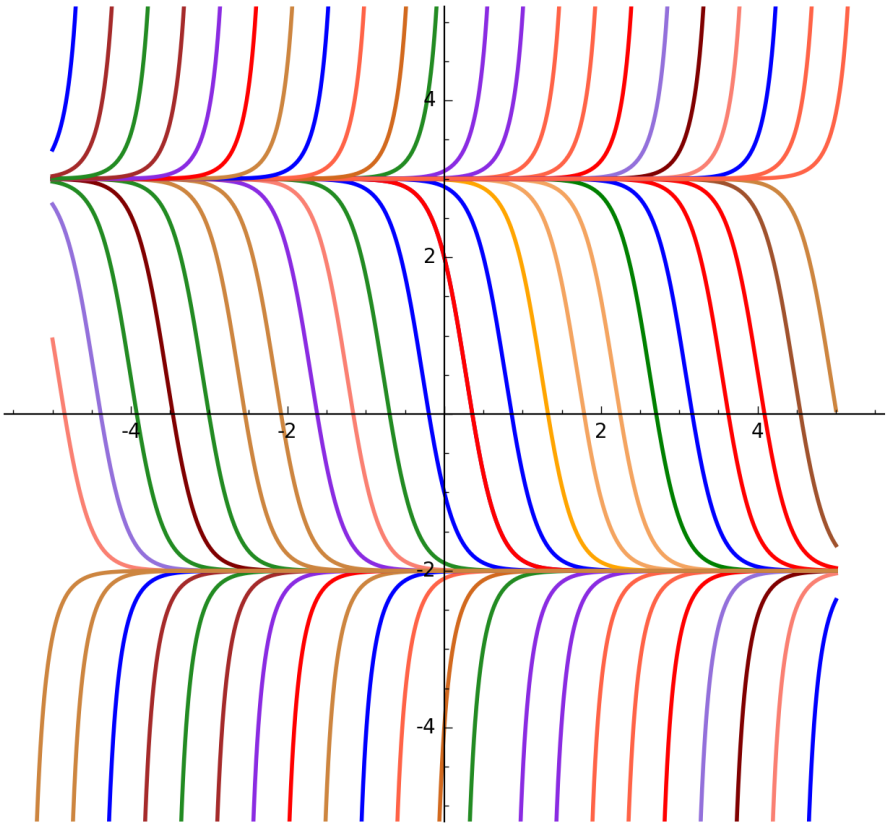
IV.A.4. $y = (t + k)^3$, $y = 0$. Les dues funcions $y = 0$ i $y = t^3$ són solucions amb les condicions inicials $y(0) = 0$. La contradicció aparent amb el teorema d'unicitat de solucions prové del fet que la funció $y^{2/3}$ no és diferenciable per $y = 0$. Això dóna lloc a infinites solucions que no estan contemplades a la fórmula $y = (t + k)^3$ i que s'obtenen «enganxant» funcions d'aquestes amb valors diversos de k, amb un tros de la funció constant $y = 0$.

IV.A.5. Els equilibris són $y = 0$ (inestable) i $y = 2$ (estable). Les solucions són $y = 0$ i $y = 2/(1 + k\exp(-2t))$.

IV.A.6. Els equilibris són $y = 5$ (inestable) i $y = 1$ (estable). La solució particular és $y = 5(1 - \exp(4(t - 1)))/(5 - \exp(4(t - 1)))$.

IV.A.7. Els equilibris són $y = 4$ (inestable) i $y = 0$ (estable). La solució particular és $y = 4(1 - \exp(2t - 2))^2$.

IV.A.8. Els equilibris són $y = 3$ (inestable) i $y = -2$ (estable).



IV.A.9. $y = k\exp(-2x/3)$.

IV.B.1. $P' = kP(N - P)$. A les 3:36.

IV.B.2. (a) $x' = k(a - x)(b - x)$. (b) Si $a \neq b$, la solució és $x = ab(1 - \exp(kt/(a - b)))/(b - a\exp(kt/(a - b)))$. Si $a = b$, la solució és $x = a^2kt/(akt + 1)$. (c) $x = at/(t + 20)$.

IV.B.3. 62 dies.

IV.B.4. 640 dies.

IV.B.5. 4.65%.

IV.B.6. 71.3 anys.

IV.B.7. (a) 3.23×10^6 kg. (b) 1.55 anys.

IV.B.8. El 19%.

IV.B.9. 2400 peixos.

IV.B.10. El llindar d'extinció és $N = 49$.

IV.B.11. 9 dies.

V. Vectors i matrius

V.A.1. (a) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; (b) (6); (c) $\begin{pmatrix} -29/3 & -7/3 \\ -62 & 16 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 29 & 7 \\ 134 & 58 \\ 62 & 22 \end{pmatrix}$; (e) $\begin{pmatrix} 15/2 & 1 & 5/2 \\ 3/4 & 1 & -1/4 \\ 197/4 & 7 & 69/4 \end{pmatrix}$; (f) $\begin{pmatrix} 3^k & (3^k-(-1)^k)/2 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$

V.A.2. (a) $\begin{pmatrix} -5/3 & -2 \\ -2/3 & -1 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -50 & -36 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1/13 & -6/13 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

V.A.3. $(x, y) = (1, 3)$.

V.A.4. $-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

V.A.5. A: $(1, 0)$, $\lambda = 3$; $(1, -2)$, $\lambda = -1$. B: $(1, 1)$, $\lambda = 2$. C: $(1, -\sqrt{2})$, $\lambda = -\sqrt{2} - 2$; $(1, \sqrt{2})$, $\lambda = \sqrt{2} - 2$. K: cap. L: $(2, -1)$, $\lambda = 1$; $(1, -1)$, $\lambda = -1$. M: cap.

V.A.6. $(1/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14})$.

V.A.7. $\sqrt{29}$, $\sqrt{41}$, $\sqrt{46}$. 69.63°, 62.26°, 48.10°.

V.A.8. $\begin{pmatrix} 0.9272 & 0.3746 \\ -0.3746 & 0.9272 \end{pmatrix}$. $0.0899\mathbf{i} + 4.4935\mathbf{j}$.

V.A.9. 3, $\sqrt{11}$, 45.29°.

V.A.10. $2x + 3y - 2z = 7$.

V.A.11. $(x, y, z) = (1, -1, 3) + r(1, 5, -4)$. $5x - y = 6$, $4x + z = 7$.

V.A.12. $x + 5y - 4z = 6$.

V.B.1. C s'assembla més a B que a A.

V.B.2.

V.B.3.

V.B.4. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 35000 \\ 3 \times 10^{-5} & 0.706 & 0 \\ 0 & 0.071 & 1 \end{pmatrix}$.

V.B.5. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$.

V.B.6. $L = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.1 \\ 0.02 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0.95 \end{pmatrix}$.

V.B.7. 100 a la zona A i 140 a la zona B.

V.B.8. $r = 1.27$. $h = 28.6\%$.

V.B.9. En la proporció 34:14:13.

V.B.10. $\begin{pmatrix} 0.85 & 0 \\ 0.05 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B' \\ A' \end{pmatrix}$. $1/3$.

VI. Funcions de diverses variables

VI.A.1. (a) $\big(-x(x^2+y^2)^{-3/2}, -y(x^2+y^2)^{-3/2}\big)$; (b) $\left(\dfrac{2\,r^2}{r^2+s^2} + \log\left(r^2+s^2\right), \dfrac{2\,rs}{r^2+s^2}\right)$; (c) $\left(\dfrac{\sqrt{t}}{x^2t+1}, \dfrac{x}{2\,(x^2t+1)\sqrt{t}}\right)$; (d) $(\cos(\alpha)\cos(\beta), -\sin(\alpha)\sin(\beta))$.

VI.A.2. (a) -5; (b) $\sqrt{5}/5$.

VI.A.3. $52/\sqrt{35}$.

VI.A.4. $\overrightarrow{(0,1)}$.

VI.A.5. (a) $\begin{pmatrix} 12x^2-6y^3 & -18xy^2 \\ -18xy^2 & -18x^2y \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} -\dfrac{2y}{(x+y)^3} & \dfrac{x-y}{(x+y)^3} \\ \dfrac{x-y}{(x+y)^3} & \dfrac{2x}{(x+y)^3} \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} -\dfrac{9}{(3x+5y)^2} & -\dfrac{15}{(3x+5y)^2} \\ -\dfrac{15}{(3x+5y)^2} & -\dfrac{25}{(3x+5y)^2} \end{pmatrix}$.

VI.A.6. (a) $z = -8x - 2y$; (b) $z = 1 + 2x + 2y$; (c) $\sqrt{5}\,z = 4x + 1$.

VI.A.7. (a) $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + 2y$; (b) $z = (\pi^2/4)y$.

VI.A.8. $z = x + 2y$. $x + 2y = 0.3 \approx 0.295520206661340\cdots = \sin(x+2y)$.

VI.A.9. (a) $(4,2)$ mínim local, $(4/3, 2/3)$ punt de sella; (b) $(0,0)$ mínim local; (c) $(1, 3/2)$ màxim local; (d) no en té.

VI.A.10. (a) $(0,0)$ i $(2,-2)$, punt de sella; $(2,0)$ mínim; $(0,-2)$ màxim. (b) Màxim pendent en la direcció $\vec{i} + \vec{j}$; pendent zero en la direcció $\pm(\vec{i} - \vec{j})$.

VI.A.11. Màxim 20 al punt $(3,0)$ i mínim -5 al punt $(-2,0)$.

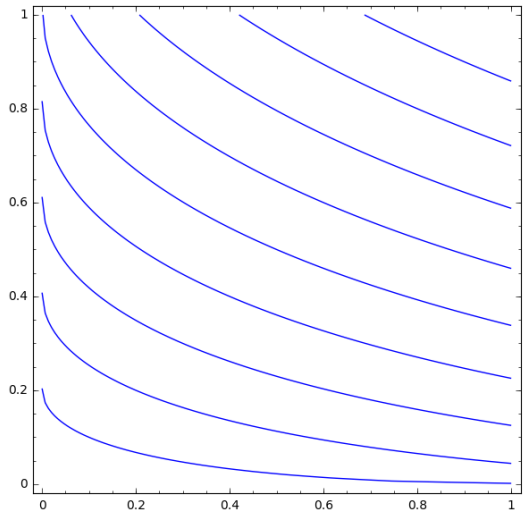
VI.A.12. Màxim 4 als punts $(\pm 1, 0)$ i mínim -9 als punts $(0, \pm 1)$.

VI.A.13. (a) $15t^4\exp(3t^5)$; (b) $2\sin(t)\cos(t) - 3\cos^2(t) + 3\sin^2(t)$; (c) $3t^2 + 3t^{-2} + 4$ si $t > 0$, $3t^2 + 3t^{-2} - 4$ si $t < 0$.

VI.A.14. $\left(\dfrac{1}{\tan(t)} + \dfrac{s}{1+st}, \dfrac{t}{1+st} - \tan(s)\right)$.

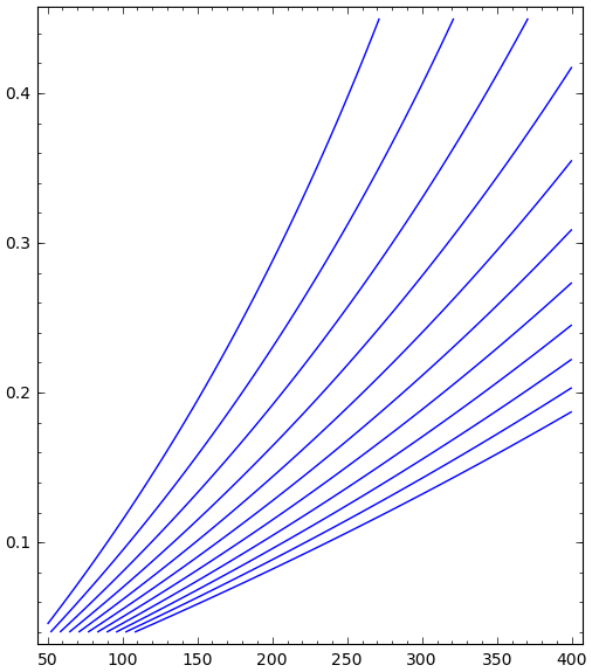
VI.B.1. $P = 1$, $N = 2$.

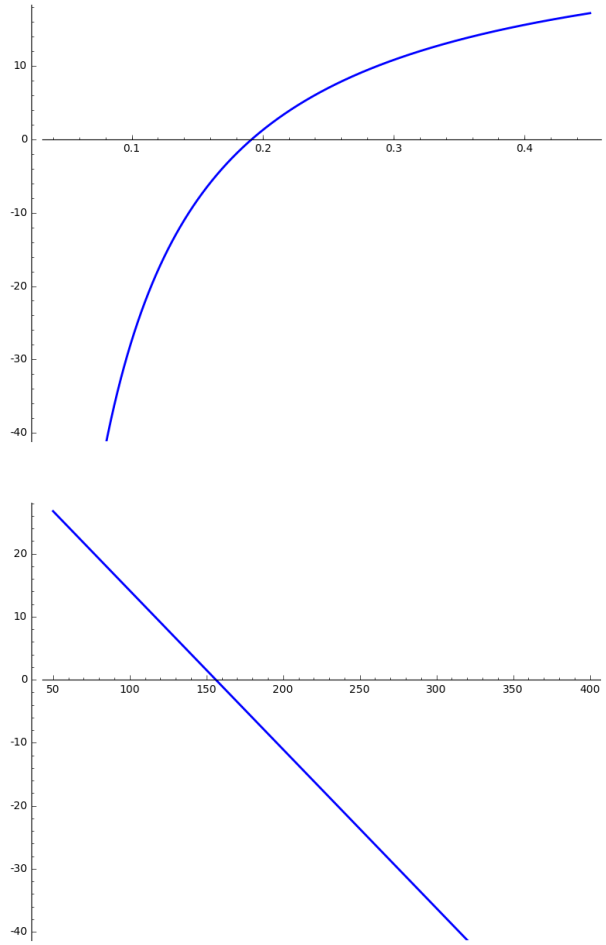
VI.B.2.



VI.B.3. El mínim és $H = 1$ quan hi ha una única espècie present i el màxim és $H = 3$ quan les tres espècies són igualment abundants.

VI.B.4.





VI.B.5. T baixa 0.88 graus per minut.

VI.B.6. P és funció creixent de a, N i T i funció decreixent de T_0.

VI.B.7. v és funció creixent de h, ψ i ξ i funció decreixent de μ.

VI.B.8. Baixa 2.68 graus per cada cent metres.

VI.B.9. -0.4 graus per hora.

Índex alfabètic

Jaume Aguadé (Barcelona 1953) és professor al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona, on dirigeix el **Grup de Recerca en Topologia Algebraica de Barcelona (GTAB)**. La seva recerca s'inscriu dintre la teoria d'homotopia, amb especial atenció a les àlgebres de cohomologia i els espais classificadors dels grups de Lie. Al llarg de la seva carrera, més enllà de la docència en topologia, ha impartit cursos en àmbits molt diversos a les Facultats de Ciències, Biociències, Filosofia i Lletres, Ciències Polítiques i Sociologia i a l'Escola d'Enginyeria. Aquest llibre és el resultat de la seva experiència com a professor de l'assignatura de matemàtiques del primer curs del grau de Ciències Ambientals a la Universitat Autònoma de Barcelona. Més enllà de les matemàtiques, els seus interessos inclouen la muntanya —en totes les seves facetes, de l'alpinisme a l'excursionisme passant per l'esquí de muntanya—, la fotografia i l'enografia.