

Curs 2003-2004

Presentació i Objectius de l'assignatura

Aquesta assignatura està organitzada en quatre parts:

- (1) Introducció a la Geometria.
- (2) Sistemes d'equacions.
- (3) Espais vectorials i aplicacions lineals.
- (4) Espais vectorials amb producte escalar.

L'objectiu principal de la primera part és familiaritzar a l'alumne amb el fet de que totes les afirmacions que apareixen en el món de les matemàtiques s'han de demostrar. En particular, ha de quedar clar què vol dir demostrar. Per això s'enfocarà l'assignatura amb especial èmfasi en el fet de que cada nou teorema o resultat es dedueix de resultats previs per raonaments lògics, i que aquesta cadena ascendent de resultats comença amb uns pocs fets elementals acceptats per tothom.

L'objectiu secundari és introduir a l'estudiant en el món de la geometria i reforçar els coneixements previs que d'ella en té. Pensem que pot ser molt útil revisitar la trigonometria posant especial èmfasi en el perquè de les coses.

L'objectiu principal de la segona part és que l'alumne aprengui a resoldre sistemes d'equacions lineals de manera sistemàtica, però entenent què està fent a cada pas, i que aprengui les eines bàsiques del càlcul matricial.

La tercera part és la part més important del curs. Els objectius d'aquesta part són:

- (i) Que l'alumne entengui els espais vectorials com estructura algebraica i les aplicacions lineals com els homomorfismes d'aquesta estructura. Per això és fonamental entendre les definicions d'espai vectorial, subespai vectorial, espai quocient i aplicació lineal, i el teorema de l'isomorfisme.
- (ii) Que l'alumne entengui els conceptes d'independència lineal, base i dimensió.
- (iii) Que l'alumne aprengui a calcular amb coordenades. Per això és fonamental que l'alumne entengui la relació que hi ha entre un vector i les seves coordenades, i entre una aplicació lineal i les seves matrius associades. Que l'alumne no confongui les coordenades amb el vector que representen, ni una matriu amb l'aplicació lineal que representa.

- (iv) Que l'alumne entengui què vol dir classificar un endomorfisme d'un espai vectorial. Que aprengui a decidir quan un endomorfisme és diagonalitzable i quan de forma canònica de Jordan, i en aquests casos que sàpiga diagonalitzar i trobar la forma canònica de Jordan.

L'objectiu principal de l'última part és que l'alumne entengui la relació que hi ha entre l'àlgebra lineal i la geometria euclidiana. Com la classificació de certs objectes algebraics permet classificar o distingir certs objectes geomètrics.

Més detalladament, les destreses que ha d'adquirir l'alumne en aquesta assignatura són les següents:

• Destreses teòriques

- Entendre les nocions de punt, recta i circumferència del pla i les seves posicions relatives: paral·lelisme i tangència.
- Entendre la noció de distància entre dos punts del pla, i entre dos subconjunts no buits del pla.
- Entendre la noció d'angle i de la seva mesura.
- Entendre la noció de triangle i els criteris de congruència de triangles.
- Entendre les definicions de les funcions trigonomètriques i la seva interpretació geomètrica.
- Entendre el concepte de moviment del pla i la seva classificació.
- Entendre el concepte de cònica i la seva classificació mètrica.
- Entendre el concepte de matriu i el seu rang.
- Entendre el concepte de sistema d'equacions lineal i el mètode de Gauss.
- Entendre el concepte de determinant i les seves propietats.
- Entendre el concepte de cos.
- Entendre el concepte d'espai vectorial i subespai vectorial.
- Entendre el concepte de dependència i independència lineal.
- Entendre el concepte de base d'un espai vectorial i dimensió.
- Entendre amb profunditat el teorema de Steinitz, el teorema de la base i els seus cor·l·laris.
- Entendre el concepte de suma i suma directa de subespais vectorials.
- Entendre la fórmula de Grassmann.
- Entendre el concepte d'espai vectorial quocient.
- Entendre el concepte d'aplicació lineal.
- Entendre els conceptes de nucli i imatge d'una aplicació lineal.
- Entendre el concepte d'isomorfisme entre espais vectorials i el teorema de l'isomorfisme.

- Entendre el concepte de coordenades d'un vectors respecte d'una base i el concepte de matriu d'una aplicació lineal respecte d'una base de sortida i una base d'arribada.
- Entendre les fórmules del canvi de base.
- Entendre els conceptes d'espai dual i subespais incidents.
- Entendre els conceptes de valor propi i vector propi d'un endomorfisme i d'una matriu.
- Entendre els conceptes de polinomi característic i polinomi mínim d'un endomorfisme i d'una matriu.
- Entendre el teorema de Cayley-Hamilton.
- Entendre el teorema de diagonalització.
- Entendre el concepte de subespai invariant per un endomorfisme i el primer teorema de descomposició.
- Entendre els conceptes de forma canònica de Jordan i base de Jordan d'un endomorfisme.
- Entendre el concepte de forma bilineal, la seva matriu respecte d'una base i la fórmula del canvi de base.
- Entendre els conceptes de producte escalar i espai vectorial euclidià.
- Entendre el concepte de base ortonormal d'un espai vectorial euclidià i el mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt.
- Entendre el concepte de subespai ortogonal.
- Entendre el concepte d'aplicació que conserva el producte escalar i les seves propietats.

● Resolució de problemes

- Saber resoldre problemes de trigonometria, usant els teoremes del sinus, del cosinus i de Pitàgores.
- Saber classificar els moviments del pla i distingir-los d'altres aplicacions del pla en ell mateix.
- Donada l'equació d'una cònica, saber classificar-la, i trobar eixos, centre, focus i directrius.
- Saber resoldre sistemes d'equacions lineals pel mètode de Gauss.
- Saber discutir la resolució d'un sistema d'equacions lineals segons el valor d'un o dos paràmetres.
- Saber sumar i multiplicar matrius.
- Saber calcular el rang d'una matriu.
- Saber calcular la inversa d'una matriu invertible.

- Saber calcular determinants.
- Saber decidir si un subconjunt d'un espai vectorial és o no subespai vectorial.
- Saber decidir si un conjunt de vectors són o no linealment independents.
- Saber extreure una base d'un conjunt de generadors d'un espai vectorial.
- Saber ampliar una família de vectors linealment independents a una base d'un espai vectorial.
- Saber calcular una base de la suma i de la intersecció de subespais vectorials partint de bases d'aquests.
- Saber calcular una base del nucli i de la imatge d'una aplicació lineal.
- Saber calcular la matriu d'una aplicació lineal respecte de bases donades.
- Saber calcular les coordenades d'un vector respecte d'una base donada.
- Saber usar les fórmules del canvi de base per resoldre diversos problemes d'àlgebra lineal.
- Saber calcular el polinomi característic d'un endomorfisme.
- Saber trobar les arrels de diversos polinomis: de grau dos, d'arrels enteres o racionals amb coeficients enters.
- Saber trobar els valors propis i vectors propis d'un endomorfisme.
- Saber decidir si un endomorfisme diagonalitza o no. En cas afirmatiu, saber trobar la forma diagonal i una base de vectors propis.
- Saber calcular el polinomi mínim d'un endomorfisme.
- Saber calcular, en cas que existeixi, la forma canònica de Jordan i una base de Jordan d'un endomorfisme.
- Saber calcular una base ortonormal d'un subespai vectorial d'un espai vectorial euclidià.
- Saber decidir si una matriu representa un producte escalar o no.

• Modelització

- Saber plantejar problemes "amb enunciat" no matemàtic, en termes de trigonometria, geometria plana o àlgebra lineal (quan això sigui possible).

Programa

1. Introducció a la Geometria.

- $\mathbb{R}^2$, punts i rectes del pla.
- Vectors. Direcció d'una recta. Rectes paral·leles.
- Producte escalar de vectors. Distància entre dos punts. Angle entre dues rectes. Rectes perpendiculars.

- Triangles rectangles. Raons trigonomètriques.
- Resolució de triangles.
- Propietats elementals de les circumferències.
- Moviments del pla.
- Còniques.

2. Sistemes d'equacions.

- Sistemes d'equacions lineals. Esglaonament d'un sistema d'equacions.
- Matrius. Operacions amb matrius. Matriu inversa.
- Transformacions elementals per files i per columnes d'una matriu. Matrius elementals. Esglaonament i PAQ-reducció. Rang d'una matriu. Càlcul de la inversa d'una matriu invertible.
- Teorema de Rouché-Frobenius. El mètode de Gauss.
- Determinant d'una matriu. Propietats. Desenvolupament del determinant per una fila o una columna. Adjunta d'una matriu. Fórmula de la inversa d'una matriu invertible. Fórmula de Cramer.

3. Espais vectorials i aplicacions lineals.

- Espai vectorial, definició i exemples.
- Subespai vectorial. Combinació lineal. Subespai vectorial generat per un subconjunt de vectors.
- Independència lineal. Base d'un espai vectorial. Coordenades d'un vector respecte d'una base. Teorema de Steinitz. Teorema de la base. Dimensió d'un espai vectorial.
- Teorema de Rouché-Frobenius revisitat.
- Intersecció i suma de subespais vectorials. Fórmula de Grassmann.
- Espai vectorial quocient.
- Aplicacions lineals. Composició d'aplicacions lineals. Nucli i imatge d'una aplicació lineal. Teorema de l'isomorfisme. Teoremes de Noether. Construcció d'aplicacions lineals.
- Isomorfisme entre un espai vectorial V i l'espai de les coordenades respecte d'una base fixada de V .
- Matriu d'una aplicació lineal respecte d'una base de sortida i una base d'arribada. Isomorfisme entre l'espai vectorial de les aplicacions lineals entre dos espais vectorial de dimensions n i m i l'espai vectorial de les matrius $m \times n$. Matriu de la composició de dues aplicacions lineals.
- Fórmules del canvi de base.
- L'espai dual. Base dual. Aplicació dual d'una aplicació lineal
- Classificació d'endomorfismes.
- L'àlgebra dels endomorfismes d'un espai vectorial. L'àlgebra de les matrius quadrades. Isomorfisme entre l'àlgebra d'endomorfismes d'un espai vectorial de dimensió n i l'àlgebra de les matrius quadrades $n \times n$.
- Diagonalització. Valors propis i vectors propis. Polinomi característic. Caracterització dels endomorfismes diagonalitzables.

- Polinomi mínim. Teorema de Cayley-Hamilton.
- Subespais invariants per un endomorfisme. Primer teorema de descomposició.
- Forma canònica de Jordan.

4. Espais vectorials amb producte escalar.

- Producte escalar estàndard de $\mathbb{R}^n$
- Formes bilineals. Matriu d'una forma bilineal. Canvis de base.
- Producte escalar en un espai vectorial real. Matriu d'un producte escalar. Canvis de base. Base ortonormal, mètode de Gram-Schmidt. Aplicacions ortogonals. Grup ortogonal.
- Els grups ortogonals $O(2)$ i $O(3)$.
- Les còniques revisitades.

Bibliografia

Bibliografia bàsica

M. Castellet i I. Llerena *Àlgebra Lineal i Geometria* Manuals de la UAB , Servei de Publicacions de la UAB, Bellaterra, 1988, (versió castellana per Ed. Reverté, Barcelona, 1991).

F. Puerta *Álgebra Lineal* UPC, Barcelona, 1986.

Llibres de problemes

F. Cedó i V. Gisin *Àlgebra Bàsica* Manuals de la UAB , Servei de Publicacions de la UAB, Bellaterra, 1997

J. García Lapresta, M. Panero, J. Martínez, J. Rincón y C. Palmero *Test de Álgebra lineal* Ed. AC, Madrid 1992

J. Rojo y I. Martín *Ejercicios y Problemas de Álgebra Lineal* Mc. Graw-Hill, Madrid, 1994

Professors

Teoria:

Agustí Reventós (1r semestre), despatx C1/304, hores de consulta a convenir.

Ferran Cedó (2n semestre), despatx C1/352, hores de consulta a convenir.

Problemes:

GRUP 1: Ferran Cedó.

GRUP 2: Gemma Bastardas, despatx C1/-132, hores de consulta a convenir.

Avaluació

Durant tot el curs, els alumnes entregaran problemes resolts. Cada alumne s'entrevistarà quatre vegades al llarg del curs amb un professor sobre els problemes que ha anat entregant i el professor el qualificarà. **Si un alumne no entrega problemes i no va a cap entrevista, llavors la seva nota d'entrevistes serà 0.**

També hi haurà quatre proves escrites (dos al primer semestre i dos al segon) per controlar el seguiment de l'assignatura.

Així, entre les entrevistes i aquestes proves escrites, l'alumne obtindrà una nota que val el 25% de la nota de la convocatòria de juny.

Per aprovar la convocatòria de juny hi ha dues possibilitats:

Per parcials:

A finals de gener o principis de febrer es farà un examen parcial (sobre tota la matèria del primer semestre). Diguem p_1 a la nota d'aquest parcial.

Al mes de juny es farà un altre examen parcial (sobre la matèria del segon semestre) només per a aquells alumnes que tinguin la nota $p_1 \geq 3$. Diguem p_2 a la nota d'aquest examen parcial.

Si un alumne té les notes $p_1 \geq 3$ i $p_2 \geq 4$, llavors la seva nota per parcials és:

$$N_1 = 0.3 \cdot p_1 + 0.45 \cdot p_2 + 0.25 \cdot s,$$

on s és la nota de seguiment obtinguda de les entrevistes i les proves escrites.

Si $N_1 \geq 5$, llavors l'alumne pot triar entre dues opcions:

- (a) Que N_1 sigui la seva nota a la convocatòria de juny.
- (b) Presentar-se a l'examen final per millorar aquesta nota. En aquest cas, l'alumne obtindrà com a mínim la nota N_1 a la convocatòria de juny.

Per final:

A finals de juny o principis de juliol es farà un examen final de tota l'assignatura. Diguem f a la nota d'aquest examen.

La nota de la convocatòria de juny és:

$$N = 0.25 \cdot s + 0.75 \cdot f,$$

excepte en el cas en què $N_1 > N$, ja que en aquest cas N_1 és la nota de la convocatòria de juny.

Si un alumne té la nota $N_1 < 5$ i no es presenta a l'examen final tindrà un "no presentat" a la convocatòria de juny.