

Didàctica de les matemàtiques

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Curs: 2003-2004

Professor: Josep Gascón

Introducció

La didàctica de les matemàtiques és la disciplina que estudia de manera prioritària els fenòmens relatius a la *transmissió dels coneixements matemàtics*. Però, atès que l'estudi de la transmissió d'un saber és inseparable de l'estudi de la seva *producció* i, fins i tot, de la seva *utilització*, no és possible separar la didàctica de les matemàtiques del que tradicionalment s'anomena "epistemologia de les matemàtiques". De fet, no podem separar l'estudi de la *fonamentació*, la *gènesi* i el *desenvolupament* del saber matemàtic (objectes de l'epistemologia clàssica), de l'estudi de la *transmissió* i la *utilització* d'aquest saber.

Per tant, la **didàctica de les matemàtiques** comparteix amb l'**epistemologia de les matemàtiques**, i també amb la **història de les matemàtiques**, un mateix objecte d'estudi (la *gènesi*, el *desenvolupament* i la *transmissió personal i institucional del saber matemàtic*) i una mateixa necessitat de construir models de l'estructura i el desenvolupament del saber matemàtic. El que diferencia aquestes disciplines és el tipus de fenòmens que estudien, les preguntes que plantegen i els problemes que construeixen per tal d'explicar aquests fenòmens. Els lligams entre la didàctica, l'epistemologia i la història (o entre la física, la química i la geologia, per exemple), no neguen la seva autonomia relativa. Les tres tenen un paper insubstituïble en la formació integral de qualsevol matemàtic.

Una de les principals dificultats per aprendre (i per ensenyar) didàctica de les matemàtiques té relació amb el seu estatus cultural. Així com l'estatus d'intocable i sagrat de l'àmbit *religiós* dificulta el seu tractament científic, per raons quasi inverses, és a dir, degut a la consideració cultural pejorativa, també és molt difícil el tractament científic de l'àmbit *didàctic*.

D'altra banda, mentre que culturalment s'accepta que la realitat *natural* estigui regida per lleis, la realitat *antropològica* es considera com l'àmbit de les decisions "voluntàries" i de la "llibertat". En la cultura dominant només s'accepten dues maneres de tractar les realitats antropològiques: *normativa* i *històrica*. Així, per exemple, tenim la lingüística comparada (històrica) i la gramàtica normativa. En el cas de l'ensenyament, tenim d'una banda la història de les doctrines i de les pràctiques d'ensenyament i d'altra la *pedagogia* que identificarem amb el tractament normatiu de l'ensenyament. La **didàctica de les matemàtiques** no és una disciplina *històrica* ni, molt menys, *normativa*. Mostrarem que té l'ambició de ser una disciplina científico-experimental i, per tant, *explicativa*.

1. Programa de l'assignatura

I. ANÀLISI D'ALGUNES ORGANITZACIONS MATEMÀTIQUES I DEL SEU PROCÉS D'ESTUDI

1. Incidència dels models epistemològics sobre els models docents

- 1.1. L'euclideanisme com a model general del coneixement matemàtic.
- 1.2. Models docents clàssics: teoricisme i tecnicisme.
La “matemàtica moderna” i el moviment “go to basic!”
- 1.3. Models epistemològics quasi-empírics.
- 1.4. Modernisme i procedimentalisme.
Problem Solving: l'heurística de Polya i els desenvolupaments posteriors.
- 1.5. El constructivisme com a model epistemològic.
- 1.6. Constructivisme primitiu i modelització matemàtica.
- 1.7. L'activitat matemàtica com estudi de camps de problemes.

2. De l'aritmètica a l'àlgebra

- 2.1. El càlcul aritmètico-algebraic (el model de Guilford).
- 2.2. Algebrització de la divisibilitat.
- 2.3. Dels problemes aritmètics als de planteig algebraic.

3. Què vol dir estudiar “geometria”?

- 3.1. Problemàtica del canvi de forma (i mosaics semiregulars).
- 3.2. Sistemes geomètrics, models geomètrics i teories geomètriques.
- 3.3. Del model euclidià al model cartesià.
- 3.4. Incidència del autisme temàtic sobre l'ensenyament de la geometria.

4. Organització escolar de la combinatòria

- 4.1. Estructura dels problemes de comptar simples.
- 4.2. Directriu heurística per estudiar els problemes de comptar compostos.
- 4.3. Algebrització de les tècniques probabilístiques.

5. Organització escolar de la probabilitat i l'estadística

- 5.1. Les relacions entre la probabilitat i l'estadística. Models alternatius.
- 5.2. Estudi del camp de problemes de probabilitat condicionada.
- 5.3. Interpretació alternativa de l'anàlisi estadística d'una dimensió.

6. L'anàlisi matemàtica en el pas de Secundària a la Universitat

- 6.1. Estudi de famílies de funcions.
- 6.2. Organització dels problemes d'optimització en les diferents institucions.
- 6.3. El camp de problemes de les equacions exponencials i logarítmiques.

7. El paper dels coneixements “naturals” en el procés didàctic

- 7.1. Lògica natural versus lògica formal.
- 7.2. Orientació a l'espai i estudi de la geometria.
- 7.3. La construcció del nombre i de l'enumeració.

II. DEL PROGRAMA COGNITIU AL EPISTEMOLÒGIC

8. Evolució de la problemàtica didàctica: el Programa Cognitiu

- 8.1.** La problemàtica del professor.
- 8.2.** L'enfoc centrat en la instrucció de l'alumne.
 - 8.2.1.** L'aprenentatge per descobriment autònom.
 - 8.2.2.** L'aprenentatge per transmissió verbal (el model d'Ausubel).
 - 8.2.3.** Canvi conceptual, canvi metodològic, canvi actitudinal
- 8.3.** L'enfoc centrat en el pensament del professor: el canvi "didàctic".

9. Emergència del Programa Epistemològic

- 9.1.** Limitacions de la didàctica clàssica.
- 9.2.** Qüestionament de l'euclidianisme: la lògica del descobriment matemàtic (Lakatos).
- 9.3.** La didàctica fonamental com a "epistemologia experimental".

10. Les matemàtiques en la societat

- 10.1.** Què vol dir "fer matemàtiques"?
- 10.2.** La malaltia "docent".
- 10.3.** La didàctica de les matemàtiques com a ciència de l'estudi.

11. Les matemàtiques en l'escola

- 11.1.** El problema del currículum: estructura d'una organització matemàtica.
- 11.2.** Disciplina matemàtica i motivació.
- 11.3.** Les fonts del currículum i la transposició didàctica.

12. Les matemàtiques en l'aula

- 12.1.** La formació d'un sistema didàctic.
- 12.2.** La individualització de l'ensenyament.
- 12.3.** Contracte didàctic, contracte pedagògic i contracte escolar.
- 12.4.** La teoria de les situacions didàctiques.

13. Les matemàtiques en viu. Elements de la Teoria Antropològica

- 13.1.** L'estructura del procés d'estudi d'una obra matemàtica.
- 13.2.** Dispositius didàctics i dispositius pedagògics.
- 13.3.** Obstacles en el procés d'estudi.
- 13.4.** La paradoxa de la creativitat.

BIBLIOGRAFIA BàSICA

BROUSSEAU, G. (1989a): *La tour de Babel, Études en Didactique des mathématiques*, article occasionnel n.2, IREM de Bordeaux.

BROUSSEAU, G. (1989b): Utilidad e interés de la didáctica para un profesor (Primera parte), *Suma*, 4, 5-12.

BROUSSEAU, G. (1991): ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (Segunda parte), *Enseñanza de las Ciencias*, 9(1), 10-21.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997): *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*, ICE-Horsori: Barcelona.

LAKATOS, I. (1976): *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press: Cambridge.

POLYA, G. (1957): *How to solve it*, Doubleday: Princeton (2a ed.).

POLYA, G. (1954): *Mathematics and Plausible Reasoning*. 2 vols, Princeton University Press: Princeton.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTÀRIA

ADDA, J. (1981): La Reforma de las Matemáticas Modernas, *Asociation Francophone D'Education Comparée*, 26-27.

DELVAL, J. (1997): Hoy todos son constructivistas, *Cuadernos de Pedagogía*, 257, 78-84.

FREUDENTHAL, H. (1981): Mayor Problems in Mathematics Education, *Educational Studie*, 12,2;133-150.

GIL, D. Y OTROS (1991): *La enseñanza de las ciencias en la Educación Secundaria*, ICE/Horsori, Barcelona.

VERGNAUD, G. (1990): Epistemología y Psicología de la Educación Matemática, en Nesher y Kilpatrick (Ed.), *Mathematics and Cognition: A Research Syntesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Cambridge U. P., 14-30.

2. Coneixements matemàtics previs

Al llarg del curs s'analitzen algunes *organitzacions matemàtiques escolars* (en particular: l'*aritmètica*, l'*àlgebra*, la *geometria*, el *càlcul*, la *combinatòria*, la *probabilitat* i l'*estadística*) i es proposen models alternatius de cadascuna d'aquestes organitzacions. És important, per tant, que els estudiants tinguin una bona formació matemàtica bàsica en aquests àmbits. En síntesi, seria suficient amb que els estudiants dominessin en profunditat els continguts i els mètodes dels dos primers cursos de la llicenciatura (la qual cosa requereix, naturalment, més de dos cursos). L'iniciació a la didàctica de les matemàtiques requereix un altre tipus de coneixements previs, més difícils de garantir, com la capacitat de relacionar l'activitat matemàtica amb altres activitats humanes (científiques i culturals).

3. Objectius de l'assignatura

(a) Un dels objectius bàsics de l'assignatura “Didàctica de les matemàtiques” és que els estudiants siguin capaços de *qüestionar les formes habituals de presentar el saber matemàtic*; que els models dominants deixin de ser per a ells “transparentes” i “inqüestionables”. Això comporta la necessitat de fer conscients les categories que s'utilitzen habitualment per descriure el saber matemàtic i la importància d'utilitzar altres categories alternatives per interpretar-lo des d'un altre punt de vista.

(b) Partint sempre de l'anàlisi del coneixement matemàtic, es pretén que els estudiants puguin *descriure i interpretar determinats fenòmens didàctics* (en el sentit de fenòmens relatius a l'estudi de les matemàtiques). Es tracta de que experimentin, en contra dels prejudicis psicopedagògics, que l'anàlisi de l'activitat matemàtica és la porta d'entrada primera y principal per explicar els fenòmens didàctics i, en el seu cas, per actuar sobre ells.

(c) Un altre objectiu important és que els estudiants, treballant en grups petits, analitzin a fons una petita organització matemàtica escolar, dissenyin un procés d'estudi d'aquesta organització, l'experimentin amb un grup d'alumnes i avaluïn tot el procés (“*cicle didàctic*” complet).

(d) Com tota introducció a la didàctica de les matemàtiques, aquesta assignatura pretén que els estudiants comencin a distingir entre els fenòmens que depenen *del professor* i, per tant, cauen sota la seva *responsabilitat*, i aquells altres que són independents de la formació, la capacitat, la vocació i l'actuació del professor.

(e) En aquest punt és important subratllar que *no és l'objectiu dels curs donar normes “per ensenyar millor”*. Abans de donar solucions, s'han d'entendre quins són els problemes.

D'entre els objectius de tipus pràctic que proporciona la didàctica de les matemàtiques per a les diferents *professions del matemàtic*, destaquem:

- (1) Proporciona instruments per analitzar els sistemes institucionalitzats d'ensenyament de les matemàtiques (de tots els nivells educatius) i les organitzacions matemàtiques que s'estudien en ells. Aquesta anàlisi pot ser especialment útil per als futurs professors de matemàtiques, tant en la funció docent com en la d'agents capaços d'incidir i modificar el sistema.
- (2) Permet analitzar els sistemes didàctico-matemàtics no institucionalitzats com, per exemple, els que viuen a les empreses (cursos de formació, treball d'autoformació, etc.) degut a la necessitat creixent de renovació dels sabers matemàtics que s'utilitzen.
- (3) Ajuda a analitzar els processos de producció i reorganització del coneixement matemàtic i la seva incidència sobre la tasca dels productors del saber matemàtic. Els investigadors en matemàtiques són inevitablement transmissors del saber matemàtic (encara que només sigui dins la pròpia comunitat matemàtica nuclear) alhora que assumeixen moltes vegades la funció de *divulgadors* d'aquest saber.

4. Pràctiques de didàctica

Es duran a terme en grups de treball reduïts en el marc d'un Institut d'Ensenyament Secundari, sota la direcció d'un professor *tutor de pràctiques*. Cada grup ha de realitzar un “cicle didàctic” complet i ha d'elaborar un treball que abastarà els tres nivells d'aquest cicle: *fonamental*, *d'enginyeria didàctica* i *experimental* (veure “Estructura de la Memòria de Pràctiques”). En les classes de problemes, abans de començar les pràctiques, es plantejaran com a problemes didàctics els problemes de “**disseny curricular local**” relatius a cadascun dels grups de pràctiques.

Estructura de la Memòria de Pràctiques

0. Introducció

1. Nivell fonamental: anàlisi epistemològica d'una organització matemàtica

- 1.1. Breu descripció de dos o més models alternatius de l'organització matemàtica.
- 1.2. Anàlisi comparada d'aquests models i justificació de la decisió presa.
- 1.3. Descripció detallada dels components de l'organització matemàtica i de la seva dinàmica interna.

2. Nivell d'enginyeria: elaboració d'una metodologia didàctica

- 2.1. Anàlisi a priori de les dificultats de l'estudi de l'organització matemàtica.
- 2.2. Elaboració d'una “prova inicial”. Possibles maneres d'utilitzar els resultats.
- 2.3. Objectius específics del procés d'estudi (en termes d'activitat matemàtica).
- 2.4. Disseny precís del procés d'estudi. Ha de ser transferible.
Ha de contenir, sessió per sessió, les activitats que es realitzaran a classe –per part de l'alumne i del professor–, els materials i els dispositius necessaris.
- 2.5. Dispositiu d'avaluació.
Han de figurar els criteris d'avaluació i exemples de proves possibles, la manera de corregir-les i de interpretar-les en relació al procés d'estudi.

3. Nivell empíric: anàlisi d'una experiència

- 3.1. Anàlisi dels resultats de la prova inicial i descripció de l'ús que s'ha fet.
- 3.2. Característiques generals del centre de pràctiques i del grup d'alumnes.
- 3.3. Anàlisi i avaluació detallada del procés d'estudi viscut.
- 3.4. Interpretació i valoració dels resultats finals de l'estudi.
- 3.5. Criteris de modificació de l'enginyeria didàctica.
- 3.6. Descripció i interpretació dels desajustos observats entre els tres nivells.
- 3.7. Conclusions.

Referències bibliogràfiques.

Comentaris personals sobre les Pràctiques i el treball en grup.

5. Mètode i criteris d'avaluació

La qualificació de l'assignatura “Didàctica de les matemàtiques” constarà de dues parts: la qualificació d'un examen al final del semestre i la qualificació de les pràctiques.

Per aprovar l'assignatura serà necessari una nota mínima de 45 punts sobre 100 a l'examen. En aquest cas es farà la mitjana amb la qualificació de les pràctiques per obtenir la qualificació final de l'assignatura.

L'examen constarà de quatre preguntes. Les tres primeres proposaran problemes didàctico-matemàtics, partint sempre d'una activitat matemàtica concreta. La quarta pregunta farà referència a l'anàlisi i interpretació de determinats aspectes de les pràctiques realitzades per cada estudiant.

La qualificació de les pràctiques és responsabilitat conjunta del professor de l'assignatura i del professor *tutor de pràctiques*. Es tindrà en compte la “Memòria de Pràctiques” (que serà avaluada independentment pels dos professors citats) i l'activitat que ha portat a terme cada estudiant en l'Institut d'Ensenyament Secundari corresponent (avaluada pel tutor de pràctiques).

Aquesta qualificació de pràctiques (independentment de la nota de l'examen i, per tant, de la nota global de l'assignatura), serà la nota de pràctiques del CAP per aquells estudiants que estiguin matriculats d'aquest curs i convalidin l'assignatura “didàctica de les matemàtiques”.

Bellaterra, gener de 2004