Curs 2004-2005

1. 28004 Geometria Diferencial

Tipus: Troncal

Crèdits: 7,5 (4,5 teòrics, 3 pràctics)

2. Presentació i objectius de l'assignatura

Aquest curs és una introducció als conceptes de la Geometria Diferencial, principalment als de mètrica i curvatura, mitjançant corbes i superfícies de $\mathbb{R}^3$. El resultat principal és el Teorema Egregi de Gauss, que demostra que la curvatura de Gauss és intrínseca.

L'objectiu més important del curs és introduir els alumnes en l'estudi de les varietats diferenciables que són subconjunts de $\mathbb{R}^3$, que per aquesta raó no necessiten d'una definició abstracta. Són objectes que es poden visualitzar i sobre els quals es pot calcular. Entendre sobre aquests objectes els conceptes de mètrica i curvatura mitjançant la primera i segona forma fonamentals és un punt important en la formació d'un matemàtic, i és un pas imprescindible per continuar l'estudi de les varietats diferenciables que es doten de mètriques Riemannianes.

Les corbes i superfícies diferenciables són objectes geomètrics de $\mathbb{R}^3$ que tenen associades propietats locals com ara una recta o un pla tangent en cada punt, respectivament. Les transformacions que conserven les propietats d'aquests objectes són les diferenciables. Les corbes i superfícies diferenciables posseixen parametritzacions locals. Les aplicacions diferenciables entre corbes i superfícies s'expressen via parametritzacions mitjançant aplicacions diferenciables entre dominis euclidis. El concepte de curvatura d'una corba està associat a una operació de derivació covariant al llarg de la corba. La curvatura d'una superfície és un invariant de la diferencial de l'anomenada aplicació de Gauss. Es fa palès, per tant, que el Càlcul Diferencial de vàries variables és un element tècnic essencial en l'estudi de la geometria diferencial local de curves i superfícies.

3. Continguts

- 1. Corbes al pla i a l'espai

  Corbes parametrizades i corbes definides per equacions. Longitud d'arc i paràmetre arc. Curvatura i torsió. Tiedre i fórmules de Frenet. Teorema fonamental: curvatura i torsió determinen la corba.

- 2. Teoria local de superfícies a $\mathbb{R}^3$

  Superfícies parametritzades i superfícies definides per equacions. Pla Tangent. Extensió del concepte de diferenciabilitat a aplicacions entre superfícies regulars.

  Primera Forma Fonamental. Mètrica sobre una superfície regular. Càlcul de longituds de corbes i àrees de regions sobre superfícies. Isometries i isometries locals. Geodèsiques.

  Camps vectorials sobre oberts dún espai euclidi. Derivació covariant. Derivació covariant de camps vectorials tangents a una superfície.

  Orientació de superfícies. Aplicació de Gauss. Curvatura normal i curvatura geodèsica d'una corba sobre una superfície. Aplicació de Weingarten i Segona Forma Fonamental. Curvatura: curvatures principals, mitjana i de Gauss.

  Punts el.liptics, parabòlics i hiperbòlics. Línees assimptòtiques i línees de curvatura.

- 3. Introducció a la geometria intrínseca

  Símbols de Christoffel. Teorema Egregi de Gauss. Càlcul de la curvatura geodèsica. Geodèsiques.

4. Temps que ha de dedicar l'alumne per tal de superar l'assignatura

Activitats presencials

- Classes de teoria: 45 h.
- Classes de problemes: 15 h.
- Activitats tutoritzades:15 h.
- Realització d'examens finals: 4 h.

Activitats no presencials

- Estudi de teoria:45 h.
- Realització de problemes:30 h.
- Preparació de treballs: 15 h.
- Preparació d'examens: 30 h.

Total: 200 h.

5. Capacitats i destreses a adquirir

Són objectius del curs els següents:

- Conèixer algunes corbes i superfícies clàssiques, aprendre a parametritzar-les i a escollir la parametrització o equació implícita més adient a cada problema.
- Aprendre a reconèixer el significat geomètric dels paràmetres, quan això és possible. Aprendre a identificar una corba continguda en una superfície donada per una relació entre els paràmetres.
- Entendre i aprendre a calcular triedres de Frenet, curvatura i torsió de corbes de $\mathbb{R}^3$. Entendre i aprendre a calcular pla tangent i vector normal a una superfície en un punt, aplicació de Gauss i primera i segona forma fonamental d'una superfície de $\mathbb{R}^3$.
- Aprendre a calcular integrals de funcions sobre corbes i superfícies, com ara longituds, àrees, centres de gravetat, integrals de la curvatura.
- Entendre que la curvatura i la torsió caracteritzen una corba de $\mathbb{R}^3$ com a solució d'un sistema d'equacions diferencials, així com la primera i segona forma fonamental caracteritzen una superfície com a solució d'un sistema d'equacions en derivades parcials.
- Veure exemples d'isometries locals entre superfícies, i de superfícies que no poden ser localment isomètriques.
- Estudiar corbes especials dins d'una superfície: línies de curvatura, línies asimptòtiques, geodèsiques.
- Usar la derivació covariant per calcular la curvatura geodèsica d'una corba continguda en una superfície.

6. Requisits previs

Es demana coneixement de càlcul en diverses variables (derivació, integració i teorema de la funció implícita), i d'àlgebra lineal i geometria lineal. Es requereix tenir assimilats els continguts de les assignatures Anàlisi Matemàtica II i Geometria Lineal. Es convenient haver cursat les assignatures de Anàlisi Vectorial i Topologia.

7. Metodologia

En la opinió del professor, aquesta assignatura és difícil d'assimilar sense l'assistència a classe. No es pot adquirir habilitat en el càlcul i en la visualització dels objectes geomètrics sense haver resolt molts exercicis. Els problemes que es fan a les classes de problemes cal haver-los pensat abans a casa.

Per a l'estudi de corbes, és útil visitar la pàgina www-history.mcs.st-andrews.ac.uk, secció "Famous curves index".

Per a l'estudi de superfícies, és útil el programa Superfícies del professor Angel Montesinos, que e s pot descarregar lliurement a l'adreça ftp://topologia.geomet.uv.es/pub/montesin .

Durant el curs cada alumne haurà de realitzar un treball de càlcul seguint un protocol, que li serà assignat personalment i serà supervisat pel professorat de pràctiques.

.

8. Avaluació

Durant el curs cada alumne haurà de realitzar un treball de càlcul, que presentarà per escrit i serà valorat fins a 2 punts . Hi haurà també examen final, on es demanarà coneixement teòric i resolució de problemes, que aportarà fins a 8 punts. Tant per la primera com per la segona convocatòria del curs, la nota és suma de la nota d'examen més la nota del treball. El treball del curs es realitzarà una sola vegada, entre juny i setembre, i es pot presentar al juny o al setembre.

9. Bibliografia

Bibliografia bàsica

- M. DO CARMO, *Geometría Diferencial de curvas y superficies*, Alianza Universidad, 1990.
- A. LOPEZ DE LA RICA - A. DE LA VILLA CUENCA, *Geometría Diferencial*, CLAGSA, 1997.

Bibliografia complementària

- D. HILBERT - S. COHN VOSSEN, *Geometry and the imagination* , Chelsea Publishing Company, 1990.
- S. MONTIEL - A. ROS, *Curvas y superficies*, Proyecto Sur,1997.
- J. GIRBAU, *Geometria Diferencial i Relativitat*, Manuals UAB, 10, 1993.
- D. STRUIK, *Lectures on Classical Differential Geometry*, Dover, 1988.

10. Professorat

Teoria: Carmen Safont (despatx C1/112, carme.safont@uab.es)
Problemes i pràctiques: David Marín (despatx C1/126, davidmp@mat.uab.es)