

LLICENCIATURA DE MATEMÀTIQUES

GUIA DOCENT DE TEORIA DE FUNCIONS

1.- IDENTIFICACIÓ DE L'ASSIGNATURA.

Nom: Teoria de Funcions

Codi: 28028

Crèdits: 6

Tipus: Optativa (segon semestre)

Horari de les classes de teoria: dimecres de 10 a 11 i dijous de 12 a 13.

Horari de les classes de problemes: dijous de 13 a 14.

2.- OBJECTIUS.

El principal objectiu d'aquesta assignatura és aprofundir en temes relatius a l'Anàlisi Matemàtica que s'han tractat a la carrera. D'aquesta forma, l'assignatura Teoria de Funcions pot veure's com una assignatura que continua de manera natural d'una part l'Anàlisi Complexa de tercer curs i d'una altra l'Anàlisi Real i Funcional de quart curs.

Donat que l'estudiant que cursa aquesta assignatura està a punt d'acabar la carrera, s'intentarà que l'assignatura contribueixi a facilitar que l'estudiant pugui cursar estudis de postgrau on es necessitin continguts d'Anàlisi Matemàtica.

3.- CONTINGUTS

1.- Factorització de funcions holomorfes.

- Productes infinits de números complexos.
- Convergència uniforme sobre compactes.
- Productes infinits de funcions holomorfes. El Teorema de factorització de Weierstrass.
- Factorització d'algunes funcions enteres.

2.- Funcions harmòniques.

- Funció harmònica. Propietats.
- Propietat de la mitjana.
- Problema de Dirichlet. Nucli de Poisson al disc unitat.
- Fórmula de Jensen.
- Zeros de funcions holomorfes i acotades al disc. Productes de Blaschke.

3.- Teoria de la mesura.

- Mesures complexes.

- Variació d'una mesura.
- Continuitat absoluta de mesures.
- El Teorema de Radon-Nikodym.
- Conseqüències. El Teorema de Representació de Riesz.
- Derivada d'una mesura.
- Funcions de variació acotada. Funcions absolutament contínues.
- Diferenciació de funcions.

4.- TEMPS QUE HA DE DEDICAR UN ALUMNE A L'ASSIGNATURA.

El temps previst en la següent taula és aproximat i, evidentment, cada estudiant l'ha d'adaptar a la seva situació. En qualsevol cas i tenint en compte que a aquesta assignatura li correspon el 20 % dels crèdits del segon semestre, s'ha de pensar que la dedicació setmanal a l'assignatura ha de ser de l'ordre de 8-10 hores aproximadament (classes presencials incloses) i que aquesta dedicació no ha baixar en època d'exàmens.

TIPUS D'ACTIVITAT	Descripció	Hores
ACTIVITATS PRESENCIALS	Classes de teoria	28
	Classes de problemes	14
	Classes de pràctiques	0
	Activitats tutoritzades	7
	Realització de proves parcials	0
	Realització d'exàmens finals	4
ACTIVITATS NO PRESENCIALS	Estudi de teoria	28
	Realització de problemes	35
	Recerca Bibliogràfica	4
	Preparació de pràctiques	0
	Preparació de treballs	24
	Preparació d'exàmens	12
TOTAL		156

5.- CAPACITATS O DESTRESES A ADQUIRIR.

Per tal que un alumne superi l'assignatura entenem que és imprescindible que adquireixi la major part de les següents capacitats.

Capacitats teòriques.

Pel que fa a aquest tipus de capacitats, l'alumne ha de tenir clar els conceptes i les nocions següents.

- La noció de producte convergent i la d'absolutament convergent.
- Convergència uniforme sobre compactes de funcions holomorfes i la seva relació amb l'holomorfia.
- Producte absolutament i uniformement convergent sobre compactes de funcions.
- Relació entre funcions holomorfes i funcions harmòniques segons si el domini on estan definides és simplement connex.

- Relació entre funcions harmòniques i funcions que verifiquen la Propietat de la Mitjana.
- Aplicació del concepte d'harmonicitat per tal d'obtenir la fórmula de Jensen.
- Com ha de ser la successió de zeros d'una funció holomorfa i acotada al disc unitat.
- Conceptes de mesura complexa, parts real i imaginària d'una mesura i part positiva i negativa d'una mesura real.
- Variació d'una mesura i la seva relació amb la mesura original.
- Mesura absolutament contínua respecte d'una altra i mesures singulars.
- Enunciats dels teoremes de Radon-Nikodym i de representació de Riesz.
- Funcions de variació acotada, absolutament contínues. Relació amb les mesures.
- Fórmula d'integració per parts.
- Funcions amb derivada integrable.

Capacitats de problemes

Les capacitats que s'espera que l'alumne adquireixi són fàcilment deduïbles de les mateixes llistes que seran lliurades. Tot i així es considera que l'alumne ha d'esdevenir relativament expert en els següents ítems.

- Factoritzar funcions enteres.
- Resoldre problemes de Dirichlet més o menys elementals.
- Fer servir eines elementals d'Anàlisi Complexa (representació conforme, fórmula de Cauchy, etc.) en el moment de resoldre problemes de Dirichlet.
- Saber determinar si dues mesures són absolutament contínues una respecte de l'altra o si són mútuament singulars.
- Obtenir informació sobre el creixement d'una funció a partir del zeros de la mateixa.
- Saber aplicar en situacions relativament típiques, el teorema de Representació de Riesz.

D'altra banda, i pensant en la formació de l'alumne com a futur professional de la Matemàtica, creiem que s'ha d'aprofitar l'assignatura per tal de desenvolupar les capacitats següents.

- Capacitat d'utilitzar eficientment la bibliografia.
- Capacitat d'exposar treballs.
- Capacitat de resoldre problemes.
- Preocupació per la qualitat.

6.- REQUISITS.

L'alumne que cursa l'assignatura Teoria de Funcions ha d'haver superat l'assignatura Anàlisi Complexa de tercer curs i ha d'haver cursat, com a mínim, l'assignatura Anàlisi Real i Funcional de quart curs.

Si l'alumne no ha superat Anàlisi Real i Funcional, es recomana que almenys tingui clara la construcció de la mesura de Lebesgue i entengui la noció d'espai de Banach. Tanmateix, es recomana fortament que s'hagin adquirit els conceptes de l'assignatura Probabilitat, principalment pel que fa als relacionats a teoria de la mesura.

7.- METODOLOGIA.

L'assignatura disposa, al llarg del curs acadèmic de dues hores de classe de teoria i una hora de classe de problemes. Es recomana fortament l'assistència a aquestes sessions.

S'obrirà una aplicació d'aquesta assignatura al Campus Virtual de la universitat per tal de subministrar tot el material i tota la informació relativa a aquesta assignatura que li calgui a l'estudiant.

Pel que fa a les classes de teoria, l'alumne disposarà d'uns apunts que li seran proporcionats pel professor al llarg del curs i que li poden servir d'orientació. És molt important que l'estudiant treballi personalment sobre aquest material abans d'anar a classe.

Periòdicament, l'estudiant rebrà unes llistes de problemes que ha de pensar i sobre els quals es treballarà a les classes de problemes. Part dels problemes proposats a les llistes seran assignats als estudiants, els quals hauran de lliurar en el termini previst i de la feina de la classe de problemes, els alumnes seran avaluats.

Per tal de facilitar la feina a l'alumne pel que fa a les llistes de problemes, el professor anunciarà un horari en el qual estarà a disposició dels estudiants per tal de resoldre els dubtes que aquests tinguin.

Finalment, l'estudiant ha de fer un petit treball bibliogràfic relacionat amb l'assignatura i que respongui a algun àrea d'interès per a l'estudiant. El professor orientarà a l'estudiant en l'elaboració, bibliografia, redacció i presentació d'aquest treball dintre de l'horari que s'acordi.

8.- AVALUACIÓ.

Dintre del termini fixat pel professor, els estudiants han de lliurar les solucions dels problemes que periòdicament seran proposats. Sobre aquests lliuraments, els estudiants obtindran una qualificació (**Prob**).

Abans de les vacances de Setmana Santa, els alumnes hauran comunicat al professor un tema sobre el qual hauran d'elaborar un treball. Els temes dels treballs han de rebre el vist-i-plau del professor. Com a orientació presentem una llista de possibles temes.

- Famílies normals. La demostració del teorema de Riemann de representació conforme.
- Funcions de la classe **S**.
- L'espai de Bergman de funcions holomorfes al disc unitat de quadrat integrable.
- Fórmules de Schwarz-Christoffel. Simulacions i aplicacions a la hidrodinàmica.
- Transformada de Fourier de funcions holomorfes. La teoria de Paley-Wiener.
- El teorema de distribució de nombres primers.
- La funció Gamma d'Euler. Fórmula de Stirling.
- La funció ζ de Riemann.
- Integral de Poisson d'una mesura. El teorema de Fatou.
- Iteració de funcions holomorfes. Classificació dels punts fixes.
- Conjunts de Julia i de Fatou.
- Mesures de Hausdorff.

- Lema de Baire. Caracterització del conjunt de punts de discontinuïtat d'una funció. Caracterització del conjunt de punts de derivabilitat d'una funció.
- Funcions enteres.
- Teorema de Bloch, teoremes de Picard.
- Conjunts autosimilars.
- Corbes de Jordan amb àrea positiva.

A final de curs els alumnes hauran de presentar un treball i defensar-lo públicament. L'esmentada defensa consistirà en una breu presentació (fent servir transparències o recursos digitals) en la qual l'estudiant ha de deixar clar quin és el tema del treball, els resultats sobre els que s'ha treballat, un breu esquema del mateix, els punts més importants, les principals dificultats i exemples que il·lustrin el contingut. De l'elaboració del treball i de la presentació l'estudiant rebrà una altra nota (**Tr**).

El dia **8 de juny de 2005** se celebrarà un examen en el que s'avaluarà si l'alumne ha assolit els objectius i les capacitats abans esmentades. La prova tindrà qüestions teòriques, les quals suposaran el 25% del total i qüestions relatives a problemes i exercicis. D'aquesta prova obtindrem una altra qualificació (**Jun**).

La qualificació final de l'alumne, en primera convocatòria, s'obtindrà de la fórmula (arrodonint a un decimal)

$$\max\{0.5 \cdot \text{Jun} + 0.3 \cdot \text{Tr} + 0.2 \cdot \text{Pr}, \text{Jun}\}$$

Si l'estudiant no supera l'assignatura en primera convocatòria, el dia **2 de setembre de 2005** té dret a fer un altre examen de les mateixes característiques que l'examen de Juny. Si d'aquest examen obté la qualificació (**Set**), la qualificació en segona convocatòria serà

$$\max\{0.5 \cdot \text{Set} + 0.3 \cdot \text{Tr} + 0.2 \cdot \text{Pr}, \text{Set}\}$$

Nota: Tot i que aquestes dates d'examen són oficials, poden patir variacions. És per això que es recomana que es confirmi un mes abans de celebració de les mateixes. Pot trobar-se aquesta informació als taulells de la Facultat de Ciències, als de la secció de Matemàtiques o bé a la pàgina web <http://mat.uab.es/seccio>.

9.- BIBLIOGRAFIA.

L'estudiant de segon cicle de Matemàtiques ha d'estar acostumat a fer servir sense cap dificultat qualsevol tipus de recurs bibliogràfic per tal de completar la informació subministrada a classe. És per això que els llibres que es presenten a continuació són tan sols llocs on l'estudiant pot trobar els continguts del curs.

- **L.V. Ahlfors.** *Complex Analysis*. McGraw-Hill.
- **J. B. Conway.** *Funcions of one complex variable*. Springer-Verlag.

Els dos primers temes del nostre curs estan molt ben explicats als capítols 7, 10 i part del 11. Aquest llibre pot ser molt útil si es tenen determinades mancances pel que fa a l'Anàlisi Complexa.

- **W. Rudin.** *Análisis Real y Complejo*. Alhambra, 1985.

Tot i que en aquest llibre es poden trobar els continguts dels dos primers temes, el farem servir principalment pel tema 3. Concretament, poden ser de molta utilitat els capítols 6 i 8 d'aquest text.

Els tres llibres de la llista anterior formen part del fons bibliogràfic de la Biblioteca de Ciències i Enginyeries.

10.- PROFESSORAT.

Juan J. Donaire

C1/306

donaire@mat.uab.es

93 581 2606