

LLICENCIATURA DE MATEMÀTIQUES

GUIA DOCENT DE FONAMENTS D'ÀLGEBRA

1.- Identificació de l'assignatura

Nom de l'assignatura: Fonaments d'Àlgebra; Codi: 27999

Nombre de crèdits: 9

Tipus: Obligatòria (Semestral)

2.- Objectius de l'assignatura.

L'objectiu principal d'aquesta assignatura és donar una introducció a les estructures algebraïques bàsiques, com ho són els grups, els anells i els mòduls. Farem èmfasi a conèixer diverses classes d'anells commutatius i saber-ne distingir les diferències (amb algunes pinzellades d'anells no commutatius, limitades a definicions i alguns exemples). Aquest serà, doncs, un dels primers llocs on coneixerem exemples no trivials d'anells, així com procediments per fabricar-ne de nous. Les classes d'anells que estudiarem apareixen de manera natural en considerar la teoria de divisibilitat (per tenir una idea, com a generalització del que passa als enters). La segona part del curs estudia els mòduls sobre un anell commutatiu. L'objectiu principal d'aquesta part, i de fet un dels aspectes centrals del curs és establir el teorema de classificació de mòduls finitament generats sobre dominis euclidiàns, i la seva aplicació a d'altres aspectes importants de l'àlgebra: la classificació de grups abelians finitament generats i la classificació d'endomorfismes.

3.- Continguts.

1. Grups.
 - Repàs. Subgrups, teorema de Lagrange.
 - Subgrups normals. Grup quocient.
 - Els teoremes d'isomorfia.
 - Acció d'un grup sobre un conjunt.
 - El primer teorema de Sylow.
2. Anells commutatius.
 - Anells, ideals, anell quocient, ideals principals.
 - Els teoremes d'isomorfia (per anells).
 - Ideals maximals i primers. El Lema de Zorn.
 - El cos de fraccions d'un domini.
 - L'anell de polinomis.
3. Dominis Euclidiàns.
 - Definició i exemples.
 - Màxim comú divisor. Algorisme d'Euclides. Dominis d'ideals principals.
4. Factorització.
 - Irreductibles, primers i factorització única.
 - Tot domini d'ideals principals és un domini de factorització única.
 - Factoritzacions canòniques.

- Factorització en anells de polinomis. El criteri d'Eisenstein.
5. Introducció als mòduls.
- Definicions bàsiques i exemples.
 - Els teoremes d'isomorfia per mòduls (d'Emmy Noether).
 - Sumes directes i mòduls lliures.
6. Mòduls finitament generats sobre dominis Euclidiàns.
- Submòduls de mòduls lliures sobre DIP's.
 - Factors invariants.
 - Torsió.
 - Divisors elementals.
 - Aplicacions als grups Abeliàns finitament generats i a les formes de Jordan.

4.- Temps que ha de dedicar l'alumne per tal de superar l'assignatura.

El temps previst en la taula següent és aproximat i, evidentment, cada estudiant l'haurà d'adaptar a la seva situació. En qualsevol cas, tenint en compte que a més aquesta assignatura compta amb el 30% dels crèdits del segon quadrimestre, cal pensar com aconsellable una dedicació aproximada de 12 hores setmanals (mínimes), incloent les classes presencials.

TIPUS D'ACTIVITAT	Descripció	Hores
ACTIVITATS PRESENCIALS	Classes de teoria	45
	Classes de problemes	45
	Classes de pràctiques	0
	Activitats tutoritzades	0
	Realització de proves parcials	4
	Realització d'exàmens finals	4
ACTIVITATS NO PRESENCIALS	Estudi de teoria	35
	Realització de problemes	68
	Recerca Bibliogràfica	4
	Preparació de pràctiques	0
	Preparació de treballs	0
	Preparació d'exàmens	20
	TOTAL	225

5.- Capacitats o destreses a adquirir.

Capacitats teòriques:

- Entendre la noció de grup i la diferència entre la notació additiva i multiplicativa.
- Entendre la noció de morfisme de grups.
- Entendre la noció de subgrup, de subgrup normal i la necessitat d'aquesta noció per tal de poder definir grup quocient i morfisme de pas al quocient.
- Entendre els teoremes d'isomorfia per grups i les seves demostracions.
- Entendre la noció de sistema de generadors d'un grup, el concepte de grup finitament generat i cíclic.
- Entendre la noció d'acció d'un grup en un conjunt, i les nocions d'òrbita, conjunt invariant i estabilitzador.

- Entendre el concepte d'anell amb unitat i saber distingir els casos commutatius dels no commutatius.
- Entendre la noció d'element invertible o unitat d'un anell i la de divisor de zero.
- Entendre el concepte de domini i saber distingir, en exemples, els que són dominis dels que no ho són.
- Entendre la noció de subanell i la d'ideal. Entendre per què l'estructura d'ideals és una mesura de la complexitat de l'anell.
- Entendre la construcció de l'anell quocient.
- Entendre les construccions bàsiques de suma i intersecció d'ideals. En particular, entendre la noció d'ideal principal.
- Entendre la noció de morfisme d'anells, nucli i imatge. Entendre els teoremes d'isomorfia per anells i les seves demostracions.
- Entendre el concepte d'ideal maximal i primer, i les diferències entre aquests.
- Entendre el Lema de Zorn i la demostració del Teorema de Krull d'existència d'ideals maximals.
- Entendre la construcció del cos de fraccions d'un domini i el paral·lelisme existent entre aquesta i la construcció dels racionals a partir dels enters. Entendre també la naturalitat d'aquesta construcció.
- Saber donar exemples concrets de cossos de fraccions.
- Entendre la propietat universal del cos de fraccions.
- Entendre la construcció abstracta de l'anell de polinomis i la propietat de substitució.
- Entendre el concepte de domini euclidià i el seu paral·lelisme amb els anells de polinomis i els enters. Conèixer exemples addicionals de dominis euclidians.
- Entendre la mecànica de l'algorisme d'Euclides pels dominis euclidians i saber-lo aplicar.
- Entendre la noció de màxim comú divisor i mínim comú múltiple i la seva falta d'unicitat. Entendre la relació d'equivalència "ésser associat".
- Entendre el concepte de domini d'ideals principals i el seu paral·lelisme amb els enters i polinomis.
- Entendre la prova que tot domini euclidià és principal i conèixer exemples que mostren que el recíproc no és cert.
- Entendre la noció d'element irreductible i primer. Entendre la relació entre aquests dos conceptes i com generalitzen situacions que es donen als enters i a l'anell de polinomis. Conèixer exemples on els conceptes no coincideixen.
- Entendre la noció d'anell factorial.
- Entendre la demostració que tot domini principal és factorial. Conèixer exemples on el recíproc no és cert.
- Entendre la noció de Conjunt de Representants de Primers.
- Entendre la noció de polinomi primitiu i la prova del Lema de Gauss.
- Entendre la relació entre els polinomis irreductibles de l'anell de polinomis $R[x]$ i els irreductibles a $K[x]$, on K és el cos de fraccions de R .
- Entendre la demostració del Teorema de Gauss.
- Entendre el criteri d'Eisenstein i la seva aplicació.
- Entendre la definició de mòdul sobre un anell, i els paral·lelismes existents amb la noció d'espai vectorial sobre un cos, de grup abelià i amb la teoria d'endomorfismes sobre espais vectorials.
- Entendre els conceptes de submòdul i de morfisme de mòduls.
- Entendre la noció de conjunt generador d'un mòdul, i en particular el concepte de mòdul finitament generat i cíclic.
- Entendre els teoremes d'isomorfia i les seves demostracions.

- Entendre el concepte de suma directa interna i externa, i la seva diferència.
- Entendre la noció d'independència lineal i de mòdul lliure. Entendre el paral·lelisme amb espais vectorials i la diferència entre aquests conceptes.
- Entendre el concepte de rang i la unicitat per mòduls lliures sobre anells commutatius.
- Entendre la descomposició canònica d'un morfisme exhaustiu d'un mòdul finitament generat a un mòdul lliure.
- Entendre per què els submòduls d'un mòdul finitament generat sobre un domini principal són finitament generats, i per què això és en general fals.
- Entendre la noció de factor invariant d'un mòdul finitament generat sobre un domini euclidià, i entendre la demostració del Primer Teorema d'estructura.
- Entendre el concepte de torsió d'un mòdul i el concepte de p -torsió per a un primer p de l'anell R .
- Entendre el Teorema xinès de les restes (de descomposició de la torsió com a parts de p -torsió).
- Entendre el Segon Teorema d'estructura de mòduls finitament generats sobre dominis euclidians, així com la noció de divisors elementals.
- Entendre les aplicacions als grups abelians finitament generats i a la classificació d'endomorfismes.

Capacitats pràctiques o de problemes:

- Adquirir coneixement dels diferents conceptes que apareixeran durant el curs, per tal de poder manipular-los en la resolució de problemes.
- Sintetitzar les demostracions més significatives per aplicar-les a la resolució de problemes de caire teòric i pràctic.
- Adquirir la capacitat de desenvolupar certes variacions en determinades construccions per tal de manipular-les i deduir-ne propietats.
- Augmentar el catàleg d'exemples de grups i anells per tal de contrastar propietats. Més precisament:
- Conèixer exemples concrets d'anells on els matisos entre els conceptes quedin palesos, com ara exemples de DIP's no euclidians, de DFU's no principals, etc.
- Saber determinar si una determinada aplicació entre estructures és morfisme (de grups, d'anells, de mòduls).
- Saber determinar si un subconjunt d'un grup (resp. anell, mòdul) és subgrup (resp. subanell o ideal, submòdul).
- Saber determinar els ideals d'algun exemple concret d'anell.
- Saber calcular el cos de fraccions d'un domini en casos concrets.
- Saber treballar amb la norma euclidiana per fer càlculs concrets en DE's.
- Adquirir familiaritat en la manipulació algebraica de l'anell de polinomis.
- Utilitzar el criteri d'Eisenstein per decidir si un determinat polinomi és irreductible.
- Utilitzar els teoremes de classificació per saber trobar quants grups abelians finits hi ha d'un ordre determinat i també per classificar un determinat grup abelià finitament generat.
- Utilitzar els teoremes de classificació per classificar un endomorfisme sobre un espai vectorial.
- Utilitzar els teoremes de classificació per classificar un mòdul finitament generat sobre un domini euclidià (diferent dels enters i de l'anell de polinomis).

6.- Requisits previs.

Els requisits acadèmics previs els trobarem en les assignatures de primer curs: Introducció a l'Àlgebra Lineal i Matemàtica Discreta. L'habilitat adquirida en aquestes assignatures a nivell d'aritmètica i manipulació algebraica de determinats conceptes es continuarà desenvolupant, tot passant a un nivell d'abstracció més elevat, que per altra banda és molt comú en Matemàtiques.

7.- Metodologia.

Aquesta assignatura té tres hores setmanals de teoria i tres de problemes. Encara que no disposarem d'un conjunt d'apunts previs, cal destacar que hi ha una varietat interessant de referències bibliogràfiques que es poden tenir en compte per entendre el que s'ha explicat a classe i, si s'escau, ampliar coneixements.

Els conceptes introduïts a classe, els enunciats dels teoremes, les seves demostracions i les aplicacions són imprescindibles quan ens posem a pensar problemes, ja que a vegades les tècniques seran semblants. Els dubtes que sorgeixin es poden preguntar durant la classe o utilitzant les hores de consulta dels professors.

És possible que alguna de les sessions de problemes sigui de caire més pràctic, encaminada a fomentar la participació dels estudiants i el treball en grup. Aquesta possibilitat dependrà en part de l'evolució de l'assignatura i s'anunciarà oportunament. En aquest supòsit, la participació és importantíssima per contrastar la solució del professor amb la dels estudiants. Les llistes de problemes seran exhaustives i no s'acabaran a classe, de manera que els estudiants hauran d'acabar-les pel seu compte.

A més, l'assignatura disposa d'una pàgina al "campus virtual" on anirem penjant les llistes de problemes, material addicional i qualsevol informació relacionada amb l'assignatura.

8.- Avaluació.

Primera convocatòria (Juny):

- Un 20% de la nota correspon a la realització d'una prova parcial de dues hores de durada, que es farà el dimarts 10 d'abril. Denotem aquesta nota per N_p .
- Un 80% de la nota correspon a l'obtinguda a l'examen que es realitzarà durant el mes de juny. Denotem aquesta nota per N_E .
- De manera optativa, es podrà treballar en un problema llarg o un projecte d'ampliació d'algun tema del curs. Aquest treball es farà en grup de, com a màxim, 5 persones. S'haurà de presentar per escrit i explicar-lo breument al professor. Hi haurà un termini d'inscripció dels grups que s'anunciarà oportunament. Cada grup disposarà de 4 setmanes per a la realització del projecte. L'avaluació positiva del projecte suposarà un canvi d'entre 1 i 2 punts a la qualificació numèrica final de l'assignatura, sempre i quan la nota N_E de l'examen de juny sigui superior a 4. Anomenem a aquesta nota N_T .

La nota de l'assignatura serà, doncs: $N = \max\{N_E, 0.20 N_p + 0.80 N_E\} + N_T$.

Segona convocatòria (Setembre):

Es realitzarà un examen al setembre. Denotem la nota per N_S . Aleshores la nota de l'assignatura serà el resultat del càlcul:

$$\max\{N_S, 0.20 N_P + 0.80 N_S\}.$$

9.- Bibliografia.

Existeixen algunes monografies que cobreixen els continguts de l'assignatura. Recomanem, en aquest sentit, les referències [1] i [2] (encara que aquesta darrera conté alguns errors). Certs continguts més específics poden consultar-se a d'altres llibres. Per exemple, la part dedicada a grups es pot trobar a [8]. Els continguts dedicats a anells i mòduls poden trobar-se a [5].

Altres referències bibliogràfiques són [6] i [7], que també cobreixen els continguts de l'assignatura (i inclouen material més avançat), [4], on l'exposició és més esbossada, i [3], on es pot consultar algun material complementari.

- [1] W. A. Adkins, S. H. Weintraub, "Algebra", Graduate Texts in Mathematics, 136, Springer-Verlag, 1992.
- [2] P. M. Cohn, "Algebra", vol. 1, John Wiley and Sons, 1982/1991.
- [3] P. M. Cohn, "Algebra", vol. 2, John Wiley and Sons, 1989.
- [4] L. C. Grove, "Algebra", Academic Press, 1983.
- [5] B. Hartley, T. O. Hawkes, "Rings, modules and linear algebra", Chapman and Hall, 1994 (reimpressió)
- [6] N. Jacobson, "Basic Algebra I", W. H. Freeman, 1985.
- [7] S. Lang, "Algebra", Graduate Texts in Mathematics, 211. *Springer-Verlag*, 1965/1984/2002
- [8] M. A. Moreno, E. Pardo, "Teoría de grupos", Textos básicos universitarios, 14, Universidad de Cádiz, 2003.

10.- Professorat.

Teoria:
Joaquim Roé
C1/-130
e-mail: jroe@mat.uab.cat

Problemes:

Rosa Camps
C1/120
e-mail: rcamps@mat.uab.cat