

Guia Docent de l'assignatura Geometria Diferencial

Curs 2007-2008

1. Identificació de l'assignatura

Nom i Codi	Geometria Diferencial 28004
Tipus	Obligatòria al títol propi Troncal al títol homologat
Crèdits ECTS	7,5 (4,5 teòrics i 3 pràctics)
Curs	Segon semestre de tercer

2. Presentació i objectius

Els conceptes i nocions de l'assignatura de Geometria Diferencial són bàsics en la comprensió de la realitat física. També són importants les seves aplicacions tècniques en el camp de l'enginyeria, on els objectes d'estudi es poden representar geomètricament per elements no lineals de l'espai tridimensional $\mathbb{R}^3$, és a dir, bàsicament per corbes i superfícies.

L'objectiu principal és conèixer quines són les nocions geomètriques que permeten caracteritzar de manera teòrica la forma d'aquests elements (curvatura i torsió en el cas d'una corba, primera i segona forma fonamental en el cas d'una superfície), així com desenvolupar mètodes de càlcul de les seves característiques mètriques (longitud, àrea, etc). També és important relacionar els invariants associats a una corba continguda en una superfície amb les nocions i magnituds pròpies d'aquesta última. Aquestes propietats seran tractades en els dos primers blocs de l'assignatura.

El tercer i últim bloc del curs tracta de la geometria intrínseca de les superfícies. El seu objectiu és identificar quines propietats d'una superfície no depenen de la forma concreta d'aquesta sinó només de les seves característiques mètriques estudiades en el punt anterior. Conceptualment és la part més difícil del curs, ja que és el primer pas cap a les nocions abstractes de varietat diferenciable i varietat de Riemann que s'estudien en les assignatures de Geometria de Varietats i Geometria Riemanniana.

3. Competències principals desenvolupades

L'alumne haurà assolit una sèrie de *competències científiques* en cursar i seguir de manera regular aquesta assignatura:

- Capacitat d'identificar objectes matemàtics nous i de relacionar-los amb d'altres de coneguts.
- Capacitat de reconèixer objectes de la realitat física que es poden representar geomètricament per elements no lineals de l'espai tridimensional, és a dir, bàsicament per corbes i superfícies.

- Capacitat de distingir, davant un problema, el que és important de cara a la seva resolució del que és merament anecdòtic, per tal de ser capaç de trobar la corba o superfície que millor s'adapta a la realitat del problema.

També haurà assolit una sèrie de *competències tecnològiques específiques*. Més concretament, en finalitzar l'assignatura l'alumne hauria de ser capaç de:

- Determinar si un subconjunt donat de $\mathbb{R}^3$ és una corba o una superfície regular.
- Trobar parametritzacions locals de corbes i superfícies de $\mathbb{R}^3$.
- Calcular la curvatura, torsió i triedre de Frenet d'una corba parametritzada.
- Calcular la primera i segona forma fonamental d'una superfície parametritzada.
- Aplicar amb correcció i seguretat els mètodes de càlcul de les característiques mètriques de corbes i superfícies.
- Calcular longitud, angles i àrees dins d'una superfície a partir de la primera forma fonamental.
- Calcular i interpretar geomètricament la curvatura de Gauss d'una superfície.
- Calcular i interpretar geomètricament la curvatura normal i geodèsica d'una corba continguda en una superfície.
- Determinar si dues superfícies són localment isomètriques.
- Calcular les equacions de les geodèsiques d'una superfície i interpretar-les geomètricament i físicament.

En quant a *competències de tipus transversal* podem incloure les següents:

- Expressió correcta de forma escrita dels continguts de l'assignatura, tant teòrics com pràctics.
- Capacitat d'expressar-se oralment de manera correcta i eficient.
- Capacitat per a autogestionar el seu temps de treball i per a organitzar-se la feina buscant informació de manera autònoma.
- Capacitat de síntesi i treball en grup.

4. Requisits previs

Per assimilar tots els continguts de l'assignatura s'ha de tenir un coneixement previ de càlcul en diverses variables (derivació, integració, teorema de la funció implícita), d'equacions diferencials (teorema d'existència i unicitat de solucions) i d'àlgebra i geometria lineals (diagonalització d'endomorfismes autoadjunts, formes quadràtiques, còniques i quàdriques). Per tant, és convenient haver cursat les assignatures d'Anàlisi Matemàtica II i Geometria Lineal. També és aconsellable conèixer alguns dels continguts de les assignatures d'Anàlisi Vectorial i Topologia.

5. Metodologia

Per tal d'assimilar les diferents nocions geomètriques i mètodes de càlcul dels conceptes introduïts a les classes teòriques és molt important que l'alumne dediqui una bona part del temps d'estudi de l'assignatura a practicar-les reiteradament mitjançant els exemples i els exercicis proposats a classe de problemes. En aquest sentit, encoratgem a l'alumne a assistir habitualment a les classes pràctiques. S'ha de dir també que el seu aprofitament és molt més accentuat quan l'alumne ha plantejat i/o resolt els problemes prèviament a la seva correcció a classe.

A part de la llista de problemes facilitada, es poden consultar recursos d'internet com ara la pàgina web www-history.mcs.st-andrews.ac.uk, secció "Famous curves index", que conté molts exemples de corbes clàssiques definides implícitament així com parametritzades. Aconseïllem també l'ús del manipulador algebraic **Maple** per fer alguns càlculs rutinaris i sobretot per obtenir representacions gràfiques que ajudin a l'alumne visualitzar tot tipus d'objectes geomètrics. L'utilització del package específic **Atlas** també pot servir d'ajuda, sobretot per aprofundir en la relació d'aquesta assignatura amb les de Geometria de Varietats i Geometria Riemanniana.

Els alumnes interessats en desenvolupar algun tema relacionat amb l'assignatura són encoratjats a contactar amb els professors de teoria i/o problemes per tal de servir-los de guia (donant algunes qüestions precises, bibliografia, etc...) en la realització d'un treball optatiu, susceptible de ser avaluat en la forma que s'especifica en el següent punt. Es proposarà una llista de temes deixant a l'alumne la possibilitat de triar un d'ells o de proposar-ne d'altres. En aquesta llista podran aparèixer alguns problemes relacionats amb la física i l'enginyeria.

6. Continguts

1. Corbes

- 1.1 Corbes parametritzades i corbes regulars.
- 1.2 Longitud i paràmetre arc.
- 1.3 Corbes planes.
 - 1.3.1 Estudi local: curvatura amb signe.
 - 1.3.2 Aspectes globals.
- 1.4 Corbes a $\mathbb{R}^3$: curvatura i torsió, triedre i fórmules de Frenet.

2. Superfícies de $\mathbb{R}^3$

- 2.1 Definició de superfície regular i d'aplicació diferenciable entre superfícies.
- 2.2 Primera forma fonamental i càlcul de longituds, angles i àrees.
- 2.3 L'aplicació de Gauss i segona forma fonamental: diferents nocions de curvatures d'una superfície.
- 2.4 Camps vectorials i derivada covariant.
 - 2.4.1 Camps vectorials i derivada covariant a $\mathbb{R}^n$.
 - 2.4.2 Camps tangents a superfícies.

3. Geometria intrínseca de superfícies

- 3.1 Isometries i aplicacions conformes.
- 3.2 Derivada covariant intrínseca.
- 3.3 Teorema Egregium de Gauss.
- 3.4 Transport paral·lel i geodèsiques.
 - 3.4.1 Mètodes de càlcul.
 - 3.4.2 Interpretació geomètrica i exemples.

7. Distribució del temps

Tipus d'activitat	Descripció	Hores
Activitats presencials	Classes de teoria	42
	Classes de problemes	28
	Realització de proves parcials	3
	Realització d'exàmens finals	4
Activitats no presencials	Estudi de teoria	35
	Realització de problemes	40
	Realització de treballs	35.5
Total		187.5

8. Avaluació

L'avaluació es farà tenint en compte l'assimilació dels continguts teòrics i pràctics de l'assignatura així com el treball continuat al llarg del curs, sense perjudici de la metodologia particular emprada per cada alumne. La quantificació d'aquestes dades es farà de la manera següent:

- A mitjans del semestre, en una data que s'anunciarà amb prou antelació, es realitzarà una prova de seguiment de l'assignatura per avaluar els continguts teòrics i pràctics treballats a les classes de teoria i problemes fins a uns dies abans. La nota d'aquesta prova serà un nombre P entre 0 i 10.
- En finalitzar el semestre, es convocarà un examen final, de continguts principalment pràctics, basats en problemes del tipus que s'hagin tractat a classe. La nota d'aquest examen serà un nombre F entre 0 i 10.
- Al començament del curs, proposarem una sèrie de temes per a que, de manera optativa, individualment o en grups de fins a 4 persones, puguin ser estudiats i desenvolupats pels alumnes fora de l'horari de classe. La redacció d'aquest treball (en la que s'haurà d'indicar clarament quins són els autors reals) no es podrà entregar després de l'últim dia lectiu de la penúltima setmana de curs. Durant la última setmana cada grup farà una breu presentació, de 10 a 20 minuts, a la classe del seu treball. Aquest s'avaluarà amb una nota T entre 0 i 10 en funció de la seva qualitat, quantitat i nombre d'autors.

La nota final N de l'assignatura es calcularà amb la fórmula

$$N = \frac{2}{10}T + \frac{(10 - \frac{2}{10}T)}{10}M = M + T \left(\frac{10 - M}{50} \right), \quad (1)$$

on

$$M = \max \left(\frac{2P + 8F}{10}, F \right).$$

Per aprovar l'assignatura caldrà obtenir una nota mínima de 5:

$$N \geq 5.$$

Els alumnes que hagin obtingut una nota final $N < 5$ podran presentar-se a una segona convocatòria de l'examen final que tindrà lloc al setembre. La nota d'aquest segon examen serà un nombre S entre 0 i 10. La nota final de la segona convocatòria es calcularà amb la fórmula (1) anterior substituint M per S .

9. Bibliografia

Bibliografia bàsica

- M. do Carmo, *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Alianza Universidad, 1990.
- S. Montiel i A. Ros, *Curvas y superficies*. Proyecto Sur, 1997.
- A. López de la Rica i A. de la Villa Cuenca, *Geometría Diferencial*. CLAGSA, 1997.
- D. Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry*, Dover, 1988.

Bibliografia complementària

- M. Berger i B. Gostiaux, *Géométrie différentielle: variétés, courbes et surfaces*, Publications universitaires de France, 1992.
- L.A. Cordero, M. Fernández i A. Gray, *Geometría diferencial de curvas y superficies con Mathematica*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.
- J. Girbau, *Geometria diferencial i relativitat*. Manuals UAB n.10, 1993.
- D. Hilbert i S. Cohn Vossen, *Geometry and the imagination*. Chelsea Publishing Company, 1990.
- W. Kühnel, *Differential Geometry. Curves - Surfaces - Manifolds*. Student Mathematical Library, vol. 16, American Mathematical Society, 2002.
- A. Reventós i C.J. Rodríguez, *Una lectura del Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas de C.F. Gauss*, Publicacions de la SCM 4, 2006.
- A. Pressley, *Elementary Differential Geometry*. Springer, 2001.
- A. V. Pogorélov, *Geometría Diferencial*, Mir, 1984.
- M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. III, Publisher or Perish, 1975.

10. Professorat

- Teoria: David Marín, despatx C1/126, Tel. 4540,
e-mail: davidmp@mat.uab.cat
- Problemes: Judit Abardia, despatx C1/212, Tel. 1886,
e-mail: juditab@mat.uab.cat