Publicacions Matemàtiques, Vol **40** (1996), 41–66.

AUTO-APPLICATIONS HOLOMORPHES PROPRES DES DOMAINES POLYNOMIAUX RIGIDES DE $\mathbf{C}^2$

Abdelaziz Chaouech

Abstract

We show that proper holomorphic self maps of pseudoconvex rigid polynomial domains in $\mathbf{C}^2$ are automorphisms.

0. Introduction

Les seuls exemples connus d'applications holomorphes propres d'un domaine borné à bord régulier de $\mathbf{C}^n$ $(n > 1)$ sur lui-même sont des automorphismes. Ce phénomène constraste avec la situation unidimensionnelle et l'on présume son caractère général. Les domaines strictement pseudoconvexes vérifient cette conjecture: H. Alexander [**1**] a traité le cas de la boule euclidienne et S. Pinchuk [**13**], celui des domaines arbitraires à bord de classe $\mathcal{C}^2$. De façon plus générale, K. Diederich et J. E. Fornaess ont mis en évidence le principe suivant: le lieu de branchement d'une application holomorphe propre d'un domaine pseudoconvexe borné sur un autre est vide dès que l'ensemble des points de faible pseudoconvexité de la frontière du domaine source est assez petit (cf. [**10**, Théorème 3]). Cependant, ce principe ne permet pas de traiter le cas des domaines faiblement pseudoconvexes dans sa généralité. A ce jour, seuls quelques cas ont été abordés. Ainsi, E. Bedford et S. Bell [**2**] ont considéré le cas des domaines pseudoconvexes bornés à bords analytiques réels et Y. Pan [**12**] celui des domaines de Reinhardt de type fini (voir aussi [**9**] où la preuve de Y. Pan est simplifiée et [**8**] où F. Berteloot et S. Pinchuk classifient les applications holomorphes propres entre domaines de Reinhardt complets de $\mathbf{C}^2$). L'objet de cet article est d'étendre ce type de résultats à une classe de domaines faiblement pseudoconvexes non bornés. Notre principal résultat est le suivant:

Théorème 1. *Soit $P(z,\overline{z})$ un polynôme sous-harmonique sans terme harmonique. Soit Ω un domaine de $\mathbf{C}^2$ défini par $\Omega =: \{(w,z) \in \mathbf{C}^2 : \operatorname{Re} w + P(z,\overline{z}) < 0\}$. Alors toute application holomorphe propre de Ω sur lui-même est un automorphisme.*

Le principe de base de la démonstration est analogue à celui utilisé par Y. Pan. Nous exploitons simultanément la finitude du type de la frontière et l'existence d'un groupe à un paramètre d'automorphismes du domaine afin de préciser la structure du lieu de branchement de l'application. Cependant, comme les domaines que nous considérons sont non bornés et présentent moins de symétries que les domaines de Reinhardt, de nouvelles difficultés surgissent. En particulier, il est impossible d'établir directement que le lieu de branchement possède au plus un nombre fini de composantes connexes. Ainsi, après avoir montré que le lieu de branchement est contenu dans une réunion dénombrable de droites complexes (partie 1), nous sommes amenés à analyser certains biholomorphismes locaux induits par l'application (partie 2), puis certaines applications holomorphes propres entre domaines rigides distincts (partie 3). Nous pouvons ensuite montrer que —génériquement— l'application est conjuguée par des automorphismes de $\mathbf{C}^2$ à une application de la forme $(w, h(z))$ où h est une fonction entière. Nous en déduisons que le nombre de composantes connexes du lieu de branchement est en fait majoré par le degré du polynôme P (partie 4). Pour mener à bien cette dernière partie de la démonstration, nous établisons le résultat suivant:

Théorème 2. *Soient Ω_1 et Ω_2 deux domaines de la forme $\Omega_j = \{(w,z) \in \mathbf{C}^2 : \operatorname{Re} w + P_j(z,\overline{z}) < 0\}$ où P_1 et P_2 sont des polynômes sous-harmoniques sans terme harmonique. Soit $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ une application holomorphe propre telle que:*

1) *$f = (f_1, f_2)$ se prolonge en un biholomorphisme local d'un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^2$ sur un autre.*
2) *$f_2(w, 0) \equiv 0$ et $f_1(0, 0) = 0$.*

L'un des trois cas suivants est alors satisfait:

i) $f_1(w,z) = \Gamma w$; $(\Gamma > 0)$ *et* $f_2(w,z) = f_2(z)$.

ii) $f_1(w,z) = \Gamma w$; $(\Gamma > 0)$ *et* $P_2(z,\overline{z}) = P_2(|z|,|z|)$.

iii) $f_1(w,z) = \frac{\Gamma w}{1+i\lambda w}$; $(\Gamma > 0, \lambda \in \mathbf{R}^*)$ *et* $P_2(z,\overline{z}) = M|z|^{2m}$ *avec* $M > 0$, $m \in \mathbf{N}^*$.

Dans la suite de cet article, $\mathcal{P}$ désignera l'ensemble des polynômes sousharmoniques sans terme harmonique sur $\mathbf{C}$.

1. La structure du lieu de branchement

L'objet de cette partie est d'établir la proposition suivante où l'on décrit le lieu de branchement des applications holomorphes propres du type de celles considérées dans cet article.

Proposition 1.1. *Soient Ω_1 et Ω_2 deux domaines de $\mathbf{C}^2$ de la forme:*

$$\Omega_j = \{(w,z) \in \mathbf{C}^2 : \mathrm{Re}\, w + P_j(z,\overline{z}) < 0\} \text{ où } P_1 \text{ et } P_2 \text{ appartiennent à } \mathcal{P}.$$

Pour toute application holomorphe propre de Ω_1 sur Ω_2, il existe une suite $(z_n)_n$ de nombres complexes telle que:

$$V_f = \cup_{n\in N}\{(w,z_n) : \mathrm{Re}\, w < -P_1(z_n,\overline{z}_n)\}.$$

La démonstration de cette proposition repose essentiellement sur les deux lemmes énoncés ci-dessous. Le premier précise la structure locale de $\overline{V}_f \cap b\Omega_1$. Le second exhibe des fonctions p.s.h. négatives de Ω_1 et Ω_2 qui permettront de déduire la structure de V_f de celle que $\overline{V}_f \cap b\Omega_1$.

Lemme 1.2. *Soit $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ une application holomorphe propre satisfaisant les hypothèses de la Proposition 1.1 et soit (w_0,z_0) un point de $b\Omega_1$.*

Si l'on a

$$(w_0,z_0) \in \overline{V}_f \cap b\Omega_1 \text{ et } \lim_{(w,z)\to(w_0,z_0)} [|f_1(w,z)| + |f_2(w,z)|] < +\infty$$

alors l'ensemble $\{(w,z_0)$ tel que $\mathrm{Re}\, w < -P_1(z_0,\overline{z}_0)\}$ est contenu dans V_f.

Lemme 1.3. *Soit $\Omega =: \{(w,z) \in \mathbf{C}^2 : \mathrm{Re}\, w + P(z,\overline{z}) < 0\}$ où $P \in \mathcal{P}$. Alors il existe une fonction p.s.h. $\sigma : \Omega \to]-\infty, 0[$, telle que $\lim_{(|w|+|z|)\to+\infty} \sigma(w,z) = -\infty$. De plus, pour toute suite de nombres complexes $(z_n)_{n\leq 1}$, tout $a \notin \{z_n; n > 1\}$ et tout $(w_a,a) \in \Omega$, la fonction σ peut être assujettie à satisfaire les conditions suivantes:*

1) $\sigma(w_a,a) \neq -\infty$.
2) $\forall\, n \geq 1$, $\forall\,(w_n,z_n) \in b\Omega$, $\lim_{(w,z)\to(w_n,z_n)} \sigma(w,z) = -\infty$.

(Dans ce cas la fonction σ prend ses valeurs dans $[-\infty, 0[$.

Preuve de la Proposition 1.1: Supposons V_f non vide. Soit

$$A = \{(w_0,z_0) \in \overline{V}_f \cap b\Omega_1 : \lim_{(w,z)\to(w_0,z_0)} [|f_1(w,z)| + |f_2(w,z)|] < +\infty\}$$

et A_2 la projection de A sur le plan de la variable z. Le Lemme 1.2 montre que A_2 est localement fini. En effet, si cela n'était pas, l'ensemble analytique V_f contiendrait une famille de demi-plans de la forme $\{(w, z_p) : \operatorname{Re} w < -P_1(z_p, \overline{z}_p)\}$, (z_p) étant convergente modulo extraction. Ces demi-plans s'accumuleraient nécessairement sur un demi-plan de la même forme. On en déduirait facilement que $V_f = \Omega_1$ ce qui est impossible. Ainsi A_2 est dénombrable et nous noterons $(z_n)_{n\geq 1}$ la suite ordonnée de ses éléments.

Soit $\mathcal{C}$ une composante connexe de V_f. Nous achèverons la démonstration en montrant que $\mathcal{C}$ coïncide avec un demi-plan de la forme $\{(w, z_n) : \operatorname{Re} w < -P_1(z_n, \overline{z}_n)\}$ où $z_n \in A_2$. Pour cela, procédons par l'absurde et supposons qu'il existe $(w_a, a) \in \mathcal{C}$ tel que $a \notin \{z_n, n \geq 1\}$.

Soit σ_1 une fonction p.s.h. et négative sur Ω_1 associée par le Lemme 1.3 à la suite $(z_n)_{n\geq 1}$ et au point (w_a, a). D'après le même lemme, il existe également une fonction σ_2, p.s.h. négative sur Ω_2 et telle que $\lim\limits_{(|w|+|z|)\to+\infty} \sigma_2(w,z) = -\infty$. Considérons alors la fonction $\tilde{\sigma}$ définie par $\tilde{\sigma} =: \exp(\sigma_1 + \sigma_2 \circ f)$. Cette fonction est p.s.h. sur Ω_1 et prend ses valeurs dans $[0,1]$. De plus, elle satisfait les propriétés suivantes:

1) $0 \leq \lim\limits_{\substack{(|w|+|z|)\to+\infty \\ (w,z)\in\mathcal{C}}} \tilde{\sigma}(w,z) \leq \lim\limits_{(|w|+|z|)\to+\infty} e^{\sigma_1(w,z)} = 0.$

2) Si $(w_n, z_n) \in \overline{\mathcal{C}} \cap b\Omega_1$ et $z_n \in A_2$ alors on a

$$0 \leq \lim_{\substack{(w,z)\to(w_n,z_n) \\ (w,z)\in\mathcal{C}}} \tilde{\sigma}(w,z) \leq \lim_{(w,z)\to+(w_n,z_n)} e^{\sigma_1(w,z)} = 0.$$

3) Si $(w_0, z_0) \in \overline{\mathcal{C}} \cap b\Omega_1$ et $z_0 \notin A_2$ alors par définition de A, on a: $\lim\limits_{(w,z)\to(w_0,z_0)} [|f_1(w,z)| + f_2(w,z)] = +\infty$ et donc

$$0 \leq \lim_{\substack{(w,z)\to(w_0,z_0) \\ (w,z)\in\mathcal{C}}} \tilde{\sigma}(w,z) \leq \lim_{(w,z)\to(w_0,z_0)} e^{\sigma_2\circ f(w,z)} = 0.$$

Il résulte des conditions 1), 2) et 3) et du principe du maximum que la restriction de $\tilde{\sigma}$ à $\mathcal{C}$ est identiquement nulle. Ceci est absurde puisque, par construction, $\tilde{\sigma}(w_a, a) > 0$. La preuve de la proposition est donc achevée. ■

Preuve du Lemme 1.3: Notons $2m$ le degré du polynôme P et posons

$$Q_{z_n}(z, \overline{z}) =: P(z + z_n, \overline{z} + \overline{z}_n) - 2\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2m} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j P}{\partial z^j}(z_n, \overline{z}_n) z^j - P(z_n, \overline{z}_n).$$

L'automorphisme de $\mathbf{C}^2$ défini par $\Phi_{z_n}(w,z) = (w',z')$ où $w' = w - 2\sum_{j=1}^{2m} \frac{\partial^j P}{\partial z^j}(z_n,\overline{z}_n)z^j - P(z_n,z_n)$ et $z' = z + z_n$ réalise un biholomorphisme du domaine $\Omega_{z_n} =: \{(w,z) : \operatorname{Re} w + Q_{z_n}(z,\overline{z}) < 0\}$ sur Ω.

Le polynôme Q_{z_n} étant sous-harmonique et sans terme harmonique, sa partie homogène de plus haut degré l'est également, nous la noterons H_{z_n}.

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on vérifie sans peine qu'il existe $a > 0$ tel que $H_{z_n}(z,\overline{z}) - Q_{z_n}(z,\overline{z}) < a + \varepsilon|z|^{2m}$ pour tout $z \in \mathbf{C}$. Ainsi $\overline{\Omega}_{z_n}$ est contenu dans un domaine D_{z_n} défini par:

$$D_{z_n} =: \{(w,z) : \operatorname{Re}(w-a) + H_{z_n}(z;\overline{z}) - \varepsilon|z|^{2m} < 0\}.$$

D'après E. Bedford et J. E. Fornaess ([**3**, Main Theorem]), il existe une fonction g_{z_n} holomorphe sur D_{z_n} et continue sur $\overline{D}_{z_n}$ satisfaisant les propriétés suivantes: pour $(w,z) \in \overline{D}_{z_n}$ et $N_n \in \mathbf{N}$ assez grand on a

i) $B_n(|w-a| + |z|^{2m}) \leq |g_{z_n}(w,z)|^{N_n} \leq A_n(|w-a| + |z|^{2m})$ où A_n et B_n sont des constantes strictement positives.

ii) $\arg g_{z_n}(w,z) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Soit g la fonction ainsi obtenue lorsque $z_n = 0$.

En posant $\sigma = \log\left|\frac{1}{K}\left[1 - \left(\frac{\alpha g - 1}{\alpha g + 1}\right)\right]\right|$ où $\alpha > 0$ est assez petit et $K > 0$ est assez grand, on obtient une fonction p.s.h. dans Ω prenant ses valeurs dans $]-\infty, 0[$ et telle que $\lim\limits_{(|w|+|z|)\to+\infty} \sigma(w,z) = -\infty$.

Nous terminons en modifiant la fonction σ de façon à obtenir une fonction p.s.h. négative sur Ω prenant la valeur $-\infty$ sur les droites complexes $\{z = z_n\}$.

Posons, à cet effet, $\tilde{h}_{z_n}(w,z) = \frac{B_n z^{2m}}{g_{z_n}^{N_n}(w,z)}$, on définit ainsi une fonction holomorphe de module strictement inférieur à 1 sur D_{z_n}. La fonction $h_{z_n} =: \tilde{h}_{z_n} \circ \Phi_{z_n}^{-1}$ est alors holomorphe au voisinage de $\overline{\Omega}$ et satisfait les propriétés suivantes:

i) $\forall\,(w,z) \in \overline{\Omega}$, $|h_{z_n}(w,z)| < 1$.

ii) $\forall\,(w,z) \in \overline{\Omega}$, on a $h_{z_n}(w,z) = 0$ si et seulement si $z = z_n$.

Choisissons une suite $\lambda_n > 0$ telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \log|h_{z_n}(w_a,a)| > -\infty$; alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \log|h_{z_n}(w,z)|$ définit une fonction p.s.h. négative sur Ω et la fonction

$$\sigma = \log\left|\frac{1}{K}\left[1 - \left(\frac{\alpha g - 1}{\alpha g + 1}\right)\right]\right| + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \log|h_{z_n}|$$

remplit les conditions requises. ■

Preuve du Lemme 1.2: Soit $((w_n,z_n))_{n\geq 1}$ une suite de points de Ω_1 qui converge vers un point (w_0,z_0) de $b\Omega_1$. Si $\underline{\lim}[|f_1(w_n,z_n)|+|f_2(w_n,z_n)|]<+\infty$ alors, l'application f étant propre, la suite $(f(w_n,z_n))_{n\geq 1}$ converge vers un point (w_0',z_0') de $b\Omega_2$ après une éventuelle extraction. Le bord de Ω_2 étant de type fini, un résultat de F. Berteloot [**6**] montre que l'application f se prolonge continûment à $\overline{\Omega}_1$ sur un voisinage de (w_0,z_0). Nous aurons également besoin de la différentiabilité du prolongement de f, celle-ci découle des résultats de [**5**].

Pour tout $p\in b\Omega_j$, $(j=1$ ou $2)$, on note $\tau(p)$ l'ordre d'annulation du déterminant de Levi de $b\Omega_j$ en p. Plus précisément, pour toute fonction ρ, définissante locale de $b\Omega_j$ en p, on pose $\Lambda_p=-\det\begin{bmatrix}0 & \rho_{\overline{z}_k}\\ \rho_{z_i} & \rho_{z_i\overline{z}_k}\end{bmatrix}$ et $\tau(p)$ est le plus petit entier m pour lequel existe un opérateur T, tangentiel au bord d'ordre m, tel que $T\Lambda_\rho(p)\neq 0$.

Ainsi, τ satisfait les propriétés suivantes (voir [**12**, page 291]):

1) τ est indépendant de la fonction définissante choisie.
2) τ est semi-continue supérieurement (s.c.s.).
3) τ est invariant par biholomorphisme.
4) $\forall\, p\in b\Omega$ on a $\tau(p)\geq\tau(f(p))$ et, en outre, $\tau(p)=\tau(f(p))$ si et seulement si $p\notin\overline{V}_f$.

On remarquera que lorsque Ω_j est un domaine défini par $\Omega_j=\{(w,z)\in\mathbf{C}^2$ tel que $\operatorname{Re} w+P_j(z\overline{z})<0\}$ où $P_j\in\mathcal{P}$ alors, pour tout $(w,z)\in b\Omega_j$, $\tau(w,z)$ n'est autre que l'ordre d'annulation du Laplacien de P_j au point z.

Nous sommes maintenant en mesure de terminer la preuve du lemme. Il suffit d'établir que $J_f(w_0+it,z_0)$ est identiquement nul au voisinage de $t=0$. Si cela n'était pas, on trouverait une suite $(t_n)_{n\in N}$ telle que $\lim_n t_n=0$ et $J_f(w_0+it_n,z_0)\neq 0$.

Pour tout $n\geq 1$, on aurait alors $\tau[f(w_0+it_n,z_0)]=\tau[(w_0+it_n,z_0)]=\tau(w_0,z_0)$ et τ étant s.c.s., $\tau(w_0,z_0)\leq\tau(f(w_0,z_0))$. Comme, par ailleurs, on a $\tau(f(w_0,z_0))\leq\tau(w_0,z_0)$, il en résulterait que $\tau(f(w_0,z_0))=\tau(w_0,z_0)$ et donc que $J_f(w_0,z_0)\neq 0$, ce qui est contraire aux hypothèses. ■

2. Étude de certains biholomorphismes locaux

Nous étudions ici les biholomorphismes locaux échangeant deux germes d'hypersurfaces analytiques réelles, rigides et de type finis. Nous supposons en outre que ces biholomorphismes préservent une droite complexe transverse aux hypersurfaces. La proposition suivante résume les résultats de cette partie.

Proposition 2.1. *Soit* $f = (f_1, f_2)$ *un biholomorphisme local d'un voisinage* V *de l'origine dans* $\mathbf{C}^2$ *sur un autre et tel que* $f_1(0,0) = 0$, $f_2(w,0) \equiv 0$.

Soient deux hypersurfaces H_1 *et* H_2 *définies par:*

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\rho_1(w,z) =: \operatorname{Re} w + \varphi(z,\overline{z}) = 0\}. \\ H_2 &= \{\rho_2(w,z) =: \operatorname{Re} w + \Psi(z,\overline{z}) = 0\}. \end{aligned}$$

où φ *et* Ψ *sont des fonctions analytiques réelles sous-harmoniques définies au voisinage de l'origine, telles que:* $\frac{\partial^k \varphi}{\partial z^k}(0,0) = 0$, $\frac{\partial^k \Psi}{\partial z^k}(0,0) = 0$ *pour tout* $k \geq 0$ *et* $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial \overline{z}}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \overline{z}}$ *s'annulent à un ordre fini en 0. On suppose que* $f(H_1 \cap V) \subset H_2$. *Alors:*

a) f_1 *ne dépend que de* w.

b) *Si, de plus,* $f_1(w) = \Gamma w$ $(\Gamma > 0)$ *alors:*
$f_* \left(i\frac{\partial}{\partial w}\right) = i\Gamma \frac{\partial}{\partial w} + B(z)\frac{\partial}{\partial z}$ *où* B *est une fonction holomorphe en* z *telle que* $B(0) = 0$ *et* $B'(0) = i\beta$, $\beta \in \mathbf{R}$. *La fonction* B *est identiquement nulle, si et seulement si* $B'(0) = 0$.

Preuve de a): Notons u et v les parties réelles et imaginaires de la variable w. Soit $A(v,z) =: (-\varphi(z) + iv, z)$ un paramétrage de H_1. Le champ de vecteurs L défini par $L =: -\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial w} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}$ est tangent à H_1 et donc $L(\rho_2 \circ f) \equiv 0$ sur $H_1 \cap V$. En posant $g(w,z) = \frac{\partial}{\partial w}(\rho_2 \circ f) = \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial w}(\Psi \circ f_2)$, on obtient:

$$(1) \quad \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \cdot (g \circ A) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial z} \circ A + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \circ (f_2 \circ A) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial z} \circ A\right] \equiv 0$$

au voisinage de $v = 0$, $z = 0$.

La démonstration consiste à dériver (1) par rapport à z à un ordre arbitraire.

Començons par quelques préliminaires. En observant que, d'après la définition de A, l'on a

$$\frac{\partial}{\partial z}(\overline{f}_2 \circ A) = -\left(\frac{\partial \overline{f}_2}{\partial \overline{w}} \circ A\right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial z}(f_2 \circ A) = -\left(\frac{\partial f_2}{\partial w} \circ A\right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial z} \circ A\right)$$

on obtient

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^j\Psi}{\partial z^j}\circ(f_2\circ A)\right]=\left[\frac{\partial^{j+1}\Psi}{\partial z^{j+1}}\circ(f_2\circ A)\right]\left[\frac{\partial f_2}{\partial z}\circ A\right] \tag{2}$$
$$-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial w}\circ A\right)\cdot\frac{\partial^{j+1}\Psi}{\partial z^{j+1}}\circ(f_2\circ A)+\left(\frac{\partial\overline{f}_2}{\partial\overline{w}}\circ A\right)\frac{\partial^{j+1}\Psi}{\partial\overline{z}\partial z^j}\circ(f_2\circ A)\right].$$

On montre maintenant par récurrence que

$$\frac{\partial^k}{\partial z^k}\left[\frac{\partial\Psi}{\partial z}\circ(f_2\circ A)\right]=\left[\frac{\partial^{k+1}\Psi}{\partial z^{k+1}}\circ(f_2\circ A)\right]\left[\frac{\partial f_2}{\partial z}\circ A\right]^k \tag{3}$$
$$+\sum_{j=1}^{k}\left[g_j\left(\frac{\partial^j\Psi}{\partial z^j}\circ(f_2\circ A)\right)+h_j\frac{\partial^j\varphi}{\partial z^j}\right].$$

Les fonctions g_j et h_j sont analytiques réelles au voisinage de $(0,0)$ mais nous ne cherchons pas à les expliciter.

Pour $k=1$, il s'agit de la formule (2) avec $j=1$ et $g_1\equiv 0$. En utilisant (2), on voit immédiatement que

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\sum_{j=1}^{k}g_j\left(\frac{\partial^j\Psi}{\partial z^j}\circ(f_2\circ A)\right)+h_j\frac{\partial^j\varphi}{\partial z^j}\right]$$
$$=\sum_{j=1}^{k+1}\tilde{g}_j\left(\frac{\partial^j\Psi}{\partial z^j}\circ(f_2\circ A)\right)+\tilde{h}_j\frac{\partial^j\varphi}{\partial z^j}.$$

Il reste donc à noter que:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\left[\frac{\partial^{k+1}\Psi}{\partial z^{k+1}}\circ(f_2\circ A)\right]\left[\frac{\partial f_2}{\partial z}\circ A\right]^k\right\}$$
$$=\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^{k+1}\Psi}{\partial z^{k+1}}\circ(f_2\circ A)\right)\right]\left[\frac{\partial f_2}{\partial z}\circ A\right]^k$$
$$+\left[\frac{\partial^{k+1}\Psi}{\partial z^{k+1}}\circ(f_2\circ A)\right]\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\circ A\right)^k\right].$$

D'autre part, une récurrence immédiate donne:

$$\frac{\partial^k}{\partial z^k}\left[\frac{\partial f_1}{\partial z}\circ A\right]=\left(\frac{\partial^{k+1}f_1}{\partial z^{k+1}}\circ A\right)+\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial^j\varphi}{\partial z^j}\right)l_j. \tag{4}$$

Là encore, les l_j sont des fonctions que nous n'explicitons pas. En utilisant l'hypothèse $f_2(w,0) \equiv 0$, on tire de (3) et (4):

$$\frac{\partial^k}{\partial z^k}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial z} \circ (f_2 \circ A)\right](iv,0) \equiv 0, \text{ pour } k \geq 0; \tag{5}$$

$$\frac{\partial^k}{\partial z^k}\left[\frac{\partial f_1}{\partial z} \circ A\right](iv,0) = \frac{\partial^{k+1} f_1}{\partial z^{k+1}}(iv,0), \text{ pour } k \geq 0; \tag{6}$$

En appliquant $\frac{\partial^k}{\partial z^k}$ à l'équation (1) et en tenant compte de (5), (6), on trouve alors $\frac{\partial^{k+1} f_1}{\partial z^{k+1}}(iv,0) \equiv 0$ pour $k \geq 0$, ce qui établit a).

Passons maintenant à la preuve de b).

Preuve de b): Nous utiliserons des champs de vecteurs holomorphes tangents aux hypersurfaces H_j, ce qui désignera ici des champs de la forme $a(w,z)\frac{\partial}{\partial w}+b(w,z)\frac{\partial}{\partial z}$ où les fonctions a, b sont holomorphes et dont les parties réelles sont des champs tangents au sens usuel. Rappelons que cette classe de champs de vecteurs est stable par image directe par un biholomorphisme ainsi que par crochet de Lie. La proposition suivante, extraite de [**4**], sera utile à la démonstration. Pour la commodité de lecteur, nous en donnerons la preuve à la fin de cette partie.

Proposition 2.2. *Soit $\vec{X} = h(w,z)\frac{\partial}{\partial z}$ un champ de vecteur holomorphe tangent à H_2 défini au voisinage de l'origine et non identiquement nul. Alors la partie homogène de plus bas degré de h en z est égale à $i\beta z$ ($\beta \in \mathbf{R}^*$) et celle de Ψ à $M|z|^{2m}$, avec $M > 0$ et $m \in \mathbf{N}^*$.*

Notons $f(w,z) =: (\Gamma w, f_2(w,z))$ et considérons le champ de vecteur holomorphe tangent à H_2 c'est-à-dire $f_*\left(i\frac{\partial}{\partial w}\right) =: A(w,z)\frac{\partial}{\partial w} + B(w,z)\frac{\partial}{\partial z}$.

On a $\left[f_*\left(i\frac{\partial}{\partial w}\right)\right]_{f(w,z)} = i\frac{\partial f_1}{\partial w}\frac{\partial}{\partial w} + i\frac{\partial f_2}{\partial w}\frac{\partial}{\partial z}$ d'où

$$B(\Gamma w, f_2(w,z)) = i\frac{\partial f_2}{\partial w}(w,z) \text{ et } A \equiv i\Gamma. \tag{7}$$

Puisque $\Gamma i\frac{\partial}{\partial w}$ est tangent à H_2, $B(w,z)\frac{\partial}{\partial z}$ l'est également.

Supposons B non identiquement nul. Alors en appliquant la Proposition 2.2 aux champs $B(w,z)\frac{\partial}{\partial z}$ et $\left[i\frac{\partial}{\partial w}, B(w,z)\frac{\partial}{\partial z}\right] = i\frac{\partial B}{\partial w}\frac{\partial}{\partial z}$, on voit que le développement de B est de la forme suivante:

$$B(w,z) = \left(i\beta z + \sum_{k\geq 2} b_k^0 z^k\right) + \alpha w\left(z + \sum_{k\geq 2} b_k^1 z^k\right) + \sum_{q\geq 2} c_q w^q \left(z + \sum_{k\geq 2} b_k^q z^k\right), \tag{8}$$

où β et α sont des réels qui ne sont respectivement nuls que si $B \equiv 0$ ou $\frac{\partial B}{\partial w} \equiv 0$.

Ecrivons le développement de $f_2(w,z)$ sous la forme suivante

$$f_2(w,z) = \left(az + \sum_{k\geq 2} a_k^0 z^k\right) + w\left(bz + \sum_{k\geq 2} a_k^1 z^k\right) + w^2\left(cz + \sum_{k\geq 2} a_k^2 z^k\right) + \sum_{q\geq 3} w^q\left(d_q z + \sum_{k\geq 2} a_k^q z^k\right). \tag{9}$$

En identifiant les termes en z puis en wz dans chacun des deux membres de (7), on obtient: $ib = i\beta a$ et $2ic = i\beta b + \alpha\Gamma a$ puis donc $b = \beta a$ et $c = \gamma a$, où $\gamma = \frac{1}{2}(\beta^2 - i\alpha\Gamma)$.

Traduisons maintenant l'inclusion $f(H_1) \subset H_2$:

$$\Psi[f_2(-\varphi + iv, z)] \equiv \Gamma\varphi(z,\overline{z}). \tag{10}$$

Les termes de degré 1 en z dans $f_2(-\varphi + iv, z)$ proviennent de:

$$az + b(-\varphi + iv)z + c(-\varphi + iv)^2 z + \sum_{q\geq 3} d_q(-\varphi + iv)^q z.$$

La partie de degré 1 en z dans $f_2(-\varphi + iv, z)$ est donc égale à: $az(1 + \beta iv - \gamma v^2 + o(v^2))$.

D'après la Proposition 2.2, la partie homogène de plus bas degré dans Ψ est égale à $B|z|^{2m}$ $(B > 0)$. Par symétrie, celle de φ est égale à $A|z|^{2m}$ $(A > 0)$. L'identité des termes de degré $2m$ en z dans (10) donne alors:

$$B|a|^{2m}|z|^{2m}|1 + \beta iv - \gamma v^2 + o(v^2)|^{2m} \equiv \Gamma A|z|^{2m},$$

d'où:

$$|1 + \beta iv - \gamma v^2 + o(v^2)|^2 \equiv 1,$$

et donc: $(\beta^2 - 2\gamma)v^2 + o(v^2) = i\alpha\Gamma v^2 + o(v^2) \equiv 0$.

Il s'ensuit que $\alpha = 0$ et donc $\frac{\partial B}{\partial w} \equiv 0$. Ceci achève la preuve de la Proposition 2.1. ■

Nous terminons cette partie en donnant la démonstration de la Proposition 2.2. Cette dernière résulte du lemme technique suivant:

Lemme 2.3. *Soit $Q(z,\overline{z})$ un polynôme à valeurs réelles homogène de degré $2m$, sans terme harmonique, et soit $(\lambda,k)\in\mathbf{R}\times\mathbf{N}$.*

1) *Si* $\operatorname{Im}\left(z^k\frac{\partial Q}{\partial z}\right)=\lambda\operatorname{Re}\left(z^k\frac{\partial Q}{\partial z}\right)$*; alors:*
   - *i) Si $k=1$, on a $Q=M|z|^{2m}$ $(M>0)$ et $\lambda=0$.*
   - *ii) Si $k\neq 1$ on a $Q\equiv 0$.*

2) *Si* $\operatorname{Re}\left(z^k\frac{\partial Q}{\partial z}\right)=0$*, alors $Q=0$.*

Començons par la preuve du Lemme 2.3.

Preuve du Lemme 2.3: Notons:

$$Q=\sum_{\substack{p+q=2m\\ p,q\geq 1}}A_{pq}z^p\overline{z}^p \text{ et } Q_1=\frac{\partial Q}{\partial z}.$$

On a alors, en posant $l=k-1$,

$$z^kQ_1=\sum_{\substack{p+q=2m\\ p,q\geq 1}}pA_{pq}z^{p+l}\overline{z}^q$$

et

$$\overline{z}^k\overline{Q}_1=\sum_{\substack{p+q=2m\\ p,q\geq 1}}qA_{pq}z^p\overline{z}^{q+l}.$$

On a, par hypothèse:

$$\frac{1}{2i}(z^kQ_1-\overline{z}^k\overline{Q}_1)=\frac{\lambda}{2}(z^kQ_1+\overline{z}^k\overline{Q}_1)$$

ou encore:

$$\sum_{\substack{p+q=2m\\ p,q\geq 1}}p(1-\lambda i)A_{pq}z^{p+l}\overline{z}^q=\sum_{\substack{p+q=2m\\ p,q\geq 1}}q(1+\lambda i)A_{pq}z^p\overline{z}^{q+l}. \tag{11}$$

Lorsque $k\neq 1$ (i.e. $l\neq 0$), on voit directement sur (11) que $Q\equiv 0$. En effet, si $p_0=\min\{p\in[1,2m-1]$ tels que $A_{p,q}\neq 0,\ q+p=2m\}$ alors les termes de plus petit degré en z de chacun de deux membres de (11) sont respectivement égaux à $p_0(1-\lambda i)A_{p_0q_0}z^{p_0+l}\overline{z}^{q_0}$ et $q_0(1+\lambda i)A_{p_0q_0}z^{p_0}\overline{z}^{q_0+l}$; où $q_0=2m-p_0$.

Lorsque $k=1$ (i.e. $l=0$) (11) devient:

$$\sum_{\substack{p+q=2\\ p,q\geq 1}}[p(1-\lambda i)-q(1+\lambda i)]A_{pq}z^p\overline{z}^q\equiv 0,$$

d'où $A_{pq} = 0$ pour $p \neq q$ et, si $Q \not\equiv 0$, $\lambda = 0$.

Ceci établit la première assertion. La seconde s'obtient de façon analogue. ■

Preuve de la Proposition 2.2: Soit Q la partie homogène de plus bas degré dans le développement de Ψ au voisinage de l'origine. En vertu des hypothèses sur Ψ, $Q(z, \overline{z})$ est un polynême de degré $2m$ sous-harmonique et sans terme harmonique.

Donnons à w (et $\overline{w}$) le poids $2m$ et à z (et $\overline{z}$) le poids 1. Ainsi le poids d'un monôme $\omega^{k_1}\overline{w}^{k_2}z^{q_1}\overline{z}^{q_2}$ est égal à $(k_1 + k_2)2m + (q_1 + q_2)$.

Soit $B(w, z)$ la partie homogène de plus bas poids dans le développement de h au voisinage de $(0, 0)$. Le champ $h(w, z)\frac{\partial}{\partial z}$ est holomorphe tangent à H_2 c'est-à-dire:

$$\mathrm{Re}\left[h(-\Psi(z, \overline{z}) + iv, z)\frac{\partial \Psi}{\partial z}(z, \overline{z})\right] \equiv 0. \tag{13}$$

En notant $Q_1 = \frac{\partial Q}{\partial z}$, et en collectant les termes de plus bas degré en z dans (13), on obtient:

$$\mathrm{Re}[B(-Q + iv, z)Q_1] \equiv 0. \tag{14}$$

Supposons que B soit de poids q où $q \in \{0, \ldots, 2m - 1\}$. On a donc $B(w, z) = \gamma z^q$ où $\gamma = \alpha + i\beta \neq 0$ et (14) donne: $\alpha\,\mathrm{Re}(z^q Q_1) = \beta\,\mathrm{Im}(z^q Q_1)$. Le Lemme 2.3 montre alors que $q = 1$, $\alpha = 0$ et $Q = M|z|^{2m}$.

Si maintenant B est de degré $q \geq 2m$, on a $B(w, z) = b_0 z^q + b_1 w z^{q-2m} + \cdots + b_s w^s z^{q-2ms}$ l'équation (14) devient:

$$\mathrm{Re}[Q_1(b_0 z^q + b_1 z^{q-2m}(-Q + iv) + \cdots + b_s z^{q-2ms}(-Q + iv)^s)] \equiv 0. \tag{15}$$

Supposons d'abord $s > 0$, en derivant s fois l'équation (15) par rapport à v, on obtient:

$$\mathrm{Re}[b_s! i^s z^{q-2ms} Q_1] \equiv 0$$

et le Lemme 2.3 montre que:

$$Q = M|z|^{2m}; q = 2ms + 1 \text{ et } b_s s! i^s = i\lambda, \text{ où } \lambda \in \mathbf{R}^*. \tag{16}$$

Dérivons maintenant $(s - 1)$ fois l'équation (15) par rapport à v, on obtient:

$$\mathrm{Re}\left\{\left[b_{s-1} i^{s-1}(s-1)! z^{q-2m(s-1)} + b_s i^{s-1} s!(-Q + iv) z^{q-2ms}\right] Q_1\right\} \equiv 0$$

d'où, en tenant compte de (16):

$$\mathrm{Re}[b_{s-1} i^{s-1}(s-1)! z^{2m}(mM|z|^{2m}) - \lambda m M^2 |z|^{4m} + \lambda iv(mM|z|^{2m})] \equiv 0.$$

On a alors $\lambda m \cdot M^2 = 0$, ce qui est absurde puisque $b_s \neq 0$. Lorsque $s = 0$, la contradiction découle immédiatement du Lemme 2.3. Ceci termine la preuve de la Proposition 2.2. ■

3. Applications holomorphes propres entre domaines polynomiaux rigides et fixant une droite complexe

Dans cette partie, nous étudions la forme des applications holomorphes propres entre deux domaines polynomiaux rigides de $\mathbf{C}^2$ qui fixent une droite de la forme $\{z = \text{cte}\}$ non contenue dans le lieu de branchement. Nous établisons la proposition suivante.

Proposition 3.1. *Soient Ω_1 et Ω_2 deux domaines de la forme: $\Omega_j = \{(w,z) \in \mathbf{C}^2 : \operatorname{Re} w + P_j(z,\overline{z}) < 0\}$ où P_1 et P_2 appartiennent à $\mathcal{P}$.*

Soit $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ une application holomorphe propre telle que:

1) *$f = (f_1, f_2)$ se prolonge en un biholomorphisme local d'un voisinage U_1 de l'origine de $\mathbf{C}^2$ sur un autre, noté U_2.*
2) *$f_2(w,0) \equiv 0$ et $f_1(0,0) = 0$.*

Alors l'une des trois possibilités suivantes est vérifiée:

i) *$f_1(w,z) = \Gamma w$; $(\Gamma > 0)$ et $f_2(w,z) = f_2(z)$.*
ii) *$f_1(w,z) = \Gamma w$; $(\Gamma > 0)$ et $P_2(z,\overline{z}) = P_2(|z|,|z|)$.*
iii) *$f_1(w,z) = \frac{\Gamma w}{1+i\lambda w}$; $(\Gamma > 0$ et $\lambda \in \mathbf{R}^*)$ et $P_2(z,\overline{z}) = M|z|^{2m} + Q$ avec $M > 0$, $m \in \mathbf{N}^*$ et $Q \equiv 0$ ou Q ne contient que des termes de degré $> 2m$.*

On améliorera le contenu de cette proposition en établisant le Théorème 2 (cf. Section 4).

Dans cette partie, nous adoptons les notations suivantes:

Soit $P(z,\overline{z}) \in \mathcal{P}$, $P(z,\overline{z})$ peut s'écrire sous la forme $P(z,\overline{z}) = \sum_{l=m}^{N} |z|^{2l} \operatorname{Re} V_l(z)$ où $V_l(z) = \sum_{j=0}^{N_l} \alpha_{jl} z^j$. Notons alors

$$V(z) =: V_m(z).$$
$$V^*(z) =: V(z) - V(0).$$
$$W(z) =: z\frac{\partial V}{\partial z}(z).$$

Lorsque la partie homogène de plus bas degré de P n'est pas équilibrée (et donc $\operatorname{Re} V(0) = 0$) on dira que $P \in \tilde{\mathcal{P}}$, "est équilibrée" veut dire "est de la forme $M|z|^{2m}$, $M \in \mathbf{R}^*$, $m \in \mathbf{N}^*$".

La proposition résultera des deux lemmes techniques suivants:

Lemme 3.2. *Soient $\gamma \in \mathbf{R}$, $P(z,\overline{z}) \in \mathcal{P}$ et $A(z)$ une fonction holomorphe nulle à l'origine.*

Si les termes de la forme $|z|^{2m}z^p$ *ou* $|z|^{2m}\overline{z}^q$ *où* $(p,q\geq 0)$ *sont identiquement nuls dans l'expression*

$$(*)\qquad -\gamma P(z,\overline{z})+\operatorname{Re}\left(A(z)\cdot\frac{\partial P}{\partial z}(z,\overline{z})\right),$$

on a alors:

$$A(z)=z\frac{(2\gamma-m\overline{a})V^*(z)+2m\cdot a\operatorname{Re}V(0)}{W(z)+m(V^*(z)+2\operatorname{Re}V(0))},\ \textit{avec } a=A'(0).$$

Lemme 3.3. *Soit* $f:\Omega_1\to\Omega_2$ *une application holomorphe propre satisfaisant les hypothèses de la Proposition 3.1 et soit* $\vec{X}=f_*\left(i\frac{\partial}{\partial w}\right)$.

Supposons que sur un voisinage U_2 *de l'origine le champ* $\vec{X}$ *soit donné par:* $\vec{X}_{(w,z)}=:A(w)\frac{\partial}{\partial w}+B(z)(aw+b)\frac{\partial}{\partial z}$, *où* $(a,b)\in\mathbf{C}^2$, *A étant une fonction entière et B une fraction rationnelle. Alors B est un polynôme holomorphe.*

Ces deux lemmes seront démontrés ultérieurement.

Preuve de la Proposition 3.1: Començons par montrer que f_1 est de la forme générale $f_1=\frac{\Gamma w}{1+i\lambda w}$ où $\Gamma>0$ et $\lambda\in\mathbf{R}$. D'après la Proposition 2.1, on a $f_1(w,z)=f_1(w)$. Notons $D=:\{w\in\mathbf{C}:\operatorname{Re}w<0\}$; f étant un biholomorphisme local au voisinage de l'origine, d'après la Proposition 1.1, on a $J_f(w,0)\neq 0$ pour tout $w\in D$. Donc f_1 est un biholomorphisme local sur D. D'autre part, f_1 est une application holomorphe propre de D sur lui-même et donc f_1 est un revêtement fini de D sur lui-même. Comme D est simplement connexe, f_1 est donc un automorphisme de D. Il s'ensuit que $f_1(w)=\frac{\Gamma w}{1+i\lambda w}$ où $\Gamma>0$ et $\lambda\in\mathbf{R}$ puisque $f_1(0)=0$.

Passons maintenant à la preuve de i) et ii). D'après ce qui précède, si $\lambda=0$, on a $f_1(w)=\Gamma w$, $(\Gamma>0)$. Notons dans ce cas $f=(\Gamma w,f_2(w,z))$ et considérons le champ $f_*\left(i\frac{\partial}{\partial w}\right)$. C'est un champ de vecteurs holomorphe défini sur U_2 et tangent à $b\Omega_2$. D'après la Proposition 2.1, $f_*\left(i\frac{\partial}{\partial w}\right)$ est de la forme $\left[f_*\left(i\frac{\partial}{\partial w}\right)\right]_{(w,z)}=i\Gamma\frac{\partial}{\partial w}+B(z)\frac{\partial}{\partial z}$, où B est une fonction holomorphe dans un voisinage de l'origine, et on a $B(z)=i\beta z+\cdots+(\beta\in\mathbf{R})$ avec $\beta\neq 0$ si et seulement si $B\not\equiv 0$.

D'autre part, on a $\left[f_*\left(i\frac{\partial}{\partial w}\right)\right]_{f(w,z)}=i\Gamma\frac{\partial}{\partial w}+i\frac{\partial f_2}{\partial w}(w,z)\frac{\partial}{\partial z}$, d'où $(B\circ f_2)(w,z)=i\frac{\partial f_2}{\partial w}(w,z)$.

Si $B\equiv 0$, alors $\frac{\partial f_2}{\partial w}(w,z)\equiv 0$ et $f_2(w,z)=f_2(z)$ ce qui correspond au cas i). Supposons maintenant $B\not\equiv 0$. Puisque $i\Gamma\frac{\partial}{\partial w}$ est tangent à $b\Omega_2$, $B(z)\frac{\partial}{\partial z}$ l'est également.

Cela se traduit par: $\operatorname{Re}\big(B(z)\frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{Re} w + P_2(z,\overline{z}))\big) = 0$ pour tout (w,z) tel que $\operatorname{Re} w + P_2(z,\overline{z}) = 0$ ou encore par:

$$\operatorname{Re}\left[B(z)\cdot\frac{\partial P_2}{\partial z}(z,\overline{z})\right] = 0, \tag{1}$$

pour z assez voisin de l'origine.

D'après le Lemme 3.2, on a alors,

$$B(z) = i\beta m z\frac{V^*(z) + 2\operatorname{Re} V(0)}{W(z) + m(V^*(z) + 2\operatorname{Re} V(0))}.$$

Or, d'après le Lemme 3.3, B est un polynôme et, comme $d^0 V^* = d^0 W$, on a $B(z) = i\beta z$, $\beta \in \mathbf{R}^*$.

L'équation (1) devient $\operatorname{Re}\left[i\beta z\cdot\frac{\partial P_2}{\partial z}(z,\overline{z})\right] = 0$, ce qui entraîne $P_2(z,\overline{z}) = P_2(|z|,|z|)$ puisque

$$\operatorname{Re}\left[i\beta z\frac{\partial}{\partial z}\sum_{p,q\geq 1} A_{pq}z^p\overline{z}^q\right] = \frac{i\beta}{2}\sum_{p,q\geq 1} A_{pq}(p-q)z^p\overline{z}^q.$$

Pour la preuve de iii), nous allons montrer que si $\lambda \neq 0$, alors $P_2(z,\overline{z})$ n'appartient pas à $\tilde{\mathcal{P}}$. Nous procédons par l'absurde et supposons que $P_2(z,\overline{z}) \in \tilde{\mathcal{P}}$. Rappelons qu'au voisinage de l'origine, on a

$$\begin{aligned} f(w,z) &= (f_1(w), f_2(w,z) \\ f^{-1}(w,z) &= (F_1(w), F_2(w,z)) \end{aligned}$$

avec $f_1(w) = \frac{\Gamma w}{1+i\lambda w}$ et $F_1(w) = \frac{w}{\Gamma - i\lambda w}$.

Considérons le champ de vecteurs holomorphe

$$\vec{X} = f_*\left(i\frac{\partial}{\partial w}\right) =: A(w,z)\frac{\partial}{\partial w} + B(w,z)\frac{\partial}{\partial z}.$$

On a

$$\vec{X}_{f(w,z)} = i\frac{\partial f_1}{\partial w}\frac{\partial}{\partial w} + i\frac{\partial f_2}{\partial w}\frac{\partial}{\partial z}$$

d'où $A(w,z) = i\left(\frac{\partial f_1}{\partial w}\circ F\right)(w) = \frac{i}{\Gamma}(\Gamma - i\lambda w)^2$. Les champs $\vec{X}$ et $i\frac{\partial}{\partial w}$ sont holomorphes tangents (dans le sens évoqué juste avant la Proposition 2.2) à $b\Omega_2$ donc les crochets de Lie $\left[\vec{X}, i\frac{\partial}{\partial w}\right]$ et $\left[\left[\vec{X}, i\frac{\partial}{\partial w}\right], i\frac{\partial}{\partial w}\right]$ le sont également.

Or, on a
$$\left[\vec{X}, i\frac{\partial}{\partial w}\right] = 2\frac{\lambda i}{\Gamma}(\Gamma - \lambda i w)\frac{\partial}{\partial w} + i\frac{\partial B}{\partial w}\frac{\partial}{\partial z}$$
et
$$\left[\left[\vec{X}, i\frac{\partial}{\partial w}\right], i\frac{\partial}{\partial w}\right] = 2\frac{\lambda^2 i}{\Gamma}\frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial^2 B}{\partial w^2}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Puisque $2i\frac{\lambda^2}{\Gamma}\frac{\partial}{\partial w}$ est tangent à $b\Omega_2$, $\frac{\partial^2 B}{\partial w^2}\frac{\partial}{\partial z}$ l'est également. Comme par hypothèses, $P_2 \in \tilde{\mathcal{P}}$, la Proposition 2.2 montre alors que $\frac{\partial^2 B}{\partial w^2} \equiv 0$. On a ainsi:

$B(w,z) = A_1(z)\cdot w + A_0(z)$ où A_0 et A_1 sont deux fonctions holomorphes au voisinage de l'origine.

Le champ $\vec{X}$ étant holomorphe tangent à $b\Omega_2$, on a:

$\mathrm{Re}(\vec{X}(\mathrm{Re}\, w + P_2(z,\overline{z}))) \equiv 0$ pour tout (w,z) tel que $\mathrm{Re}\, w + P_2(z,\overline{z}) = 0$ c'est-à-dire $\mathrm{Re}\left[\frac{i}{2\Gamma}(\Gamma - i\lambda w)^2 + (A_1(z)\cdot w + A_0(z))\frac{\partial P_2}{\partial z}(z,\overline{z})\right] \equiv 0$ pour $w = -P_2(z,\overline{z}) + iv$, (z,v) variant dans un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbf{C}\times\mathbf{R}$. Cela se traduit par:

$$(1)\quad v\left(-\frac{\lambda^2}{\Gamma}P_2(z,\overline{z}) + \mathrm{Re}\left[iA_1(z)\cdot\frac{\partial P_2}{\partial z}(z,\overline{z})\right]\right) - \lambda P_2(z,\overline{z}) + \mathrm{Re}\left[(A_0(z) - A_1(z)P_2(z,\overline{z}))\frac{\partial P_2}{\partial z}(z,\overline{z})\right] \equiv 0$$

et l'on en déduit:

$$(2)\qquad -\frac{\lambda^2}{\Gamma}P_2(z,\overline{z}) + \mathrm{Re}\left[iA_1(z)\cdot\frac{\partial P_2}{\partial z}(z,\overline{z})\right] \equiv 0$$

et

$$(3)\qquad -\lambda P_2(z,\overline{z}) + \mathrm{Re}\left[(A_0(z) - A_1(z)P_2(z,\overline{z}))\frac{\partial P_2}{\partial z}(z,\overline{z})\right] \equiv 0.$$

Désignons par $H_{2m}(z,\overline{z})$ la partie homogène de plus bas degré dans $P_2(z,\overline{z})$. De (2), on tire: $\mathrm{Re}\left[iA_1(0)\frac{\partial H_{2m}}{\partial z}(z,\overline{z})\right] \equiv 0$. Ceci, d'après le Lemme 2.3, entraîne $A_1(0) = 0$. On peut alors appliquer le Lemme 3.2 à l'équation (2) et en déduire que:

$$(4)\qquad A_1(z) = -i\left(\frac{2\lambda^2}{\Gamma} + im\overline{a}_1\right)z\cdot\frac{V^*(z)}{W(z) + mV^*(z)} \text{ où } a_1 = A_1'(0)$$

(on a utilisé le fait que $\mathrm{Re}\, V(0) = 0$ puisque $P_2 \in \tilde{\mathcal{P}}$).

D'autre part, $B(f_1(w), f_2(w,z)) = i\frac{\partial f_2}{\partial w}(w,z)$ donc $B(0,0) = 0$ puisque $f_2(w,0) \equiv 0$ et $f_1(0) = 0$. On a donc $A_0(0) = 0$. En observant que les termes de la forme $|z|^{2m} z^p$ ou $|z|^{2m}\overline{z}^q$ du membre gauche de (3) ne peuvent provenir que de $-\lambda P_2(z,\overline{z}) + \operatorname{Re}\left[A_0(z)\frac{\partial P_2}{\partial z}(z,\overline{z})\right]$, on peut à nouveau utiliser le Lemme 3.2 et obtenir

$$(5) \qquad A_0(z) = (2\lambda - m\overline{a}_0) z \frac{V^*(z)}{W(z) + mV^*(z)} \text{ où } a_0 = A_0'(0).$$

En définitive $f_*\left(i\frac{\partial}{\partial w}\right)$ est donné par:

$$(6) \qquad f_*\left(i\frac{\partial}{\partial w}\right) = \frac{i}{\Gamma}(\Gamma - \lambda i w)^2 \frac{\partial}{\partial w} + (aw+b) z \frac{V^*(z)}{W(z)+mV^*(z)} \frac{\partial}{\partial z}$$

où a et b sont des constantes complexes. Nous pouvons donc appliquer le Lemme 3.3 et en déduire que $z\frac{V^*(z)}{W(z)+mV^*(z)}$ est un polynôme holomorphe. Comme V^* et W ont même degré, ce polynôme est de la forme αz, $\alpha \in \mathbf{C}$. De (4) et (5), on tire alors:

$$(7) \qquad A_0(z) = a_0 z \text{ et } A_1(z) = a_1 z.$$

Pour terminer, nous revenons à l'identité (2). Tenant compte de (7), on a:

$$(8) \qquad -\frac{\lambda^2}{\Gamma} P_2(z,\overline{z}) + \operatorname{Re}\left[i a_1 z \frac{\partial P_2}{\partial z}(z,\overline{z})\right] \equiv 0.$$

Posons $P_2(z,\overline{z}) = \sum_{p,q\geq 1} A_{pq} z^p \overline{z}^q$; en reportant dans (8), on obtient:

$$(9) \qquad \sum_{p,q\geq 1} A_{pq}\left[-2\frac{\lambda^2}{\Gamma} - (p+q)\operatorname{Im} a_1 + i(p-q)\operatorname{Re} a_1\right] z^p\overline{z}^q \equiv 0.$$

Comme $\lambda \neq 0$ par hypothèse, on obtient facilement de (9) que P_2 est homogène c'est-à-dire $P_2 = H_{2m}$. Tenant compte de (7), l'identité (3) devient alors

$$(10) \qquad -\lambda H_{2m}(z,\overline{z}) + \operatorname{Re}\left[z(a_0 - a_1 H_{2m}(z,\overline{z})) \frac{\partial H_{2m}}{\partial z}(z,\overline{z})\right] \equiv 0.$$

On en déduit que:

$$(11) \qquad -\lambda H_{2m}(z,\overline{z}) + \operatorname{Re}\left(a_0 z \frac{\partial H_{2m}}{\partial z}(z,\overline{z})\right) \equiv 0$$

et

$$H_{2m}(z,\overline{z})\operatorname{Re}\left(a_1 z\frac{\partial H_{2m}}{\partial z}(z,\overline{z})\right)\equiv 0. \tag{12}$$

D'après le Lemme 2.3, (12) force H_{2m} a être équilibré. Ce qui est absurde. ■

Preuve du Lemme 3.2: On pose

$$A(z)=z(a+S(z)) \text{ où } S(z)=\sum_{k=2}^{+\infty}a_k z^{k-1}.$$

En tenant compte des notations adoptées, les termes de la forme $|z|^{2m}z^p$ ou $|z|^{2m}\overline{z}^q$ $(p,q\geq 0)$ dans $(*)$ ne peuvent provenir que de:

$$-\gamma(|z|^{2m}\operatorname{Re}V(z))+\operatorname{Re}\left[A(z)\cdot\frac{\partial}{\partial z}(|z|^{2m}\operatorname{Re}V(z))\right]. \tag{13}$$

Par ailleurs, on a:

$$A(z)\cdot\frac{\partial}{\partial z}(|z|^{2m}\operatorname{Re}V(z))=|z|^{2m}(a+S)\left(m\operatorname{Re}V+\frac{1}{2}W\right) \tag{14}$$

et

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}&\left[(a+S)\left(m\operatorname{Re}V+\frac{1}{2}W\right)\right] \\ &=\left(\operatorname{Re}a+\frac{S+\overline{S}}{2}\right)\times\left(m\left(\frac{V^*+\overline{V}^*}{2}+\operatorname{Re}V(0)\right)+\frac{1}{4}(W+\overline{W})\right) \\ &\qquad+\left(i\operatorname{Im}a+\frac{S-\overline{S}}{2}\right)\left(\frac{W-\overline{W}}{4}\right).\end{aligned} \tag{15}$$

Les termes harmoniques de (15) sont:

$$\begin{aligned}2\operatorname{Re}&\left[\frac{S}{4}(mV^*+2m\operatorname{Re}V(0)+W)+\frac{a}{4}W\right. \\ &\left.+\frac{m}{2}(\operatorname{Re}a)\cdot V^*+m\frac{(\operatorname{Re}a)\operatorname{Re}V(0)}{2}\right]=:2\operatorname{Re}[K(z)].\end{aligned}$$

Donc les termes de la forme $|z|^{2m}z^p$ ou $|z|^{2m}\overline{z}^q$ $(p,q\geq 0)$ dans (13) sont: $|z|^{2m}\operatorname{Re}[-\gamma V(z)+2K(z)]$. Par hypothèse, ils sont identiquement nuls, d'où:

$$-\gamma V(z)+2K(z)=-\gamma V(0)+2K(0). \tag{16}$$

En remplaçant K par son expression et V par $V^* + V(0)$ dans (16), on obtient:

$$\frac{S}{2}(mV^* + 2m \operatorname{Re} V(0) + W) + \frac{a}{2}W + V^*(m \operatorname{Re} a - \gamma) = 0 \tag{17}$$

ou encore:

$$S(z) = -\frac{2(m \operatorname{Re} a - \gamma)V^*(z) + aW(z)}{W(z) + mV^*(z) + 2m \operatorname{Re} V(0)}.$$

Puisque $A(z) = z(a + S(z))$, on a donc:

$$A(z) = z\frac{(2\gamma - m\overline{a})V^*(z) + 2ma \operatorname{Re} V(0)}{W(z) + mV^*(z) + 2m \operatorname{Re} V(0)} \text{ où } a = A'(0). \quad \blacksquare$$

Preuve du Lemme 3.3: Supposons que B ait des pôles.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des pôles de B dans Ω_2, c'est-à-dire $\mathcal{S} = \Omega_2 \cap (B^{-1}(\infty))$.

Soient z_1 un élément de $\mathcal{S}$, w_1 un nombre complexe tel que $(w_1, z_1) \in \mathcal{S}$ et, en outre, $aw_1 + b \neq 0$. (Ce dernier choix est toujours possible quitte à faire une translation en $\operatorname{Im} w_1$.)

Soit (w_0, z_0) un point fixé dans $U_2\backslash f(V_f)$; puisque $\Omega\backslash(f(V_f) \cup \mathcal{S})$ est connexe et dense dans Ω_2, il existe un chemin continu $\gamma : [0,1] \to \Omega_2$ tel que: $\gamma(0) = (w_0, z_0)$; $\gamma(1) = (w_1, z_1)$ et $\forall\, t \in [0,1[$, $\gamma(t) \notin f(V_f) \cup \mathcal{S}$.

L'application f étant holomorphe propre, $f : \Omega_1\backslash f^{-1}[f(V_f)] \to \Omega_2\backslash f(V_f)$ est un revêtement fini, il existe donc $\tilde{\gamma} : [0,1[\to \Omega_1\backslash V_f$ un relèvement de γ par f c'est-à-dire $\forall\, t \in [0,1[$, $(f \circ \tilde{\gamma})(t) = \gamma(t)$.

Par hypothèse, au voisinage de l'origine le champ de vecteurs holomorphes $\vec{X} = f_*\left(i\frac{\partial}{\partial w}\right)$ est de la forme: $\vec{X}_{(w,z)} = A(w)\frac{\partial}{\partial w} + B(z)(aw + b)\frac{\partial}{\partial z}$ où A est une fonction entière et B est une fraction rationnelle.

L'existence du relèvement $\tilde{\gamma}$ permet de prolonger holomorphiquement $f_*\left(i\frac{\partial}{\partial w}\right)$ le long de $\gamma([0,1[)$ en un champ $\vec{\tilde{X}}$ tel que

$$\forall\, t \in [0,1[\colon \vec{\tilde{X}}_{\gamma(t)} = \left[f_*\left(i\frac{\partial}{\partial w}\right)\right]_{\gamma(t)} = i\frac{\partial f_1}{\partial w}(\tilde{\gamma}(t))\frac{\partial}{\partial w} + i\frac{\partial f_2}{\partial w}(\tilde{\gamma}(t))\frac{\partial}{\partial z}.$$

Par ailleurs, puisque $\gamma([0,1[) \subset \Omega_2\backslash\mathcal{S}$, le champ $A(w)\frac{\partial}{\partial w} + B(z)(aw + b)\frac{\partial}{\partial z}$ est également un prolongement de $\vec{X}$ le long de $\gamma([0,1[)$.

Par unicité du prolongement, on a donc:

$$\forall\, t \in [0,1[,\ i\frac{\partial f_1}{\partial w}(\tilde{\gamma}(t)) = A(\gamma_1(t)) \tag{18}$$

et

$$\forall\, t \in [0,1[\colon i\frac{\partial f_2}{\partial w}(\tilde{\gamma}(t)) = B(\gamma_2(t))(a\gamma_1(t) + b) \text{ où } \gamma = (\gamma_1, \gamma_2). \tag{19}$$

Comme $(aw_1 + b) \neq 0$, on déduit immédiatement de (19) que $|B(z_1)| < +\infty$ ce qui est impossible. $\blacksquare$

4. Preuve des Théorèmes 1 et 2

Preuve du Théorème 2: On se place dans le cas iii) de la Proposition 3.1. La partie homogène de plus bas degré de P_2 est égale à $M|z|^{2m}$ $(M > 0)$ et comme le montre un calcul élémentaire celle de P_1 est aussi égale à $M'|z|^{2m}$ $(M' > 0)$. Notons $2k$ le degré du polynôme P_2 et H_{2k} sa partie homogène de plus haut degré, il nous faut montrer que $k = m$.

Nous utiliserons pour cela la méthode de dilatation des coordonnées. Considérons à cet effet la suite de points de Ω_1 : $\left(-\frac{1}{n} + \frac{i}{\lambda}, 0\right)$, la suite de points de Ω_2 : $f\left(-\frac{1}{n} + \frac{i}{\lambda}, 0\right) = \left(-\frac{i\Gamma}{\lambda} - \frac{n\Gamma}{\lambda^2}, 0\right)$ et deux suites de dilatations $(S_n)_n$, et (Δ_n) définies par:

$$S_n(w,z) =: \left(nw, zn^{\frac{1}{2m}}\right).$$

$$\Delta_n(w,z) =: \frac{\lambda^2}{\Gamma}\left(\frac{w}{n}, \frac{z}{n^{\frac{1}{2k}}}\right).$$

Soit h l'application holomorphe propre de Ω_1 sur Ω_2 donnée par:

$$h : \Omega_1 \to \Omega_2$$

$$(w,z) \mapsto f\left(w + \frac{i}{\lambda}, z\right) + \left(\frac{\Gamma i}{\lambda}, 0\right).$$

On définit alors une suite d'applications holomorphes propres $(F_n)_n$ de $S_n(\Omega_1)$ sur $\Delta_n(\Omega_2)$ par $F_n = \Delta_n \circ h \circ S_n^{-1}$.

On vérifie sans peine que:

1) $F_n(w,z) = \left(\frac{1}{w}, \frac{\lambda^2}{\Gamma} n^{-\frac{1}{2k}} f_2\left(\frac{w}{n} + \frac{i}{\lambda}, zn^{-\frac{1}{2m}}\right)\right)$.
2) Pour tout $n : F_n(w,0) = \left(\frac{1}{w}, 0\right)$ et $F_n(-1,0) = (-1,0)$.
3) Pour tout n, la multiplicité de F_n est égale à celle de f.
4) $S_n(\Omega_1)$ converge vers $D_1 =: \{(w,z) \in \mathbf{C}^2 : \operatorname{Re} w + M'|z|^{2m} < 0\}$.
5) $\Delta_n(\Omega_2)$ converge vers $D_2 =: \{(w,z) \in \mathbf{C}^2 : \operatorname{Re} w + \left(\frac{\Gamma}{\lambda}\right)^{2k-1} H_{2k}(z,\overline{z}) < 0\}$.

D'autre part, d'après ([**7**, Lemme 2.3]) et après une éventuelle extraction, la suite $(F_n)_n$ converge uniformémemnt sur tout compact de D_1 vers une application holomorphe: $F : D_1 \to D_2$ telle que:

a) $F(w,z) = \left(\frac{1}{w}, F_2(w,z)\right)$.
b) $F_2(w,z) \equiv 0$.

Admettons momentanément que pour w, fixé, $F_2(w,\cdot)$ est surjective finie. Il en va alors de même pour F. Montrons que F est propre. Posons:

$$\rho_1(w,z) =: \operatorname{Re} w + M'|z|^{2m}$$

$$\rho_2(w,z) =: \operatorname{Re} w + \left(\frac{\Gamma}{\lambda}\right)^{2k-1} H_{2k}(z,\overline{z}).$$

On a:

$$D_1 = \{(w,z) \in \mathbf{C}^2 : \rho_1(w,z) < 0\}$$
$$D_2 = \{(w,z) \in \mathbf{C}^2 : \rho_1(w,z) < 0\}$$

sur D_2, on définit la fonction $\sigma(w,z) =: \sup\limits_{F(u,v)=(w,z)} \rho_1(u,v)$. Puisque F est surjective et finie σ est p.s.h. et strictement négative sur D_2.

Supposons qu'il existe une suite $(w_n, z_n)_n$ de points de D_1 qui converge vers un point de bD_1 et telle que $(F(w_n, z_n))_n$ converge vers un point de D_2. Deux cas sont à distinguer. Commençons par supposer que la limite de (w_n, z_n) est finie, soit (w_0, z_0) cette limite et soit (w_1, z_1) la limite de $(F(w_n, z_n))_n$. On a: $\sigma(F(w_n, z_n)) \geq \rho_1(w_n, z_n)$, et puisque σ est (s.c.s.) $\sigma(w_1, z_1) \geq \rho_1(w_0, z_0) = 0$. Ce qui est absurde puisque σ est strictement négative. Supposons maintenant que $(|w_n|+|z_n|) \to +\infty$, $(w_n, z_n)_n$ étant dans D_1 on a $|w_n| \to +\infty$ et d'après a) $F(w_n, z_n) \to (0, z)$, par hypothèse $(0, z) \in D_2$ donc il existe $N \in \mathbf{N}^*$ tel que pour $n \geq N : (0, z) \in \Delta_n(\Omega_2)$. Comme F_n est propre, il existe $(u, v) \in S_n(\Omega_1)$ tel que $F_n(u, v) = (0, z)$, d'après 1) ceci est impossible. Nous avons donc montré que F est propre. Etablissons maintenant que $m \geq k$.

Soit $(w_n, 0)$ une suite de points de D_1 qui converge vers un point $(w_0, 0)$ de bD_1 où $w_0 \neq 0$. La suite $(F(w_n, 0))_n$ converge vers le point $\left(\frac{1}{w_0}, 0\right)$ de bD_2, le bord de D_2 étant de type fini, on sait d'après [**6**] que l'application F se prolonge continûment à $\overline{D}_1$ sur un voisinage de $(w_0, 0)$, et d'après Bell et Catlin [**5**] F se prolonge différentiablement à $\overline{D}_1$ sur un voisinage de $(w_0, 0)$. Donc si τ_1 (respectivement τ_2) désigne la fonction type de bD_1 (respectivement de bD_2) alors:

$$\tau_1(w_0, 0) \geq \tau_2(F(w_0, 0)) = \tau_2\left(\frac{1}{w_0}, 0\right),$$

d'où $m \geq k$.

Ceci termine la preuve du Théorème 2. ■

Montrons maintenant que pour w fixé, $F_2(w, \cdot)$ est finie.

On vérifie facilement que:

$$S_n(\Omega_1) =: \{(w,z) \in \mathbf{C}^2 : \operatorname{Re} w + M'|z|^{2m} + Q_n(z, \overline{z}) < 0\}$$

et

$$\Delta_n(\Omega_2) =: \left\{(w,z) \in \mathbf{C}^2 : \operatorname{Re} w + \left(\frac{\Gamma}{\lambda}\right)^{2k-1} H_{2k}(z, \overline{z}) + \tilde{Q}_n(z, \overline{z}) < 0\right\}$$

où $Q_n(z,\overline{z})$ et $\tilde{Q}_n(z,\overline{z})$ sont des polynômes qui convergent uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}$ vers le polynôme nul.

Soit $w \in \mathbf{C}^*$, un point fixé tel que $\operatorname{Re} w < 0$. On notera:

$$\Omega_{n,w} =: \{z \in \mathbf{C} : M'|z|^{2m} + Q_n(z,\overline{z}) < -\operatorname{Re} w\}.$$

$$D_{n,w} =: \left\{ z \in \mathbf{C} : \left(\frac{\Gamma}{\lambda}\right)^{2k-1} H_{2k}(z,\overline{z}) + \tilde{Q}_n(z,\overline{z}) < -\frac{\operatorname{Re} w}{|w|^2} \right\}.$$

$$\Omega_{\infty,w} =: \{z \in \mathbf{C} : M'|z|^{2m} < -\operatorname{Re} w\}.$$

$$D_{\infty,w} =: \left\{ z \in \mathbf{C} : \left(\frac{\Gamma}{\lambda}\right)^{2k-1} H_{2k}(z,\overline{z}) < -\frac{\operatorname{Re} w}{|w|^2} \right\}.$$

$$\Delta(0,R) =: \{z \in \mathbf{C} : |z| < R\}.$$

$F_n =: \left(\frac{1}{w}; F_{n,2}\right)$ la suite d'applications holomorphes propre de $S_n(\Omega_1)$ sur $\Delta_n(\Omega_2)$.

Soit $R > 0$ tel que $\operatorname{Re} w + R^{2m} > 0$. Pour n assez grand, on a $\Omega_{n,w} \cap \{|z| = R\} = \emptyset$, on en déduit que la composante connexe de l'origine de $\Omega_{n,w}$ est contenue dans $\{|z| < R\}$. Notons $\Omega^0_{n,w}$ cette composante, il est clair que $\Omega^0_{n,w}$ converge vers $\Omega_{\infty,w}$. La composante connexe, $D^0_{n,w}$, de l'origine dans $D_{n,w}$ conïncide avec $F_n(\Omega^0_{n,w})$. En observant que $D_{\infty,w}$ est connexe (étoilé par rapport à l'origine) on vérifie facilement que $D^0_{n,w}$ converge vers $D_{\infty,w}$.

Ainsi la suite d'applications holomorphes propres

$$\begin{aligned} h_n : \Omega^0_{n,w} &\to D^0_{n,w} \\ z &\mapsto F_{n,2}(w,z) \end{aligned}$$

est telle que (modulo extraction)

1) $h_n(0) = 0$, $\forall\, n$.
2) h_n est de multiplicité finie.
3) h_n converge vers $F_2(w,\cdot) : \Omega_{\infty,w} \to D_{\infty,w}$ uniformément sur tout compact, et il existe $R > 0$ tel que $\Omega^0_{n,w} \subset \{|z| < R\}$ pour tout n.

On en déduit par des arguments standards que $F_2(w,\cdot)$ est surjective et finie.

Preuve du Théorème 1: Nous supposons $V_f \neq \emptyset$ et montrons que cela conduit à une contradiction, nous procédons en trois étapes.

1ère étape: Il existe deux automorphismes de $\mathbf{C}^2$, φ_1 et φ_2 tels que l'application $\tilde{f} = \varphi_1^{-1} \circ f \circ \varphi_2$ satisfait les hypothèses du Théorème 2.

Pour tout $z \in \mathbf{C}$, notons π_z le demi-plan $\{(w,z) : w \in \mathbf{C}\} \cap \Omega$, et désignons par f^n la $n^{\text{ième}}$ itérée de f. Comme V_f est supposé non vide, la Proposition 1.1 assure l'existence d'un demi-plan π_{z_0} contenu dans V_f. En utilisant l'inclusion $f^{-1}(V_{f^n}) \subset V_{f^{n+1}}$ et le fait que, toujours d'après la Proposition 1.1, V_{f^n} est une réunion de demi-plan, on construit par récurrence une suite $(z_n)_n$ de nombres complexe telle que:

i) $\forall n \geq 1 : \pi_{z_n} \subset V_{f^n}$.
ii) $\forall n \geq 1 : f(\pi_{z_{n+1}}) \subset \pi_{z_n}$.

On observera pour cela que: si $(w_{n+1}, z_{n+1}) \in f^{-1}(\pi_{z_n}) \cap \pi_{z_{n+1}}$ alors $f(\pi_{z_{n+1}}) \subset \pi_{z_n}$. En effet, dans le cas contraire, w_{n+1} serait un zéro isolé de $f_2(w, z_{n+1}) - z_n$ et (w_{n+1}, z_{n+1}) serait un zéro isolé de $f_2(w, z) - z_n$ puisque $f^{-1}(\pi_{z_n})$ est contenu dans une réunion de demi-plan π_z.

Notons τ_n la valeur de τ sur le bord de π_{z_n}. Il résulte de ii) et des propiétés de τ que la suite $(\tau_n)_{n\geq 1}$ est croissante. Comme les valeurs de τ sont entières et majorées par le degré de P. Il existe $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que $\tau_{n_0+1} = \tau_{n_0}$. Pour fixer les idées, nous supposons que $n_0 = 1$. Alors $f(\pi_{z_2}) \subset \pi_{z_1}$ et, puisque $\tau_2 = \tau_1$, $\pi_{z_2} \not\subset V_f$. Quitte à composer f avec des translations $(w, z) \mapsto (w + it_0, z)$, on peut supposer que f induit un difféomorphisme local sur $b\Omega$ au voisinage de $(-P(z_2), z_2)$ et que $f(-P(z_2), z_2) = (-P(z_1), z_1)$. Définissons les automorphismes de $\mathbf{C}^2$, φ_1 et φ_2, par:

$$\varphi_j(w, z) = (w', z')$$

où

$$\begin{cases} w' = w - P(z_j, \overline{z}_j) - 2\displaystyle\sum_{i=1}^{2m} \frac{1}{i!}\frac{\partial^i P}{\partial z^i}(z_j, \overline{z}_j) z^i. \\ z' = z + z_j. \end{cases}$$

Ils induisent des automorphismes de Ω_j sur Ω où

$$\Omega_j =: \{(w, z) \in \mathbf{C}^2 : \operatorname{Re} w + Q_j(z, \overline{z}) < 0\},$$

$$Q_j(z, \overline{z}) = P(z + z_j, \overline{z} + \overline{z}_j) - P(z_j, \overline{z}_j) - 2 \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{2m} \frac{\partial^i P}{\partial z^i}(z_j, \overline{z}_j) z^i.$$

Par construction, l'application $\tilde{f} = \varphi_1^{-1} \circ f \circ \varphi_2$ est propre de Ω_2 sur Ω_1, fixe la droite complexe $z = 0$ et l'origine $(0, 0)$. D'après [**11**], $\tilde{f}$ se prolonge en un biholomorphisme local au voisinage de $(0, 0)$.

2ème étape: V_f est contenu dans une réunion d'au plus $(2m) = \deg P$ droites complexes.

Soit $\tilde{f}$ l'application fournie par la première étape. D'après le Théorème 2, deux cas sont à distinguer. Commençons par supposer que $\tilde{f}$ est de la forme $(\Gamma w, \tilde{f}_2(z))$. Alors $\tilde{f}_2$ est une fonction entière telle que $\tilde{f}_2(0) = 0$ et $\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial z}(0) = \lambda \neq 0$. L'inclusion $\tilde{f}(b\Omega_2) \subset b\Omega_1$ se traduit au voisinage de l'origine par l'identité:

$$\Gamma Q_2(z, \overline{z}) = Q_1 \circ \tilde{f}_2(z). \tag{20}$$

Décomposons les polynômes Q_1 et Q_2 sous la forme suivante

$$Q_j(z, \overline{z}) = \overline{z}^{k_j}[h_j(z) + \overline{z} R_j(z, \overline{z})]$$

où $k_j \in \mathbf{N}^*$, h_j est un polynôme holomorphe et R_j un polynôme en z, $\overline{z}$.

En identifiant les termes de plus bas degré en $\overline{z}$ dans (20), on obtient:

$$\Gamma \overline{z}^{k_2} h_2(z) = \overline{\lambda}^{k_1} \overline{z}^{k_1} h_1(\tilde{f}_2(z)). \tag{21}$$

On déduit alors de (21) que $k_1 = k_2 =: k$ et

$$\Gamma h_2(z) = \overline{\lambda}^{k} h_1 \circ \tilde{f}_2(z). \tag{22}$$

Ceci montre que le nombre de zéros de $\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial z}$ est majoré par le degré de h_2 et donc par $2m$. Il s'ensuit que $V_{\tilde{f}}$ est constitué d'au plus $2m$ demi-plans de la forme π_z. Il en va de même pour V_f, puisque les automorphismes φ_1 et φ_2 échangent ce type de demi-plans.

Il nous reste à envisager les cas où Q_1 ne dépend que de $|z|$. Considérons l'application holomorphe propre de Ω_1 sur lui-même définie par $g =: \varphi_1^{-1} \circ f \circ \varphi_1$.

Si $(w_0, z_0) \in \overline{V}_g \cap b\Omega_1$, alors d'après la Proposition 1.1, on a $\pi_{z_0} \subset V_g$. Quitte à composer g avec une translation $(w, z) \to (w + iy, z)$, on peut supposer que g se prolonge différentiablement au voisinage de (w_0, z_0). Alors pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a:

$$\{(w_0, e^{it} z_0),\ t \in [-\varepsilon, \varepsilon]\} \subset \overline{V}_g \cap b\Omega_1. \tag{23}$$

En effet, sinon, on trouverait une suite $(t_n)_{n \in N}$ telle que $\lim_n t_n = 0$ et $Jg(w_0, e^{it_n}) \neq 0$.

Pour tout $n \geq 1$: on aurait alors $\tau[g(w_0, e^{it_n} z_0)] = \tau(w_0, e^{it_n} z_0) = \tau(w_0, z_0)$ et τ étant s.c.s., $\tau(w_0, z_0) \leq \tau(g(w_0, z_0))$. Comme, par ailleurs, $\tau(g(w_0, z_0)) \leq \tau(w_0, z_0)$, il en résulterait que $\tau(g(w_0, z_0)) = \tau(w_0, z_0)$ et donc que $Jg(w_0, z_0) \neq 0$, ce qui est contraire aux hypothèses.

Donc si $z_0 \neq 0$, (23) contredit la Proposition 1.1, donc $V_g = \pi_0$ ou encore $V_f = \pi_{z_1}$.

3ème étape: Conclusion: D'après la 2ème étape, les lieux de branchement V_{f^n} ont au plus $2m$ composantes connexes. Comme $V_{f^{n+1}} = V_{f^n} \cup f^{-1}(V_{f^n}) \supset V_{f^n}$, il s'ensuit que la suite (V_{f^n}) est stationnaire.

On supposera sans perte de génétalité que $V_f = V_{f^2}$, ce qui signifie que $f^{-1}(V_f) \subset V_f$. Notons $\pi_1, \dots, \pi_N$ les composantes connexes de V_f. Puisque $f^{-1}(\pi_j)$ est un ensemble analytique dans Ω contenu dans V_f il existe $\sigma(j) \in \{1, \dots, N\}$ tel que $\pi_{\sigma(j)} \subset f^{-1}(\pi_j)$, on voit alors facilement que f iduit une permutation sur $\{\pi_1, \dots, \pi_N\}$. Alors $f^{N!}(\pi_1) \subset \pi_1$ et donc, d'après la preuve du Lemme 1.2, $\pi_1 \not\subset V_{f^{N!}}$. Ainsi $V_f = \emptyset$ et, Ω étant simplement connexe, f est un automorphisme. ■

References

1. H. Alexander, Holomorphic mappings from the ball and polydisc, *Math. Ann.* **209** (1974), 249–256.
2. E. Bedford and S. Bell, Proper self-maps of weakly pseudoconvex domains, *Math. Ann.* **261** (1982), 47–49.
3. E. Bedford and J. E. Fornaess, A construction of peak functions on weakly pseudoconvex domains, *Ann. of Math.* **107** (1978), 555–568.
4. E. Bedford and S. Pinchuk, Domains in $\mathbb{C}^2$ with non compact holomorphic automorphism groups, *Math. USSR Sbornik* **63** (1989), 141–151.
5. S. Bell and D. Catlin, Regularity of *CR* mappins, *Math. Z.* **199** (1988), 357–368.
6. F. Berteloot, A remark on local continuous extension of proper holomorphic mappings, *Contemporary Mathematics* **137** (1992), 79–83.
7. F. Berteloot, Characterization of models in $\mathbb{C}^2$ by their automorphism groups, *Int. J. Mathematics* **5(5)** (1994), 619–634.
8. F. Berteloot and S. Pinchuk, Proper holomorphic mappings between bounded complete Reinhardt domains in $\mathbb{C}^2$, *Math. Z.* **219** (1995), 343–356.
9. A. Chaouech, Une remarque sur un résultat de Y. Pan, *Ann. Fac. Sci. Toulouse* **5** (1996), 1–4.
10. K. Diederich and J. E. Fornaess, Proper holomorphic images of strictly pseudoconvex domains, *Math. Ann.* **259** (1982), 279–286.
11. K. Diederich and J. Fornaess, Proper holomorphic mappings between real analytic pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$, *Math. Ann.* **382** (1988), 681–700.

12. Y. Pan, Proper holomorphic self-mappings of Reinhardt domains, *Math. Z.* **208** (1991), 289–295.
13. S. Pinchuk, On proper maps of strictly pseudoconvex domains, *Siberian Math. J.* **15** (1974), 909–917.

U.F.R. de Mathématiques
Université de Lille
URA C.N.R.S. D751
F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex
FRANCE

Rebut el 22 de Desembre de 1994