LOS ESPACIOS METRICOS EN OPTICA ELECTRONICA

MEMORIA QUE PRESENTA EL LICENCIADO EN CIENCIAS FISICAS

RAMON ORTIZ FORNAGUERA

PARA ASPIRAR AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS FISICAS.

Debemos hacer constar nuestro agradecimiento a Don Esteban Terradas Illa por su valiosa ayuda al dirigir la presente memoria, a la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y al Instituto de Optica "Daza de Valdés", del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, que, por medio de Don José Mª Otero de Navascués y Don Armando Durán Miranda, respectivamente, nos han prestado su apoyo en todos los aspectos.

Madrid, junio de 1947.

L O S E S P A C I O S M E T R I C O S
E N
O P T I C A E L E C T R O N I C A .

I N N T R O D U C C I O N

Además de los tratados de carácter sistemático, los artículos y memorias relativos a la óptica electrónica son numerosísimos, incluso los de carácter teórico. Pero, orientados las más de las veces por las necesidades de la técnica, en ellos sólo se considera el campo de las lentes electrónicas como un todo, no en su estructura. Desde el punto de vista de los principios, la óptica electrónica geométrica hubiera ya sido posible inmediatamente después que Hamilton estableció la analogía entre óptica geométrica y mecánica. Por otra parte, es sabido que la mecánica de los sistemas holónomos admite una interpretación geométrica en ciertos casos, conforme demostró Schrödinger al introducir la métrica riemanniana definida por la energía cinética, cuando los vínculos no dependen del tiempo, en el espacio de las configuraciones. Sin embargo, las posibles trayectorias naturales del sistema no coinciden, en general, con las geodésicas de dicha métrica. Pero hay más: la identificación de trayectorias y geodésicas exigirá, a veces, la introducción de métricas más generales que las de Riemann. Tenemos así tres modelos íntimamente relacionados: el óptico, el mecánico y el geométrico. En la óptica electrónica sólo se han considerado hasta hoy los nexos entre las dos primeros. Nosotros, en lo que sigue, nos proponemos sentar las bases para la intervención del tercero, el cual permite vincular a cada sistema óptico electrónico de campo estático un espacio métrico cuya estructura es la traducción geométrica de la del sistema.

Madrid, junio de 1947.

I. LAS ONDAS DE HAMILTON EN MECANICA CLASICA.

1.- Sea $L(q^1,\ldots,q^n;\dot{q}^1,\ldots,\dot{q}^n,t)$ la función de Lagrange que caracteriza el comportamiento de un sistema de puntos materiales, función en la que q^i son las coordenadas del punto representativo del mismo en el espacio de las configuraciones, $\dot{q}^i=\frac{dq^i}{dt}$ son las componentes de la velocidad del mismo y t el tiempo. Las ecuaciones de evolución son las de las extremales del problema de variación

$$\text{(I.1)} \qquad \delta\int L\,dt=0,$$

siendo el elemento de comparación el conjunto de todas las trayectorias infinitamente próximas que pasan por dos puntos dados y recorridas entre dos instantes asimismo dados. Es decir, la evolución natural $q^i=q^i(t)$ es una integral del sistema euleriano de ecuaciones diferenciales

$$\text{(I.2)} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^i}=0.$$

El espacio de las configuraciones es, en el presente estadio, una variedad contínua amorfa C_n , amorfa en el sentido de que en ella no se ha definido conexión alguna entre los espacios vectoriales afines tangentes. Estos sí existen, en tanto que un cambio de coordenadas en la variedad

$$\text{(I.3)} \qquad q^i=q^i(\bar{q}^1,\ldots,\bar{q}^n)$$

subordina una transformación lineal entera homogénea $dq^i=\frac{\partial q^i}{\partial \bar{q}^k}d\bar{q}^k$ entre las diferenciales dq^i y sus transformadas por (I.3). De aquí resulta, en particular, el carácter contravariante del vector velocidad $\dot{q}^i$.

El escalar $L(q^1,\ldots,q^n;\dot{q}^1,\ldots,\dot{q}^n,t)$ depende de las variables q^i , que no son sino meras variables numéricas, y de las $\dot{q}^i$ que son componentes de un vector contravariante. Si consideramos $\dot{q}^1,\ldots,\dot{q}^n,t$ como parámetros fijos, la expresión $dL=\frac{\partial L}{\partial q^i}dq^i$ es un escalar cualesquiera que sean las componentes del vector contravariante infinitesimal dq^i ; luego $\frac{\partial L}{\partial q^i}$ son componentes

de un vector covariante. Pero hay más: sean $T^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_h}$ las componentes de un tensor de orden $p = h+k$ y exceso $\varepsilon = h-k$, componentes que dependen no sólo de las coordenadas q^i, sino también de las componentes de otro tensor $t^{n_1 \dots n_r}_{m_1 \dots m_s}$:

$$T^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_h} = T^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_h}\left(q^i ; t^{n_1 \dots n_r}_{m_1 \dots m_s}\right).$$

En estas condiciones, las derivadas parciales $\dfrac{\partial T^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_h}}{\partial t^{n_1 \dots n_r}_{m_1 \dots m_s}}$ son las componentes de un tensor $R^{i_1 \dots i_k, m_1 \dots m_s}_{j_1 \dots j_h, n_1 \dots n_r}$ de orden $p = (h+k)+(r+s)$ igual a la suma de los órdenes de T y t, y de exceso $\varepsilon = (h+r)-(k+s) = (h-k)-(s-r)$ igual a la diferencia entre el exceso de T y el de t.(1) En particular, $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot q^i}$ son las componentes de un tensor de orden 1 y exceso 1, es decir, de un vector covariante, el momento conjugado de la coordenada q^i; luego la expresión

$$L + H = p_i \dot q^i$$

es un escalar y, por lo tanto, también lo es $H = p_i \dot q^i - L$. Supongamos que el determinante funcional $\left\| \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot q^i \partial \dot q^j} \right\|$ sea $\neq 0$. Las ecuaciones

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot q^i}$$

definen entonces las $\dot q^i$ como funciones de las p_i lo que a su vez permite expresar el escalar H como función de q^i, p_i, t, esto es,

$$H(q^i, p_i, t) = p_i \dot q^i(p_1, \dots, p_n; q^1, \dots, q^n; t) - L[q^i, \dot q^i(p, q, t)].$$

Es fácil ver que el vector contravariante $\dfrac{\partial H}{\partial p_i}$ coincide con $\dot q^i$. En efecto, derivando la ecuación que precede resulta

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot q^i + p_k \frac{\partial \dot q^k}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot q^k}\frac{\partial \dot q^k}{\partial p_i} = \dot q^i .$$

Resumiendo, a cada función de Lagrange L podemos asociar una función H, la función de Hamilton ligada a L, y al vector contravariante $\dot q^i$ el vector covariante p_i de manera que valgan las siguientes relaciones:

$$\text{(I.4)} \quad \begin{cases} L(q^i, \dot q^i, t) + H(q^i, p_i, t) = p_i \dot q^i, \\ p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot q^i}, \qquad \dot q^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}. \end{cases}$$

---

(1) A. de Mira Fernandes, Rend. della R. Accademia N. dei Lincei, (6), 21, 1935, pgs. 555-562.

Se reconoce en ellas fácilmente una transformación de Legendre entre las variables $\dot{q}^i$ y p_i .[1] De (I.4) resulta desde luego

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\frac{\partial^2 H}{p_k \partial q^i} + \frac{\partial H}{\partial q^i} = p_k \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q^i},$$

es decir,

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} + \frac{\partial H}{\partial q^i} = 0,$$

lo que, junto con (I.4), permite establecer el sistema canónico (I.2'), equivalente al (I.2),

$$\text{(I.2')} \quad \begin{cases} \dfrac{dq^i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\[2ex] \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i}. \end{cases}$$

La extensión que del concepto de invariante integral introducido por Poincaré ha llevado a cabo Cartan le ha permitido demostrar la equivalencia del principio de Hamilton-Lagrange (I.1) con la condición de que las ecuaciones de la dinámica han de admitir el invariante integral relativo

$$\oint p_i\, \delta q^i - H\, \delta t, \qquad (2)$$

donde la integral curvilínea se extiende a un contorno cerrado cualquiera del espacio de los estados (espacio de las fases-tiempo).

2.- En la mecánica clásica no relativista y supuesto que las fuerzas que actúan sobre el sistema deriven de un potencial , la función de Lagrange L (potencial cinético) es de la forma

$$L = K - V = K_2(q^i, \dot{q}^i, t) + K_1(q^i, \dot{q}^i, t) + K_0(q^i, t) - V(q^i, t),$$

donde $K_p(q^i, \dot{q}^i, t)$ (p = 0,1,2) son formas de grado p respecto de las variables $\dot{q}^i$ y K la energía cinética. La función de Hamilton asociada es la

$$H = p_k \dot{q}^k - K + V = \left(\frac{\partial K_2}{\partial \dot{q}^k} + \frac{\partial K_1}{\partial \dot{q}^k} + \frac{\partial K_0}{\partial \dot{q}^k}\right)\dot{q}^k - K + V = K_2 - K_0 + V,$$

y aparece así como suma de una forma cuadrática, K_2 , en las componentes $\dot{q}^i$ de la velocidad generalizada y de la función $V - K_0$

---

(1) Courant-Hilbert, pg. 28.

(2) Cartan [1] , pgs. 13 y 24 (cap. III).

que depende sólo de las coordenadas q^i y del tiempo. Siguiendo a Cartan [1] llamaremos a H <u>energía generalizada</u> del sistema relativa a la referencia (q) en el espacio de las configuraciones. De los dos términos que la integran, uno, el K_2, es de carácter cinético, dado que en él aparecen las componentes $\dot{q}^i$ de la velocidad, mientras que el otro, el $V-K_0$, es de naturaleza dinámica. La definición de H como energía <u>generalizada</u> está justificada por el hecho de que puede muy bien ocurrir que H sea una integral primera de (I.2') sin que lo sea la suma $K+V$ de las energías cinética y potencial. Es sabido, en efecto, que la condición necesaria y suficiente para que H sea integral primera de (I.2') es que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \; ;$$

luego la magnitud mecánica H cuyas dimensiones son las de una energía se mantiene constante a lo largo de la evolución natural del sistema siempre y sólo cuando la función $H = p_k \dot{q}^k - K + V$ no depende explícitamente del tiempo y ello no implica necesariamente que sea $H = K+V$. Cabe hablar, por ende, de conservación de la energía siempre que H resulte independiente de t, en el sentido de conservación de la energía <u>generalizada</u>. Por otra parte, dado que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d(K_2 - K_0 + V)}{dt} = \frac{\partial(K-V)}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \qquad (2)$$

resulta que para que se conserve dicha energía es necesario y basta que el potencial cinético L no dependa explícitamente del tiempo. Es esencial advertir que $\frac{\partial L}{\partial t}$ supone constantes las $(q^i, \dot{q}^i)$ mientras que en $\frac{\partial H}{\partial t}$ lo que mantenemos fijo es las (q^i, p_i).

3.- Sea $\mathcal{D}$ un dominio del espacio de las configuraciones e I un intervalo temporal tales que para dos puntos cualesquiera de $\mathcal{D}$, $Q_0(q_0^i)$ y $Q(q^i)$, y dos instantes asimismo cualesquiera t_0 y t de I, los sistemas de valores $(q_0^1, \ldots, q_0^n, t_0)$ y $(q^1, \ldots, q^n, t)$ determinen una extremal y sólo una del problema de variación (I.1). Si u^i son las coordenadas de un punto genérico

---

(1) Cartan [1], pg. 11.
(2) Brillouin, pg. 152.

de $\mathcal{D}$ y designamos con s un valor genérico del tiempo, de modo que (I.1) se escriba

$$\text{(I.5)} \qquad \delta\int_{t_0}^{t} L(u^1,\ldots,u^n,\dot{u}^1,\ldots,\dot{u}^n,s)\,ds = 0 \qquad (1)$$

las ecuaciones finitas de dicha extremal serán

$$\text{(I.6)} \qquad u^i = f^i(s;q_0^k,t_0;q^k,t),$$

y los correspondientes impulsos

$$\text{(I.7)} \qquad v_i = g_i(s;q_0^k,t_0;q^k,t).$$

En virtud de la hipótesis hecha tocante al dominio $\mathcal{D}$ y al intervalo I, se tendrá evidentemente

$$\text{(I.8)} \qquad \begin{cases} q^i \equiv f^i(t;q_0^k,t_0;q^k,t), \\ q_0^i \equiv f^i(t_0;q_0^k,t_0;q^k,t). \end{cases}$$

Además, si se deriva (I.6) respecto de s y hacemos luego $s=t_0$ y $s=t$ se obtendrán las componentes contravariantes de la velocidad en los instantes t_0, t:

$$\text{(I.9)} \qquad \begin{cases} \dot{q}_0^i = \dot{f}^i(t_0;q_0^k,t_0;q^k,t), \\ \dot{q}^i = \dot{f}^i(t;q_0^k,t_0;q^k,t). \end{cases}$$

Finalmente, los correspondientes momentos conjugados son

$$\text{(I.10)} \qquad \begin{cases} p_{i0} = g_i(t_0;q_0^k,t_0;q^k,t), \\ p_i = g_i(t;q_0^k,t_0;q^k,t). \end{cases}$$

Las funciones (I.9) y (I.10) de las $2n+2$ variables (q_0^k,t_0), (q^k,t) son las llamadas por Courant <u>funciones de campo</u>. (2)

La substitución de (I.6) en la $\int_{t_0}^{t} L(u^i,\dot{u}^i,s)\,ds$ nos da una función de dichas $2n+2$ variables

$$\text{(I.11)} \qquad W(q_0^k,t_0;q^k,t) = \int_{t_0}^{t} L[f^i(s;q_0^k,t_0;q^k,t),\dot{f}^i(s;q_0^k,t_0;q^k,t),s]\,ds.$$

---

(1) Courant-Hilbert, pgs. 96 y s.s.

(2) Courant-Hilbert, pgs. 98.

Su valor para dos puntos particulares $Q_0(q_0^k)$ y $Q(q^k)$ de $\mathcal{D}$ y dos instantes determinados t_0 y t ha recibido el nombre de <u>acción hamiltoniana</u> entre los instantes t_0 y t a lo largo de la extremal $(Q, t) - (Q_0, t_0)$, o mejor <u>variación de la acción</u> (1) en dichas condiciones. En la óptica geométrica corresponde a este concepto, conforme es sabido, el de <u>iconal</u> (2) puntual. Ambos conceptos están comprendidos en el más general de <u>distancia geodésica</u>, relativa a un problema de variación de la forma (I.5), entre los dos puntos (q_0^i, t_0) y (q^i, t) de la variedad $V_{n+1}(u^i, s)$ que representaremos con el símbolo $C_n \times t$. Supuesta L continua y con derivadas parciales contínuas hasta el segundo orden en el dominio $\mathcal{D} \times I$, se puede demostrar que la función W admite derivadas parciales primeras respecto de todos sus argumentos, derivadas dadas por las fórmulas

$$(\text{I.12}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial q_0^i} = -\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_0^i} = -p_{i0}, \\[2ex] \dfrac{\partial W}{\partial t_0} = -L(q_0^i, \dot{q}_0^i, t_0) + \dot{q}_0^k \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_0^k} = H(q_0^i, p_{i0}, t_0), \end{cases}$$

$$(\text{I.13}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial q^i} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = p_i, \\[2ex] \dfrac{\partial W}{\partial t} = L(q^i, \dot{q}^i, t) - \dot{q}^k \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = -H(q^i, p_i, t), \end{cases}$$

en las que hay que substituir las $\dot{q}_0^i$, $\dot{q}^i$, p_i y p_{i0} por las funciones de campo (I.9) y (I.10).(3) Si mantenemos fijo el punto (Q_0, t_0), la función W lo es sólo de las variables (q^i, t) y, en virtud de (I.12), es una integral de la ecuación entre derivadas parciales de primer orden

$$(\text{I.14}) \qquad \frac{\partial W}{\partial t} + H\left(q^i, \frac{\partial W}{\partial q^i}, t\right) = 0 \qquad \text{(Hamilton-Jacobi)}.$$

El sistema característico de la ecuación (I.14), esto es, el sistema de ecuaciones diferenciales de las bandas caracteris-

---

(1) Cabe definir la acción, en efecto, mediante $W = W_0 + \int_{t_0}^{t} L(u^i, \dot{u}^i, s)\, ds$ donde Γ es la extremal en cuestión.

(2) H. Bruns, Das Eikonal (Leipz. Sitzgsber., 1895, 31, 321-436) Hemos adoptado este término en vez del de <u>eiconal</u> por dos razones: primero, porque las voces griegas tales como εἰκών, εἰδύλλιον, etc. han tomado en español las formas <u>icono</u>, <u>idilio</u>, etc.; segundo, porque existe ya el término <u>iconografía</u> que procede de la misma raíz griega que el término <u>Eikonal</u> introducido por Bruns.

(3) Courant-Hilbert, pg. 99.

ticas correspondientes a ella, es precisamente el sistema canónico (I.2') junto con

$$\frac{dW}{dt} = p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H, \qquad \frac{dp_t}{dt} = -H_t$$

de donde resulta que la integración del sistema canónico permite integrar la ecuación (I.14). Recíprocamente, si se conoce una integral completa $\overline{W}(q^1, \ldots, q^n, t; a^1, \ldots, a^n) + a$ de la ecuación de Hamilton-Jacobi, integral en la que las a^i son n parámetros independientes, ninguno de los cuales es una constante aditiva, las ecuaciones finitas

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial a^i} = b_i, \qquad \frac{\partial \overline{W}}{\partial q^i} = p_i, \qquad \left(\left\| \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial a^i \partial q^k} \right\| \neq 0 \right)$$

definen $2n$ funciones $q^i = q^i(t; a^k, b_k)$, $p_i = p_i(t; a^k, b_k)$ dependientes de los $2n$ parámetros (a^k, b_k) que constituyen un haz, dependiente de dichos parámetros, de integrales del sistema canónico (I.2'). (Teorema de Jacobi).

4.- Esto sentado consideremos el haz de integrales del sistema característico de (I.14)

$$\text{(I.15)} \quad \begin{cases} \dfrac{dq^i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, & \dfrac{dW}{dt} = p_i \dfrac{\partial H}{\partial p_i} - H, \\[2ex] \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i}, & \dfrac{dp_t}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial t} \end{cases}$$

que corresponde a los valores iniciales t_0, q_0^i, fijos, y dejando indeterminados los momentos iniciales p_{i0}. La integración se lleva a cabo en dos fases: si

$$\text{(I.16)} \quad \begin{cases} q^i = f^i(t; p_{i0}), & q_0^i \equiv f^i(t_0; p_{i0}), \\[2ex] p_i = g_i(t; p_{i0}), & p_{i0} \equiv g_i(t_0; p_{i0}), \end{cases}$$

es el haz de integrales de $\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$ determinado por aquellas condiciones, las funciones $W(t; p_{i0})$, $p_t(t; p_{i0})$ se obtienen mediante cuadraturas:

$$W(t; p_{i0}) = W_0 + \int_{t_0}^{t} \left\{ g_i(s; p_{i0}) \frac{\partial}{\partial p_i} H[f^k(s; p_{i0}), g_k(s; p_{i0}), s] - H[f^k(s; p_{i0}), g_k(s; p_{i0}), s] \right\} ds,$$

$$p_t(t; p_{i0}) = p_{t_0} - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t} H[f^k(s; p_{i0}), g_k(s; p_{i0}), s]\, ds.$$

El valor inicial W_0 de W puede ser cualquiera. No así el de p_t ya que debe satisfacer la condición

$$p_{t_0} + H(q_0^i, p_{i0}, t_0) = 0.$$

La ecuación $W(t; p_{i0}) = W_0$ establece, para cada valor $t = \bar{t}$ de t un nexo entre los parámetros hasta ahora arbitrarios p_{i0}. El lugar geométrico de los puntos $q^i = f^i(\bar{t}; p_{i0})$, donde los p_{i0} independientes son en número de $n-1$ en virtud de la condición $W(t; p_{i0}) = W_0$, es una hipersuperficie del espacio de las configuraciones en todos los puntos de la cual es $W = W_0$. Esta superficie de <u>equiacción</u>, se mueve en dicho espacio en el transcurso del tiempo y se reduce al punto q_0^i en el instante t_0 en virtud de (I.16). La llamaremos <u>onda de Hamilton</u> de origen en $Q_0(q_0^i)$ en el instante t_0. Fijado un valor $\bar{t}$ de t y elegido un punto $Q(q^i)$ en la hipersuperficie que, <u>en el instante $\bar{t}$</u>, define la posición de la onda móvil de Hamilton, la extremal Γ de (I.1) determinada por las condiciones en los límites (q_0^i, t_0), $(q^i, \bar{t})$ es tal que

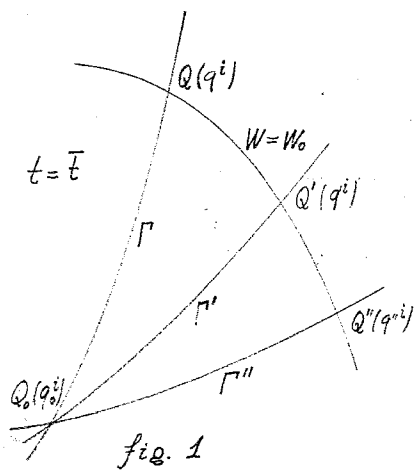


fig. 1

$$\overset{(\Gamma)}{\int_{t_0}^{t}} L(u^i, \dot{u}^i, s)\, ds = 0.$$

Esta extremal está determinada por los valores p_{i0} solución de

$$q^i = q^i(\bar{t}; p_{i0}), \qquad W(\bar{t}; p_{i0}) = W_0.$$

Al mismo resultado se llega partiendo de la acción $W = W_0 + \overset{(\Gamma)}{\int_{t_0}^{t}} L(u^i, \dot{u}^i, s)\, ds$ como función de las $2n+2$ variables q_0^i, t_0, q^i, t. La onda de Hamilton de centro en q_0^i en el instante t_0 es la hipersuperficie móvil del C_n

$$W(q_0^i, t_0; q^i, t) = W_0,$$

donde q_0^i y t_0 se conciben como valores numéricos dados.

El comportamiento que muestran las ondas de Hamilton que en un cierto instante inicial se reducen a un punto es un caso particular del de las ondas de Hamilton más generales que se propagan a partir, no de un punto, sino de una hipersuperficie inicial. No nos será menester, sin embargo, ocuparnos de éstas por lo cual

prescindiremos de su estudio y propiedades.(1)

5.- Consideremos de nuevo la función $W(q_0^i, t_0, q^i, t)$ antes definida

$$W(q_0^i, t_0; q^i, t) = W_0 + \int_{t_0}^{t} L(u^i, \dot{u}^i, s)\, ds$$

y, supuesto fijos q_0^i, t_0, la onda de Hamilton $W(q_0^i, t_0; q^i, t) = W_0$. Sean Σ y Σ' sus posiciones en el C_n en los instantes $\bar{t}$ y $\bar{t}+dt$ respectivamente y $q^i = f^i(t)$ la extremal Γ correspondiente al punto $\bar{Q}(\bar{q}^i)$ de Σ considerada en el instante $\bar{t}$. Se tiene así, en el instante $\bar{t}$,

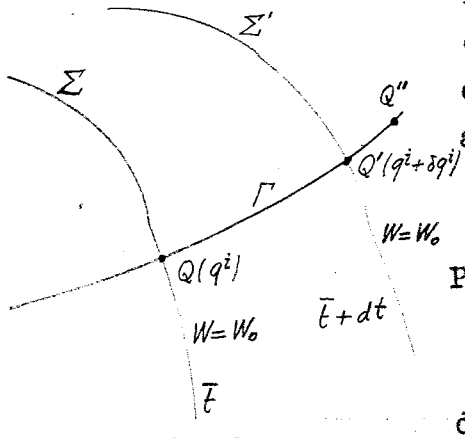


fig.2

$$\bar{q}^i = f^i(\bar{t}), \quad \bar{\dot{q}}^i = \dot{f}^i(\bar{t}), \quad W[q_0^i, t_0, f^i(\bar{t}), \bar{t}] = W_0.$$

Por otra parte, la ecuación de Σ' es

$$W[q_0^i, t_0; q^i + \delta q^i, \bar{t} + dt] = W_0$$

donde q^i son las coordenadas de un punto cualquiera de Σ; luego $Q'(q^i + \delta q^i)$ está en Σ' si δq^i es tal que

$$\frac{\partial W}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial W}{\partial t} dt = 0.$$

Determinemos, en particular, la intersección de la extremal Γ considerada geométricamente, como línea de C_n. Un <u>punto</u> de Γ infinitamente próximo al $\bar{Q}(\bar{q}^i)$ tiene por coordenadas $\bar{q}^i + \bar{\dot{f}}^i(\bar{t})\delta t$ donde δt es una variación infinitesimal del <u>parámetro</u> t. Para que este punto pertenezca a Σ' debe ser

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{q}^i}\bar{\dot{q}}^i \delta t + \frac{\partial W}{\partial t} dt = 0$$

o lo que es lo mismo

$$\bar{p}_i \bar{\dot{q}}^i \delta t - H(\bar{q}^k, \bar{p}_k, \bar{t}) dt = 0$$

de donde

$$\delta t = \frac{H(\bar{q}^k, \bar{p}_k, \bar{t})}{\bar{p}_m \bar{\dot{q}}^m} dt \qquad (\bar{p}_m \bar{\dot{q}}^m \neq 0),$$

$$\delta q^i = \frac{H(\bar{q}^k, \bar{p}_k, t)}{\bar{p}_m \bar{\dot{q}}^m} \dot{q}^i dt.$$

Ahora bien, $dq^i = \bar{\dot{q}}^i dt$ es el corrimiento <u>real</u> del punto repres

(1) Courant-Hilbert, pgs. 102-105.

tativo del sistema, punto que en el instante $\bar{t}+dt$ ocupa la posición Q'' cuando la onda de Hamilton está en Σ'. Por lo tanto, en el mismo intervalo dt durante el cual dicha onda pasa de Q a Q', aquel punto lo hace de Q a Q'' y entre las componentes de ambos corrimientos existen las relaciones

$$\frac{\delta q^i}{dq^i} = \frac{H}{p_m \dot{q}^m}$$

Cualquiera que sea la métrica que se elija, por lo tanto, la razón de velocidades será

$$\text{(I.17)} \qquad \frac{\bar{v}}{v} = \frac{\delta q^i}{dq^i} = \frac{H}{p_m \dot{q}^m}.$$

Este resultado, del que haremos uso más adelante, es independiente de la significación mecánica que hemos atribuido a la función H y subsiste cualquiera que sea la función L de un problema de variación del tipo $\delta \int L(u^i, \dot{u}^i, s)\, ds = 0$. Además, el que no depènda de la métrica que se adopte en el espacio de las u^i permite una absoluta libertad en la elección de dicha métrica, elección en la que puede guiarnos la naturaleza del problema particular que se estudie. Si L es de la forma antes indicada

$$L = K_2(q^i, \dot{q}^i, t) + K_1(q^i, \dot{q}^i, t) + K_0(q^i, t) - V(q^i, t)$$

y, por ende,

$$H = K_2 - K_0 + V,$$

se tendrá

$$\frac{\bar{v}}{v} = \frac{K_2 - K_0 + V}{K_1 + 2K_2}.$$

En particular, si el sistema es conservativo en el sentido de Brillouin (1) - vínculos independientes del tiempo y constancia de la energía total $E = K + V$ -, la energía cinética se reduce al término K_2 y, por consiguiente,

$$\text{(I.18)} \qquad \frac{\bar{v}}{v} = \frac{K+V}{2K} = \frac{E}{2K} = \frac{E}{2(E-V)}$$

Cuando se trata de un único corpúsculo de masa m y se adopta como métrica la del espacio euclídeo de modo que $\frac{1}{2} m v^2 = E - V$, la velo-

(1) Brillouin, pg. 162

cidad $\bar{v}$ de la onda según esta métrica será

$$\bar{v} = \frac{E}{2(E-V)}\sqrt{\frac{2(E-V)}{m}} = \frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}}$$

o bien

$$\bar{v} = \frac{E}{\sqrt{2(E-V)}}$$

en la métrica de Schrödinger.(1)

6.- Establecidas ya estas generalidades supongamos que el sistema canónico

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad p_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

admite la función H de Hamilton como integral primera, esto es, que se conserva la energía generalizada - para lo cual es necesario y basta que $\frac{\partial H}{\partial t} \equiv 0$. Sea $C(E)$ el conjunto de todas las evoluciones del sistema que corresponden a un mismo valor E de la energía generalizada. En estas condiciones las trayectorias naturales del sistema son las extremales de la integral

$$\text{(I.19)} \qquad F = \int_{Q_0}^{Q} p_i \, dq^i$$

respecto de todas las trayectorias infinitamente próximas que pasan por las posiciones inicial y final del sistema y que satisfacen la relación $H(q^i, p_i) = E$. El valor F de la integral (I.19) es la variación de la acción en el sentido de Maupertuis al pasar de Q_0 a Q , o simplemente la acción de Maupertuis.

Cabe dar otra forma a la integral (I.19) partiendo de las relaciones

$$K_2 - K_0 + V = E, \qquad K_2(dq^i) = K_2(\dot{q}^i)(dt)^2.$$

Se tiene, en efecto

$$p_i \, dq^i = \left(\frac{\partial K_2}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial K_1}{\partial \dot{q}^i}\right) dq^i = \frac{\partial K_2}{\partial \dot{q}^i} dq^i + K_1(dq^i)$$

y

$$\frac{dq^1}{\dot{q}^1} = \cdots = \frac{dq^2}{\dot{q}^2} = dt = \frac{\sqrt{K_2(dq)}}{\sqrt{K_2(\dot{q})}} = \frac{\sqrt{K_2(dq)}}{\sqrt{E-V+K_0}},$$

(1) Ann. Physik, 79, 1926, pg. 494.

de donde

$$p_i\, dq^i = 2K_2(\dot{q})\frac{\sqrt{K_2(dq)}}{\sqrt{E-V+K_0}} + K_1(dq) = \sqrt{2(E-V+K_0)}\,\sqrt{2K_2(dq)} + K_1(dq)$$

o sea

$$F = \int_{Q_0}^{Q}\left\{\sqrt{2(E-V+K_0)}\,\sqrt{M_{ij}\,dq^i dq^j} + M_i\, dq^i\right\},$$

si $2K_2 = M_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j$ y $2K_1 = M_i\dot{q}^i$. Los coeficientes M_{ij} son los <u>coeficientes de inercia</u> del sistema respecto de la referencia (q^i) del espacio de las configuraciones. Las trayectorias, por lo tanto, consideradas como línea geométricas del C_n, independientemente de la ley de movimiento a lo largo de ellas del punto representativo del sistema, resultan como extremales del problema de variación $\delta\int_{Q_0}^{Q} p_i\, dq^i = 0$. Si $q^i = q^i(\lambda)$ son las ecuaciones de una de esas extremales - la que pasa por Q_0 y Q, por ejemplo- la ley de movimiento resulta de la inversión de la integral

$$t - t_0 = \pm\int_{\lambda_0}^{\lambda}\sqrt{\frac{M_{ij}\frac{dq^i}{d\lambda}\frac{dq^j}{d\lambda}}{2(E-V+K_0)}}\, d\lambda$$

lo que define el parámetro λ como función del tiempo y, por ende, en último término, las coordenadas q^i como funciones de t.

7.- Cuando los vínculos y V son independientes del tiempo (sistemas conservativos) todos los M_i y K_0 son nulos, la energía cinética K coincide con la forma cuadrática K_2 y $E = K + V$ En tal caso el principio de Maupertuis está expresado por la condición

$$\delta\int_{Q_0}^{Q}\sqrt{2(E-V)}\,\sqrt{M_{ij}\,dq^i dq^j} = 0. \qquad \text{(I.20)}$$

Ahora bien, puesto que la forma cuadrática diferencial $M_{ij}\,dq^i dq^j$ es definida positiva, la determinación métrica $ds^2 = M_{ij}\,dq^i dq^j$ es riemanniana en sentido estricto. Luego si convenimos en introducir en la variedad C_n, amorfa hasta ahora, las conexiones afín y métrica más restrictivas compatibles con aquella determinación, el espacio de las configuraciones pasará a ser un espacio riemanniano en sentido estricto. Llamaremos a esta métrica intro-

ducida en el espacio de las configuraciones la métrica de Schrödinger asociada al problema dinámico. Que sepamos, ha sido Schrödinger, en efecto, el primero en usar sistemáticamente de una tal métrica,(1) aunque existían precedentes de traducción al lenguaje geométrico de ciertos conceptos mecánicos.(2)

La ecuación (I.14) de Hamilton-Jacobi, que en el caso que consideramos se reduce a

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2} M^{ij} \frac{\partial W}{\partial q^i} \frac{\partial W}{\partial q^j} + V = 0,$$

o también a

$$M^{ij} \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial q^j} = 2(E-V),$$

supuesto $W = F - Et$, expresa que el cuadrado del módulo del vector covariante grad $F = \left(\frac{\partial F}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial q^n}\right)$ es igual precisamente a $2(E-V)$. Con él coincide, por otra parte, el grad W. Merced a la introducción de la métrica de Schrödinger es posible interpretar la relación existente entre los vectores $p_i = \frac{\partial W}{\partial q^i} = \frac{\partial F}{\partial q^i}$ y el $\dot{q}^i$. Imaginemos el conjunto de trayectorias de energía E que parten de Q_0 (fig. 1) y la onda de Hamilton de origen en Q_0 en el instante t_0. Esta onda coincide sucesivamente con las hipersuperficies $F = W_0 + Et$, donde

$$F(q_0^i, q^i) = \int_{Q_0}^{Q} \sqrt{2(E-V)}\, ds + (W_0 + Et_0), \qquad (ds^2 = M_{ij}\, dq^i dq^j)$$

Sea $F = C_1$ una cualquiera de estas hipersuperficies, Q un punto de ella y $\dot{q}^i$ las componentes de la velocidad en Q del punto representativo del sistema que ~~reune~~ recorre la extremal $Q_0 Q$. El momento conjugado correspondiente p_i es normal a dicha superficie, dado que cualquiera que sea δq^i, tangente a ella, es $\frac{\partial F}{\partial q^i} \delta q^i = 0$ y, por lo tanto, $p_i\, \delta q^i = 0$. Pero las componentes covariantes de $\dot{q}^i$ son

$$(\dot{q})_i = M_{ij} \dot{q}^j = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial (K-V)}{\partial \dot{q}^i} = p_i \;;$$

luego $\dot{q}^i$, esto es, la extremal $Q_0 Q$, es ortogonal a la hiper-

(1) Schrödinger, loc. cit. pg. 491.

(2) Whittaker, pgs. 254 y s. s.

superficie $F = C_1$ y, por ende, a la posición de la onda de Hamilton en el instante t dado por $W_0 + Et = C_1$.

Del principio de Maupertuis se sigue además que las extremales del problema dinámico coinciden con las geodésicas de la métrica de Schrödinger en ausencia de campo agente $(V = C^{te})$, pero no si éste existe. Por este motivo y si pretendemos que dichas extremales coincidan con las geodésicas relativas a una cierta métrica, deberemos adoptar como forma fundamental de la métrica riemanniana no la de Schrödinger, sino la

$$(I.\ 21) \qquad ds'^2 = 2(E-V)\, M_{ij}\, dq^i dq^j \quad (1)$$

que resulta de ella mediante una transformación conforme. (2) La adopción de esta nueva métrica no modifica en modo alguno las relaciones angulares que se daban de acuerdo con la métrica primitiva - por ejemplo, las trayectorias que parten de Q siguen siendo ortogonales a las sucesivas posiciones de la onda de Hamilton de origen en Q. Pero sí, en cambio, quedan alteradas las propiedades métricas no angulares - por ejemplo grad F = grad W es ahora un vector unitario, puesto que las componentes contravariantes del nuevo tensor fundamental de la métrica son $g^{ik} = \frac{M^{ik}}{2(E-V)}$.

La transformación conforme

$$g_{ik} = 2(E-V)\, M_{ik}$$

permite, por lo tanto, interpretar las trayectorias naturales del sistema como geodésicas del espacio riemanniano que resulta de introducir en C_n la métrica riemanniana g_{ik}. Conviene insistir en que este resultado se consigue mediante una <u>transformación conforme</u> y no acudiendo a un cambio de coordenadas en el C_n (3)

---

(1) Cf. Whittaker, pg. 254, Brillouin, pgs. 146 y 165

(2) Schouten, pg. 168.

(3) No deja de ser sorprendente el siguiente párrafo de Jean Mariani (Journ. de Physique, 1939, pg. 298) "Le problème de la dynamique des systèmes est ainsi ramené à un problème de dynamique du point matériel dans l'espace q (introduciendo en este la métrica $M_{ik}\, dq^i dq^k$); à son tour, ce dernier peut être réduit à un problème purement géometrique, en introduisant une extension en configuration nouvelle, dont les coordonnées q'^i son telles que $dq'^i = \sqrt{2(E-V)}\, dq^i$ et qui est par conséquent applicable conformement sur la multiplicité defini par les q^i ". Evidentemente no puede tratarse de un simple cambio de coordenadas - de una transformación puntual entre dos espacios, si se quiere - pues las relaciones de definición que adopta, $dq'^i = \sqrt{2(E-V)}\, dq^i$ no cumplen las condiciones de integrabilidad.

8.- Evidentemente no será siempre posible el establecer una métrica riemanniana en el C_n que esté intrínsecamente ligada al problema dinámico, en el sentido de que la evolución del sistema se pueda describir como movimiento del punto representativo del mismo a lo largo de una geodésica. En algunos casos la identificación aproximada puede efectuarse en el "espacio-tiempo", $C_n \times t$, conforme ha demostrado Brillouin.(1) En efecto, definamos en el $C_n \times t$ la métrica riemanniana

$$dS^2 = (A + 2K - 2V)\,dt^2, \qquad (2K = M_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j + 2M_i\dot{q}^i + 2K_0),$$

donde A es una constante muy grande respecto de K y de V. Las componentes $g_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n)$ del tensor métrico son, pues,

$$\begin{cases} g_{00} = A + 2K_0 - 2V, & (q^0 = t) \\ g_{0i} = g_{i0} = M_i, \\ g_{ij} = M_{ij} \end{cases}$$

y las ecuaciones diferenciales de las geodésicas, en función del parámetro afín, S, serán

$$\frac{d}{dS}\left(g_{\alpha\beta}\frac{dq^\beta}{dS}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\alpha}\frac{dq^\mu}{dS}\frac{dq^\nu}{dS} = 0,$$

o también

$$\frac{d}{dS}\left(p_\alpha\frac{dt}{dS}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{dS}\right)^2\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\mu\dot{q}^\nu = 0, \qquad \left(\dot{q}^\mu = \frac{dq^\mu}{dt}\right)$$

donde p_α son las componentes covariantes del vector $\dot{q}^\beta$:

$$p_\alpha = g_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta. \qquad (\dot{q}^0 = 1)$$

En particular

$$\begin{cases} p_i = g_{i\beta}\dot{q}^\beta = M_i + M_{ij}\dot{q}^j = \dfrac{\partial K}{\partial \dot{q}^i}, \\ p_0 = g_{0\beta}\dot{q}^\beta = A + 2K_0 - 2V + K_1. \end{cases}$$

Ahora bien, $g_{\mu\nu}\dot{q}^\mu\dot{q}^\nu = A + 2K - 2V$; luego

$$p_\alpha\frac{d^2t}{dS^2} + \left(\frac{dt}{dS}\right)^2\left[\frac{dp_\alpha}{dt} - \frac{\partial(K-V)}{\partial q^\alpha}\right] = 0,$$

es decir

$$\text{(I.22)} \qquad p_\alpha\frac{\frac{d^2t}{dS^2}}{\left(\frac{dt}{dS}\right)^2} + \frac{dp_\alpha}{dt} - \frac{\partial(K-V)}{\partial q^\alpha} = 0.$$

---

(1) Brillouin, pg. 152. El razonamiento que sigue difiere algo del de Brillouin.

Además

$$\frac{\frac{d^2t}{ds^2}}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2} = -\frac{\frac{d(K-V)}{dt}}{A+2K-2V}$$

de suerte que se puede prescindir del primer término en (I.22) si A es suficientemente grande y para $\alpha = 1, 2, \ldots, n$. Obtenemos así

$$\frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial(K-V)}{\partial q^i} \simeq 0, \qquad \text{(Lagrange)}$$

es decir, las ecuaciones de Lagrange como primera aproximación. En cuanto a la ecuación (I.22) para $\alpha = 0$, resulta:

$$-\frac{A+2K_0-2V+K_1}{A+2K-2V}\,\frac{d(K-V)}{dt} + \frac{d(A+2K_0-2V+K_1)}{dt} - \frac{\partial(K-V)}{\partial t} = 0,$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{K_1+2K_0}{A+2K-2V}\,\frac{d(K-V)}{dt} + \frac{d(K_0-K_1-V)}{dt} - \frac{\partial(K-V)}{\partial t} = 0\ ;$$

luego

$$\frac{K_1+2K_0}{A+2K-2V}\,\frac{d(K-V)}{dt} - \frac{dH}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

y para A suficientemente grande

$$\frac{dH}{dt} - \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \simeq 0$$

que es la ecuación clásica relativa a la energía generalizada.

9.- Veremos en lo que sigue que el espacio adecuado a una lente electrónica estática de tipo eléctrico es un espacio riemanniano euclídeo-conforme (1), mientras que las que resultan de la superposición de un campo eléctrico y de un campo magnético estáticos requieren una métrica de un muy otro carácter. La razón física de ello es obvia: la acción del campo eléctrico sobre un corpúsculo dotado de carga no depende ni de la dirección ni del sentido en que aquél se mueve; la del campo magnético, en cambio, varía no sólo con la dirección del movimiento, sino también con su sentido. Las geodésicas de un espacio riemanniano no pueden,

(1) Schouten, pg. 169.

por lo tanto, coincidir con las trayectorias de los corpúsculos cargados que se mueven en una lente del tipo últimamente citado: aquéllas son esencialmente reversibles, éstas no.

La propiedad del campo magnético que acabamos de recordar, ese depender la acción del campo de la dirección y sentido en que se mueve el corpúsculo, presenta una gran analogía con la estructura que muestran los espacios de Finsler.(1) Y, en efecto, demostraremos más adelante que a cada lente electrónica eléctrica y magnética corresponde, por modo intrínseco, un espacio de Finsler cuyas geodésicas coinciden con las trayectorias posibles de un corpúsculo de energía dada que se mueve en el campo de aquélla.

---

(1) P. Finsler, "Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen" Dissert., Göttingen, 1918.

II.- EL ESPACIO EUCLIDEO-CONFORME ASOCIADO A UNA LENTE ELECTRONICA ELECTRICA.

10.- Conforme hicimos notar en el § 5 a cada problema de variación $\delta\int L(u^i, \dot{u}^i, s)\,ds = 0$, caracterizado por una determinada función de Lagrange L , podemos vincular ciertas hipersuperficies que interpretábamos como hipersuperficies móviles en el espacio C_n de las u^i al atribuir a la variable s la significación de variable temporal y a las que dimos el nombre de ondas de Hamilton. Vimos, además, que entre la velocidad $\bar{v}$ con que se mueve en el instante t un punto $Q(q^i)$ de la onda de Hamilton de origen $Q_0(q_0^i)$ en el instante t_0 a lo largo de la extremal $(q^i, t) - (q_0^i, t_0)$ y la velocidad v , en el mismo instante del punto que describe ésta existe la relación (I.17),

$$\text{(I.17)} \qquad \frac{\bar{v}}{v} = \frac{H(q^i, p_i, t)}{p_m \dot{q}^m},$$

independiente de la métrica adoptada en C_n para definir la distancia entre dos puntos infinitamente próximos, definición que a su vez es necesaria si pretendemos hablar de <u>valor</u> de la velocidad.

11.- Consideremos en particular la función de Lagrange relativista que corresponde al movimiento de un corpúsculo de masa , en reposo m y carga eléctrica e bajo la acción de un campo eléctrico de potencial electrostático ϕ y de un campo magnético determinado por el potencial vector $\vec{A}$:

$$\text{(II.1)} \qquad L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + e\,\vec{A}\times\vec{v} - e\phi\,.$$

En esta expresión e , ϕ y $\vec{A}$ se suponen medidos en unidades electromagnéticas CGS y c es la velocidad de la luz. Elegido un sistema cualquiera de coordenadas curvilíneas x^i en el <u>espacio</u> ambiente (euclídeo), la función L se escribe

$$\text{(II.1')} \qquad L = -mc^2\left(1-\frac{1}{c^2}\gamma_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k\right)^{\frac{1}{2}} + e\,A_i\dot{x}^i - e\phi\,, \qquad (i=1,2,3),$$

donde γ_{ik} son las componentes en coordenadas curvilíneas del tensor de la métrica euclídea, A_i las componentes covariantes del potencial vector y $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$ las componentes contravariantes del vector velocidad. Las componentes covariantes del campo eléctrico $\vec{E}$ son

$$\text{(II.2)} \qquad \vec{E} = \left(-\frac{\partial\phi}{\partial x^1}, -\frac{\partial\phi}{\partial x^2}, -\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\right).$$

En cuanto al campo magnético, sus componentes naturales constituyen el tensor covariante de segundo orden antisimétrico

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}.$$

Este carácter antisimétrico permite definirlo mediante la densidad vectorial contravariante

$$\mathcal{H}^k = F_{ij}, \qquad (ijk) = \text{permutación par de } 1,2,3.$$

o lo que es lo mismo, por medio del vector contravariante

$$\text{(II.3)} \qquad H^k = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\mathcal{H}^k = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} F_{ij}. \qquad (\gamma = \|\gamma_{ik}\|)$$

Las funciones ϕ y A_i no pueden ser cualesquiera, sino que están sujetas a las condiciones

$$\Delta\phi = -4\pi c^2\rho, \qquad \Delta\vec{A} = -4\pi\vec{i}$$

que se reducen a

$$\text{(II.4)} \qquad \Delta\phi = 0 \qquad \Delta\vec{A} = 0$$

si son nulos en el dominio del espacio que consideramos la densidad ρ de las cargas libres y el vector intensidad $\vec{i}$. Δ es el operador de Laplace

$$\Delta \equiv \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\gamma}\,\gamma^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\right).$$

De (II.1') se deducen desde luego los impulsos conjugados

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{m\gamma_{ik}\dot{x}^k}{\sqrt{1-\beta^2}} + eA_i, \qquad \left(\beta = \frac{v}{c}\right)$$

suma del impulso cinético $\frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}}$ y del impulso potencial eA_i, y la función de Hamilton

$$H = p_i\dot{x}^i - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + e\phi,$$

suma de la energía en reposo del corpúsculo y de su energía cinética y de la energía potencial $e\phi$. *Dado que* H *no depende explícitamente del tiempo existe conservación de la energía y podemos escribir*

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + e\phi = mc^2 + eV_0 ,$$

donde V_0 es el potencial del campo eléctrico en aquellos puntos en que se anula la velocidad v del corpúsculo. En lo que sigue tomaremos la ecuación anterior en la forma

$$\text{(II.5)} \qquad \frac{\eta c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \phi = \eta c^2 + V_0 , \qquad \eta = \frac{m}{e}$$

de la que se deduce que si el campo es puramente magnético, la velocidad v del corpúsculo es constante.

12.- Esto sentado la razón $\bar{v} : v$ entre la velocidad de la onda de Hamilton y la del corpúsculo vale, en virtud de (I.17),

$$\frac{\bar{v}}{v} = \frac{\dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + e\phi}{\dfrac{mv^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + e\vec{A}\times\vec{v}}$$

de donde

$$\bar{v} = \frac{\dfrac{\eta c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \phi}{\dfrac{\eta v}{\sqrt{1-\beta^2}} + \vec{A}\times\vec{s}_0} = \frac{V_0 + \eta c^2}{\dfrac{\eta v}{\sqrt{1-\beta^2}} + \vec{A}\times\vec{s}_0} .$$

El vector $\vec{s}_0$ que aparece en el segundo miembro es el vector unitario <u>euclídeo</u> tangente a la trayectoria del corpúsculo y acorde con el sentido del movimiento de éste. Ahora bien, la relación (II.5 nos define v como función de punto. Se tiene, en efecto,

$$\text{(II.6)} \qquad \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{V_0-\phi}{c^2} + \eta , \qquad v = \varepsilon \frac{\sqrt{(V_0-\phi)\left(\frac{V_0-\phi}{c^2} + 2\eta\right)}}{\frac{V_0-\phi}{c^2} + \eta} ,$$

$$\frac{\eta v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \varepsilon\sqrt{(V_0-\phi)\left(\frac{V_0-\phi}{c^2} + 2\eta\right)} , \qquad (\varepsilon\eta = |\eta|) .$$

Luego obtenemos en definitiva

$$\text{(II.7)} \qquad \bar{v} = \frac{V_0 + \eta c^2}{\varepsilon\sqrt{(V_0-\phi)\left(\frac{V_0-\phi}{c^2} + 2\eta\right)} + \vec{A}\times\vec{s}_0} ,$$

fórmula que expresa la velocidad $\bar{v}$ de la onda de Hamilton en función del punto $Q(x^i)$ y de la dirección y sentido, $\vec{s}_0$, del movimiento.

Por otra parte, el principio de Maupertuis $\delta\int p_i\, dq^i = 0$ nos permite afirmar que las posibles trayectorias del corpúsculo (m,e) de energía total mc^2+eV_0 son las extremales de la integral

$$\int p_i\, dq^i = \int p_i\, \dot{q}^i\, dt = \int \frac{H}{\bar{v}}\, v\, dt = \int \frac{H}{\bar{v}}\, ds_1$$

siendo ds_1 el elemento lineal euclídeo: $ds_1^2 = \gamma_{ik}\, dx^i\, dx^k$. Dichas trayectorias, por lo tanto, son los rayos de la óptica geométrica de un medio, no-homogéneo y no-isótropo en general, caracterizado por el índice de refracción $n \sim \frac{H}{\bar{v}}$:

$$\text{(II.8)} \qquad n(Q,\vec{s}_0) = \frac{c}{V_0+\eta c^2}\left[\varepsilon\sqrt{(V_0-\phi)\left(\frac{V_0-\phi}{c^2}+2\eta\right)} + \vec{A}\times\vec{s}_0\right], \qquad (1)$$

rayos que son las extremales de $\delta\int n\, ds_1 = 0$ (principio de Fermat). Las ondas de Hamilton son precisamente las superficies de onda de esta óptica geométrica y $\bar{v}$ la velocidad de fase.

En la definición (II.8) del índice n se da una indeterminación que procede de que V_0 está determinado salvo una constante aditiva. No así el factor entre paréntesis que lo está unívocamente. V_0 , potencial de un punto en que es nula la velocidad del corpúsculo, coincide sensiblemente con el potencial del cátodo cuando aquél es un electrón de incandescencia. Se suele tomar dicho potencial como potencial cero con lo que n queda determinado sin ambigüedad. De todos modos si en vez de tomar V_0 como potencial del cátodo se toma el valor V_0' , ello no tiene otra consecuencia que multiplicar el índice n por un factor constante :

$$n' = \frac{V_0+\eta c^2}{V_0'+\eta c^2}\, n$$

lo que, a su vez, no repercute en absoluto en las trayectorias del corpúsculo posibles.

---

(1) Cf. W. Glaser, Über optische Abbildung durch mechanische Systeme und die Optik Allgemeiner Medien (Ann. Physik, 1933, 18, 557-585). La expresión que da del índice de refracción, que llama μ no es correcta lo que es debido a un error en el cálculo de ηv. En el valor de este producto no ha tenido en cuenta, en efecto, que η puede ser positivo o negativo y, además, falta en él el factor $\frac{1}{c}$.

13.- Las consideraciones generales que preceden las aplicaremos a la óptica electrónica, es decir, el corpúsculo (m,e) será un electrón como valores característicos del cual tomaremos

$$m = 9{,}108 \cdot 10^{-28}\ gr, \qquad \frac{e}{m} = -1{,}759 \cdot 10^{7}$$
$$e = -1{,}602 \cdot 10^{-20} \qquad \frac{m}{e} = -5{,}685 \cdot 10^{-8} \quad \Big\}\ u.e.m.\ C.G.S.$$

Además en las fórmulas que preceden, deberá hacerse $\varepsilon = -1$. En óptica electrónica se considera el electrón como prácticamente libre, es decir, se prescinde de los procesos que resultan de choques de los electrones entre sí o con moléculas de gas. Las trayectorias, por lo tanto, dependerán sólo de la acción de los campos dados, eléctrico, magnético o eléctrico y magnético, campos que supondremos estáticos. En cuanto a la adopción del valor (II.8) o el aproximado

$$n \sim -\sqrt{2\eta(V_0-\phi)} + \vec{A}\times\vec{s}_0\,,$$

todo depende del orden de magnitud de $\frac{V_0-\phi}{c^2}$ respecto de η, o lo que en el fondo es lo mismo, de que pueda prescindirse o no de la variación de la masa con la velocidad. Para potenciales del orden de 500 kV, $\frac{V_0-\phi}{c^2}$ es ya igual a η. Sin embargo, el potencial acelerador en los microscopios electrónicos suele ser, como máximo, de 50 a 80 kV y, generalmente, bastante menor. Hasta 10 kV puede prescindirse de la conexión relativista y tomar simplemente

$$n \sim \sqrt{2\eta(V_0-\phi)} - \vec{A}\times\vec{s}_0\,, \qquad v = -\frac{1}{\eta}\sqrt{2\eta(V_0-\phi)}\,. \qquad (\eta<0)$$

Si $\vec{A}=0$ y dentro de los límites de esta aproximación, el índice resulta ser igual al cociente $\beta = v/c$, supuesto normalizado n a base de la condición $V_0 = 0$. (1)

Recordaremos finalmente que, en rigor, el electrón no obedece a la mecánica relativista puntual clásica, de modo que ésta debe concebirse como una aproximación válida sólo para pequeños valores de la longitud de onda de de Broglie asociada al electrón, $\lambda = \frac{h}{mv}\sqrt{1-\beta^2} = \lambda_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}$ (2). En las condiciones normales hoy en óptica electrónica esta longitud de onda es suficientemente pequeña respecto de las dimensiones de los objetos que se examinan

(1) Brüche-Scherzer, pg. 49.

(2) λ_0 = longitud de onda de Compton $= \frac{h}{mc}$

y de la variación del índice de refracción electrónico n con la distancia como para poder limitarnos a la mecánica clásica, lo que vale tanto como ajustarnos a una a modo de mecánica geométrica en oposición a la ondulatoria. (1) Dicho con otras palabras, en la técnica electrónica que consideramos, el electrón se comporta siempre como corpúsculo. Y conste que al hablar de comportamiento corpuscular contraponiéndolo al ondulatorio, nos referimos a la dualidad de naturaleza entendida en el sentido que hoy se atribuye a tal palabra. De hecho, un solo electrón no se comporta como onda. Lo que ésta traduce es el comportamiento global de un enjambre de electrones. Con un solo electrón - y lo mismo vale para un solo fotón - no cabe obtener fenómenos de interferencia. En cambio, ello sí es posible cuando se dispone de una colectividad de electrones - o de fotones. La longitud de onda de la onda de de Broglie permite predecir y rige, la distribución de un enjambre homogéneno de electrones después que estos han atravesado una malla cristalina, ponemos por caso; pero es claro que los anillos de Debye-Scherrer no resultarán nunca con un único electrón. (2)

14.- Consideremos un dominio, $\mathcal{D}_e$, del espacio en el que se manifiesta un campo puramente eléctrico $(\vec{A}=0,\ \text{grad}\,\phi\neq 0)$ que presenta la simetría de revolución respecto de una recta. Del dominio $\mathcal{D}_e$ diremos que constituye una lente electrónica eléctrica (3 y llamaremos a dicha recta eje de la lente. La clasificación de las lentes de este tipo se hace atendiendo a los valores V del potencial ϕ a lo largo del eje.

La más sencilla de entre ellas, la lente de orificio (Lochblendenlinse), consiste en esencia en un condensador plano en una de cuyas armaduras B se ha practicado una abertura circular. Supuestas a distinto potencial una de otra, se origina un campo eléctrico de revolución en torno de la recta normal a las armaduras y que pasa por el centro de dicha abertura. En general se coloca además un tercer electrodo C , perpendicular asimismo al eje, dispuesto

(1) Brillouin, pgs. 197 y s.s.

(2) Cf. por ejemplo, Jean-Louis Destouches, Principes fondamentaux de Physique théorique, Paris, Hermann, 1942, vol III. pg. 807.

(3) Brüche-Scherzer, pgs. 33 y 58.

de modo que el electrodo *B* quede entre él y la otra armadura del condensador.(1) La distribución del potencial a lo largo del *eje depende de los potenciales de A, B y C y está esquemática*mente representada en la fig. 3.

Hemos supuesto planos los electrodos, aunque no siempre lo son, pero sí normales a un mismo eje. En realidad lo que caracteriza la lente de orificio es la existencia de un electrodo dotado de una abertura circular de plano normal al eje de la lente y la presencia de uno o más electrodos de modo que, en conjunto, se origine un campo eléctrico bien sea a la derecha, a la izquierda o a ambos lados del primero, es decir, medios, uno por lo menos de los cuales es de índice de refracción variable, no homogéneo.

De la combinación de dos o más de dos lentes de orificio resultan lentes electrónicas de tipo eléctrico, más o menos complicadas, que separan dos medios de índices de refracción eléctrica constante, esto es, de potenciales constantes. Si los índices de estos son iguales, se habla de una <u>lente simple</u> (fig. 4); si son distintos, se dice que la lente es una <u>lente de inmersión</u> (fig.5).

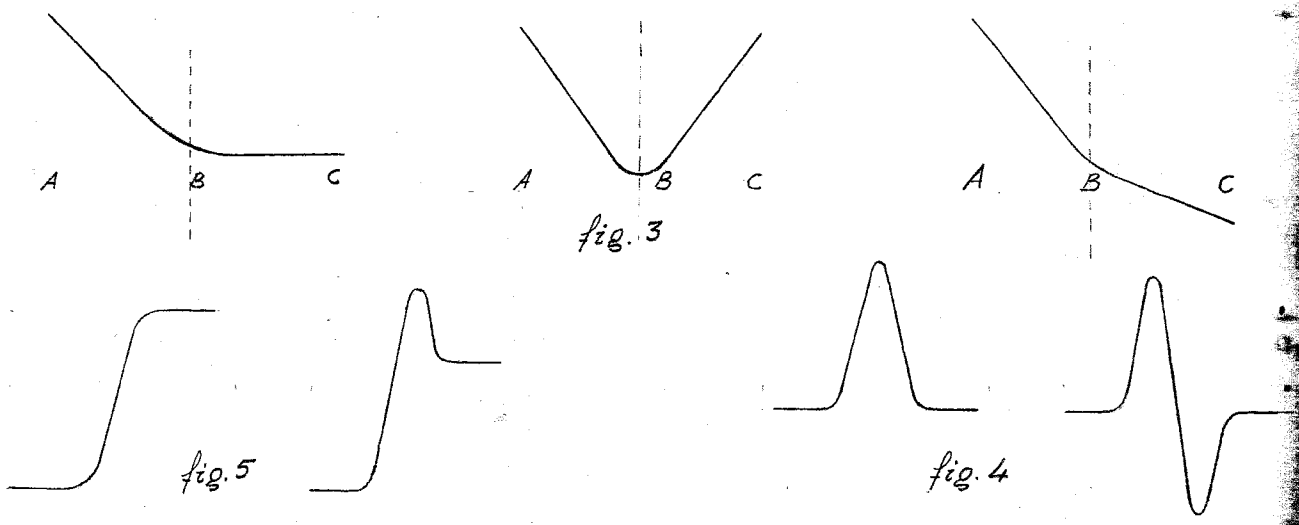


fig. 3

fig. 5

fig. 4

Al igual que en la óptica ordinaria, se distingue entre lentes electrónicas delgadas y gruesas, según sea pequeña o grande la razón entre la longitud del segmento del eje en que el campo eléc

(1) Picht, pg. 61.

(2) Brüche-Scherzer, pg. 58.

trico es diferente de cero y la distancia focal de la lente.[1]

15.- Sea, pues, $\mathcal{D}_e$ una lente electrónica eléctrica y elijamos como sistema de referencia un sistema de coordenadas cilíndricas cuyo eje z coincide con el eje de la lente. Este sistema de coordenadas curvilíneas en $\mathcal{D}_e$ subordina una referencia local $R(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ en cada punto P de $\mathcal{D}_e$ (fig.6). En el espacio base del campo eléctrico suponemos adoptada la métrica euclídea ordinaria, de modo que el cuadrado del elemento lineal en dicho ambiente y en aquel sistema es

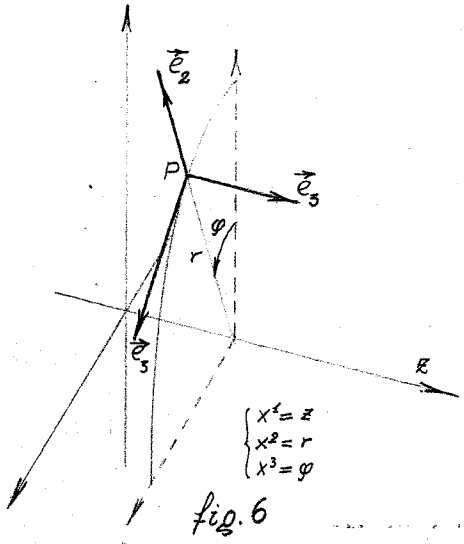


fig. 6

$$ds_1^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

En cuanto al potencial ϕ, será exclusivamente función de z y de r, pero no de φ, en virtud de la supuesta simetría en torno de z. Además, los efectos de la carga espacial sólo aparecen cuando un gran número de electrones se encuentran en pequeñas regiones del espacio o bien cuando éstos atraviesan un campo de cargas positivas (producidas acaso por ellos mismos al ionizar moléculas gaseosas con las que chocan [Gaskonzentration]). Para un potencial acelerador de 10 kV y una densidad de corriente electrónica de 10^{-3} A cm.$^{-2}$, la cual rara vez se presenta en óptica electrónica, un haz homogéneo de electrones que primitivamente se movían paralelamente al eje aumenta su sección en un 10 % a 63 cm. de la sección inicial. Prescindiremos, por ello, de tales efectos y, en consecuencia,

$$\text{(II.9)} \qquad \Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} = 0.$$ [2]

---

(1) Para la teoría de las lentes electrónicas, véase, p.e., la obra de Picht en particular los capítulos C. y D.

(2) La anulación de $\Delta\phi$ se traduce en un inconveniente solo evitable introduciendo singularidades en el campo (rejas): la curvatura de las superficies refractantes depende del índice de refracción.

Las trayectorias naturales de los electrones de igual energía (1) que atraviesan la lente son las extremales de la integral

$$\int \sqrt{(V_0-\phi)\left(\frac{V_0-\phi}{c^2}+2\eta\right)}\, ds_1$$

y coinciden, por lo tanto, con las geodésicas de la métrica euclídea-conforme

$$\text{(II.10)} \qquad ds^2 = \sigma\,(dz^2+dr^2+r^2 d\varphi^2)$$

donde hemos hecho, para abreviar,

$$\text{(II.11)} \qquad \sigma = (V_0-\phi)\left(\frac{V_0-\phi}{c^2}+2\eta\right).$$

La conexión métrica definida por (II.10) está ligada intrínsecamente a la lente $\mathcal{D}_e$ por lo cual la adoptaremos como métrica en el campo de la lente, independientemente de la métrica euclídea del espacio base de la misma (cf. con lo dicho en la introducción).

En la aproximación no-relativista, $\sigma = -2\eta(V_0-\phi)$ y

$$\text{(II.10')} \qquad ds^2 = -2\eta(V_0-\phi)\,\gamma_{ik}\,dx^i dx^k.$$

Evidentemente, si multiplicamos las longitudes euclídeas por la constante positiva k_1, el potencial $\phi - V_0$ por la k_2 y η por la k_3, la forma cuadrática (II.10') queda multiplicada por

$$K = k_1^2 k_2 k_3 > 0,$$

lo cual, por ser K una constante, no altera en absoluto las ecuaciones de las geodésicas correspondientes a la métrica (II.10'). Esto significa físicamente que en dos lentes electrónicas cuyos electrodos sean semejantes geométricamente y semejantemente dispuestos (razón de semejanza lineal k_1) y en las que la razón de los potenciales en los puntos homólogos es constante ($= k_2$), las trayectorias de todos los corpúsculos cuya $\eta = \frac{m}{e}$ tenga el mismo signo son semejantes en el espacio ordinario (razón de semejanza k_1) y recorridas en el mismo sentido. La invariancia de las ecuaciones de las geodésicas por

(1) Conseguir esta igual energía es uno de los problemas más difíciles de resolver, e incluso lo es el conseguir reducir los efectos a que da lugar el que deje de cumplirse esta condición (aberraciones cromáticas. Véase, por ejemplo, Picht, pg. 190, o von Ardenne, pg.47) Scherzer ha demostrado que las aberraciones cromáticas son prácticamente inevitables en la mayor parte de los casos (Z. f. Physik, 1936, 101, 593-603)

una tal transformación es, pues, la traducción geométrica de la <u>ley de semejanza</u>.[1]

16.- Según (II.10) las componentes covariantes del tensor métrico son, en el sistema de coordenadas adoptado,

$$\text{(II.11)} \qquad g_{ik} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma r^2 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \| g_{ik} \| = \sigma^3 r^2$$

y, por lo tanto, las componentes contravariantes del mismo serán

$$\text{(II.11')} \qquad g^{ik} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma r^2} \end{pmatrix}.$$

De ello se sigue que las referencias locales $R(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ son ortogonales, y que las longitudes de los vectores de base en P medidas con la unidad absoluta[2] son

$$|\vec{e}_1| = \sqrt{\sigma(P)}, \qquad |\vec{e}_2| = \sqrt{\sigma(P)}, \qquad |\vec{e}_3| = r\sqrt{\sigma(P)},$$

resultado que era de prever dada la forma de (II.10).

Para determinar las componentes Γ^i_{jk} de la conexión afín, formemos primero los símbolos de Christoffel de primera especie

$$\Gamma_{i,jk} = \left[{jk \atop i} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right).$$

Se obtiene así

$$\text{(II.12)} \begin{cases} \Gamma_{1,11} = \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial z}, \ \Gamma_{1,12} = \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial r}, \ \Gamma_{1,13} = 0, \ \Gamma_{1,22} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial z}, \ \Gamma_{1,23} = 0, \ \Gamma_{1,33} = -\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial \sigma}{\partial z} \\ \Gamma_{2,11} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial r}, \ \Gamma_{2,12} = \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial z}, \ \Gamma_{2,13} = 0, \ \Gamma_{2,22} = \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial r}, \ \Gamma_{2,23} = 0, \ \Gamma_{2,33} = -\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial \sigma}{\partial r} - r\sigma \\ \Gamma_{3,11} = 0, \ \Gamma_{3,12} = 0, \ \Gamma_{3,13} = \frac{1}{2} r^2 \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \ \Gamma_{3,22} = 0, \ \Gamma_{3,23} = \frac{1}{2} r^2 \frac{\partial \sigma}{\partial r} + r\sigma, \ \Gamma_{3,33} = 0 \end{cases}$$

de donde resultan fácilmente las componentes Γ^i_{jk} buscadas teniendo en cuenta (II.11') y dado que $\Gamma^i_{jk} = \left\{ {jk \atop i} \right\} = g^{ih} \Gamma_{h,jk}$:

---

(1) Brüche - Recknagel, pg. 14.

(2) Recuérdese que en todo espacio riemanniano el transporte de longitudes es integrable y que, por ende, las determinaciones métricas pueden suponerse contrastadas de modo tal que el transporte por congruencia no altere las longitudes. La unidad utilizada en contrastación es la unidad absoluta.

$$
(\mathrm{II}.12')\quad \begin{cases}
\Gamma^1_{11}=\frac{1}{2\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial z},\ \Gamma^1_{12}=\frac{1}{2\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial r},\ \Gamma^1_{13}=0,\ \Gamma^1_{22}=-\frac{1}{2\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial z},\ \Gamma^1_{23}=0,\ \Gamma^1_{33}=-\frac{1}{2\sigma}\\
\Gamma^2_{11}=-\frac{1}{2\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial r},\ \Gamma^2_{12}=\frac{1}{2\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial z},\ \Gamma^2_{13}=0,\ \Gamma^2_{22}=\frac{1}{2\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial r},\ \Gamma^2_{23}=0,\ \Gamma^2_{33}=-\frac{1}{2\sigma}\\
\Gamma^3_{11}=0,\ \Gamma^3_{12}=0,\ \Gamma^3_{13}=\frac{1}{2\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial z},\ \Gamma^3_{22}=0,\ \Gamma^3_{23}=\frac{1}{2\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial r}+\frac{1}{r},\ \Gamma^3_{33}=0
\end{cases}
$$

en las que, según (II.11)

$$
(\mathrm{II}.13)\quad \begin{cases}
\frac{1}{2\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial z}=-\frac{1}{\sigma}\left(\frac{V_0-\phi}{c^2}+\eta\right)\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{1}{\sigma}\left(\frac{V_0-\phi}{c^2}+\eta\right)E_z,\\
\frac{1}{2\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial r}=-\frac{1}{\sigma}\left(\frac{V_0-\phi}{c^2}+\eta\right)\frac{\partial\phi}{\partial r}=\frac{1}{\sigma}\left(\frac{V_0-\phi}{c^2}+\eta\right)E_r,
\end{cases}
$$

siendo E_z y E_r las componentes ordinarias del vector campo eléctrico $\vec{E}$.

Veamos cuál es la influencia de éste en el transporte por paralelismo. Sea u^i un vector, aplicado en $P(x^1, x^2, x^3)$ dado por sus omponentes contravariantes en la referencial local $R(P)$. Si mediante una translación lo llevamos al punto $P'(x^i+dx^i)$, sus componentes en la referencia $R(P'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ serán

$$
{}^*u^i = u^i + \delta u^i = u^i - \Gamma^i_{jk}\, u^j dx^k
$$

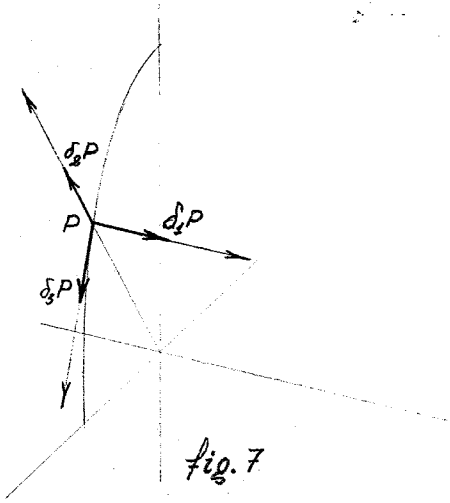


fig. 7

Consideremos en particular tres corrimientos, $\delta_i P$, uno en cada una de las direcciónes de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ y $\vec{e}_3$, es decir, paralelamente al eje de la lente el primero, en el plano meridiano que pasa por P y perpendicularmente al eje el segundo y normal en P a este plano el tercero (fig. 7)

Las matrices que representan las correspondientes afinidades infinitesimales son:

$$
(\mathrm{II}.14)\quad \begin{cases}
\delta_1 = -\frac{1}{\sigma}\left(\frac{V_0-\phi}{c^2}+\eta\right)\begin{pmatrix} E_z & E_r & 0\\ -E_r & E_z & 0\\ 0 & 0 & E_z\end{pmatrix} dz,\\
\delta_2 = -\frac{1}{\sigma}\left(\frac{V_0-\phi}{c^2}+\eta\right)\begin{pmatrix} E_r & -E_z & 0\\ E_z & E_r & 0\\ 0 & 0 & E_r\end{pmatrix} dr - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{r}\end{pmatrix} dr,\\
\delta_3 = -\frac{1}{\sigma}\left(\frac{V_0-\phi}{c^2}+\eta\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 & -r^2E_z\\ 0 & 0 & -r^2E_r\\ E_z & E_r & 0\end{pmatrix} d\varphi - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -r\\ 0 & \frac{1}{r} & 0\end{pmatrix} d\varphi
\end{cases}
$$

De su estructura se deduce: a) los corrimientos $d_1 P$ y $d_2 P$ conservan en el plano meridiano los vectores situados en él y perpendiculares al mismo los vectores que lo son a dicho plano; ningún vector se conserva, para el observador euclídeo del ambiente, salvo si en P el campo es nulo, en cuyo caso se conservan todos; b) el corrimiento de $d_3 P$ deja invariantes, para ese observador, los vectores del plano meridiano perpendiculares al campo eléctico y conserva todos los vectores si el campo es nulo.

Es fácil deducir de (II.14) que si transladamos el vector velocidad de un electrón de energía $mc^2 + eV_0$ que parte de P tangencialmente al eje local $\vec{e}_1$ al punto $P' = P + \vec{v}dt$, las componentes del vector transladado son proporcionales a las componentes de la velocidad del electrón en el punto P'. No podía dejar ello de ser así, en tanto que la trayectoria del mismo es una geodésica.

La suma de las tres matrices (II.14) nos da la matriz de la afinidad infinitesimal que enlaza los espacios vectoriales tangentes en dos puntos infinitamente próximos

$$\text{(II.15)} \qquad \delta = -\frac{1}{\sigma}\left(\frac{V_0-\phi}{c^2}+\eta\right)\begin{pmatrix} E_z\,dz + E_r\,dr & E_r\,dz - E_z\,dr & -r^2 E_z\,d\varphi \\ -E_r\,dz + E_z\,dr & E_z\,dz + E_r\,dr & -r^2 E_r\,d\varphi \\ E_z\,d\varphi & E_r\,d\varphi & E_z\,dz + E_r\,dr \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r\,d\varphi \\ 0 & \frac{d\varphi}{r} & \frac{dr}{r} \end{pmatrix}.$$

De las dos matrices sumandos, la primera es la que traduce la desviación del transporte riemanniano inducido por la métrica (II.10), - esto es, determinado por el campo eléctrico - respecto de la traslación puramente euclídea que está representada por la segunda matriz. Si en vez de coordenadas cilíndricas hubiésemos elegido en el ambiente un sistema de referencia cartesiano, los elementos de esta segunda matriz hubieran resultado ser, evidentemente, todos nulos.

17.- El estudio de la curvatura afín y riemanniana de la lente electrónica $\mathcal{D}_e$ requiere el conocimiento del tensor de curvatura de Riemann-Christoffel

$$R^{i}_{\cdot jkh} = \frac{\partial \Gamma^{i}_{jh}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial \Gamma^{i}_{jk}}{\partial x^{h}} + \Gamma^{i}_{rk}\Gamma^{r}_{jh} - \Gamma^{i}_{rh}\Gamma^{r}_{jk} . \qquad (1)$$

En virtud de las propiedades de simetría y antisimetría de las componentes covariantes R_{ijkh} de este tensor (2) las $n^4 = 81$ componentes covariantes se reducen a $\frac{1}{2} n^2(n^2-1) = 6$ independientes, cuyos valores, deducidos de (II.12), son

$$\text{(II.16)} \begin{cases} R_{2323} = \frac{1}{2\sigma} r^2\left(\frac{\partial\sigma}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{4\sigma} r^2\left(\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right)^2 - \frac{r^2}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma}{\partial r} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial r^2}\right), & R_{2312} = 0 , \\ R_{3131} = \frac{1}{2\sigma} r^2\left(\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{4\sigma} r^2\left(\frac{\partial\sigma}{\partial r}\right)^2 - \frac{r^2}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma}{\partial r} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2}\right), & R_{3123} = -\frac{3}{4\sigma} r^2 \frac{\partial\sigma}{\partial r}\frac{\partial\sigma}{\partial z} + \frac{1}{2} r^2 \frac{\partial^2\sigma}{\partial z\,\partial r} , \\ R_{1212} = \frac{1}{2\sigma}\left[\left(\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial r}\right)^2\right] - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial r^2}\right), & R_{1231} = 0 . \end{cases}$$

De ellos se siguen, por elevación de índices mediante (II.11') y teniendo en cuenta las condiciones antes citadas, las componentes $R^{i}_{\cdot jkh}$ del tensor de curvatura. No tiene gran interés el explicitarlas; pero sí lo tiene, en cambio, transformar las fórmulas (II.16) poniendo de manifiesto las magnitudes físicas que involucran. Observemos en primer lugar que, de acuerdo con las fórmulas (II.13), para las derivadas parciales de σ valen las siguientes relaciones:

$$\text{(II.17)} \begin{cases} \left(\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial r}\right)^2 = 4\left(\frac{V_0-\phi}{c^2} + \eta\right)^2 E^2, & \left(E^2 = E_z^2 + E_r^2\right) \\ \frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2} = \frac{2}{c^2} E_z^2 - 2\left(\frac{V_0-\phi}{c^2} + \eta\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}, & \frac{\partial^2\sigma}{\partial r^2} = \frac{2}{c^2} E_r^2 - 2\left(\frac{V_0-\phi}{c^2} + \eta\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} . \end{cases}$$

de las que se deduce fácilmente

$$\Delta\sigma \equiv \frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma}{\partial r} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial r^2} = \frac{2}{c^2} E^2 - 2\left(\frac{V_0-\phi}{c^2} + \eta\right)\Delta\phi . \qquad (3)$$

Pero en virtud de la hipótesis (II.9), $\Delta\phi = 0$; luego

$$\text{(II.18)} \qquad \Delta\sigma = \frac{2}{c^2} E^2 .$$

Esto sentado, la nueva forma de las componentes R_{ijkh} es

---

(1) Schouten, pg. 86; Brillouin, pg. 88. Las notaciones empleadas varían bastante de unos autores a otros. Aquí seguimos la de Brillouin, lo que trae consigo que algunas fórmulas aparezcan con signo contrario a aquel con que se encuentran en Schouten.
(2) Schouten, pgs. 87-89; Brillouin, ecuaciones VII. 83, 89 y 90.
(3) Con el símbolo Δ representamos aquí la laplaciana euclídea (cf. § 11)

$$
(\text{II.19})\quad \begin{cases}
R_{2323} = r^2\left\{\left[\frac{2}{\sigma}\left(\frac{V_0-\phi}{c^2}+\eta\right)^2-\frac{1}{c^2}\right]E_r^2-\frac{1}{\sigma}\left(\frac{V_0-\phi}{c^2}+\eta\right)^2E_z^2+\left(\frac{V_0-\phi}{c^2}+\eta\right)\frac{\partial E_z}{\partial z}\right\}, \\[2ex]
R_{3131} = r^2\left\{\left[\frac{2}{\sigma}\left(\frac{V_0-\phi}{c^2}+\eta\right)^2-\frac{1}{c^2}\right]E_z^2-\frac{1}{\sigma}\left(\frac{V_0-\phi}{c^2}+\eta\right)^2E_r^2+\left(\frac{V_0-\phi}{c^2}+\eta\right)\frac{\partial E_r}{\partial r}\right\}, \\[2ex]
R_{1212} = \left[\frac{2}{\sigma}\left(\frac{V_0-\phi}{c^2}+\eta\right)^2-\frac{1}{c^2}\right]E^2+\frac{1}{r}\left(\frac{V_0-\phi}{c^2}+\eta\right)E_r \\[2ex]
R_{2312} = 0, \quad R_{3123} = -r^2\left\{\left[\frac{3}{\sigma}\left(\frac{V_0-\phi}{c^2}+\eta\right)^2-\frac{1}{c^2}\right]E_rE_z-\left(\frac{V_0-\phi}{c^2}+\eta\right)\frac{\partial E_z}{\partial r}\right\}, \quad R_{1231}=0
\end{cases}
$$

o bien, introduciendo la velocidad v en vez del potencial,

$$
(\text{II.19'})\quad \begin{cases}
R_{2331} = r^2\left[\left(\frac{2}{v^2}-\frac{1}{c^2}\right)E_r^2-\frac{1}{v^2}E_z^2+\frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial E_z}{\partial z}\right], \qquad R_{2312}=0, \\[2ex]
R_{3131} = r^2\left[\left(\frac{2}{v^2}-\frac{1}{c^2}\right)E_z^2-\frac{1}{v^2}E_r^2+\frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial E_r}{\partial r}\right], \quad R_{3123} = r^2\left[-\left(\frac{3}{v^2}-\frac{1}{c^2}\right)E_rE_z+\frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial E_z}{\partial r}\right], \\[2ex]
R_{1212} = \left(\frac{2}{v^2}-\frac{1}{c^2}\right)E^2+\frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{1}{r}E_r
\end{cases}
$$

Lo mismo (II.19) que (II.19') muestran cómo se pueden deducir de los resultados de mediciones <u>puramente físicas</u> las componentes del tensor de Riemann-Christoffel ligado a la lente $\mathcal{D}_e$.

18.- Sea P un punto de $\mathcal{D}_e$ y π una orientación plana que lo contiene, orientación definida, por ejemplo, por un bivector; sea S una superficie cualquiera que pasa por P y posee en él aquella orientación. Supongamos, además, que en S, en un cierto entorno de P, se ha trazado un doble sistema simplemente infinito de líneas tales que por cada punto de dicho entorno pasa una sola línea de la primera familia y una sola línea de la segunda sin ser tangentes entre sí. Finalmente, designemos con d_1 y d_2 las diferenciales respecto de los parámetros v_1 y v_2 a que están referidas las líneas de los dos sistemas. $(d_1 d_2 x^i = d_2 d_1 x^i)$.

Por el punto P_1 de la línea $v_2 = C^{te}$ que pasa por P e infinitamente próximo a P, pasa una línea $v_1 = C^{te}$; por el punto de la línea $v_1 = C^{te}$ que pasa por P e infinitamente próximo pasa una línea $v_2 = C^{te}$. Sea $P_{12} \equiv P_{21}$ el punto de intersección de estas dos líneas próximo al P (fig. 8) y consideremos el

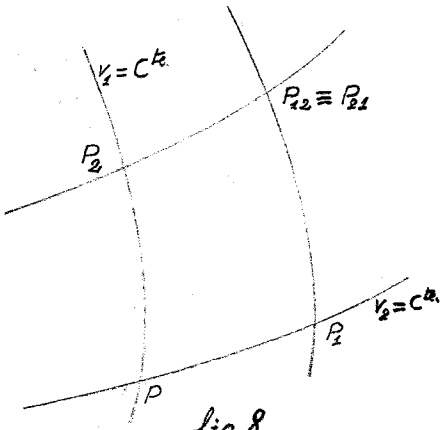


fig. 8

clo infinitesimal $P P_1 P_{12} P_2 P$. Siempre podemos suponer que el bivector $d_1 x^{[i} d_2 x^{k]} = dS^{ik}$ define la misma orientación π - en último término bastaría, si no, llamar d_2 a lo que hemos llamado d_1 y recíprocamente. Imaginemos ahora que transladamos un vector u^i del espacio vectorial Π tangente en P a $\mathcal{D}_e$ a lo largo del ciclo $P P_1 P_{12} P_2 P$, en este sentido precisamente, hasta llegar de nuevo a P . La translación se efectúa, claro está, por medio de las componentes Γ^i_{jk} de la conexión afín de $\mathcal{D}_e$. Tenemos así finalmente dos vectores aplicados en P , elementos por lo tanto de Π : el vector u^i y el $\overset{*}{u}{}^i$ que resulta de la translación. Se demuestra que, entre las componentes $\overset{*}{u}{}^i$ y u^i existen, en estas condiciones, las relaciones siguientes:(1)

$$\text{(II.20)} \qquad \overset{*}{u}{}^i = u^i - R^i_{\cdot jkh}\, u^j d_1 x^k d_2 x^h .$$

Esto nos dice que, fijado un ciclo de aquellas características, la correspondencia entre un vector u^i aplicado en P y su transladado hasta P a lo largo del ciclo es una homografía vectorial infinitésima que transforma en sí mismo el espacio vectorial, Π , tangente en P a $\mathcal{D}_e$. Esta homografía vectorial, es decir, la

$$\text{(II.20')} \qquad \overset{*}{u}{}^i = u^i + \Omega^i_j u^j ,$$

donde, siguiendo a Cartan, hemos designado con Ω^i_j la forma bilineal alternada $\Omega^i_j = - R^i_{\cdot jkh}\, d_1 x^k d_2 x^h$, es la llamada <u>homografía vectorial asociada al ciclo</u>. Los coeficientes Ω^i_j de la misma dependen, en efecto, tan solo de ésta.

Para que la homografía (II.20') se reduzca a la identidad es necesario y basta que $\Omega^i_j u^j = 0$ cualquiera que sea u^j , es decir, $\Omega^i_j = 0$. Si además pretendemos que ello valga para cualquier orie

(1) Cf. por ejemplo, Schouten, pg. 83, o Cartan, "Leçons sur la géométrie des spaces de Riemann" (Paris, Gauthir-Villars, 1928, pgs. 183 y 184). La demostración que de Brillouin (pgs. 87-88) no es correcta, pues se basa en la integrabilidad del transporte por paralelismo cuando substituye $\frac{\partial u^j}{\partial x^h}$ por $\Gamma^i_{kh} u^k$. Ni tan sólo tiene sentido hablar de una tal derivada, a menos de ser $R^i_{\cdot jkh} \equiv 0$.

tación, deberá ser $R^{i}_{\cdot jkh}=0$. Cuando esto ocurre en todos los puntos de un dominio $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{D}_e$, o sea, cuando en $\mathcal{D}$ es $R^{i}_{\cdot jkh}\equiv 0$, la translación de un vector a lo largo de un contorno cerrado cualquiera contenido en $\mathcal{D}$ conduce a la identidad al volver al punto de partida y la translación de los vectores es integrable en $\mathcal{D}$ El espacio $\mathcal{D}$ es entonces un espacio plano y si la conexión afín es riemanniana, el espacio es euclídeo.(1) El espacio $\mathcal{D}_e$ de la lente electrónica no es, por lo tanto, euclídeo y en esto descansa precisamente la posibilidad de obtener, por modo aproximado (aberraciones), un punto como imagen de otro punto mediante geodésicas de $\mathcal{D}_e$ (trayectorias electrónicas).(2)

19.- Escribamos la relación (II.20) en la forma

$$\text{(II.21)}\qquad \delta u^i=-\frac{1}{2}R^{i}_{\cdot jkh}\,u^j\,d_1x^{[k}d_2x^{h]}=-\frac{1}{2}R^{i}_{\cdot jkh}\,u^j f^{kh}\,dS,$$

en la que

$$\delta u^i=\overset{*}{u}{}^i-u^i,\qquad d_1x^{[k}d_2x^{h]}=d_1x^k d_2x^h-d_1x^h d_2x^k,$$

f^{kh} es el bivector unitario correspondiente al $d_1x^{[k}d_2x^{h]}$ y dS el área de éste. En consecuencia, la variación δu^i originada por la translación a lo largo del ciclo depende sólo de la orientación, f^{kh}, y del área, dS, del mismo a la que resulta ser proporcional. Para estudiar cómo varía δu^i con la primera introduciremos el tensor antisimétrico (ij)

$$K_{ij}^{\cdot\cdot l}=-\frac{1}{\sqrt{g}}R_{ijkh},\qquad \begin{cases} g=\|g_{ik}\|=r^2\sigma^3 \\ (lkh)=\text{permutación par de 1 2 3}\end{cases}$$

Si, además, $n_l=\sqrt{g}\,f^{kh}$ (lkh = permutación par de 1 2 3) son las componentes covariantes del vector unitario normal a la orientación dada, la ecuación (II.21) se escribe

$$\text{(II.21')}\qquad \delta u^i=\left(K^{i\cdot l}_{\cdot j\cdot}\,n_l\right)u^j\,dS$$

o bien, simplemente,

$$\text{(II.21")}\qquad \delta u^i=p^{i}_{\cdot j}\,u^j\,dS.$$

---

(1) Schouten, pg. 171.
(2) Esta condición ($R^{i}_{\cdot jkh}\neq 0$) no basta por sí sola, pero es nec[illegible]ria. Los primeros trabajos teóricos acerca de la obtención de i[illegible]nes de objetos con electrones se deben a H. Busch

Ahora bien, $p_{ij} = K_{ij\cdot}^{\cdot\cdot l} n_l$ es antisimétrico (ij), por serlo $K_{ij\cdot}^{\cdot\cdot l}$; luego (II.21"), es decir, (II.21) constituye una rotación infinitesimal. Las componentes contravariantes del vector eje de la rotación (1) son

$$p^m = \frac{1}{\sqrt{g}} p_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} K_{ij\cdot}^{\cdot\cdot l} n_l, \qquad (mij) = \text{permutación par de } 123$$

o bien

$$\text{(II.22)} \qquad p^m = K^{ml} n_l$$

donde

$$\text{(II.23)} \quad K^{ml} = \frac{1}{\sqrt{g}} K_{ij\cdot}^{\cdot\cdot l} = -\frac{1}{g} R_{ijkh} \quad \left.\begin{matrix}(mij)\\(lkh)\end{matrix}\right\} \text{permutaciones pares de 1 2 3.}$$

En cuanto a sus <u>componentes ordinarias</u> (p_z, p_r, p_φ), un cálculo fácil nos las da en función de R_{ijkh} y de las componentes ordinarias (n_z, n_r, n_φ) del vector normal $\vec{n}$ euclídeo unitario. Teniendo en cuenta (II.22), (II.23) y las relaciones generales

$$\begin{cases} A^1 = A_z, & A_1 = \sigma A^1 = \sigma A_z, \\ A^2 = A_r, & A_2 = \sigma A^2 = \sigma A_r, \\ A^3 = \frac{1}{r} A_\varphi, & A_3 = r^2 \sigma A^3 = r \sigma A_\varphi, \end{cases}$$

entre las componentes locales de un vector $\vec{A}$ (métrica II.10 de $\mathcal{D}_e$) y sus componentes locales ordinarias (métrica euclídea ambiente), se obtiene

$$\text{(II.24)} \quad \begin{cases} p_z = -r^{-2} \sigma^{-\frac{5}{2}} (R_{2323} n_z + R_{2331} n_r), \\ p_r = -r^{-2} \sigma^{-\frac{5}{2}} (R_{3123} n_z + R_{3131} n_r), \\ p_\varphi = -\sigma^{-\frac{5}{2}} R_{1212} n_\varphi. \end{cases}$$

Finalmente, para (II.21) resulta la fórmula elemental

$$\text{(II.21)} \qquad \delta\vec{u} = -\sigma^{\frac{3}{2}} \vec{u} \wedge \vec{p} \, dS_e$$

en la cual dS_e es el área del ciclo medida con la unidad del ambiente.

---

(1) Casi huelga decirlo, pero claro está que podemos hablar de de la rotación, al igual que antes de <u>vector</u> normal a la orientación plana, porque $\mathcal{D}_e$ es un espacio de tres dimensiones.

Consideremos, en particular, el vector $\vec{p}$ de la rotación asociada a la orientación definida por el vector campo eléctrico, es decir, al vector unitario euclídeo $\vec{n}=\left(\frac{E_z}{E},\frac{E_r}{E},0\right)$; tendremos, recordando, por ejemplo, (II.19')

$$\begin{cases} \sigma^{\frac{3}{2}} p_z = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{E}{v^2}E_z - \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial E}{\partial z}\right), \\ \sigma^{\frac{3}{2}} p_r = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{E}{v^2}E_r - \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial E}{\partial r}\right), \\ \sigma^{\frac{3}{2}} p_\varphi = 0 \end{cases} \qquad \left(E=\sqrt{E_z^2+E_r^2}\right)$$

o lo que es lo mismo,

$$\text{(II.24')} \qquad \sigma^{\frac{3}{2}}\vec{p} = \frac{E}{\sigma v^2}\vec{E} - \frac{\eta}{\sigma\sqrt{1-\beta^2}}\,\mathrm{grad}\,E, \qquad \left(\mathrm{grad}\,E=\left(\frac{\partial E}{\partial z},\frac{\partial E}{\partial r},\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial \varphi}\right),\ \frac{\partial E}{\partial \varphi}=0\right)$$

de donde

$$\text{(II.21)} \qquad \delta\vec{u} = \vec{u}\wedge\left(\frac{E}{v^2}\vec{E} - \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\mathrm{grad}\,E\right)\frac{dS_e}{\sigma}.$$

La relación vectorial (II.21) nos define la rotación asociada a un ciclo elemental descrito a partir de un punto P , en sentido directo respecto de $\vec{E}(P)$ y en un plano perpendicular a $\vec{E}(P)$ Su validez subsiste en todo punto de $\mathcal{D}_e$, incluso sobre el eje de la lente, pues los segundos miembros de (II.24) se conservan finitos para $r\to 0$ debido a la presencia del factor r^2 en las componentes R_{2323} , R_{3131} y R_{2331} del tensor de curvatura (ec.II.16, 19,19'). El eje de la rotación, como era de prever, está situado en el plano meridiano que pasa por P , pero su dirección no coincide, en general, con la del campo eléctrico $\vec{E}(P)$. Por lo tanto, si transladamos el vector $\vec{E}(P)$ a lo largo de un ciclo elemental perpendicular a $\vec{E}(P)$, en sentido directo respecto de éste, obtendremos como vector transladado en P el vector

$$\text{(II.25)} \qquad \vec{E}^* = \vec{E} - \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\vec{E}\wedge\mathrm{grad}\,E\,\frac{dS_e}{\sigma}.$$

La condición necesaria y suficiente para que $\vec{E}^*$ coincide con $\vec{E}$ es que $\vec{E}$ y $\mathrm{grad}\,E$ sean paralelos a nulo $\mathrm{grad}\,E$ (1). La primera circunstancia se da precisamente a lo largo del eje de la lente electrónica $\mathcal{D}_e$, puesto que, en un punto genérico del campo

(1) Evidentemente hay que excluir que sea $\vec{E}=0$, pues si $\vec{E}=0$ deja de tener sentido hablar de $\vec{n}_{\vec{E}}$.

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{1}{E}\left(E_z \frac{\partial E_z}{\partial z} + E_r \frac{\partial E_r}{\partial z}\right), \qquad \frac{\partial E}{\partial r} = \frac{1}{E}\left(E_z \frac{\partial E_z}{\partial r} + E_r \frac{\partial E_r}{\partial r}\right),$$

y a lo largo del eje es

$$E_z = -V'(z), \qquad E_r = 0,$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -V''(z), \quad \frac{\partial E_r}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial E_z}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial E_r}{\partial r} = \frac{1}{2} V''(z).$$

siendo V' y V'' las derivadas primera y segunda de la función que define el potencial del campo electrostático en las diferentes puntos del eje de la lente.(1) Es natural, por otra parte, que sea así, dada la simetría del campo respecto de éste.

La fórmula (II.25) es susceptible de una curiosa interpretación física. Consideremos en P una partícula dieléctrica en forma de cilindro cuya base sea el elemento del área dS_e del ciclo y de altura pequeña h. Sea k su susceptibilidad dieléctrica y su momento eléctrico, por consiguiente, $\vec{M} = k\vec{E}h\,dS_e$. La acción del campo sobre ella se traduce en una fuerza

$$\vec{F} = (\vec{M}\times\nabla)\vec{E} = k\,E\,h\,dS_e\,\mathrm{grad}\,E.$$

Luego, en virtud de (II.25),

$$\delta\vec{E} = \frac{\eta}{khc\sqrt{1-\beta^2}}\,\vec{F}\wedge\vec{u}_{\vec{E}}$$

siendo $\vec{u}_{\vec{E}}$ el versor euclídeo del vector campo eléctrico. (fig. 9).

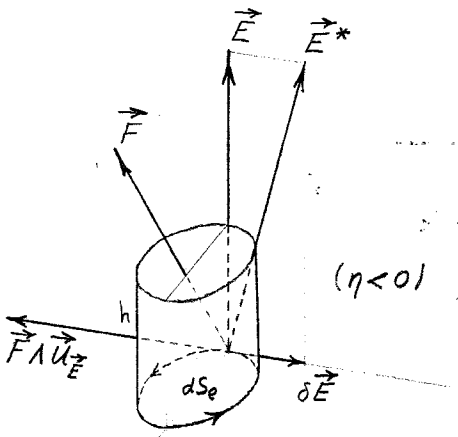


fig. 9

20.- En el párrafo anterior hemos determinado las componentes contravariantes p^m del vector que define la rotación infinitesimal del ciclo (n_ℓ, dS) (ec.II.22). Las p^m son funciones lineales y homogéneas de las n_ℓ, es decir, la correspondencia entre el vector p^m de la rotación asociada al ciclo y el vector unitario n_ℓ que fija la orientación de éste es una homográfia vectorial, la de matriz $K^{m\ell}$. Llamaremos <u>curvatura riemanniana</u> del espacio $\mathcal{D}_e$ en

(1) La función $\phi(z,r)$, en efecto, es susceptible de ser desarrollado en serie de potencias de r convergente para valores suficientemente pequeños de r. El desarrollo es de la forma

$$\phi(z,r) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2k} V^{(2k)}(z).$$

Cf., por ejemplo, Picht, pg. 9., o Busch [*], pág. 976.

el punto P y en la orientación n_ℓ , al producto escalar del vector n_ℓ y su homólogo p^m en dicha homografía, esto es

$$(\text{II.26}) \qquad K = n_m p^m = K^{m\ell} n_m n_\ell .$$

La cuádrica asociada a la homografía (II.22) es la <u>cuádrica indicatriz</u> de Riemann, C_i , del espacio en el punto P ; su ecuación es la

$$(\text{II.27}) \qquad K^{m\ell} x_m x_\ell = 1, \qquad x_m = \frac{n_m}{\sqrt{K}} ,$$

o, en componentes contravariantes,

$$(\text{II.27'}) \qquad K_{m\ell} x^m x^\ell = 1 . \qquad \left(K_{m\ell} = g_{mk} g_{h\ell} K^{kh} \right).$$

La longitud (!métrica (II.10)!) del segmento PM determinado por el punto P , centro de la cuádrica, y el punto M en que la recta base del vector n_ℓ corta a C_i vale, por ende, $\frac{1}{\sqrt{K}}$. La perpendicular, trazada por P , al plano tangente a C_i en M coincide con la recta base del vector rotación p^m .

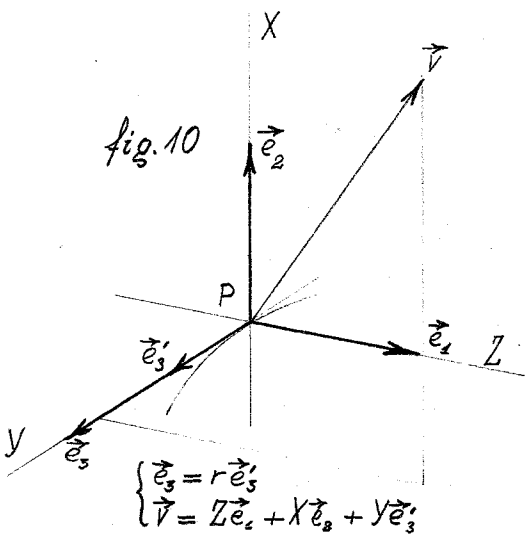


fig. 10

Para obtener una representación euclídea de C_i podemos proceder de la siguiente manera. Sea $\vec{v}$ el vector, aplicado en P , de componentes <u>ordinarias</u> (fig. 10)

$$Z = \frac{x_1}{\sqrt{\sigma}} , \qquad X = \frac{x_2}{\sqrt{\sigma}} , \qquad Y = \frac{x_3}{r\sqrt{\sigma}} .$$

Si el punto (x_1 , x_2 , x_3) pertenece a C_i , el cuadrado del módulo <u>euclídeo</u> de $\vec{v}$ es precisamente $\frac{1}{K}$, puesto que

$$Z^2 + X^2 + Y^2 = \frac{1}{\sigma}\left[(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 \cdot \frac{1}{r^2}\right] = g^{ik} x_i x_k = \frac{1}{K} .$$

Luego, dado un plano π que pase por P , la curvatura riemanniana en P del espacio $\mathcal{S}_e$ en la orientación de π es la inversa del cuadrado de la distancia <u>euclídea</u> del punto P al punto M en que la normal en P al plano π corta a la cuádrica $\overline{C}^i$ de ecuación

$$(\text{II.28}) \qquad \sigma\left(K^{11}Z^2 + K^{22}X^2 + K^{33}r^2Y^2 + 2K^{23}rXY + 2K^{31}rYZ + 2K^{12}ZX\right) = 1$$

respecto de la referencia euclídea local $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3')$. Evidentemente las cuádricas C_i y $\overline{C}_i$ son homotéticas respecto del centro P y característica $k = \sqrt{\sigma}$.

La ecuación de $\overline{C}_i$ se escribe, poniendo de manifiesto los valores de K^{ml} (ec. II.23 y II.19'),

$$\frac{1}{\sigma^2}\left[\frac{E_z^2}{v^2} - \left(\frac{2}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right)E_r^2 - \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial E_z}{\partial z}\right]Z^2 + \frac{1}{\sigma^2}\left[\frac{E_r^2}{v^2} - \left(\frac{2}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right)E_z^2 - \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial E_r}{\partial r}\right]X^2 -$$

(II.28')

$$-\frac{1}{\sigma^2}\left[\left(\frac{2}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right)E^2 + \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{1}{r}E_r\right]Y^2 + \frac{2}{\sigma^2}\left[\left(\frac{3}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right)E_r E_z - \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial E_z}{\partial r}\right]ZX = 1.$$

Sus coeficientes se conservan finitos en todo $\mathcal{D}_e$ (1) incluso para $r \to 0$, es decir, en el eje de la lente, donde $\frac{1}{r}E_r$ es igual a $V''(z)$. (Cf. § 20, Nota).

Los ejes de las cuádricas C_i y $\overline{C}_i$ coinciden. Estos ejes, las <u>direcciones principales</u> de Ricci en el punto P, están determinados por el sistema lineal homogéneo

$$(S)\quad \begin{cases} (K^{11}-\lambda)Z + K^{12}X = 0, \\ K^{21}Z + (K^{22}-\lambda)X = 0, \\ (r^2K^{33}-\lambda)Y = 0, \end{cases}$$

en el que λ es raiz de la ecuación secular

$$\begin{vmatrix} K^{11}-\lambda & K^{12} & 0 \\ K^{21} & K^{22}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & r^2K^{33}-\lambda \end{vmatrix} = (r^2K^{33}-\lambda)\begin{vmatrix} K^{11}-\lambda & K^{12} \\ K^{21} & K^{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda_1 = r^2K^{33}, \qquad \lambda_2, \lambda_3 = \frac{K^{11}+K^{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{K^{11}-K^{22}}{2}\right)^2 + (K^{12})^2}.$$

Si la raiz $\lambda_1 = r^2K^{33}$ es simple, la dirección principal correspondiente es la $Z = X = 0$, esto es, la normal al plano meridiano que pasa por P. Si es doble, para lo cual es necesario y basta que $(K^{11}-r^2K^{33})(K^{22}-r^2K^{33}) - (K^{12})^2 = 0$, la cuádrica es de revolución res-

(1) En el interior de la lente electrónica es $v \neq 0$, o lo que es lo mismo, $\phi \neq V_0$.

pecto de un eje situado en el plano meridiano. Si es triple, la cuádrica es una esfera, en cuyo caso el espacio es isótropo en P ; de otro modo, $\mathcal{D}_e$ es en P de curvatura riemanniana localmente constante. En cualquier caso, por lo tanto, y encualquier punto de $\mathcal{D}_e$, la dirección perpendicular al plano meridiano es una dirección principal de Ricci.(2) Cuando λ_1 es simple, las otros dos direcciones principales son las de los vectores

$$\begin{cases} Z = K^{12} \\ X = \dfrac{K^{22}-K^{11}}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{K^{22}-K^{11}}{2}\right)^2 + (K^{12})^2} \\ Y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Z = K^{12} \\ X = \dfrac{K^{22}-K^{11}}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{K^{22}-K^{11}}{2}\right)^2 + (K^{12})^2} \\ Y = 0 \end{cases}$$

supuesto $K^{12} \neq 0$, y pueden obtenerse gráficamente a partir de los valores de K^{12} y $\frac{1}{2}(K^{22}-K^{11})$ (fig.11). En particular, si $K^{12} = 0$, las direcciones principales son las de los ejes locales y si $K^{22} = K^{11}$, las direcciones principales situadas en el plano meridiano son simétricas respecto de la dirección del eje de la lente.

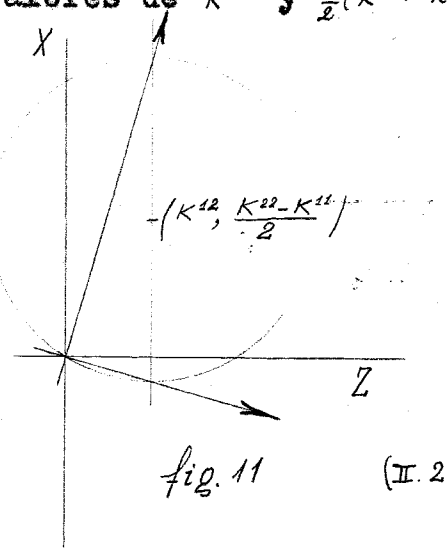


fig. 11

Sea P un punto de éste. En tal caso, la ecuación (II.28') toma la forma

$$\frac{1}{\sigma_0^2}\left(\frac{V'^2}{v^2} + \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}}V''\right)Z^2 - \frac{1}{\sigma_0^2}\left[\left(\frac{2}{v^2}-\frac{1}{c^2}\right)V'^2 + \frac{\eta}{2\sqrt{1-\beta^2}}V''\right](X^2+Y^2) = 1, \qquad \text{(II.28'')}$$

$$\left(\sigma_0 = (V_0 - V)\left(\frac{V_0 - V}{c^2} + 2\eta\right)\right),$$

en la que reconocemos que en cualquier punto del eje de la lente electrónica éste y todas las direcciones perpendiculares a él son direcciones principales de Ricci. La curvatura riemanniana correspondiente a la orientación perpendicular al eje en P vale, según (II.28"),

$$\text{(II.29}_n\text{)} \qquad K_{norm.} = \frac{1}{\sigma_0^2}\left(\frac{V'^2}{v^2} + \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}}V''\right)$$

y la relativa a una orientación meridiana cualquiera

$$\text{(II.29}_m\text{)} \qquad K_{merid.} = -\frac{1}{\sigma_0^2}\left[\left(\frac{2}{v^2}-\frac{1}{c^2}\right)V'^2 + \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}}V''\right].$$

---

(1) Cabe deducir este mismo resultado directamente de (II.24): si $n_z = n_r = 0$, las componentes p_z y p_r del vector rotación son nulas y, por ende, $\vec{p}$ es perpendicular al plano meridiano, paralelo a $\vec{n}$. En consecuencia, dicha perpendicular es dirección principal.

Basta tener en cuenta las ecuaciones (II.6) para poder expresar estos valores en función exclusivamente de $V(z)$, es decir, de la distribución del potencial a lo largo del eje.

Obsérvese, además, que si $V' \neq 0$, la fórmula (II.29$_n$) es un caso particular de la relación general

$$\text{(E)} \qquad \vec{p} \times \sigma^{\frac{1}{2}} \frac{\vec{E}}{E} = \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\vec{E} \times \vec{E}}{v^2} - \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\vec{E}}{E} \times \operatorname{grad} E \right),$$

(Cf. (II.24'), § 19). A lo largo del eje se tiene, en efecto,

$$\vec{E} = (-V', 0, 0) \therefore \quad E = |V'|, \quad \operatorname{grad} E = \left(\frac{V'}{|V'|} V'', 0, 0 \right)$$

y substituyendo en la expresión anterior se obtiene sin más (II.29). Sin embargo, desde otro punto de vista, la validez de (II.29) es más general que la de (E) deducida de (II.24'). La razón de ello descansa en que, conforme hicimos notar, esta última vale en tanto sea $\vec{E} \neq 0$ y, por consiguiente, deja de tener sentido en aquellos puntos del eje en los que es $V' = 0$. En cambio, (II.29) vale en cualquier punto del mismo, por cuanto da la curvatura riemanniana en la orientación perpendicular al eje, y no ya a la orientación normal a $\vec{E}$. Claro está que, si $\vec{E} \neq 0$, ambas orientaciones coinciden en los puntos P de aquél; pero cuando es $\vec{E} = 0$, la primera tiene aun sentido, mientras la segunda carece ya de significación.

21.- Las consideraciones que preceden justifican la de los dos siguientes casos particulares. Sea P un punto del eje en el cual $V' = 0$, $V'' \neq 0$, es decir, un punto en que la distribución del potencial electróstático a lo largo del eje de la lente presenta un máximo o un mínimo. La ecuación de la cuádrica $\bar{C}_i$ será, de acuerdo con (II.28"),

$$\frac{\eta V''}{\sigma_0^2 \sqrt{1-\beta^2}} Z^2 - \frac{\eta V''}{2\sigma_0^2 \sqrt{1-\beta^2}} (X^2 + Y^2) = 1, \qquad (\eta < 0).$$

Por consiguiente, en los puntos en que V es máximo o mínimo - sin que sea $V'' = 0$ - la cuádrica $\bar{C}_i$ es un hiperboloide de revolución respecto del eje de la lente electrónica, de una hoja si $V'' > 0$ esto es, en los mínimos, y de dos hojas si $V'' < 0$, es decir, en los máximos.(1) Las mismas características presenta la cuádrica

(1) Se trata de máximos y mínimos <u>a lo largo</u> del eje.

indicatriz de Riemann, homotética de la C_i. Tanto en uno como en otro caso el cono asintótico Γ es siempre el mismo:

$$2Z^2-(X^2+Y^2)=0,$$

y no depende, por lo tanto, de la función $V(z)$.

Ahora bien, el punto $P(z_0, 0, 0)$ es un punto singular de la superficie equipotencial $\phi(z,r)=V(z_0)$ que pasa por él. La ecuación de dicha superficie es de la forma

$$2V''Z^2-V''(X^2+Y^2)+F(X,Y,Z)=0 \quad (1)$$

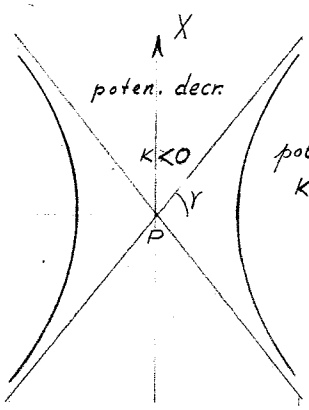
donde $F(X,Y,Z)$ es un polinomio de segundo grado en X^2+Y^2 cuyos coeficientes son a su vez funciones de X^2+Y^2 y de Z. El punto P, si, $V''\neq 0$, es, en consecuencia, un punto cónico de la superficie $\phi(z,r)=V(z_0)$. El cono de las tangentes en él a la superficie es precisamente el cono Γ. Podemos, pues, afirmar que en un punto cónico de una superficie equipotencial situado en la intersección de ésta con el eje de la lente, el cono de las tangentes a la misma en dicho punto coincide con el cono asintótico de la cuádrica indicatriz de Riemann de centro en él. La semiabertura de este cono común, el cual no depende de la forma de $V(z)$, sino de la presencia en P de un máximo o mínimo regular $(V''\neq 0)$ de $V(z)$ vale

$$\operatorname{tg}\gamma=\sqrt{2} \quad \therefore \quad \gamma\simeq 54°44'.$$

Si en P se da un máximo de V, la curvatura $K_{norm.}$ es positiva y las curvaturas $K_{merid.}$ son iguales y negativas. Recíprocamente, si $V(z)$ presenta en P un mínimo, $K_{norm.}$ es negativa y positivas las $K_{merid.}$. En ambos casos, trátese de un máximo o de un mínimo, las normales a las orientaciones de curvatura positiva están dirigidas en el sentido de los potenciales $\phi(z,r)$ crecientes (fig. 12).

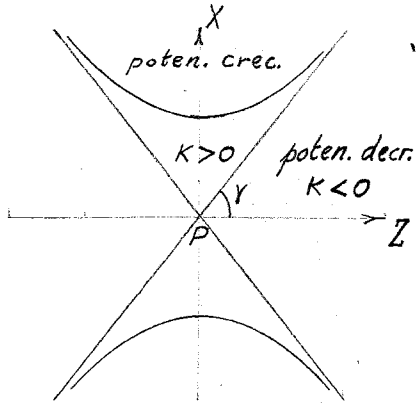
---

(1) Cf. § 19, Nota. Basta hacer en ella $z=z_0+Z$ y $r^2=X^2+Y^2$. Véase también, Brücher-Scherzer, pg. 66.



$V' = 0$

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)_{r=0} = V'', \quad \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\right)_{r=0} = -\frac{1}{2}V''$$



$V''<0 \quad \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\right)_{r=0} > 0$ fig. 12 $V''>0 \quad \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\right)_{r=0} < 0$

Estas circunstancias se dan en la práctica en algunos tipos de lentes de orificio y en las lentes simples.(1)

Supongamos ahora que en P, siempre sobre el eje, la derivada V' es $\neq 0$, pero que en él $V''=0$. La ecuación de la cuádrica se escribirá

$$\frac{V'^2}{\sigma_0^2 v^2} Z^2 - \left(\frac{2}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right)\frac{V'^2}{\sigma_0^2}(X^2+Y^2) = 1.$$

Sea cual fuere el signo de V', se trata, pues, de un hiperboloide de revolución de dos hojas, la ecuación de cuyo cono asintótico (real) es

$$Z^2 - \left(2 - \frac{v^2}{c^2}\right)(X^2+Y^2) = 0.$$

El valor de la semiabertura de éste

$$tg^2\alpha = \frac{1}{2 - \frac{v^2}{c^2}}$$

depende de la velocidad, es decir, del potencial en P:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{\frac{V_0 - V}{c^2}\left(\frac{V_0 - V}{c^2} + 2\eta\right)}{\left(\frac{V_0 - V}{c^2} + \eta\right)^2}.$$

Evidentemente, pero, tg α está comprendida entre $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y 1, o sea

$$35°16' < \alpha < 45°.$$

La variación de la razón $\beta = v:c$ con el valor del potencial $\phi - V_0 > 0$

---

(1) Cf. Brüche - Scherzer, pgs. 66 y 71 y 91 (fig. 72)

es pequeña- Así, por ejemplo, para $\phi - V_0 = 1V$ es del orden de 0,002 y para $\phi - V_0 = 100$ kV, $\beta \simeq 0{,}55$ lo que da para α en el primer caso prácticamente la cota inferior antes indicada y en el segundo $\alpha \cong 37^{\circ}30'$. En cuanto a las curvaturas riemannianas $K_{norm.}$ y $K_{merid.}$, sus valores son

$$K_{norm.} = \frac{V'^2}{\sigma_0^2 v^2}, \qquad K_{merid.} = -\frac{V'^2}{\sigma_0^2}\left(\frac{2}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right).$$

También el caso particular que acabamos de considerar se presenta en la práctica. Recuérdese, por ejemplo, la marcha del potencial a lo largo del eje de una lente electrónica de inmersión (fig. 5 y Picht, pg. 136, fig. 30).

22.- Otra propiedad de la métrica de $\mathcal{D}_e$, íntimamente vinculada al tensor de Riemann-Christoffel, es el <u>escalar de curvatura</u>, o <u>curvatura escalar</u> del espacio $\mathcal{D}_e$.(1) Para calcularlo, determinemos primero el tensor contracto de Ricci-Einstein

$$R_{hk} = R^{i}_{\cdot hik}. \tag{II.30}$$

Haciendo uso de las fórmulas (II.19'), por ejemplo, se obtiene fácilmente

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right)\frac{1}{\eta^2}\left\{2\left(\frac{2}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right)E_z^2 + \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right)E_r^2 - \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial E_z}{\partial z}\right\}, \quad R_{23} = 0 \\
R_{22} &= \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right)\frac{1}{\eta^2}\left\{2\left(\frac{2}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right)E_r^2 + \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right)E_z^2 - \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial E_r}{\partial r}\right\}, \quad R_{31} = 0 \\
R_{33} &= \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right)\frac{1}{\eta^2}\left\{\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right)E^2 - \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{1}{r}E_r\right\}r^2, \quad R_{12} = \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right)\frac{1}{\eta^2}\left\{\left(\frac{3}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right)E_r E_z - \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial E_z}{\partial r}\right\}.
\end{aligned} \tag{II.30'}$$

De estos valores resulta desde luego el escalar de curvatura

$$R = R^{i}_{i} = 2\frac{1}{\eta^4}\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right)^2\left(\frac{3}{v^2} - \frac{2}{c^2}\right)E^2 \tag{II.31}$$

el cual, por consecuencia, es positivo, proporcional al cuadrado de la intensidad del campo eléctrico y nulo siempre y sólo cuando $\vec{E} = 0$. El factor de proporcionalidad, que es una función de punto, se mantiene constante en cada superficie equipotencial;

(1) Schouten, pg. 86, ecs. 124 y 125; Brillouin, pg. 132. En cuanto a la notación, téngase presente lo dicho en la Nota al principio del § 17.

luego, medido el campo eléctrico en dos puntos de una misma de tales superficies, se tiene sin más la razón de las curvaturas escalares en ellos. Si nos limitamos a la aproximación no relativista, se puede escribir con bastante exactitud (hasta unos 10

$$R \simeq \frac{3E^2}{4\eta(V_0-\phi)^3}.$$

Finalmente, el tensor $L_{hk} = R_{hk} - \frac{1}{4} R g_{hk}$, que en nuestro ca tiene por componentes

$$\begin{cases} L_{11} = \frac{1}{\eta^2}\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{c^2}\right)\left\{\left(\frac{5}{2v^2}-\frac{1}{c^2}\right)E_z^2 - \frac{1}{2v^2}E_r^2 - \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial E_z}{\partial z}\right\}, & L_{23}=0, \\ L_{22} = \frac{1}{\eta^2}\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{c^2}\right)\left\{\left(\frac{5}{2v^2}-\frac{1}{c^2}\right)E_r^2 - \frac{1}{2v^2}E_z^2 - \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial E_r}{\partial r}\right\}, & L_{31}=0, \\ L_{33} = -\frac{r^2}{\eta^2}\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{2v^2}E^2 + \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{1}{r}E_r\right), & L_{12} = \frac{1}{\eta^2}\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{c^2}\right)\left\{\left(\frac{3}{v^2}-\frac{1}{c^2}\right)E_rE_z - \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial E_z}{\partial r}\right\}, \end{cases}$$

cumple las condiciones $\nabla_{[i} L_{h]k} = 0$ (1) que expresan la integrabilidad del sistema

$$L_{hk} = 2\nabla_h s_k - s_h s_k + \frac{1}{2}(s_i s^i) g_{hk}.$$

Si éste es integrable, es decir, si existe una función $\log \sigma'$ tal que el vector $s_k = \frac{\partial \log \sigma'}{\partial x^k}$ lo satisface idénticamente, la métrica $\sigma' g_{ik}$ es euclídea. No merece la pena comprobar que L_{hk} satisface aquellas condiciones, pues sabemos a priori que el sistema anterior es integrable: la métrica $\frac{1}{\sigma}(\sigma \gamma_{ik})$ es euclídea (cf. § 10), de modo que existe $\sigma' = \frac{1}{\sigma}$.

27.- Con esto damos por terminada la visión de conjunto de las propiedades más generales del espacio euclídeo-conforme asociado a una lente electrónica de tipo electrostático, el estudio de la geometría en pequeño del campo que la caracteriza. De acuerdo con lo que anunciamos (§ 9), la introducción del campo magnético modificará profundamente el esquema geométrico adecuado que acaba-

(1) Véase Schouten, pgs. 169-171. Como de costumbre, ∇_i es el símbolo de derivación covariante respecto de x^i y [ ] indica la operación de alternación efectuada sobre los índices comprendidos dentro del paréntesis recto. Tanto lo que sigue cuanto la definición dada antes del tensor L_{hk} vale sólo para un espacio tridimensional.

nos de considerar, hasta el punto de conducirnos a una geometría esencialmente diferente, geometría en la que el elemento generador no es ya el punto, sino el conjunto de un punto y una recta que pasa por él, a la geometría de los espacios de Finsler.

III.- EL ESPACIO DE FINSLER ASOCIADO A UNA LENTE ELECTRONICA ELECTRO-MAGNETOSTATICA.

24.- En el § 12 demostramos que las trayectorias naturales posibles de un corpúsculo de masa en reposo m, y carga eléctrica e sometido a la acción de dos campos superpuestos, electrostático y de potencial ϕ el uno, magnetostático y de potencial vector $\vec{A}$ el otro, coincidían con los rayos de la óptica geométrica de un medio de índice de refracción

$$(II.8) \qquad n(Q,\vec{\xi}_0)=\frac{c}{V_0+\eta c^2}\left[\varepsilon\sqrt{(V_0-\phi)\left(\frac{V_0-\phi}{c^2}+2\eta\right)}+\vec{A}\times\vec{\xi}_0\right], \qquad (\varepsilon\eta=|\eta|)$$

es decir, eran las extremales del problema de variación $\delta\int n\,ds_1=0$, donde ds_1 es el elemento lineal euclídeo, $ds_1^2=\gamma_{ik}\,dx^i\,dx^k$.
Si $\vec{A}$ es función de punto y no se reduce a una constante, es decir, si efectivamente actúa sobre el corpúsculo un campo magnético - lo que supondremos siempre en lo que sigue-, el medio en cuestión es no-homogéneo y anisótropo; pero hay algo en el índice que lo distingue de los índices de refracción que se suelen estudiar en el óptica geométrica de tales medios. En general, se supone que el índice n de un medio de aquellas características depende, sí, del punto y de la dirección del rayo que se considera que pasa por él, pero no del <u>sentido</u> en que se juzga recorrido el rayo (<u>anisotropía simétrica</u>).(1) El índice n (II.8), en cambio, depende esencialmente de la dirección del rayo y del <u>sentido</u> en que lo pensamos descrito.

---

(1) Es curioso que Picht, tan preciso en general, no haya insistido en esta diferencia que es patente en la ec.(3,15) de la pg. 36. También hay que advertir que la expresión que da él de $(\nabla W^*)^2$, donde $W^*=\frac{2\pi}{h}\int L\,dt$, es errónea. Las fórmulas (I.12) y (II.1) nos dan, en efecto, $\nabla W^*=\frac{2\pi}{h}(\bar{m}\vec{V}+e\vec{A})$, siendo $\bar{m}$ la masa en movimiento, y claro está que $(\nabla W^*)^2=\frac{4\pi^2}{h^2}(\bar{m}^2v^2+e^2A^2+2\bar{m}ev\,A_s)$ y no igual a $\frac{4\pi^2}{h^2}(\bar{m}^2v^2+e^2A_s^2+2\bar{m}ev\,A_s)$, $(A_s=\vec{A}\times\vec{\xi}_0)$. Lo que ocurre es que el vector normal $\vec{n}$, en el sentido de Herzberger (pg. 9) coincide con $\frac{\lambda^{(1)}}{2\pi}\nabla W^*$ y, por consiguiente, en la dirección y sentido $\vec{\xi}_0$, $\lambda=\frac{\lambda^{(1)}}{m}=\frac{\lambda^{(1)}}{\vec{n}\times\vec{\xi}_0}=\frac{h}{(\bar{m}\vec{V}+e\vec{A})\times\vec{\xi}_0}=\frac{h}{\bar{m}v+eA_s}$.

También aquí, el caso que particularmente nos interesa es aquel en que el corpúsculo (m, e) es un electrón, por lo cual deberemos hacer en (II.8) $\varepsilon = -1$. Las posibles trayectorias naturales son las extremales de la integral

$$\text{(III.1)} \quad \int\left(\sqrt{(V_0-\phi)\left(\frac{V_0-\phi}{c^2}+2\eta\right)}-\vec{A}\times\vec{\xi}_0\right)ds_1=\int\left(\sqrt{(V_0-\phi)\left(\frac{V_0-\phi}{c^2}+2\eta\right)}\sqrt{\gamma_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}-A_i\dot{x}^i\right)ds_1 .$$

en la que $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{ds_1}$. Ahora bien, es sabido que una integral de la forma $\int_{s_0}^{s'}\mathcal{L}(x^1,\ldots,x^n,\dot{x}^1,\ldots,\dot{x}^n)\,ds_1$ depende no sólo de las funciones $x^i(s_1)$, esto es, de la línea a lo largo de la cual se la calcula y del sentido en que la recorremos, sino también, en general, de la representación paramétrica, de la naturaleza del parámetro s_1. Con otras palabras: si substituimos el parámetro s_1 por otro σ, $s_1 = s_1(\sigma)$, siendo s_1 continua y creciente de s_0 a s' cuando σ crece de σ_0 a σ', con derivada contínua y no nula en dicho intervalo, el valor de la integral transformada $\int_{\sigma_0}^{\sigma'}\mathcal{L}[x^i(s_1(\sigma)),\dot{x}^i(s_1(\sigma))s_1'(\sigma)]\,d\sigma$ será distinto del de la primitiva, a pesar de extenderse a lo largo de la misma curva y recorrida en el mismo sentido.(1) Hay un caso, pero, en que ambas integrales coinciden, es decir, en que la integral depende únicamente de la línea y del sentido en que se la describe: es el que se da cuando la función $\mathcal{L}(x^i,\dot{x}^i)$ es homogénea positiva respecto de las $\dot{x}^i$, o sea, cuando cualquiera que sea K, positivo, es

$$\mathcal{L}(x^i, K\dot{x}^i) = K^m\mathcal{L}(x^i,\dot{x}^i),$$

relación en la que m es el grado de homogeneidad. Y este es precisamente el caso en el integrando de (III.1), que es homogéneo positivo de primer grado. Luego, podemos prescindir de la significación del parámetro s_1 y adoptar otro cualquier, aunque ligado con s_1 por las relaciones antes indicadas. Para indicar esta libertad de elección, escribiremos (III.1) en la forma

$$\text{(III.1')} \quad \int\left\{\sqrt{(V_0-\phi)\left(\frac{V_0-\phi}{c^2}+2\eta\right)}\sqrt{\gamma_{ik}\,dx^i dx^k}-A_i\,dx^i\right\}=\int\mathcal{L}(x^i,dx^i),$$

donde, para abreviar, hemos hecho

$$\text{(III.2)} \quad \mathcal{L}(x^i,dx^i)=\sqrt{(V_0-\phi)\left(\frac{V_0-\phi}{c^2}+2\eta\right)}\sqrt{\gamma_{ik}\,dx^i dx^k}-A_i\,dx^i=\sqrt{\sigma}\sqrt{\gamma_{ik}\,dx^i dx^k}-A_i\,dx^i.$$

(1) Cf. Goursat, III. pgs. 625-626. Desde el punto de vista cinemático cabe interprestar este resultado diciendo que dicha integral depende no sólo de la trayectoria y del sentido en que es descrita, sino también de la ley delmovimiento sobre ella.

25.- El cálculo de las extremales de $\delta\int\mathcal{L}(x^i, dx^i)=0$ exige la integración del sistema euleriano

$$\text{(III.3)} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^i}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i}=0, \qquad \left(\dot{x}^i=\frac{dx^i}{dt}\right)$$

en el que t es un parámetro cualquiera de referencia. Pero a este sistema no cabe aplicar la transformación de Legendre (§ 1) que lo conduciría a la forma hamiltoniana, en primer lugar porque el determinante funcional $\left\|\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^i\partial\dot{x}^k}\right\|$ es identicamente nulo como consecuencia de la homogeneidad de grado 1 de $\mathcal{L}$ y la no anulación idéntica de dicho determinante es una condición necesaria para la posibilidad de despejar en $p_i=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^i}$ las $\dot{x}^k$ como funciones uniformes y continuas de los impulsos conjugados; en segundo lugar, porque la función de Hamilton correspondiente a una tal $\mathcal{L}$ resulta idénticamente nula.(1) Además, esa misma homogeneidad trae consigo que las ecuaciones (III.3) no sean independientes entre sí.

Sin embargo, en casos como este es posible obviar las dificultades que acabamos de señalar eligiendo oportunamente el parámetro de la representación de las extremales, del que, conforme sabemos, cabe disponer libremente. En efecto: introduzcamos en el sistema (III.3) la función

$$\text{(III.4)} \qquad \mathcal{F}(x^1,\ldots,x^n;\dot{x}^1,\ldots,\dot{x}^n)\equiv\frac{1}{2}\left\{\mathcal{L}(x^1,\ldots,x^n,\dot{x}^1,\ldots,\dot{x}^n)\right\}^2,$$

donde, para mayor generalidad, suponemos $\mathcal{L}$ cualquiera, aunque homogénea positiva de primer grado, no ya precisamente de la forma (III.2). La función $\mathcal{F}$ es también, claro está, homogénea positiva, pero de segundo grado. En estas condiciones, el sistema (III.3) equivale al

$$\text{(III.3')} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\mathcal{L}}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\dot{x}^i}\right)-\frac{1}{\mathcal{L}}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x^i}=0.$$

Fijado el parámetro t, elijamos otro parámetro s ligado con t a lo largo de cada extremal por la condición

$$\text{(III.5)} \qquad \frac{ds}{dt}=\mathcal{L}\left(x^i,\frac{dx^i}{dt}\right).$$

La nueva representación paramétrica $x^i(s)$ de una extremal cualquie-

(1) Courant-Hilbert, pgs. 100-101.

ra será una integral del sistema

$$\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\mathcal{L}}\frac{ds}{dt}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'^i}\right)-\frac{1}{\mathcal{L}}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^i}=0, \qquad \left(x'^i=\frac{dx^i}{ds}\right),$$

es decir, en virtud de (III.5) del sistema

$$\text{(III.6)} \qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'^i}\right)-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^i}=0.$$

Por lo tanto, toda curva extremal de $\delta\int\mathcal{L}(x^i, dx^i)=0$, referida a un parámetro oportunamente elegido, es una integral de (III.6), aunque no una cualquiera, en principio, sino una a lo largo de la cual es $\mathcal{F}(x^i, x'^i)=\frac{1}{2}\{\mathcal{L}(x^i, x'^i)\}^2=\frac{1}{2}$. Pero es fácil ver que el sistema (III.6) admite la propia función $\mathcal{F}$ como integral primera: a lo largo de una línea integral cualquiera de (III.6) se tiene, de una parte,

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds}=\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^i}x'^i+\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'^i}x''^i$$

y, de otra,

$$2\frac{d\mathcal{F}}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'^i}\right)x'^i+\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'^i}x''^i,$$

en fuerza del teorema de Euler relativo a las funciones homogéneas.(1) Si restamos de la segunda ecuación la primera y dado que $x^i(s)$ es una línea integral de (III.6), obtendremos en definitiva

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds}=\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'^i}\right)-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^i}\right\}x'^i=0 \quad \therefore \quad \mathcal{F}=C^{te},$$

lo que queríamos demostrar. Luego, si los valores iniciales x_0^i, $x_0'^i$ cumplen la condición $\mathcal{F}(x_0^i, x_0'^i)=\frac{1}{2}$, esta condición subsiste a lo largo de la línea integral de (III.6) por ellas determinada, línea integral que, por consiguiente, es una extremal de nuestro problema de variación.

Si el determinante funcional $\left\|\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x'^i\partial x'^j}\right\|$ es $\neq 0$, el sistema (III.6) de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

$$\text{(III.6')} \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x'^i\partial x'^j}x''^j+\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x'^i\partial x^j}x'^j-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^i}=0,$$

puede conducirse a la forma normal, pues define las x''^j como funciones uniformes y continuas de las x^i, x'^i. Por cada punto de un dominio $\mathcal{D}(x^i)$ en el que $\mathcal{F}$ sea continua, con derivadas parcia-

(1) Este teorema subsiste para las funciones homogéneas positivas, aun siendo este concepto menos restrictivo que el de homogéneas simplemente.

les contínuas, por lo menos hasta el tercer orden, cualesquiera que sean las x'^i (finitas no todas nulas), y en el cual el determinante $\left\| \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x'^i \partial x'^j} \right\|$ sea $\neq 0$, pasa entonces una extremal y solo una del problema de variación $\delta \int \mathcal{L}(x^i, dx^i) = 0$. El problema de variación se califica en este caso de <u>regular</u>. Tal es el correspondiente a la función $\mathcal{L}$ de (III.2) cuando el campo electro-magnetostático no presente singularidades en el dominio $\mathcal{D}$.

Finalmente, en las condiciones dichas, la reducción a la forma canónica de (III.6) es posible: los impulsos conjugados son $p_i = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'^i}$ y la función de Hamilton

$$H(x^i, p_i) = x'^i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'^i} - \mathcal{F}(x^i, x'^i) = \mathcal{F}(x^i, x'^i)$$

todo ello con la condición $H = \mathcal{F} = \frac{1}{2}$.

26.- Sea V_n una variedad n-dimensional referida a un sistema de coordenadas (x^i) , variedad en la que se ha planteado un problema de variación regular

$$\text{(III.7)} \qquad \delta \int \mathcal{L}\{x^1(t), \ldots, x^n(t), \dot{x}^1(t), \ldots, \dot{x}^n(t)\} dt = \delta \int \mathcal{L}(x^i, dx^i) = 0,$$

donde $\mathcal{L}$ es una función homogénea positiva de las $\dot{x}^i$, contínua y derivable, con derivadas contínuas hasta el cuardo orden. Si convenimos en interpretar el valor de la integral

$$s = \int_{Q_0}^{Q} {}^{(\Gamma)} \mathcal{L}(x^i, dx^i)$$

como <u>longitud</u> del arco orientado de curva Γ comprendido entre Q_0 y Q , diremos que la variedad V_n es un <u>espacio métrico general</u> (1) y también que el problema de variación caracterizado por la función $\mathcal{L}$ ha inducido en V_n una <u>determinación métrica general</u>. El porqué de esta terminología lo veremos en el párrafo 28. Las extremales de (III.7), líneas integrales de (III.3) o de (III.6) con la condición inicial $\mathcal{F}(\overset{0}{x}{}^i, \overset{0}{x}{}'^i) = \frac{1}{2}$ $(\text{o } \mathcal{L}(\overset{0}{x}{}^i, \overset{0}{x}{}'^i) = 1)$, son las geodésicas en V_n de dicha determinación métrica general - líneas de V_n de longitud estacionaria. La distancia entre dos puntos infinitamente próximos $P(x^i)$, $P'(x^i + dx^i)$ es el número

$$\text{(III.8)} \qquad ds = \mathcal{L}(x^i, dx^i) ;$$

(1) Berwald, pgs. 42-43-

la distancia entre dos puntos $Q_0(\overset{0}{x}{}^i)$ y $Q(x^i)$, el valor de

$$s(\overset{0}{x}{}^i, x^i) = \int_{Q_0}^{Q}{}^{(E)} \mathcal{L}(x^i, dx^i)$$

calculado a lo largo de la extremal (E) que une Q_0 y Q. Esta distancia, que, cuando $\mathcal{L}$ es la (III.2), es proporcional al camino óptico entre Q_0 y Q relativo al índice de refracción (II.8), o, lo que es lo mismo, a la acción de Maupertuis entre Q_0 y Q relativa a la función de Lagrange (II.1) (cf. § 12), es en el caso general, una función de las $2n$ variables $(\overset{0}{x}{}^i, x^i)$, función que admite derivadas parciales de primer orden respecto de los $2n$ argumentos. El cálculo de éstas es ya clásico (cf. § 3); los valores que resultan son

$$\frac{\partial s}{\partial \overset{0}{x}{}^i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\overset{0}{x}}{}^i}, \qquad \frac{\partial s}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i},$$

independientes, evidentemente, del parámetro a que se haya referido (E), dado que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\overset{0}{x}}{}^i}$ y $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}$ son funciones homogéneas positivas de grado cero. La diferencial de la distancia $s(Q_0, Q)$ es, por consiguiente,

$$ds = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} dx^i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\overset{0}{x}}{}^i} d\overset{0}{x}{}^i.$$

Elegido un punto $P(x^i)$ y una dirección <u>orientada</u>, la determinada, por ejemplo, por un vector contravariante p^i, a la figura constituida por uno y otra la llamaremos un <u>elemento lineal</u> de <u>centro</u> $P(x^i)$.(1) Los parámetros independientes que lo fijan son en número de $2n-1$, pues las p^i pueden substituirse por Kp^i, siendo K <u>positivo</u> cualquiera. La función $\mathcal{L}$ permite vincular a cada elemento lineal (x^i, p^i) una orientación, la definida por

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,p)}{\partial p^i} dx^i = 0.$$

De toda dirección dx^i contenida en ella diremos que es <u>transversal</u> al elemento lineal dado y también que éste es transversal a dicha orientación. En particular, los rayos que parten de un punto Q_0 en la óptica geométrica (II.8) son transversales a una superficie de

(1) No se confunda esta noción con la de elemento lineal en los espacios <u>puntuales</u> de conexión métrica. En estos se suele llamar, algo impropiamente, elemento lineal a la distancia entre dos puntos infinitamente próximos P y P', sobreentendiendo <u>longitud</u> del elemento lineal PP'.

onda cualquiera de origen Q_0 en los puntos en que la cortan, es decir, las posibles trayectorias naturales del corpúsculo (m, e) de energía total $mc^2 + eV_0$ que obedece al potencial cinético (II.1) cortan transversalmente a las ondas de Hamilton de origen Q_0. Es inmediato que la noción de transversalidad se reduce a la de ortogonalidad en sentido ordinario cuando $\mathcal{L}$ es de la forma

$$\mathcal{L} = \sqrt{g_{ik}(x)\, dx^i dx^k},$$

lo cual ocurre, por ejemplo, cuando en (II.1), (II.8) es $\vec{A} = 0$, esto es, en las lentes electrónicas de tipo eléctrico.

27.- Hasta ahora sólo sabemos cómo medir longitudes en la V_n pues únicamente se ha definido la distancia entre dos puntos infinitamente próximos. Pero la extensión a V_n de los conceptos fundamentales de la geometría diferencial por modo intrínsecamente ligado al problema de variación (III.7) exige la introducción del concepto de paralelismo y de determinación métrica, los que a su vez suponen el de tensor. Examinemos, pues, éstos en primer lugar.

Advirtamos, ante todo, que en este estadio no concebimos ya los puntos de V_n en sí, sino como centros de elementos lineales; es decir, pensamos en V_n no un espacio puntual, sino un espacio de elementos lineales.(1) Esto sentado, llamaremos tensor localizado o de base <u>en el elemento lineal</u> (x^i, p^i), de orden $p = h + k$ y exceso $\varepsilon = h - k$ (covariante de orden h, contravariante de orden k) a un ente determinado respecto de la referencia (x^i) por n^p componentes

$$t^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_h}(x^i, p^i),$$

funciones homogéneas positivas de las p^i,(2) tales que al efectuar un cambio de coordenadas regular

$$\begin{cases} x^i = x^i(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n), \\ p^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\bar{p}^k, \end{cases} \qquad \left\| \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \right\| \neq 0,$$

(1) Es este el estadio al que alude Berwald cuando escribe:"... ordenen wir zunächst jedem Punkte (x) unseres Raumes einen infinitesimalen Vektor (dx) in diesem Punkte zu, den wir das <u>ausgezeichnete Linienelement</u> des Punktes (x) nennen..." (pg. 45). Claro está, sin embargo, que el mismo elemento lineal puede determinarse con un vector contravariante finito cuyas componentes sean proporcionales a aquellas dx^i.

(2) En los tensores propiamente tales, la homogeneidad es de grado cero.

se transforman de acuerdo con la ley

$$t^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_h}(x^i, p^i) = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{m_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial \bar{x}^{m_k}} \frac{\partial \bar{x}^{l_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{l_h}}{\partial x^{j_h}} \bar{t}^{m_1 \dots m_k}_{l_1 \dots l_h}(\bar{x}^i, \bar{p}^i)$$

En apariencia, la definición es la misma que en los espacios puntuales; pero, en realidad, existe una diferencia esencial que no se advierte en la ley de transformación cuando entre los argumentos de que dependen explícitamente las componentes no figuran las p^i: en un espacio de elementos lineales carece de sentido hablar de tensor sin indicar explícitamente el elemento lineal al que se considera aplicado y ello es así incluso en el caso en que las componentes no dependen analíticamente de los parámetros p^i. En particular, el vector contravariante p^i, que junto con $P(x^i)$ fija el elemento (x^i, p^i), se juzga aplicado a este elemento. (1)

El segundo estadio es el métrico-afín, es decir, la introducción en el espacio V_n de elementos lineales de una métrica y de una diferencial absoluta. La primera se define mediante el tensor fundamental covariante de segundo orden, $g_{jk}(x^i, p^i)$, cuyas componentes son funciones homogéneas positivas de grado cero de las p^i. A partir de él se establecen las magnitudes y operaciones ordinarias en cálculo tensorial - módulo de un vector, producto escalar de dos vectores, elevación y descenso de índices, etc. - en el bien entendido, pero, de que cuantos entes intervegan en ellas deben tener como elemento base el mismo elemento lineal (x^i, p^i) al que están vinculados los valores $g_{jk}(x^i, p^i)$. Así por ejemplo, el producto escalar de dos vectores X^j, Y^k aplicados al elemento $(\overset{1}{x}{}^i, \overset{1}{p}{}^i)$ es el número

$$g_{jk}(\overset{1}{x}{}^i, \overset{1}{p}{}^i) X^j Y^k$$

mientras que si los pensamos aplicados al elemento $(\overset{2}{x}{}^i, \overset{2}{p}{}^i)$, su producto escalar será en general otro:

$$g_{jk}(\overset{2}{x}{}^i, \overset{2}{p}{}^i) X^j Y^k.$$

---

(1) Una generalización de este concepto de tensor y del de determinación métrica y derivación covariante a los espacioes cuyos elementos son puntos y orientaciónes m-dimensionales, puede verse en el articulo de A. Kawaguchi "Ein metrischer Raum, der eine Verallgemeinerung des Finslerschen Raumes ist" (Monatsh. fur Math. und Phys., 1936, 43, 289-297). El caso m=2 se encuentra estudiado en Cartan, "Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire" (Act. Scient. et Indust., nº 72, Paris, Hermann, 1933).

Análogamente, los módulos de los vectores de base $\vec{e}_k$ de la referencia local y los ángulos que forman dependen esencialmente de la dirección orientada que se elija para hacer del origen de dicha referencia un elemento lineal.

En cuanto al transporte paralelo de vectores - y engeneral de tensores- se referirá a la translación desde un elemento lineal (x^i, p^i) a otro infinitamente próximo $(x^i + dx^i, p^i + dp^i)$, acaso de igual centro $(dx^i = 0, dp^i \neq 0)$. Su definición, por lo demás, es semejante a la que se da en geometría ordinaria de los espacios puntuales de conexión afín: el vector transladado $\overset{*}{X}{}^i$ de X^i desde el elemento (x^i, p^i) al $(x^i + dx^i, p^i + dp^i)$ es, por definición, el vector

$$\text{(III.9)} \qquad \overset{*}{X}{}^i = X^i - \Gamma^i_{jk} X^j dx^k - C^i_{jk} X^j dp^k,$$

igualdad en la que los coeficientes Γ^i_{jk}, C^i_{jk} son funciones de (x^i, p^i) homogéneas positivas de grado cero respecto de las p^i Si X^i pertenece a un campo de vectores, $(X^i = X^i(x,p))$, las componentes del vector del campo aplicado en $(x^i + dx^i, p^i + dp^i)$ son

$$X^i(x+dx, p+dp) = X^i(x,p) + \frac{\partial X^i}{\partial x^k} dx^k + \frac{\partial X^i}{\partial p^k} dp^k$$

y la diferencial absoluta vale

$$\text{(III.10)} \quad DX^i = X^i(x+dx, p+dp) - \overset{*}{X}{}^i = \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} X^j\right) dx^k + \left(\frac{\partial X^i}{\partial p^k} + C^i_{jk} X^j\right) dp^k.$$

La fusión de la métrica g_{jk} y la conexión afín (III.9) se efectúa de acuerdo con el criterio de que el módulo de un vector no varía en la translación. Se obtienen así entre g_{jk}, Γ^i_{jk} y C^i_{jk} las relaciones siguientes:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_{jk}}{\partial p^h} = g_{jr} C^r_{kh} + g_{rk} C^r_{jh} = C_{kjh} + C_{jkh}, \\[2ex] \dfrac{\partial g_{jk}}{\partial x^h} = g_{jr} \Gamma^r_{kh} + g_{rk} \Gamma^r_{jh} = \Gamma_{kjh} + \Gamma_{jkh}. \end{cases}$$

Por lo demás, dichas funciones son cualesquiera - aparte la condición de homogeneidad antes indicada. (1)

---

(1) Para la teoría de los espacios generalizados, véase, E. Cartan [3] Para la teoría general de los espacios de Finsler, cf., Cartan [2]

Un espacio de elementos lineales caracterizado por cuanto llevamos dicho en este párrafo posee la estructura de un espacio de conexión euclídea en el sentido de Cartan.(1)

28.- Finalmente indicaremos que, conforme ha demostrado Cartan,(2) de toda variedad V_n, concebida como soporte de elementos lineales, se puede hacer un espacio de elementos lineales dotado de una conexión euclídea vinculada intrínsecamente a la función $\mathcal{L}$ de un problema de variación de la forma (III.7) planteado en V_n. Las condiciones que impone a la conexión, en número de cinco,(3) conducen a los siguientes valores de g_{jk}, Γ^i_{jk}, C^i_{jk}:

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial p^i \partial p^j}, \qquad C_{ijh} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial p^h} = \frac{1}{2}\frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial p^i \partial p^j \partial p^h},$$

(III.11)

$$\Gamma_{ijh} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^h} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j}\right) + C_{ihr}\frac{\partial G^r}{\partial p^j} - C_{jir}\frac{\partial G^r}{\partial p^h} - C_{jhr}\frac{\partial G^r}{\partial p^i},$$

donde

$$\mathcal{F}(x^1,\ldots,x^n,p^1,\ldots,p^n) = \frac{1}{2}\left\{\mathcal{L}(x^1,\ldots,x^n,p^1,\ldots,p^n)\right\}^2$$

y

$$G^r = G_m g^{mr}, \qquad 2G_m = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial p^m \partial x^k} p^k - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^m}.$$

La distancia ds entre dos puntos de V_n, (x^i), $(x^i + dx^i)$, infinitamente próximos, centros de dos elementos lineales (x^i, p^i), $(x^i + dx^i, p^i + dp^i)$, definida como módulo del vector infinitesimal (dx^i) aplicado a (x^i, p^i), vale

$$ds = \sqrt{g_{jk}(x^i, p^i)\, dx^j dx^k} = \sqrt{\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial p^j \partial p^k} dx^j dx^k}.$$

En particular, si dx^i y p^i tienen igual dirección y sentido, $dx^i = p^i dt$ $(t>0)$ y, por ende,

$$ds = \sqrt{\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial p^j \partial p^k} p^j p^k}\, dt = \sqrt{2\mathcal{F}(x^i, p^i)}\, dt = \mathcal{L}(x^i, p^i)\, dt = \mathcal{L}(x^i, dx^i)$$

de acuerdo con (III.8).

---

(1) Cartan, [2] § 3, pg. 5; cf. también, Cartan [3], Cap. IX y X.
(2) Cartan, [2] pgs. 10 y 11.
(3) A. de Mira Fernandes las reduce a tres ("Assiomatica degli spazi di elemento lineare", Portugaliae Math., 1941, 2, 7-12).

Llamaremos <u>espacio de Finsler</u> asociado al problema de variación (III.7) al espacio V_n de elementos lineales estructurado por la conexión euclídea (III.11) subordinada a la función $\alpha(x^i, p^i)$. (1)

Consideremos en particular las geodésicas de un tal espacio. Es sabido que de una geodésica cabe dar dos definiciones, métrica la una, afín la otra. Geodésica en el primer sentido lo es toda línea de longitud estacionaria. Se entiende por geodésica en el segundo sentido una línea tal que todos sus vectores tangentes son paralelos, (2) vectores que, en el espacio de Finsler, se suponen aplicados al elemento lineal que definen. Desde el primer punto de vista y referidas al parámetro s, a la abcisa curvilínea, son las integrales de (III.6'), sistemas que podemos escribir ahora, en virtud de (III.11),

$$g_{ij}\frac{d^2x^j}{ds^2} + 2G_i\left(x; \frac{dx}{ds}\right) = 0, \qquad \left(p^i = \frac{dx^i}{ds}\right)$$

o bien

$$\text{(III.12)} \qquad \frac{d^2x^j}{ds^2} + 2G^j\left(x; \frac{dx}{ds}\right) = 0.$$

Consideremos ahora una línea geodésica en sentido afín y refirámosla a un parámetro t cualquiera. El vector tangente $p^i = \frac{dx^i}{dt}$, cuyo elemento de apoyo es el (x^i, p^i), transladado al elemento $(x^i + p^i dt, p^i + \dot{p}^i dt)$ tiene como componentes (cf. III.9)

$$\begin{aligned} \overset{*}{p}{}^i &= p^i - \Gamma^i_{jk} p^j p^k dt - C^i_{jk} \dot{p}^j \dot{p}^k dt \\ &= p^i - \Gamma^i_{jk} p^j p^k dt = p^i - 2G^i(x, p)\, dt, \end{aligned} \quad (3)$$

---

(1) Para las relaciones entre el cálculo de variaciones y los espacios métricos generales, cf. por ejemplo, el artículo de L. Koschmieder, "Die neuere formale Variationsrechnung" (Jahr. der Deutsch. Math. Verein, 1931, 40, 109-132), en particular pgs. 113 a 124. Es menester advertir, con todo, que se refiere a la conexión afín de Berwald en tales espacios. (Berwald, pg. 45), no a la más general de Cartan.

(2) Es esta la definición general de geodésica en un espacio de conexión afín y no la que dan algunos autores, Brillouin, por ejemplo, $D\mu^i = 0$, donde μ^i es el vector tangente relativo a un cierto parámetro (parámetro afín).

(3) Cartan no estudia las geodésicas desde este punto de vista. La única relación que utilizamos aquí y que no hemos demostrado en lo que precede es la $p^i \Gamma^h_{ij} = \frac{\partial G^h}{\partial p^j}$ (cf. Cartan [2], pg. 16, ec. X). Todo lo demás se deduce de cuanto venimos diciendo.

Por otra parte, el vector tangente en $(x^i + p^i dt)$ es el $p^i + \dot{p}^i dt$. Si ambos vectores, asociados al mismo elemento lineal, han de ser paralelos, debe existir una función $\varphi(t)$ tal que

$$\frac{p^i - 2G^i(x;p)\,dt}{p^i + \dot{p}^i dt} = 1 - \varphi(t)\,dt,$$

de donde

$$\text{(III.13)} \qquad \frac{dp^i}{dt} + 2G^i(x;p) = p^i \varphi(t) \qquad \text{, o bien,} \quad \frac{d^2x^i}{dt^2} + 2G^i\left(x;\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dx^i}{dt}\varphi(t).$$

Este es, pues, el sistema de ecuaciones diferenciales de las geodésicas como líneas cuyas tangentes son paralelas entre sí. Introduzcamos en vez de t otro parámetro cualquiera $\sigma = \sigma(t)$; un cálculo fácil conduce a la ecuación transformada

$$\left\{ \frac{d^2x^i}{d\sigma^2} + 2G^i\left(x;\frac{dx}{d\sigma}\right) \right\}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \frac{dx^i}{d\sigma}\left\{\varphi(t)\frac{d\sigma}{dt} - \frac{d^2\sigma}{dt^2}\right\}.$$

Basta determinar σ con la condición

$$\varphi(t)\frac{d\sigma}{dt} - \frac{d^2\sigma}{dt^2} = 0 \qquad \therefore \qquad \sigma = C_1 + C_2 \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{u} \varphi(z)\,dz}\,du$$

(parámetro afín) para que el sistema (III.13) se convierte en el

$$\frac{d^2x^i}{d\sigma^2} + 2G^i\left(x;\frac{dx}{d\sigma}\right) = 0,$$

es decir, en el (III.12). Ambas definiciones son, pues, equivalentes y es obvio que entre σ y s debe existir una relación de la forma $\sigma = a + bs$.

29.- Con esto queda demostrado lo que repetidamente venimos anunciando: a cada lente electrónica resultante de la superposición de un campo eléctrico y de un campo magnético estáticos corresponde un espacio de Finsler unívocamente determinado, al igual que a cada lente electrónica de tipo eléctrico corresponde un espacio euclídeo-conforme. A éste se reduce precisamente aquél cuando $\vec{A} = 0$ en todo el dominio ocupado por la lente; basta, para verlo, con hacer en (III.2) $A_i = 0$ (i=1,2,3)(1) La función determinante de la métrica finsleriana es la (III.2):

$$\text{(III.2)} \qquad \mathcal{L}(x^i, p^i) = \sqrt{(V_0 - \phi)\left(\frac{V_0 - \phi}{c^2} + 2\eta\right)}\sqrt{\gamma_{ik}\,p^i p^k} - A_i\,p^i,$$

función que, evidentemente, es homogénea positiva de primer grado

(1) Siempre podemos suponer $\vec{A} = 0$ cuando no existe campo magnético, única circunstancia ésta que tiene sentido físico.

respecto de las p^i, pero no simplemente homogénea. Las geodésicas de este espacio son las trayectorias posibles de un electrón que penetra en el campo de la lente. Sus ecuaciones son invariantes de la transformación $A_i \to A_i + \frac{\partial U}{\partial x^i}$, lo que corresponde al hecho de estar definido el potencial vector $\vec{A}$ salvo un gradiente aditivo, que deberá serlo de una función armónica si a $\vec{A}$ se ha impuesto la condición de Lorentz ($\operatorname{div}\vec{A}=0$ en el caso estático).

Al contrario de lo que sucedía en el espacio euclídeo-conforme de una lente puramente eléctrica en la aproximación no-relativista (§ 15), la estructura del espacio de Finsler de una lente electrónica del tipo $(\phi, \vec{A})$ cambia en general al someter ésta a una transformación

$$x^i \to k_1 x^i, \qquad \eta \to k_3 \eta,$$
$$\phi - V_0 \to k_2(\phi - V_0), \qquad \vec{A} \to k_4 \vec{A},$$

en la que k_1, k_2, k_3 y k_4 son constantes positivas, incluso dentro de los límites de aquella aproximación. En particular, las geodésicas correspondientes a campos iguales $(k_2 = k_4 = 1)$ y a corpúsculos de η distintas $(k_3 \neq 1)$ son distintas, y de ahí la posibilidad de utilizar campos $(\phi, \vec{A})$ en la espectrografía de masas. Pero es claro que la estructura se conserva cuando entre las k_i existe la relación

$$\sqrt{k_2 k_3} = k_4 .$$

También en las lentes $(\phi, \vec{A})$ valen, pues, ciertas <u>leyes de semejanza</u>, pero son menos amplias que las correspondientes a las meramente eléctricas.(1)

30.- La definición de lente eléctrónica $(\phi, \vec{A})$ es en todo análoga a la de lente electrónica eléctrica: un dominio $\mathcal{D}_{em}$ del espacio en que se manifiestan un campo eléctrico, ϕ, y un campo magnético, $\vec{A}$, los cuales presentan la simetría de revolución en torno de una recta (eje de la lente). Se clasifican atendiendo a la distribución del potencial eléctrico, ϕ, a lo largo del eje (cf. § 14). Si ϕ es constante (lente eléctrónica magnética), la clasificación carece de objeto, pues entonces también es constante la

(1) Cf. Brüche-Recknagel, pg. 16.

velocidad v del electrón (cf. § 11).

Adoptemos en $\mathcal{D}_{em}$ un sistema de coordenadas cilíndricas $(x^1=z,\ x^2=r,\ x^3=\varphi)$. El potencial vector $\vec{A}$ es función exclusivamente de z y de r. Además, dado que las corrientes eléctricas que engendran el campo magnético carecen de componentes paralelas al eje de la lente, deberá ser $A_z=0$. Finalmente, la condición $\operatorname{div}\vec{A}=0$ nos da, en virtud de lo que acabamos de decir, $\frac{\partial rA_r}{\partial r}\equiv 0$ o sea, $rA_r=f(z)\therefore A_r=\frac{1}{r}f(z)$. Ahora bien, en el eje $A_r=0$; luego $f(z)=0$, esto es, $A_r=0$. La única componente no nula es la $A_\varphi(z,r)=A(z,r)$ de forma que (III.2) se escribirá simplemente

$$\text{(III.14)}\qquad \mathcal{L}(x^i;p^i)=\sqrt{\sigma}\sqrt{(p^1)^2+(p^2)^2+r^2(p^3)^2}-Arp^3.$$

Para valores de r suficientemente pequeños, $A(z,r)$ puede desarrollarse en serie de potencias de r:

$$A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(k+1)!}\left(\frac{r}{2}\right)^{2k+1}H^{(2k)}(z),$$

en la que $H(z)$ es la componente z del campo magnético en un punto genérico del eje de la lente $\mathcal{D}_{em}$. (1)

De (III.14) se deduce para $\mathcal{F}(x^i,p^i)=\frac{1}{2}\{\mathcal{L}(x^i,p^i)\}^2$ la expresión

$$\text{(III.15)}\qquad \mathcal{F}=\frac{1}{2}\left\{\sigma(\dot{z}^2+\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+A^2r^2\dot{\varphi}^2-2A\sqrt{\sigma}\,r\dot{\varphi}\sqrt{\dot{z}^2+\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2}\right\}$$

en la que, por comodidad de notación, hemos substituido las p^i por las variables $\dot{z}$, $\dot{r}$, $\dot{\varphi}$ sin que con ello se pretenda interpretarlas como derivadas respecto de un parámetro. En consecuencia

$$\text{(III.16)}\qquad \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\dot{z}}=\sigma\dot{z}-A\sqrt{\sigma}\,r\frac{\dot{\varphi}\dot{z}}{R},\quad \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\dot{r}}=\sigma\dot{r}-A\sqrt{\sigma}\,r\frac{\dot{\varphi}\dot{r}}{R},\quad \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\dot{\varphi}}=(\sigma+A^2)r^2\dot{\varphi}-\frac{A\sqrt{\sigma}\,r}{R}(\dot{z}^2+\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)$$
$$R=\sqrt{\dot{z}^2+\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2}$$

y, por lo tanto,

$$\text{(III.17)}\qquad \begin{cases} g_{11}=\sigma-\dfrac{A\sqrt{\sigma}\,r}{R^3}\dot{\varphi}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2), & g_{12}=\dfrac{A\sqrt{\sigma}\,r}{R^3}\dot{z}\dot{r}\dot{\varphi}, \quad g_{13}=-\dfrac{A\sqrt{\sigma}\,r}{R^3}\dot{z}(\dot{z}^2+\dot{r}^2),\\ g_{22}=\sigma-\dfrac{A\sqrt{\sigma}\,r}{R^3}\dot{\varphi}(\dot{z}^2+r^2\dot{\varphi}^2), & g_{23}=-\dfrac{A\sqrt{\sigma}\,r}{R^3}\dot{r}(\dot{z}^2+\dot{r}^2),\\ g_{33}=(\sigma+A^2)r^2-\dfrac{A\sqrt{\sigma}\,r}{R^3}r^2\dot{\varphi}(3\dot{z}^2+3\dot{r}^2+2r^2\dot{\varphi}^2). \end{cases}$$

Las componentes g_{ik} del tensor métrico se reducen, cual debe ser, a las (II.11) para $\vec{A}=0$. Pero la presencia de A altera las propie

(1) Busch [*], pg. 978.

dades del espacio métrico intrínsecamente asociado a la lente hasta tal extremo, que las magnitudes metricas no dependen ya del punto como a tal, sino del complejo punto-dirección orientada, del elemento lineal. Si en un punto del campo se encuentra el electrón, existe un elemento lineal, con centro en este punto, que nos aparece como privilegiado respecto de las demás de igual centro: áquel cuya dirección y sentido coinciden con los del movimiento de aquél. En este sentido, las cosas ocurren como si el electrón en movimiento determinara la métrica local. Por ejemplo, los vectores de base $\vec{e}_i$ de la referencia local $R(P)$ son ortogonales, siempre y sólo cuando el electrón se mueve en P perpendicularmente al plano meridiano que pasa por P $(\dot{z}=\dot{r}=0,\ \dot{\varphi}\neq 0)$.

Sea $(x^i, \dot{x}^i)$ un elemento lineal de $\mathcal{D}_{em}$. El módulo del vector contravariante $\dot{x}^i$ de base $(x^i, \dot{x}^i)$ vale

$$|\dot{x}| = \sqrt{g_{ik}(x,\dot{x})\,\dot{x}^i\dot{x}^k} = \mathcal{L}(x,\dot{x}).$$

El vector $\dot{x}^i/\mathcal{L}(x,\dot{x})$ es, por consiguiente, unitario y sus componentes covariantes son

$$u_i = g_{ik}\frac{\dot{x}^k}{\mathcal{L}(x,\dot{x})} = \frac{1}{\mathcal{L}(x,\dot{x})}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k}\dot{x}^k = \frac{1}{\mathcal{L}(x,\dot{x})}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}.$$

Si recordamos, además, que el índice de refracción $n(Q,\vec{s}_0)$ está ligado con $\mathcal{L}$ por la relación

$$n(Q,\vec{s}_0) = -\frac{c}{V_0+\eta c^2}\mathcal{L}(x^i, x'^i), \qquad (\text{Cf. } \S 24)$$

esto nos dice que el vector normal $\frac{\partial n}{\partial x'^i}$, en el sentido de la óptica ordinaria,(1) correspondiente a un rayo luminoso que pase por (x^i) en la dirección y sentido $(\dot{x}^i)$, tiene la misma dirección y sentido que éste ($|V_0+\eta c^2<0|$), ya que

$$\frac{\partial n}{\partial x'^i} = -\frac{c}{V_0+\eta c^2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^i} = -\frac{c}{V_0+\eta c^2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = -\frac{c}{V_0+\eta c^2}u_i.$$

Al pronto este resultado parece un tanto paradójico, ante el hecho de que, en la óptica ordinaria, un vector tangente al rayo luminoso y el vector normal asociado son distintos. Pero este ser distintos es consecuencia de interpretar las dos ternas $(\dot{x}^i), \left(\frac{\partial n}{\partial \dot{x}^i}\right)$ como componentes de vectores en el sentido elemental de la geometría euc

(1) Herzberger, pg. 9.

dea. En rigor, $\dot{x}^i$ es un vector analítico contravariante y $\frac{\partial n}{\partial \dot{x}^i}$ un vector analítico covariante [1] y claro está que la comparación de uno y de otro no es posible sin la introducción de una métrica g_{ik} en el espacio; según sea ésta, asi será la relación entre los vectores geométricos individualizados por aquellas ternas de números, vectores que juzgamos susceptibles de estar determinados, indistintamente, por vectores analíticos covariantes o contravariantes. En el esquema geométrico euclídeo, el rayo luminoso es transversal a la superficie de onda, el vector normal — de ahí su nombre - perpendicular a la misma. También en el esquema finsleriano el vector $\frac{\partial n}{\partial \dot{x}^i}$ es ortogonal a la superficie de onda; pero con él lo es a la vez el rayo luminoso. Y la razón de ello es obvia: en el espacio de Finsler determinado por el problema de variación $\delta \int \mathcal{L}(x, dx) = 0$, la noción de transversalidad a que éste da lugar coincide con la de ortogonalidad.

Otra interpretación cabe todavía: en el sistema canónico que deriva de la función $\mathcal{F}$ (§ 25), el impulso conjugado, p_i , de la coordenada x^i es $p_i = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'^i}$, igualdad ésta que se puede escribir

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'^i} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x'^i \partial x'^k} x'^k = g_{ik} x'^k = g_{ik} \frac{\dot{x}^k}{\mathcal{L}(x, \dot{x})} = u_i \quad ;$$

luego u_i coincide con el impulso conjugado de x^i.

31.- En el § 18 vimos que la translación de un vector a lo largo de un ciclo infinitesimal subordinaba en el espacio afín tangente en el punto de partida P una homografía vectorial. Si efectuamos el desarrollo del ciclo en este espacio, el ciclo en general no se cierra, sino que obtenemos como punto homólogo del P en el desarrollo dos puntos, el P y el P' , imagen éste de P concebido como punto final del ciclo en el espacio. La correspondencia entre el cuerpo de vectores en P y el de sus transladados a P' en el desarrollo es el producto de una translación y una homografía vectorial infinitesimal. Para que la primera se anule, es necesario y basta que sea cero el tensor de torsión

$$S^i_{\cdot jk} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}\right),$$

es decir, que la conexión afín sea simétrica. Los espacios riemannianos, en particular los euclídeo-conformes, carecen de torsión en virtud de la simetría (jk) de los símbolos de Christoffel $\left\{ {j\,k \atop i} \right\}$.

(1) Cf. § 1, Nota.

En cuanto a la segunda, sabemos ya que se reduce a la identidad siempre y sólo cuando es nulo el tensor de curvatura.

Consideraciones análogas cabe hacer en los espacios de Finsler,(1) salvo que en ellos el ciclo no es un ciclo puntual, sino de elementos lineales. La curvatura aparte, nos interesa aquí en particular la torsión, caracterizada por el tensor

$$A^{i}_{hk} = g^{im} A_{hmk} = \mathcal{L}\, g^{im} C_{hmk} \qquad (2)$$

Dado que $\| g^{im} \| \neq 0$, la condición necesaria y suficiente para que el tensor de torsión se anule y con él se reduzca a la identidad la translación asociada al ciclo de elementos lineales, es que sean nulas las componentes C_{hmk} definidas en (III.11), simétricas, evidentemente, respecto de los tres índices (hmk). En el espacio de Finsler $\mathcal{D}_{em}$, caracterizado por la función $\mathcal{L}$ (III.14), los valores de dichas componentes son

$$C_{111} = \frac{3}{2} A\sqrt{\sigma}\, r\left(\frac{\dot\varphi \dot z}{R^3} - \frac{\dot\varphi \dot z^3}{R^5}\right), \quad C_{112} = \frac{1}{2} A\sqrt{\sigma}\, r\left(\frac{\dot\varphi \dot r}{R^3} - \frac{3\dot z^2 \dot r \dot\varphi}{R^5}\right), \quad C_{122} = \frac{1}{2} A\sqrt{\sigma}\, r\left(\frac{\dot\varphi \dot z}{R^3} - \frac{3\dot r^2 \dot z \dot\varphi}{R^5}\right),$$

$$C_{222} = \frac{3}{2} A\sqrt{\sigma}\, r\left(\frac{\dot\varphi \dot r}{R^3} - \frac{\dot\varphi \dot r^3}{R^5}\right); \quad C_{113} = -\frac{1}{2} A\sqrt{\sigma}\, r\left(\frac{\dot r^2}{R^3} + \frac{3 r^2 \dot z^2 \dot\varphi^2}{R^5}\right), \quad C_{223} = -\frac{1}{2} A\sqrt{\sigma}\, r\left(\frac{\dot z^2}{R^3} + \frac{3 r^2 \dot r^2 \dot\varphi^2}{R^5}\right),$$

$$C_{333} = -\frac{3}{2} A\sqrt{\sigma}\, r^3 \frac{(\dot z^2 + \dot r^2)^2}{R^5}, \quad C_{133} = \frac{3}{2} A\sqrt{\sigma}\, r^3\left(\frac{\dot z \dot\varphi}{R^3} - \frac{\dot r^2 \dot z^2 \dot\varphi^2}{R^5}\right), \quad C_{233} = \frac{3}{2} A\sqrt{\sigma}\, r^3\left(\frac{\dot r \dot\varphi}{R^3} - \frac{r^2 \dot r \dot\varphi^3}{R^5}\right),$$

$$C_{123} = \frac{1}{2} A\sqrt{\sigma}\, r\left(\frac{\dot z \dot r}{R^3} - \frac{3 r^2 \dot z \dot r \dot\varphi^2}{R^5}\right).$$

La torsión sólo se anula, pues, en todo $\mathcal{D}_{em}$ cuando es $A = 0$, es decir, cuando la lente electrónica es una lente $\mathcal{D}_e$, una lente de tipo puramente eléctrico. Pero entonces el espacio de la lente no es ya un espacio de Finsler, sino un espacio euclídeo-conforme que se transforma en euclídeo cuando es $\phi = C^{te}$, esto es, en ausencia total de campo. Algo hay en el comportamiento del electrón - e igual diríamos de otro corpúsculo cualquiera dotado de carga eléctrica - que nos evoca esos tres estadios. Imaginemos primero un electrón libre; sus trayectorias, para el observador euclídeo, son rectas; no hay campo y el espacio es euclídeo. Si ahora entra en juego un campo eléctrico, las trayectorias dejan de ser rectas para transformarse en geodésicas de un espacio curvo; es el espa-

(1) Cartan [2], Cap. XIII.

(2) Cartan [2], pgs. 13 y 32.

cio euclídeo-conforme que ya estudiamos, cuyo tensor de curvatura es diferente de cero (§ 17). Finalmente, si se superpone al campo eléctrico un campo magnético, las trayectorias son geodésicas de un espacio de Finsler dotado de torsión y es notable que, a la vez, aparezca en dichas trayectorias, y desde el punto de vista de observador euclídeo, un alabeamiento de todas ellas debido precisamente al campo magnético.(1)

==========

(1) Picht, pg. 22 ; Bröche-Scherzer, pg. 117.

INDICE BIBLIOGRAFICO (1)

ARDENNE, M. VON

Elektronen-Übermikroskopie (Berlin, Springer, 1940)

BERWALD, L.

Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus (Math. Zeitsch., 1926, 25, 40-73)

BRILLOUIN, L.

Les tenseurs en mécanique et en élasticité (Paris, Masson, 1938)

BRÜCHE, E. Y SCHERZER, O.

Elektronengeräte (Berlin, Springer, 1934)

BRÜCHE, E. Y SCHERZER, O.

Geometrische Elektronenoptik (Berlin, Springer, 1934)

BUSCH, H.

Eine neue Methode zur $\frac{e}{m}$-Bestimmung (Phys. Zeitsch, 1922, 23, 438-441)

(*) Berechnung der Bahn von Kathodenstrahlen in axialsymmetrischen elektromagnetischen Felde (Ann. der Physik, 1926, 81, 974-993).

CARTAN, E.

[1] Leçons sur les invariants intégraux (Paris, Hermann, 1922)

[2] Les espaces de Finsler (Act. Scient. et Ind., nº 79, Paris, Hermann, 1934)

[3] La methode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés (Act. Scient. et Ind., nº 194, Paris, Hermann, 1935)

Leçons sur la géométrie des spaces de Riemann (Paris, Gauthier-Villars, 1928)

COURANT, R. Y HILBERT, D.

Methoden der Mathematischen Physik, vol. II (Berlin, Springer, 1937)

FINSLER, P.

Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen (Dissert., Göttingen, 1918)

(1) Nos limitamos a indicar aquellas obras o memorias a que nos hemos referido en el texto, indicando en general sólo el autor, y que guardan estrecha relación con el tema que hemos estudiado.

GLASER, W.

Über optische Abbildung durch mechanische Systeme und die Optik allgemeiner Medien (Ann. der Physik, 1933, 18, 557-585)

GOURSAT, E.

Course d'Analyse mathématique, vol. III. (Paris, Gauthier-Villars, 1942)

HERZBERGER, M.

Strahlenoptik (Berlin, Springer, 1931)

KOSCHMIEDER, L.

Die neuere formale Variationsrechnung (Jahr. der Deutsch. Math. Verein., 1931, 40, 109-132)

MARIANI, M.

Sur les limites d'application de la géométrie metrique en physique nucléaire (J. Physique, 1931, 296-306)

MIRA FERNANDES, A. DE

ASSIOMATICA DEGLI SPAZI DI ELEMENTO LINEARE (Portugaliae Math. 1941, 2, 7-12)

PICHT, J.

Einführung in die Theorie der Elektronenoptik (Leipzig, J.A. Barth, 1939)

SCHERZER, O.

Über einige Fehler von Elektronenlinse (Z. Physik, 1936, 101, 593-603)

SCHOUTEN, J.A.

Der Ricci-Kalkül (Berlin, Springer, 1924)

SCHRÖDINGER, E.

Quantisierung als Eigenwertproblem (Ann. der Physik, 1926, 79,

WHITTAKER, E.T.

Analytical Dynamics (Cambridge University Press, 2ª edición, 1917)

I N D I C E

Introducción I

I.- Las ondas de Hamilton en mecánica clásica 1

II.- El espacio euclídeo-conforme asociado a una lente electrónica eléctrica 18

III. El espacio de Finsler asociado a una lente electrónica electro-magnetostática . . 46

Indice bibliográfico 64