

MEMORIAS  
DE LA  
REAL ACADEMIA DE CIENCIAS  
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES  
DE  
MADRID

SERIE DE CIENCIAS FÍSICAS

TOMO II. — MEMORIA N.<sup>o</sup> 3



MEMORIAS  
DE LA  
REAL ACADEMIA DE CIENCIAS  
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES  
DE  
MADRID

---

SERIE DE CIENCIAS FÍSICAS

---

TOMO II. — MEMORIA N.º 3

LOS ESPACIOS MÉTRICOS EN ÓPTICA  
ELECTRÓNICA

POR

RAMÓN ORTIZ FORNAGUERA



MADRID  
Domicilio de la Academia:  
VALVERDE, 22 — TELÉFONO 212529  
1948

---

Imprenta de Aldecoa — Burgos

## INTRODUCCIÓN

Además de los tratados de carácter sistemático, los artículos y Memorias relativos a la óptica electrónica son numerosísimos, incluso los de carácter teórico. Pero, orientados las más de las veces por las necesidades de la técnica, en ellos sólo se considera el campo de las lentes electrónicas como un todo, no en su estructura. Desde el punto de vista de los principios, la óptica electrónica geométrica hubiera ya sido posible inmediatamente después que Hamilton estableció la analogía entre óptica geométrica y mecánica. Por otra parte, es sabido que la mecánica de los sistemas holónomos admite una interpretación geométrica en ciertos casos, conforme demostró Schrödinger al introducir la métrica riemanniana definida por la energía cinética, cuando los vínculos no dependen del tiempo, en el espacio de las configuraciones. Sin embargo, las posibles trayectorias naturales del sistema no coinciden, en general, con las geodésicas de dicha métrica. Pero hay más: la identificación de trayectorias y geodésicas exigirá, a veces, la introducción de métricas más generales que las de Riemann. Tenemos así tres modelos íntimamente relacionados: el óptico, el mecánico y el geométrico. En la óptica electrónica sólo se han considerado hasta hoy los nexos entre los dos primeros. Nosotros, en lo que sigue, nos proponemos sentar las bases para la intervención del tercero, el cual permite vincular a cada sistema óptico electrónico de campo estático un espacio métrico cuya estructura es la traducción geométrica de la del sistema.

*Madrid, mayo de 1947.*

## I. — LAS ONDAS DE HAMILTON EN MECÁNICA CLÁSICA

1.—Sea  $L (q^1, \dots, q^n; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n; t)$  la función de Lagrange que caracteriza el comportamiento de un sistema de puntos materiales, función en la que  $q^i$  son las coordenadas del punto representativo del

mismo en el espacio de las configuraciones,  $\dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt}$  son las componentes de la velocidad del mismo, y  $t$  el tiempo. Las ecuaciones de evolución son las de las extremales del problema de variación

$$(I. 1) \quad \delta \int L (q^1, \dots, q^n; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n; t) dt = 0,$$

siendo el elemento de comparación el conjunto de todas las trayectorias infinitamente próximas que pasan por dos puntos dados y recorridas entre dos instantes asimismo dados. Es decir, la evolución natural,  $q^i = q^i(t)$ , es una integral del sistema euleriano de ecuaciones diferenciales

$$(I. 2) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0.$$

El espacio de las configuraciones es, en el presente estadio, una variedad continua amorfa  $C_n$ , amorfa en el sentido de que en ella no se ha definido conexión alguna entre los espacios vectoriales afines tangentes. Éstos sí existen, en tanto que un cambio de coordenadas en la variedad

$$(I. 3) \quad q^i = q^i (\bar{q}^1, \dots, \bar{q}^n)$$

subordina una transformación lineal entera homogénea  $d q^i = \frac{\partial q^i}{\partial \bar{q}^j} d \bar{q}^j$  entre las diferenciales  $d q^i$  y sus transformadas por (I. 3).

De aquí resulta, en particular, el carácter contravariante del vector velocidad  $\dot{q}^i$ .

El escalar  $L(q^1, \dots, q^n; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n; t)$  depende de las variables  $q^i$ , que no son sino meras variables numéricas, y de las  $q^i$  que son componentes de un vector contravariante. Si consideramos  $q^1, \dots, q^n, t$  como parámetros fijos, la expresión  $dL = \frac{\partial L}{\partial q^i} d q^i$  es un escalar cualesquiera que sean las componentes del vector contravariante infinitesimal  $d q^i$ ; luego  $\frac{\partial L}{\partial q^i}$  son componentes de un vector covariante.

Pero hay más: sean  $T_{j_1 \dots j_h}^{i_1 \dots i_k}$  las componentes de un tensor de orden  $p = h + k$  y exceso  $\varepsilon = h - k$ , componentes que dependen no sólo de las coordenadas  $q^i$ , sino también de las componentes de otro tensor  $t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ :

$$T_{j_1 \dots j_h}^{i_1 \dots i_k} = T_{j_1 \dots j_h}^{i_1 \dots i_k}(q^i; t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}).$$

En estas condiciones, las derivadas parciales  $\frac{\partial T_{j_1 \dots j_h}^{i_1 \dots i_k}}{\partial t_{n_1 \dots n_s}^{m_1 \dots m_r}}$  son las

componentes de un tensor  $R_{m_1 \dots m_r, j_1 \dots j_h}^{n_1 \dots n_s, i_1 \dots i_k}$  de orden  $p = h + r + k + s$ , igual a la suma de los órdenes  $T$  y  $t$ , y de exceso  $\varepsilon = (r + h) - (s + k) = (h - k) - (s - r)$ , igual a la diferencia entre el exceso de  $T$  y el de  $t$  <sup>(1)</sup>. En particular,  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$  son las componentes de un tensor de orden 1 y exceso 1, es decir, de un vector covariante, el momento conjugado de la coordenada  $q^i$ ; luego la expresión

$$L + H = p_i \dot{q}^i$$

<sup>(1)</sup> A. DE MIRA FERNANDES, *Rend. della R. Accademia N. dei Lincei*, (6), 21, 1935, págs. 555-562.

es un escalar y, por lo tanto, también lo es  $H = p_i q^i - L$ . Supongamos que el determinante funcional  $\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \end{vmatrix}$  sea  $\neq 0$ . Las ecuaciones

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

definen entonces las  $\dot{q}^i$  como funciones de las  $p_i$ , lo que a su vez permite expresar el escalar  $H$  como función de  $q^i, p_i, t$ ; esto es:

$$H (q^i, p_i, t) = p_i \dot{q}^i (p_1, \dots, p_n, q^1, \dots, q^n, t) - L [q^i, \dot{q}^i (p, q, t), t].$$

Es fácil ver que el vector contravariante  $\frac{\partial H}{\partial p_i}$  coincide con  $\dot{q}^i$ . En efecto, derivando la ecuación que precede resulta:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}^i + p_k \frac{\partial q^k}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial q^k}{\partial p_i} = \dot{q}^i.$$

Resumiendo: a cada función de Lagrange  $L$  podemos asociar una función  $H$ , la función de Hamilton ligada a  $L$ , y al vector contravariante  $\dot{q}^i$  el vector covariante  $p_i$  de manera que valgan las siguientes relaciones:

$$(I. 4) \quad \left\{ \begin{array}{l} L (q^i, \dot{q}^i, t) + H (q^i, p_i, t) = p_i \dot{q}^i, \\ p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \end{array} \right.$$

Se reconoce fácilmente en ellas una transformación de Legendre entre las variables  $\dot{q}^i$  y  $p_i$ <sup>(1)</sup>. De (I. 4) resulta desde luego

(1) COURANT-HILBERT, pág. 28.

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q^i} + \frac{\partial H}{\partial q^i} = p_k \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q^i},$$

es decir,

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} + \frac{\partial H}{\partial \dot{q}^i} = 0,$$

lo que, junto con (I. 4), permite establecer el sistema canónico (I. 2'), equivalente al (I. 2),

$$(I. 2') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \end{array} \right.$$

La extensión que del concepto de invariante integral introducido por Poincaré ha llevado a cabo Cartan, le ha permitido demostrar la equivalencia del principio de Hamilton-Lagrange (I.1), con la condición de que las ecuaciones de la dinámica han de admitir el invariante integral relativo

$$\oint (p_i \delta q^i - H \delta t) \quad (1),$$

donde la integral curvilínea se extiende a un contorno cerrado cualquiera del espacio de los estados (espacio de las fases-tiempo).

2.—En la mecánica clásica no relativista, y supuesto que las fuerzas que actúan sobre el sistema deriven de un potencial V, la función de Lagrange L (potencial cinético) es de la forma

$$L = K - V = K_2(q^i, \dot{q}^i, t) + K_1(q^i, \dot{q}^i, t) + K_0(q^i, t) - V(q^i, t),$$

---

(1) CARTAN [1], págs. 13 y 24 (cap. III).

donde  $K_p(q^i, \dot{q}^i, t)$  ( $p = 0, 1, 2$ ) son formas de grado  $p$  respecto de las variables  $\dot{q}^i$  y  $K$  la energía cinética. La función de Hamilton asociada es la

$$H = p_k \dot{q}^k - K + V = \left( \frac{\partial K_2}{\partial \dot{q}^k} + \frac{\partial K_1}{\partial \dot{q}^k} + \frac{\partial K_0}{\partial \dot{q}^k} \right) \dot{q}^k - K + V = \\ = K_2 - K_0 + V,$$

y aparece así como suma de una forma cuadrática,  $K_2$ , en las componentes  $\dot{q}^i$  de la velocidad generalizada y de la función  $V - K_0$  que depende sólo de las coordenadas  $q^i$  y del tiempo. Siguiendo a Cartan <sup>(1)</sup> llamaremos a  $H$  *energía generalizada* del sistema relativa a la referencia ( $q^i$ ) en el espacio de las configuraciones. De los dos términos que la integran, uno, el  $K_2$ , es de carácter cinético, dado que en él aparecen las componentes  $\dot{q}^i$  de la velocidad, mientras que el otro, el  $V - K_0$ , es de naturaleza dinámica. La definición de  $H$  como *energía generalizada* está justificada por el hecho de que puede muy bien ocurrir que  $H$  sea una integral primera de (I.2') sin que lo sea la suma  $K + V$  de las energías cinética y potencial. Es sabido, en efecto, que la condición necesaria y suficiente para que  $H$  sea integral primera de (I.2') es que

$$\frac{d H}{d t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0;$$

luego la magnitud mecánica  $H$ , cuyas dimensiones son las de una energía, se mantiene constante a lo largo de la evolución natural del sistema siempre y sólo cuando la función  $H = p_k \dot{q}^k - K + V$  no depende explícitamente del tiempo, y ello no implica necesariamente que sea  $H = K + V$ . Cabe hablar, por ende, de conservación de la energía siempre que  $H$  resulte independiente de  $t$ , en el sentido de conservación de la energía *generalizada*. Por otra parte, dado que

---

<sup>(1)</sup> CARTAN [1], pág. 11.

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} (K_2 - K_0 + V) = \frac{\partial}{\partial t} (V - K) = - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (1),$$

resulta que para que se conserve dicha energía es necesario y basta que el potencial cinético  $L$  no dependa explícitamente del tiempo. Es esencial advertir que  $\frac{\partial L}{\partial t}$  supone constantes las  $(q^i, \dot{q}^i)$ , mientras que en  $\frac{\partial H}{\partial t}$  lo que mantenemos fijo es las  $(q^i, p_i)$ .

3.— Sean  $D$  un dominio del espacio de las configuraciones e  $I$  un intervalo temporal tales que para dos puntos cualesquiera de  $D$ ,  $Q(q^i)$  y  $Q_0(q^i_0)$ , y dos instantes, asimismo cualesquiera,  $t_0$  y  $t$  de  $I$ , los sistemas de valores  $(q^1, \dots, q^n, t)$  y  $(q^1_0, \dots, q^n_0, t_0)$  determinen una extremal, y sólo una, del problema de variación (I.1). Si  $u^i$  son las coordenadas de un punto genérico de  $D$  y designamos con  $s$  un valor genérico del tiempo, de modo que (I.1) se escriba

$$(I.5) \quad \delta \int_{t_0}^t L(u^1, \dots, u^n, \dot{u}^1, \dots, \dot{u}^n, s) ds = 0 \quad (2),$$

las ecuaciones finitas de dicha extremal serán

$$(I.6) \quad u^i = f^i(s; q^k_0, t_0; q^k, t),$$

y los correspondientes impulsos

$$(I.7) \quad v^i = g^i(s; q^k_0, t_0; q^k, t).$$

En virtud de la hipótesis hecha tocante al dominio  $D$  y al intervalo  $I$ , se tendrá, evidentemente,

$$(I.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} q^i \equiv f^i(t; q^k_0, t_0; q^k, t), \\ q^i_0 \equiv f^i(t_0; q^k_0, t_0; q^k, t). \end{array} \right.$$

(1) BRILLOUIN, pág. 152.

(2) COURANT-HILBERT, págs. 96 y ss.

Además, si se deriva (I. 6) respecto de  $s$  y hacemos *luego*  $s=t$  y  $s=t_0$ , se obtendrán las componentes contravariantes de la velocidad en los instantes  $t$  y  $t_0$ :

$$(I. 9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{q}^i = f^i(t; q^k_0, t_0; q^k, t), \\ \dot{q}^i_0 = f^i(t_0; q^k_0, t_0; q^k, t). \end{array} \right.$$

Finalmente, los correspondientes momentos conjugados son

$$(I. 10) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_i = g_i(t; q^k_0, t_0; q^k, t), \\ p_{i0} = g_i(t_0; q^k_0, t_0; q^k, t). \end{array} \right.$$

Las funciones (I. 9) y (I. 10) de las  $2n+2$  variables  $(q^k_0, t_0; q^k, t)$ , son las llamadas por Courant *funciones de campo* <sup>(1)</sup>.

La sustitución de (I. 6) en la  $\int_{t_0}^t L(u^i, \dot{u}^i, s) ds$  nos da una función de dichas  $2n+2$  variables

$$(I. 11) \quad \begin{aligned} W(q^k_0, t_0; q^k, t) = \\ = \int_{t_0}^t L[f^i(s; q^k_0, t_0; q^k, t), \dot{f}^i(s; q^k_0, t_0; q^k, t), s] ds. \end{aligned}$$

Su valor para dos puntos particulares  $Q_0(q^k_0)$  y  $Q(q^k)$  de  $D$  y dos instantes determinados  $t_0$  y  $t$  ha recibido el nombre de *acción hamiltoniana* entre los instantes  $t_0$  y  $t$  a lo largo de la extremal  $(Q, t) — (Q_0, t_0)$ , o mejor, *variación de la acción* <sup>(2)</sup> en dichas condiciones. En la óptica geométrica corresponde a este concepto, conforme es sabido, el de *iconal* <sup>(3)</sup> puntual. Ambos conceptos están comprendidos

<sup>(1)</sup> COURANT-HILBERT, pág. 98.

<sup>(2)</sup> Cabe definir la acción, en efecto, mediante  $W = W_0 + \int_{Q_0}^Q L(u^i, \dot{u}^i, s) ds$ , donde  $\Gamma$  es la extremal en cuestión.

<sup>(3)</sup> H. BRUNS, *Das Eikonal* (Leipz. Sitzgsber., 1895, 31, 321-436). Hemos adoptado este término en vez del *eiconal* por dos razones: primero, porque las voces griegas, tales como *εικόν*, *ειδύλλιον*, etc., han tomado en español las formas *icono*, *idilio*, etc.; segundo, porque existe ya el término *iconografía*, que procede de la misma raíz griega que el término *eikonal*, introducido por Bruns.

dos en el más general de *distancia geodésica*, relativa a un problema de variación de la forma (I. 5), entre los dos puntos  $(q^i_0, t_0)$  y  $(q^i, t)$  de la variedad  $V_{n+1}(u^i, s)$ , que representaremos con el símbolo  $C_n \times t$ . Supuesta  $L$  continua y con derivadas parciales continuas hasta el segundo orden en el dominio  $D \times I$ , se puede demostrar que la función  $W$  admite derivadas parciales primeras respecto de todos sus argumentos, derivadas dadas por las fórmulas

$$(I. 12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial W}{\partial t_0} = L(q^i_0, \dot{q}^i_0, t) - \dot{q}^k_0 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k_0} = H(q^i_0, p_{i0}, t_0), \\ \frac{\partial W}{\partial q^i_0} = - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i_0} = - p_{i0}, \end{array} \right.$$

$$(I. 13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial W}{\partial t} = - L(q^i, \dot{q}^i, t) + \dot{q}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = - H(q^i, p_i, t), \\ \frac{\partial W}{\partial q^i} = - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = p_i, \end{array} \right.$$

en las que hay que substituir las  $q^i_0$ ,  $q^i$ ,  $p_{i0}$  y  $p_i$  por las funciones de campo (I. 9) y (I. 10) <sup>(1)</sup>. Si mantenemos fijo el punto  $(Q_0, t_0)$ , la función  $W$  lo es sólo de las variables  $(q^i, t)$ , y, en virtud de (I. 13), es una integral de la ecuación entre derivadas parciales de primer orden

$$(I. 14) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + H\left(q^i, \frac{\partial W}{\partial q^i}, t\right) = 0. \quad (\text{Hamilton-Jacobi})$$

El sistema característico de la ecuación (I. 14), esto es, el sistema de ecuaciones diferenciales de las bandas características correspondientes a ella, es precisamente el sistema canónico (I. 2') junto con

$$\frac{dW}{dt} = p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H, \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial t},$$

(1) COURANT-HILBERT, pág. 99.

de donde resulta que la integración del sistema canónico permite integrar la ecuación (I.14). Recíprocamente, si se conoce una integral completa  $\bar{W}(q^1, \dots, q^n, t; a^1, \dots, a^n) + a$  de la ecuación de Hamilton-Jacobi, integral en la que las  $a^i$  son  $n$  parámetros independientes, ninguno de los cuales es una constante aditiva, las ecuaciones finitas

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial a^i} = b_i, \quad \frac{\partial \bar{W}}{\partial q^i} = p_i, \quad \left( \left\| \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial a^i \partial q^k} \right\| \neq 0 \right),$$

definen  $2n$  funciones  $q^i = q^i(t; a^k, b_k)$ ,  $p_i = p_i(t; a^k, b_k)$ , dependientes de los  $2n$  parámetros  $(a^k, b_k)$ , que constituyen un haz de integrales del sistema canónico (I.2') dependiente de dichos parámetros (*Teorema de Jacobi*).

4.—Esto sentado, consideremos el haz de integrales del sistema característico de (I.14):

$$(I.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dW}{dt} = p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H, \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad \frac{dp_t}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial t}, \end{array} \right.$$

que corresponde a los valores iniciales  $(t_0, q_{i0})$ , fijos, y dejando indeterminados los momentos iniciales  $p_{i0}$ . La integración se lleva a cabo en dos fases: si

$$(I.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} q^i = f^i(t; p_{i0}), \quad q_{i0} = f^i(t_0; p_{i0}), \\ p_i = g_i(t; p_{i0}), \quad p_{i0} = g_i(t_0; p_{i0}), \end{array} \right.$$

es el haz de integrales de  $q^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ ,  $p_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$ , determinado

por aquellas condiciones, las funciones  $W(t; p_{i0})$ ,  $p_t(t; p_{i0})$  se obtienen mediante cuadraturas:

$$W(t; p_{i_0}) = W_0 + \int_{t_0}^t \left\{ g_i(s; p_{i_0}) \frac{\partial}{\partial p_i} H[f^k(s; p_{i_0}), g_k(s; p_{i_0}), s] - H[f^k(s; p_{i_0}), g_k(s; p_{i_0}), s] \right\} ds,$$

$$p_t(t; p_{i_0}) = p_{t_0} - \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} H[f^k(s; p_{i_0}), g_k(s; p_{i_0}), s] ds.$$

El valor inicial de  $W_0$  puede ser cualquiera. No así el de  $p_t$ , ya que debe satisfacer la condición

$$p_{t_0} + H(q^i_0, p_{i_0}, t_0) = 0.$$

La ecuación  $W(t; p_{i_0}) = W_0$  establece para cada valor  $t = \bar{t}$  de  $t$  un nexo entre los parámetros hasta ahora arbitrarios  $p_{i_0}$ . El lugar geométrico de los puntos  $q^i = f^i(\bar{t}; p_{i_0})$ , donde los  $p_{i_0}$  independientes son en número de  $n - 1$  en virtud de la condición  $W(\bar{t}; p_{i_0}) = W_0$ ,

es una hipersuperficie del espacio de las configuraciones en todos los puntos de la cual es  $W = W_0$ . Esta superficie de *equiación* se mueve en dicho espacio en el transcurso del tiempo y se reduce al punto  $q^i_0$  en el instante  $t_0$  en virtud de (I. 16). La llamaremos *onda de Hamilton* de origen en  $Q_0(q^i_0)$  en el instante  $t_0$  (fig. 1). Fijado un valor  $\bar{t}$  de  $t$  y elegido un punto  $Q(q^i)$  en la hipersuperficie que, en el instante  $\bar{t}$ , define la posición de la

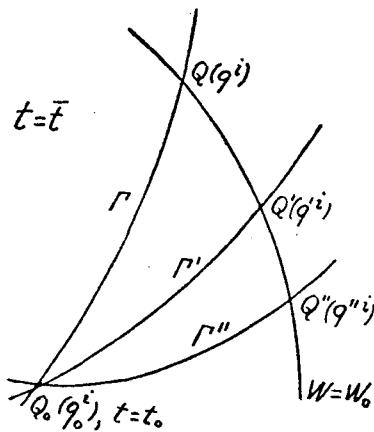


Fig. 1  
onda móvil de Hamilton, la extremal  $\Gamma$  de (I. 1) determinada por las condiciones en los límites  $(q^i_0, t_0), (q^i, \bar{t})$  es tal, que

$$(\Gamma) \int_{Q_0}^Q L(u^i, \dot{u}^i, s) ds = 0.$$

Esta extremal está determinada por los valores  $p_{i0}$  solución de

$$q^i = q^i(\bar{t}; p_{i0}), \quad W(\bar{t}; p_{i0}) = W_0.$$

Al mismo resultado se llega partiendo de la acción

$$W = W_0 + \int_{Q_0}^Q L(u^i, \dot{u}^i, s) ds$$

como función de las  $2n + 2$  variables  $q^i_0, t_0, q^i, t$ . La onda de Hamilton de centro en  $(q^i_0)$  en el instante  $t_0$  es la hipersuperficie móvil del  $C_n$

$$W(q^i_0, t_0; q^i, t) = W_0,$$

donde  $q^i_0$  y  $t_0$  se conciben como valores numéricos dados.

El comportamiento que muestran las ondas de Hamilton que en un cierto instante inicial se reducen a un punto, es un caso particular del de las ondas de Hamilton más generales, que se propagan a partir, no de un punto, sino de una hipersuperficie inicial. No nos será menester, sin embargo, ocuparnos de éstas, por lo cual prescindiremos de su estudio y propiedades <sup>(1)</sup>.

5. — Consideremos de nuevo la función  $W(q^i_0, t_0; q^i, t)$  antes definida

$$W(q^i_0, t_0; q^i, t) = W_0 + \int_{t_0}^t L(u^i, \dot{u}^i, s) ds,$$

y, supuesto fijos  $q^i_0, t_0$ , la onda de Hamilton  $W(q^i_0, t_0; q^i, t) = W_0$ . Sean  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  sus posiciones en el  $C_n$  en los instantes  $\bar{t}$  y  $\bar{t} + dt$ , respectivamente, y  $q^i = f^i(t)$  la extremal  $\Gamma$  correspondiente al punto  $Q(q^i)$  de  $\Sigma$  considerada en el instante  $\bar{t}$  (figura 2). Se tiene así, en el instante  $\bar{t}$ ,

$$\bar{q}^i = f^i(\bar{t}), \quad \dot{\bar{q}}^i = f^i(\bar{t}), \quad W[q^i_0, t_0; f^i(\bar{t}), \bar{t}] = W_0.$$

---

<sup>(1)</sup> COURANT-HILBERT, págs. 102-105.

Por otra parte, la ecuación de  $\Sigma'$  es

$$W[q^i_0, t_0; q^i + \delta q^i, \bar{t} + dt] = W_0,$$

donde  $q^i$  son las coordenadas de un punto cualquiera de  $\Sigma$ ; luego

$Q'(q^i + \delta q^i)$  está en  $\Sigma'$  si  $\delta q^i$  es tal que

$$\frac{\partial W}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial W}{\partial t} dt = 0.$$

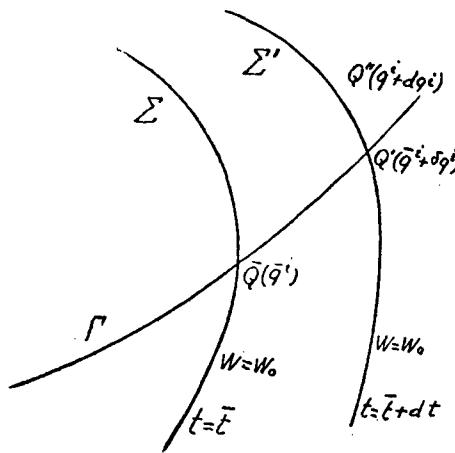


Fig. 2

Determinemos, en particular, la intersección de la extremal  $\Gamma$ , considerada geométricamente, como línea de  $C_n$ . Un punto de  $\Gamma$  infinitamente próximo al  $\bar{Q}(q^i)$  tiene por coordenadas  $\bar{q}^i + \dot{q}^i(\bar{t}) \delta t$ ; donde

$\delta t$  es una variación infinitesimal del parámetro  $t$ . Para que este punto pertenezca a  $\Sigma'$ , debe ser

$$\frac{\partial W}{\partial q^i} \dot{q}^i \delta t + \frac{\partial W}{\partial t} dt = 0, \quad (q^i = q^i, t = t)$$

o lo que es lo mismo,

$$\bar{p}_i \bar{q}^i \delta t - H(\bar{q}^k, \bar{p}_k, \bar{t}) dt = 0,$$

de donde

$$\delta t = \frac{H(\bar{q}^k, \bar{p}_k, \bar{t})}{\bar{p}_m \dot{q}^m} dt, \quad (p_m q^m \neq 0)$$

$$\delta q^i = \frac{H(\bar{q}^k, \bar{p}_k, \bar{t})}{\bar{p}_m q^m} \dot{q}^i dt.$$

Ahora bien,  $d q^i = \dot{q}^i dt$  es el corrimiento *real* del punto representativo del sistema, punto que en el instante  $\bar{t} + dt$  ocupa la posición  $Q''$ , cuando la onda de Hamilton está en  $\Sigma'$ . Por lo tanto, en el mismo intervalo  $dt$  durante el cual dicha onda pasa de  $\Sigma$  a  $\Sigma'$ , aquél punto lo hace de  $Q$  a  $Q''$  y entre las componentes de ambos corrimientos existen las relaciones

$$\frac{\delta q^i}{d q^i} = \frac{H}{p_k \dot{q}^k}.$$

Cualquiera que sea la métrica que se elija, por lo tanto, la razón de velocidades será

$$(I.17) \quad \frac{v}{v} = \frac{\delta q^i}{d q^i} = \frac{H}{p_k \dot{q}^k}.$$

Este resultado, del que haremos uso más adelante, es independiente de la significación mecánica que hemos atribuido a la función  $H$  y subsiste *cualquiera que sea la función  $L$*  de un problema de variación del tipo  $\delta \int L(u^i, \dot{u}^i, s) ds = 0$ . Además, el que no dependa de la métrica que se adopte en el espacio de las  $u^i$  permite una absoluta libertad en la elección de dicha métrica, elección en la que puede guiar-nos la naturaleza del problema particular que se estudie. Si  $L$  es de la forma antes indicada:

$$L = K_2(q^i, \dot{q}^i, t) + K_1(q^i, \dot{q}^i, t) + K_0(q^i, t) - V(q^i, t),$$

y, por ende,

$$H = K_2 - K_0 + V,$$

se tendrá:

$$\frac{v}{v} = \frac{K_2 - K_0 + V}{K_1 + 2K_2}$$

En particular, si el sistema es conservativo en el sentido de Brillouin (1)—vínculos independientes del tiempo y constancia de la energía total  $E = K + V$ —, la energía cinética se reduce al término  $K_2$ , y, por consiguiente,

$$(I.18) \quad \frac{\bar{v}}{v} = \frac{K + V}{2K} = \frac{E}{2K} = \frac{E}{2(E - V)}$$

Cuando se trata de un único corpúsculo de masa  $m$  y se adopta como métrica la del espacio euclídeo de modo que  $\frac{1}{2} m v^2 = E - V$ , la velocidad  $\bar{v}$  de la onda, según esta métrica, será:

$$\bar{v} = \frac{E}{2(E - V)} \sqrt{\frac{2(E - V)}{m}} = \frac{E}{\sqrt{2m(E - V)}},$$

o bien,

$$\bar{v} = \frac{E}{\sqrt{2(E - V)}},$$

en la métrica de Schrödinger (2).

6.—Establecidas ya estas generalidades, supongamos que el sistema canónico

$$q^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad p_i = - \frac{\partial H}{\partial q^i}$$

admite la función  $H$  de Hamilton como integral primera; esto es, que se conserva la energía generalizada—para lo cual es necesario y basta que  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ . Sea  $C(E)$  el conjunto de todas las evolu-

(1) BRILLOUIN, pág. 170.

(2) *Ann. Physik*, 79, 1926. pág. 494.

ciones del sistema que corresponden a un mismo valor  $E$  de la energía generalizada. En estas condiciones, las trayectorias naturales del sistema son las extremales de la integral

$$(I.19) \quad F = \int_{Q_0}^Q p_i dq^i$$

respecto de todas las trayectorias infinitamente próximas que pasan por las posiciones inicial y final del sistema y que satisfacen la relación  $H(q^i, p_i) = E$ . El valor  $F$  de la integral (I.19) es la variación de la acción en el sentido de Maupertuis al pasar de  $Q_0$  a  $Q$ , o simplemente la acción de Maupertuis.

Cabe dar otra forma a la integral (I.19) partiendo de las relaciones

$$K_2 - K_0 + V = E, \quad K_2 (dq^i) = K_2 (\dot{q}^i) (dt)^2.$$

Se tiene, en efecto,

$$p_i dq^i = \left( \frac{\partial K_2}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial K_1}{\partial \dot{q}^i} \right) dq^i = \frac{\partial K_2}{\partial \dot{q}^i} dq^i + K_1 (dq^i)$$

y

$$\frac{dq^i}{\dot{q}^i} = \dots = \frac{dq^n}{\dot{q}^n} = dt = \frac{\sqrt{K_2 (dq)}}{\sqrt{K_2 (\dot{q})}} = \frac{\sqrt{K_2 (dq)}}{\sqrt{E - V + K_0}},$$

de donde

$$\begin{aligned} p_i dq^i &= 2 K_2 (\dot{q}) \frac{\sqrt{K_2 (dq)}}{\sqrt{E - V + K_0}} + K_1 (dq) = \\ &= \sqrt{2(E - V + K_0)} \sqrt{2 K_2 (dq)} + K_1 (dq), \end{aligned}$$

o sea,

$$F = \int_{Q_0}^Q \left\{ \sqrt{2(E - V + K_0)} \sqrt{M_{ij} dq^i dq^j} + M_i dq^i \right\},$$

si  $2 K_2 = M_{ij} q^i q^j$  y  $2 K_1 = M_i q^i$ . Los coeficientes  $M_{ij}$  son los *coeficientes de inercia* del sistema respecto de la referencia ( $q^i$ ) del espacio de las configuraciones. Las trayectorias, por lo tanto, consideradas como líneas geométricas del  $C_n$ , independientemente de la ley de movimiento a lo largo de ellas del punto representativo del sistema, resultan como extremales del problema de variación  $\delta \int p_i dq^i = 0$ . Si  $q^i = q^i(\lambda)$  son las ecuaciones de una de esas extremales—la que pasa por  $Q_0$  y  $Q$ , por ejemplo—, la ley de movimiento resulta de la inversión de la integral

$$t - t_0 = \pm \int_{\lambda_0}^{\lambda} \sqrt{\frac{M_{ij} \frac{dq^i}{d\lambda} \frac{dq^j}{d\lambda}}{2(E - V + K_0)}} d\lambda,$$

lo que define el parámetro  $\lambda$  como función del tiempo, y, por ende, en último término, las coordenadas  $q^i$  como funciones de  $t$ .

7.—Cuando los vínculos y  $V$  son independientes del tiempo (sistemas conservativos), todos los  $M_i$  y  $K_0$  son nulos, la energía cinética  $K$  coincide con la forma cuadrática  $K_2$  y  $E = K + V$ . En tal caso, el principio de Maupertuis está expresado por la condición

$$(I. 20) \quad \delta \int \sqrt{2(E - V)} \sqrt{M_{ij} dq^i dq^j} = 0.$$

Ahora bien, puesto que la forma cuadrática diferencial  $M_{ij} dq^i dq^j$  es definida positiva, la determinación métrica  $ds^2 = M_{ij} dq^i dq^j$  es riemanniana en sentido estricto. Luego, si convenimos en introducir en la variedad  $C_n$ , amorfa hasta ahora, las conexiones afín y métrica más restrictivas compatibles con aquella determinación, el espacio de las configuraciones pasará a ser un espacio riemanniano en sentido estricto. Llamaremos a esta métrica introducida en el espacio de las configuraciones la *métrica de Schrödinger* asociada al problema dinámico. Que sepamos, ha sido Schrödinger, en efecto, el primero en usar sistemáticamente de una tal métrica <sup>(1)</sup>, aunque existían precedentes

---

(1) SCHRÖDINGER, loc. cit., pág. 491.

de traducción al lenguaje geométrico de ciertos conceptos mecánicos <sup>(1)</sup>.

La ecuación (I.14) de Hamilton-Jacobi, que en el caso que consideramos se reduce a

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2} M^{ij} \frac{\partial W}{\partial q^i} \frac{\partial W}{\partial q^j} + V = 0,$$

o también a

$$M^{ij} \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial q^j} = 2(E - V),$$

supuesto  $W = F - E t$ , expresa que el cuadrado del módulo del vector covariante  $\text{grad } F = \left( \frac{\partial F}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial q^n} \right)$  es igual precisamente a  $2(E - V)$ . Con él coincide, por otra parte, el  $\text{grad } W$ . Merced a la introducción de la métrica de Schrödinger es posible interpretar la

relación existente entre los vectores  $p_i = \frac{\partial W}{\partial q^i} = \frac{\partial F}{\partial q^i}$  y los  $q^i$ .

Imaginemos el conjunto de trayectorias de energía  $E$  que parten de  $Q_0$  (fig. 1) y la onda de Hamilton de origen en  $Q_0$  en el instante  $t_0$ . Esta onda coincide sucesivamente con las hipersuperficies  $F = W_0 + E t$ , donde

$$F(q^i_0, q^i) = W_0 + E t_0 + \int_{Q_0}^Q \sqrt{2(E - V)} ds. \quad (ds^2 = M_{ij} dq^i dq^j)$$

Sea  $F = C_1$  una cualquiera de estas hipersuperficies,  $Q$  un punto de ella y  $q^i$  las componentes de la velocidad en  $Q$  del punto representativo del sistema que recorre la extremal  $Q_0 Q$ . El momento conjugado correspondiente,  $p_i$ , es normal a dicha superficie, dado que cualquiera

(1) WHITTAKER, págs. 254 y ss.

que sea  $\delta q^i$ , tangente a ella, es  $\frac{\partial F}{\partial q^i} \delta q^i = 0$ , y, por lo tanto,  $p_i \delta q^i = 0$ . Pero las componentes covariantes de  $q^i$  son

$$(\dot{q})_i = M_{ij} \dot{q}^j = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial (K - V)}{\partial \dot{q}^i} = p_i;$$

luego  $q^i$ , esto es, la extremal  $Q_0 Q$ , es ortogonal a la hipersuperficie  $F = C_1$  y, por ende, a la posición de la onda de Hamilton en el instante  $t$  dado por  $W_0 + E t = C_1$ .

Del principio de Maupertuis se sigue, además, que las extremales del problema dinámico coinciden con las geodésicas de la métrica de Schrödinger en ausencia de campo agente ( $V = C^{te}$ ), pero no si éste existe. Por este motivo, y si pretendemos que dichas extremales coincidan con las geodésicas relativas a una cierta métrica, debemos adoptar como forma fundamental de la métrica riemanniana no la de Schrödinger, sino la

$$(I. 21) \quad ds'^2 = 2(E - V) M_{ij} dq^i dq^j \quad (1),$$

que resulta de ella mediante una transformación conforme <sup>(2)</sup>. La adopción de esta nueva métrica no modifica en modo alguno las relaciones angulares que se daban de acuerdo con la métrica primitiva —por ejemplo, las trayectorias que parten de  $Q_0$  siguen siendo ortogonales a las sucesivas posiciones de la onda de Hamilton de origen en  $Q_0$ . Pero sí, en cambio, quedan alteradas las propiedades métricas no angulares—por ejemplo,  $\text{grad } F = \text{grad } W$  es ahora un vector unitario, puesto que las componentes contravariantes del nuevo tensor

fundamental de la métrica son  $g^{ik} = \frac{M^{ik}}{2(E - V)}$ .

La transformación conforme

$$g_{ik} = 2(E - V) M_{ik}$$

(1) Cf. WHITTAKER, pág. 254; BRILLOUIN, págs. 146 y 165.

(2) SCHOUTEN, pág. 168.

permite, por lo tanto, interpretar las trayectorias naturales del sistema como geodésicas del espacio riemanniano que resulta de introducir en  $C_n$  la métrica riemanniana  $g_{ik}$ . Conviene insistir en que este resultado se consigue mediante una *transformación conforme* y no acudiendo a un cambio de coordenadas en el  $C_n$  <sup>(1)</sup>.

8.—Evidentemente, no siempre será posible el establecer una métrica riemanniana en el  $C_n$  que esté intrínsecamente ligada al problema dinámico, en el sentido de que la evolución del sistema se pueda describir como movimiento del punto representativo del mismo a lo largo de una geodésica. En algunos casos, la identificación *aproximada* puede efectuarse en el “espacio-tiempo”,  $C_n \times t$ , conforme ha demostrado Brillouin <sup>(2)</sup>. En efecto, definamos en el  $C_n \times t$  la métrica riemanniana

$$dS^2 = (A + 2K - 2V) dt^2, \quad (2K = M_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + 2M_i \dot{q}^i + 2K_0)$$

donde  $A$  es una constante muy grande respecto de  $K$  y de  $V$ . Las componentes  $g_{\alpha\beta}$ , ( $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, n$ ) del tensor métrico son, pues,

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{00} = A + 2K_0 - 2V, \quad (q^0 = t) \\ g_{0i} = g_{i0} = M_i, \\ g_{ij} = M_{ij}, \end{array} \right.$$

y las ecuaciones diferenciales de las geodésicas, en función del parámetro afín  $S$ , serán

(1) No deja de ser sorprendente el siguiente párrafo de J. Mariani (*Journ. de Physique*, 1939, pág. 298): “Le problème de la dynamique des systèmes est ainsi ramené à un problème de dynamique du point matériel dans l'espace  $q$  [introduciendo en éste la métrica  $M_{ik} d\dot{q}^i d\dot{q}^k$ ], à son tour, ce dernier peut être réduit à un problème purement géométrique, en introduisant une extension en configuration nouvelle, dont les coordonnées  $q^i$  son telles que  $d\dot{q}^i = \sqrt{2(E - V)} d\dot{q}^i$  et qui est par conséquent applicable conformément sur la multiplicidad definida por las  $q^i$ .” Evidentemente, no puede tratarse de un simple cambio de coordenadas —de una transformación puntual entre dos espacios, si se quiere—, pues las relaciones de definición que adopta,  $d\dot{q}^i = \sqrt{2(E - V)} d\dot{q}^i$ , no cumplen las condiciones de integrabilidad.

(2) BRILLOUIN, pág. 152. El razonamiento que sigue difiere algo del de Brillouin.

$$\frac{d}{dS} \left( g_{\alpha\beta} \right) \frac{d q^\beta}{dS} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\alpha} \frac{d q^\mu}{dS} \frac{d q^\nu}{dS} = 0,$$

o también

$$\frac{d}{dS} \left( p_\alpha \frac{dt}{dS} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{dt}{dS} \right)^2 \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu = 0, \quad \left( \dot{q}^\alpha = -\frac{dq^\alpha}{dt} \right)$$

donde  $p_\alpha$  son las componentes covariantes del vector  $\dot{q}^\beta$ :

$$p_\alpha = g_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta. \quad (q^0 = 1)$$

En particular

$$\begin{cases} p_i = g_{i\beta} \dot{q}^\beta = M_i + M_{ii} \dot{q}^i = \frac{\partial K}{\partial q^i}; \\ p_0 = g_{0\beta} \dot{q}^\beta = A + 2K_0 - 2V + K_1. \end{cases}$$

Ahora bien,

$$g_{\alpha\beta} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu = A + 2K - 2V;$$

luego

$$p_\alpha \frac{d^2 t}{dS^2} + \left( \frac{dt}{dS} \right)^2 \left[ \frac{dp_\alpha}{dt} - \frac{\partial (K - V)}{\partial q^\alpha} \right] = 0;$$

es decir,

$$(I.22) \quad p_\alpha \frac{\frac{d^2 t}{dS^2}}{\left( \frac{dt}{dS} \right)^2} + \frac{dp_\alpha}{dt} - \frac{\partial (K - V)}{\partial q^\alpha} = 0.$$

Además,

$$\frac{\frac{d^2 t}{d S^2}}{\left(\frac{d t}{d S}\right)^2} = - \frac{\frac{d (K - V)}{d t}}{A + 2 K - 2 V},$$

de suerte que se puede prescindir del primer término en (I.22) si  $A$  es suficientemente grande y para  $\alpha = 1, 2, \dots, n$ . Obtenemos así

$$\frac{d p_i}{d t} - \frac{\partial (K - V)}{\partial q^i} \simeq 0 \quad (\text{Lagrange}),$$

es decir, las ecuaciones de Lagrange como primera aproximación. En cuanto a la ecuación (I.22) para  $\alpha = 0$ , resulta:

$$\begin{aligned} & - \frac{A + 2 K_0 - 2 V + K_1}{A + 2 K - 2 V} \frac{d (K - V)}{d t} + \\ & + \frac{d (A + 2 K_0 - 2 V + K_1)}{d t} - \frac{\partial (K - V)}{\partial t} = 0, \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} & \frac{K_1 + 2 K_2}{A + 2 K - 2 V} \frac{d (K - V)}{d t} + \\ & + \frac{d (K_0 - K_2 - V)}{d t} - \frac{\partial (K - V)}{\partial t} = 0; \end{aligned}$$

luego

$$\frac{K_1 + 2 K_2}{A + 2 K - 2 V} \frac{d (K - V)}{d t} - \frac{d H}{d t} - \frac{\partial L}{\partial t} = 0;$$

y para A suficientemente grande

$$\frac{d \cdot \mathbf{H}}{d t} - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{d \mathbf{H}}{d t} + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} \simeq 0,$$

que es la ecuación clásica relativa a la energía generalizada.

9.—Veremos en lo que sigue que el espacio adecuado a una lente electrónica estática de tipo eléctrico es un espacio riemanniano euclídeo-conforme <sup>(1)</sup>, mientras que las que resultan de la superposición de un campo eléctrico y de un campo magnético estáticos requieren una métrica de un muy otro carácter. La razón física de ello es obvia: la acción del campo eléctrico sobre un corpúsculo dotado de carga no depende ni de la dirección ni del sentido en que aquél se mueve; la del campo magnético, en cambio, varía no sólo con la dirección del movimiento, sino también con su sentido. Las geodésicas de un espacio riemanniano no pueden, por lo tanto, coincidir con las trayectorias de los corpúsculos cargados que se mueven en una lente del tipo últimamente citado: aquéllas son esencialmente reversibles, éstas no.

La propiedad del campo magnético que acabamos de recordar, ese depender la acción del campo de la dirección y sentido en que se mueve el corpúsculo, presenta una gran analogía con la estructura que muestran los espacios de Finsler <sup>(2)</sup>. Y, en efecto, demostraremos más adelante que a cada lente electrónica eléctrica y magnética corresponde, por modo intrínseco, un espacio de Finsler cuyas geodésicas coinciden con las trayectorias posibles de un corpúsculo de energía dada que se mueve en el campo de aquélla.

---

(1) SCHOUTEN, pág. 169.

(2) P. FINSLER, *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen*, Dissert., Göttingen, 1918.

## II. — EL ESPACIO EUCLÍDEO-CONFORME ASOCIADO A UNA LENTE ELECTRÓNICA ELÉCTRICA

10.—Conforme hicimos notar en el § 5, a cada problema de variación  $\delta \int L (u^1, \dots, u^n, \dot{u}^1, \dots, \dot{u}^n, s) ds = 0$ , caracterizado por una determinada función de Lagrange  $L$ , podemos vincular ciertas hiper superficies que interpretábamos como hipersuperficies móviles en el espacio  $C_n$  de las  $u^i$  al atribuir a la variable  $s$  la significación de variable temporal, y a las que se da el nombre de ondas de Hamilton. Vemos, además, que entre la velocidad  $\bar{v}$  con que se mueve en el instante  $t$  [ ] un punto  $Q (q^i)$  de la onda de Hamilton de origen  $Q_0 (q^i_0)$  en el instante  $t_0$  [a lo largo de la extremal  $(q^i, t) — (q^i_0, t_0)$ ] y la velocidad  $v$ , en el mismo instante  $t$ , del punto que describe aquélla, existe la relación (I. 17).

$$(I. 17) \quad \frac{\bar{v}}{v} = \frac{H (q^i, p_i, t)}{p_i \dot{q}^i},$$

independiente de la métrica adoptada en  $C_n$  para definir la distancia entre dos puntos infinitamente próximos, definición que, a su vez, es necesaria si pretendemos hablar de *valor* de la velocidad.

11.—Consideremos, en particular, la función de Lagrange relativista que corresponde al movimiento de un corpúsculo de masa en reposo  $m$  y carga eléctrica  $e$  bajo la acción de un campo eléctrico de potencial electrostático  $\Phi$  y de un campo magnético determinado por el potencial vector  $\vec{A}$ :

$$(II.1) \quad L = -m c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} + e \vec{A} \times \vec{v} - e \Phi}.$$

En esta expresión  $e$ ,  $\Phi$  y  $\vec{A}$  se suponen medidos en unidades electromagnéticas CGS y  $c$  es la velocidad de la luz. Elegido un sistema cualquiera de coordenadas curvilíneas  $x^i$  en el *espacio* ambiente (euclídeo), la función  $L$  se escribe

$$(II.1') \quad L = -m c^2 \left( 1 - \frac{1}{c^2} \gamma_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k \right)^{1/2} + e A_i \dot{x}^i - e \Phi, \quad (i = 1, 2, 3)$$

donde  $\gamma_{ik}$  son las componentes en coordenadas curvilíneas del tensor de la métrica euclídea,  $A_i$  las componentes covariantes del potencial vector, y  $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$  las componentes contravariantes del vector velocidad. Las componentes covariantes del campo eléctrico  $\vec{E}$  son

$$(II.2) \quad \vec{E} = \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial x^1}, -\frac{\partial \Phi}{\partial x^2}, -\frac{\partial \Phi}{\partial x^3} \right).$$

En cuanto al campo magnético, sus componentes naturales constituyen el tensor covariante de segundo orden antisimétrico

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}.$$

Este carácter antisimétrico permite definirlo mediante la densidad vectorial contravariante

$$H^k = F_{ij}, \quad (ijk) = \text{permutación par de } 1, 2, 3.$$

o lo que es lo mismo, por medio del vector contravariante

$$(II.3) \quad H^k = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \quad H^k = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} F_{ij}, \quad (\gamma = ||\gamma_{ik}||)$$

Las funciones  $\Phi$  y  $A_i$  no pueden ser cualesquiera, sino que están sujetas a las condiciones

$$\Delta \Phi = -4\pi c^2 \rho, \quad \Delta \vec{A} = -4\pi \vec{i},$$

que se reducen a

$$(II.4) \quad \Delta \Phi = 0, \quad \Delta \vec{A} = 0$$

si son nulos en el dominio del espacio que consideramos la densidad  $\rho$  de las cargas libres y el vector intensidad  $\vec{i}$ ;  $\Delta$  es el operador de Laplace

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{\gamma} \gamma^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \right).$$

De (II.1') se deducen desde luego los impulsos conjugados

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{m \gamma_{ik} \dot{x}^k}{\sqrt{1 - \beta^2}} + e A_i, \quad \left( \beta = \frac{v}{c} \right)$$

suma del impulso cinético  $m v_i / \sqrt{1 - \beta^2}$  y del impulso potencial  $e A_i$ , y la función de Hamilton

$$H = p_i \dot{x}^i - L = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + e \Phi,$$

suma de la energía en reposo del corpúsculo y de su energía cinética y de la energía potencial  $e \Phi$ . Dado que  $H$  no depende explícitamente del tiempo, existe conservación de la energía y podemos escribir

$$\frac{m c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + e \Phi = m c^2 + e V_0,$$

donde  $V_0$  es el potencial del campo eléctrico en aquellos puntos en que se anula la velocidad  $v$  del corpúsculo. En lo que se sigue tomaremos la ecuación anterior en la forma

$$(II.5) \quad \frac{\eta c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \Phi = \eta c^2 + V_0, \quad \left( \eta = \frac{m}{c} \right)$$

de la que se deduce que si el campo es puramente magnético, la velocidad  $v$  del corpúsculo es constante.

12.—Esto sentado, la razón  $\bar{v}/v$  entre la velocidad de la onda de Hamilton y la del corpúsculo vale, en virtud de (I.17),

$$\frac{\bar{v}}{v} = \frac{\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + e\Phi}{\frac{mv^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + e\vec{A} \times \vec{v}},$$

de donde

$$\bar{v} = \frac{\frac{\eta c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \Phi}{\frac{\eta v}{\sqrt{1-\beta^2}} + \vec{A} \times \vec{s}_0} = \frac{V_0 + \eta c^2}{\frac{\eta v}{\sqrt{1-\beta^2}} + \vec{A} \times \vec{s}_0}.$$

El vector  $\vec{s}_0$  que aparece en el segundo miembro es el vector unitario *euclídeo* tangente a la trayectoria del corpúsculo y acorde con el sentido del movimiento de éste. Ahora bien, la relación (II.5) nos define  $v$  como función de punto. Se tiene, en efecto,

$$\frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta, \quad v = \varepsilon \sqrt{\frac{(V_0 - \Phi) \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + 2\eta \right)}{\frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta}},$$

(II.6)

$$\frac{\eta v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \varepsilon \sqrt{(V_0 - \Phi) \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + 2\eta \right)}. \quad (\varepsilon \eta = |\eta|)$$

Luego obtenemos, en definitiva,

$$(II.7) \quad \bar{v} = \frac{V_0 + \eta c^2}{\varepsilon \sqrt{(V_0 - \Phi) \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + 2\eta \right)} + \vec{A} \times \vec{s}_0},$$

fórmula que expresa la velocidad  $\bar{v}$  de la onda de Hamilton en función del punto  $Q(x^i)$  y de la dirección y sentido,  $\vec{s}_0$ , del movimiento.

Por otra parte, el principio de Maupertuis,  $\delta \int p_i d q^i = 0$ , nos permite afirmar que las posibles trayectorias del corpúsculo  $(m, e)$  de energía total  $mc^2 + eV_0$  son las extremales de la integral

$$\int p_i d q^i = \int p_i \dot{q}^i d t = \int \frac{H}{\bar{v}} v d t = \int \frac{H}{\bar{v}} d s_1,$$

siendo  $d s_1$  el elemento lineal euclídeo:  $d s_1^2 = \gamma_{ik} d x^i d x^k$ . Dichas trayectorias, por lo tanto, son los rayos de la óptica geométrica de un medio, no-homogéneo y no-isótropo en general, caracterizado por

el índice de refracción  $n \sim \frac{H}{\bar{v}}$ :

$$(II.8) \quad n(Q, \vec{s}_0) = \frac{c}{V_0 + \eta c^2} \left\{ \varepsilon \sqrt{(V_0 - \Phi) \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + 2\eta \right)} + \vec{A} \times \vec{s}_0 \right\}^{(1)}$$

<sup>(1)</sup> Cf. W. GLASER, "Über optische Abbildung durch mechanische Systeme und die Optik Allgemeiner Medien" (*Ann. Physik*, 1933, 18, 557-585). La expre-

rayos que son las extremales de  $\delta \int n ds_1 = 0$  (principio de Fermat). Las ondas de Hamilton son precisamente las superficies de onda de esta óptica geométrica, y  $\bar{v}$  es la velocidad de fase.

En la definición (II.8) del índice  $n$  se da una indeterminación que procede de que  $V_0$  está determinado salvo una constante aditiva. No así el factor entre paréntesis, que lo está únicamente.  $V_0$ , potencial de un punto en que es nula la velocidad del corpúsculo, coincide sensiblemente con el potencial del cátodo cuando aquél es un electrón de incandescencia. Se suele tomar dicho potencial como potencial cero, con lo que  $n$  queda determinado sin ambigüedad. De todos modos, si en vez de tomar  $V_0$  como potencial del cátodo se tomara el valor  $V'_0$ , ello no tiene otra consecuencia que multiplicar el índice  $n$  por un factor constante:

$$n' = \frac{V_0 + \eta c^2}{V'_0 + \eta c^2} n,$$

lo que, a su vez, no repercute en absoluto en las trayectorias del corpúsculo posibles.

13.—Las consideraciones generales que preceden las aplicaremos a la óptica electrónica; es decir, el corpúsculo ( $m, e$ ) será un electrón, como valores característicos del cual tomaremos

$$\left. \begin{array}{l} m : e = \eta = -5,685 \cdot 10^{-8}, \\ m = 9,108 \cdot 10^{-28} \text{ gr.}, \\ e : m = -1,759 \cdot 10^7, \\ e = -1,602 \cdot 10^{-20}, \end{array} \right\} \text{u. e. m. CGS.}$$

Además, en las fórmulas que preceden deberá hacerse  $\epsilon = -1$ . En óptica electrónica se considera el electrón como prácticamente libre,

---

sión que da del índice de refracción, que llama  $\mu$ , no es correcta, lo que es debido a un error en el cálculo de  $\eta v$ . En el valor de este producto no ha tenido en cuenta, en efecto, que  $\eta$  puede ser positivo o negativo y, además, falta en él el fac-

tor  $\frac{1}{c}$ .

es decir, se prescinde de los procesos que resultan de choques de los electrones entre sí o con moléculas de gas. Las trayectorias, por lo tanto, dependerán sólo de la acción de los campos dados, eléctrico, magnético, o eléctrico y magnético, campos que supondremos estáticos. En cuanto a la adopción del valor (II.8) o el aproximado

$$\mathbf{n} \simeq -\sqrt{2\eta(V_0 - \Phi)} + \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{s}_0},$$

todo depende del orden de magnitud de  $(V_0 - \Phi)/c^2$  respecto de  $\eta$ , o, lo que en el fondo es lo mismo, de que pueda prescindirse o no de la variación de la masa con la velocidad. Para potenciales del orden de 500 kV,  $(V_0 - \Phi)/c^2$  es ya igual a  $\eta$ . Sin embargo, el potencial acelerador en los microscopios electrónicos suele ser, como máximo, de 50 a 80 kV, y, generalmente, bastante menor. Hasta 10 kV puede prescindirse de la corrección relativista y tomar simplemente

$$n \sim \sqrt{2\eta(V_0 - \Phi)} - \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{s}_0}, \quad v = -\frac{1}{\eta} \sqrt{2\eta(V_0 - \Phi)}.$$

Si  $\vec{\mathbf{A}} = 0$ , y dentro de los límites de esta aproximación, el índice  $n$  resulta ser igual al cociente  $\beta = v/c$ , supuesto normalizado  $n$  a base de la condición  $V_0 = 0$  <sup>(1)</sup>.

Recordaremos finalmente que, en rigor, el electrón no obedece a la mecánica relativista puntual clásica, de modo que ésta debe concebirse como una aproximación válida sólo para pequeños valores de la longitud de onda de De Broglie asociada al electrón.

$$\lambda = \frac{h}{mv} \sqrt{1 - \beta^2} = \lambda_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} \quad (2).$$

En las condiciones normales hoy en óptica electrónica, esta longitud de onda es suficientemente pequeña respecto de las dimensiones de los objetos que se examinan y de la variación del índice de refracción

(1) BRÜCHE-SCHERZER, pág. 49.

(2)  $\lambda_0$  = longitud de onda de Compton =  $\frac{h}{mc}$ .

electrónico  $n$  con la distancia, como para poder limitarnos a la mecánica clásica, lo que vale tanto como ajustarnos a una a modo de mecánica geométrica, en oposición a la ondulatoria <sup>(1)</sup>. Dicho con otras palabras: en la técnica electrónica que consideramos, el electrón se comporta siempre como corpúsculo. Y conste que al hablar de comportamiento corpuscular, contraponiéndolo al ondulatorio, nos referimos a la dualidad de naturaleza entendida en el sentido que hoy se atribuye a tal palabra. De hecho, *un solo* electrón no se comporta como onda. Lo que ésta traduce es el comportamiento *global* de un *enjambre* de electrones. Con un solo electrón—y lo mismo vale para un solo fotón—no cabe obtener fenómenos de interferencia. En cambio, ello sí es posible cuando se dispone de una colectividad de electrones o de fotones. La longitud de onda de la onda de De Broglie permite predecir y rige la distribución de un enjambre homogéneo de electrones después que éstos han atravesado una malla cristalina, ponemos por caso; pero es claro que los anillos de Debye-Scherrer no resultarán nunca con un único electrón <sup>(2)</sup>.

14.—Consideremos un dominio,  $D_e$ , del espacio en el que se manifiesta un campo puramente eléctrico ( $\vec{A} = 0$ ,  $\text{grad } \Phi \neq 0$ ) que presenta la simetría de revolución respecto de una recta. Del dominio  $D_e$  diremos que constituye una *lente electrónica eléctrica* <sup>(3)</sup>, y llamaremos a dicha recta *eje* de la lente. La clasificación de las lentes de este tipo se hace atendiendo a los valores  $V$  del potencial  $\Phi$  a lo largo del eje.

La más sencilla de entre ellas, la lente de orificio (Lochblendenlinse), consiste, en esencia, en un condensador plano en una de cuyas armaduras  $B$  se ha practicado una abertura circular. Supuestas a distinto potencial una de otra, se origina un campo eléctrico de revolución en torno de la recta normal a las armaduras y que pasa por el centro de dicha abertura. En general, se coloca además un tercer electrodo,  $C$ , perpendicular asimismo al eje, dispuesto de modo que el electrodo  $B$  quedé entre él y la otra armadura  $A$  del condensador <sup>(4)</sup>.

---

(1) BRILLOUIN, págs. 197 y ss.

(2) Cf., por ejemplo, JEAN-LOUIS DESTOUCHES, *Principes fondamentaux de Physique théorique*, París, Hermann, 1942, vol. III, pág. 807.

(3) BRÜCHE-SCHERZER, págs. 33 y 58.

(4) PICHT, pág. 61.

La distribución del potencial a lo largo del eje depende de los potenciales de A, B y C y está esquemáticamente representada en la figura 3.

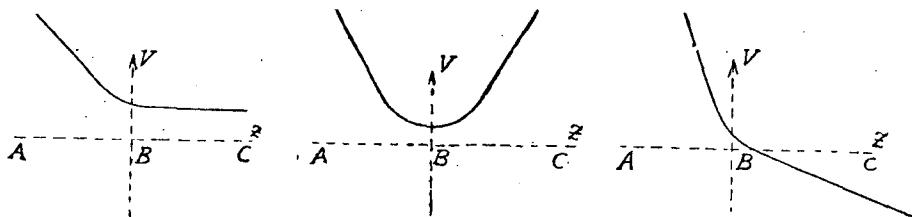


Fig. 3

Hemos supuesto planos los electrodos, aunque no siempre lo son, pero sí normales a un mismo eje. En realidad, lo que caracteriza la lente de orificio es la existencia de un electrodo dotado de una aber-

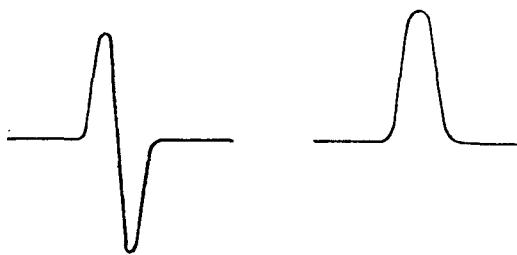


Fig. 4

tura circular de plano normal al eje de la lente y la presencia de uno o más electrodos, de modo que, en conjunto, se origine un campo eléctrico, bien sea a la derecha, a la izquierda o a ambos lados del

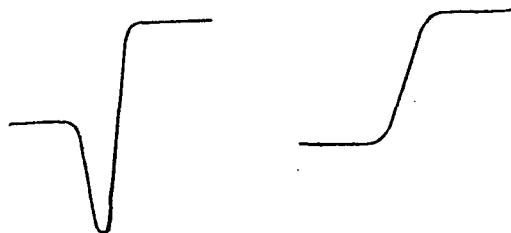


Fig. 5

primero; es decir, dos medios, uno por lo menos de los cuales es de índice de refracción variable, no homogéneo.

De la combinación de dos o más de dos lentes de orificio resultan lentes electrónicas de tipo eléctrico, más o menos complicadas, que

separan dos medios de índices de refracción eléctrica constante, esto es, de potenciales constantes. Si los índices de aquéllos son iguales, se habla de una *lente simple* (fig. 4); si son distintos, se dice que la lente es una *lente de inmersión* (fig. 5) <sup>(1)</sup>.

Al igual que en la óptica ordinaria, se distingue entre lentes electrónicas delgadas y gruesas según sea pequeña o grande la razón entre la longitud del segmento del eje en que el campo eléctrico es diferente de cero y la distancia focal de la lente <sup>(2)</sup>.

15.—Sea, pues,  $D_e$  una lente electrónica eléctrica y elijamos como sistema de referencia un sistema de coordenadas cilíndricas cuyo eje  $z$  coincida con el eje de la lente. Este sistema de coordenadas curvilíneas en  $D_e$  subordina una referencia local  $R$  ( $e_1, e_2, e_3$ ) en cada

punto  $P$  de  $D_e$  (fig. 6). En el espacio base del campo eléctrico suponemos adoptada la métrica euclídea ordinaria, de modo que el cuadrado del elemento lineal en dicho ambiente y en aquel sistema es

$$ds_1^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2.$$

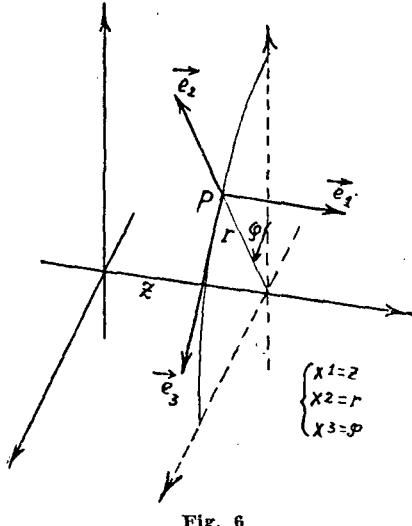


Fig. 6

En cuanto al potencial  $\Phi$ , será exclusivamente función de  $z$  y de  $r$ , pero no de  $\phi$ , en virtud de la supuesta simetría en torno de  $z$ . Además, los efectos de la carga espacial sólo aparecen cuando un gran número de electrones se encuentran en pequeñas regiones del espacio, o bien cuando éstos atraviesan un campo de cargas positivas (producidas acaso por ellos mismos al ionizar moléculas gaseosas con las que chocan [Gaskonzentration]).

Para un potencial acelerador de 10 kV y una densidad de corriente electrónica de  $10^{-3} \text{ A cm}^{-2}$ , la cual rara vez se presenta en óptica electrónica, un haz homogéneo de electrones que primitivamente se

<sup>(1)</sup> BRÜCHE-SCHERZER, pág. 58.

<sup>(2)</sup> Para la teoría de las lentes electrónicas véase, p. e., la obra de Picht, en particular los capítulos C. y D.

movían paralelamente al eje aumenta su sección en un 10 % a 63 cm de la sección inicial. Prescindiremos, por ello, de tales efectos y, en consecuencia,

$$(II. 9) \quad \Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = 0 \quad (1).$$

Las trayectorias naturales de los electrones *de igual energía* <sup>(2)</sup> que atraviesan la lente son las extremales de la integral

$$\int \sqrt{(V_0 - \Phi) \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + 2\eta \right)} ds_1$$

y coinciden, por lo tanto, con las geodésicas de la métrica euclídea-conforme

$$(II. 10) \quad ds^2 = \sigma (dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2),$$

donde hemos hecho, para abbreviar,

$$(II. 11) \quad \sigma = (V_0 - \Phi) \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + 2\eta \right).$$

La conexión métrica definida por (II. 10) está ligada intrínsecamente a la lente  $D_e$ , por lo cual la adoptaremos como métrica *en el campo* de la lente, independientemente de la métrica euclídea del espacio base de la misma (cf. con lo dicho en la Introducción).

En la aproximación no-relativista,  $\sigma = -2\eta (V_0 - \Phi) > 0$  y

$$(II. 10') \quad ds^2 = -2\eta (V_0 - \Phi) \gamma_{ik} dx^i dx^k.$$

(1) La anulación de  $\Delta \Phi$  se traduce en un inconveniente sólo evitable introduciendo singularidades en el campo (rejas): la curvatura de las superficies refractantes depende del índice de refracción.

(2) Conseguir esta igual energía es uno de los problemas más difíciles de resolver, e incluso lo es el conseguir reducir los efectos a que da lugar el que deje de cumplirse esta condición (aberraciones cromáticas; véase, por ejemplo, Picht, pág. 190, o von Ardenne, pág. 47). Scherzer ha demostrado que las aberraciones cromáticas son prácticamente inevitables en la mayor parte de los casos (*Z. für Physik*, 1936, 101, 593, 603).

Evidentemente, si multiplicamos las longitudes euclídeas por la constante positiva  $k_1$ , el potencial  $V_0 - \Phi$  por la  $k_2$  y  $\eta$  por la  $k_3$ , la forma cuadrática (II. 10') queda multiplicada por

$$K = k_1^2 k_2 k_3 > 0,$$

lo cual, por ser  $K$  una constante, no altera en absoluto las ecuaciones de las geodésicas correspondientes a la métrica (II. 10'). Esto significa físicamente que en dos lentes electrónicas cuyos electrodos y disposición sean semejantes geométricamente (razón de semejanza lineal  $k_1$ ) y en las que la razón de los potenciales en los puntos homólogos es constante ( $= k_2$ ), las trayectorias de todos los corpúsculos cuya  $\eta = m/e$  tenga el mismo signo son semejantes en el espacio ordinario (razón de semejanza  $k_1$ ) y recorridas en el mismo sentido. La invariancia de las ecuaciones de las geodésicas por una tal transformación es, pues, la traducción geométrica de la *ley de semejanza* <sup>(1)</sup>.

16.—Según (II. 10), las componentes covariantes del tensor métrico son, en el sistema de coordenadas adoptado,

$$(II. 11) \quad g_{ik} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma r^2 \end{pmatrix} \quad \| g_{ik} \| = \sigma^3 r^2,$$

y, por lo tanto, las componentes contravariantes del mismo serán

$$(II. 11') \quad g^{ik} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma r^2} \end{bmatrix}$$

<sup>(1)</sup> BRÜCHE-RECKNAGEL, pág. 14.

De ello se sigue que las referencias locales  $R(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  son ortogonales y que las longitudes de los vectores de base en  $P$  medidas con la unidad absoluta <sup>(1)</sup> son

$$|\vec{e}_1| = \sqrt{\sigma(P)}, \quad |\vec{e}_2| = \sqrt{\sigma(P)}, \quad |\vec{e}_3| = r \sqrt{\sigma(P)},$$

resultado que era de prever, dada la forma de (II.10).

Para determinar las componentes  $\Gamma_{ijk}^i$  de la conexión afín, formemos primero los símbolos de Christoffel de primera especie

$$\Gamma_{ijk}^i = [j k] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right)$$

Se obtiene así

$$(III.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{111} = \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \quad \Gamma_{112} = \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial r}, \quad \Gamma_{113} = 0, \quad \Gamma_{122} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \\ \Gamma_{123} = 0, \quad \Gamma_{133} = -\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial \sigma}{\partial z}; \\ \\ \Gamma_{211} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial r}, \quad \Gamma_{212} = \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \quad \Gamma_{213} = 0, \quad \Gamma_{222} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial r}, \\ \Gamma_{223} = 0, \quad \Gamma_{333} = -\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial \sigma}{\partial r} - r \sigma; \\ \\ \Gamma_{311} = 0, \quad \Gamma_{312} = 0, \quad \Gamma_{313} = \frac{1}{2} r^2 \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \quad \Gamma_{322} = 0, \\ \Gamma_{323} = \frac{1}{2} r^2 \frac{\partial \sigma}{\partial r} + r \sigma, \quad \Gamma_{333} = 0; \end{array} \right.$$

(1) Recuérdese que en todo espacio riemanniano el transporte de las longitudes es integrable y que, por ende, las determinaciones métricas pueden suponerse contrastadas de modo tal que el transporte por congruencia no altere las longitudes. La unidad utilizada en la contrastación es la unidad absoluta.

de donde resultan fácilmente las componentes  $\Gamma_{jk}^i$  buscadas, teniendo en cuenta (II. 11') y dado que  $\Gamma_{jk}^i = \left\{ \begin{matrix} i \\ j \ k \end{matrix} \right\} = g^{ih} \Gamma_{hjk}$ :

$$\left. \begin{array}{l}
 \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial r}, \quad \Gamma_{13}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \\
 \Gamma_{23}^1 = 0, \quad \Gamma_{33}^1 = -\frac{1}{2\sigma} r^2 \frac{\partial \sigma}{\partial z}; \\
 \\ 
 \Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial r}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \quad \Gamma_{13}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial r}, \\
 \Gamma_{23}^2 = 0, \quad \Gamma_{33}^2 = -\frac{1}{2\sigma} r^2 \frac{\partial \sigma}{\partial r} - r; \\
 \\ 
 \Gamma_{11}^3 = 0, \quad \Gamma_{12}^3 = 0, \quad \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \quad \Gamma_{22}^3 = 0, \\
 \Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^3 = 0;
 \end{array} \right\} \quad (\text{II.12})$$

en las que, según (II.11),

$$\left. \begin{array}{l}
 \frac{1}{2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial z} = -\frac{1}{\sigma} \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right) \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \\
 = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right) E_z, \\
 \\ 
 \frac{1}{2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial r} = -\frac{1}{\sigma} \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right) \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \\
 = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right) E_r,
 \end{array} \right\} \quad (\text{II.13})$$

siendo  $E_z$  y  $E_r$  las componentes *ordinarias* del vector campo eléctrico  $\vec{E}$ .

Veamos cuál es la influencia de éste en el transporte por paralelismo. Sea  $u^i$  un vector, aplicado en  $P$  ( $x^1, x^2, x^3$ ), dado por sus componentes contravariantes en la referencial local  $R$  ( $P$ ). Si mediante una traslación lo llevamos al punto  $P'$  ( $x^1 + dx^1$ ), sus componentes en la referencia  $R$  [ $\vec{e}_1(P'), \vec{e}_2(P'), \vec{e}_3(P')$ ] serán

$$\begin{aligned} \vec{u}'^i &= u^i + \delta u^i = \\ &= u^i - \Gamma_{jk}^i u^j dx^k. \end{aligned}$$

Consideremos en particular tres corrimientos,  $d_i P$ , uno en cada una de las direcciones de  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  y  $\vec{e}_3$ , es decir, paralelamente al eje de la lente el primero, en el plano meridiano que pasa por  $P$  perpendicularmente al eje el segundo, y normal en  $P$  a este plano el tercero (fig. 7).

Las matrices que representan las correspondientes afinidades infinitesimales son:

$$(II.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_1 = -\frac{1}{\sigma} \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right) \begin{pmatrix} E_z & E_r & 0 \\ -E_r & E_z & 0 \\ 0 & 0 & E_z \end{pmatrix} dz, \\ \delta_2 = -\frac{1}{\sigma} \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right) \begin{pmatrix} E_r & -E_z & 0 \\ E_z & E_r & 0 \\ 0 & 0 & E_r \end{pmatrix} dr - \\ \quad - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix} dr, \end{array} \right.$$

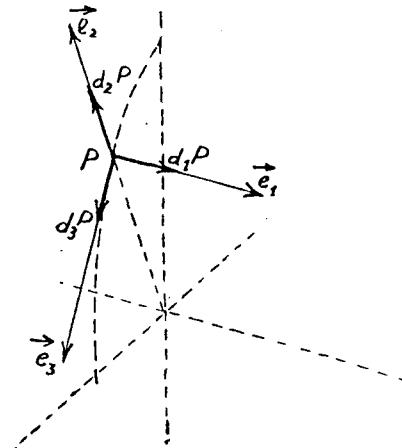


Fig. 7

$$(II.14) \quad \delta_s = -\frac{1}{\sigma} \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r^2 E_z \\ 0 & 0 & -r^2 E_r \\ E_z & E_r & 0 \end{pmatrix} d\phi -$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix} d\phi.$$

De su estructura se deduce: *a)* los corrimientos  $d_1 P$  y  $d_2 P$  conservan en el plano meridiano los vectores situados en él, y perpendiculares al mismo los vectores que lo son a dicho plano; ningún vector se conserva, para el observador euclídeo del ambiente, salvo si en  $P$  el campo es nulo, en cuyo caso se conservan todos; *b)* el corrimiento de  $d_3 P$  deja invariantes, para ese observador, los vectores del plano meridiano perpendiculares al campo eléctrico y conserva todos los vectores si el campo es nulo.

Es fácil deducir de (II.14) que si trasladamos el vector velocidad de un electrón de energía  $mc^2 + eV_0$  que parte de  $P$  tangencialmente al eje local  $e_1$  al punto  $P' = P + \vec{v} dt$ , las componentes del vector trasladado son proporcionales a las componentes de la velocidad del electrón en el punto  $P'$ . No podía dejar ello de ser así, en tanto que la trayectoria del mismo es una geodésica.

La suma de las tres matrices (II.14) nos da la matriz de la afinidad infinitesimal que enlaza los espacios vectoriales tangentes en dos puntos infinitamente próximos

$$(II.15) \quad \delta = -\frac{1}{\sigma} \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right) \begin{pmatrix} E_z dz + E_r dr & E_r dz - E_z dr & -r^2 E_z d\phi \\ -E_r dz + E_z dr & E_z dz + E_r dr & -r^2 E_r d\phi \\ E_z d\phi & E_r d\phi & E_z dz + E_r dr \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r d\phi \\ 0 & \frac{d\phi}{r} & \frac{dr}{r} \end{pmatrix}.$$

De las dos matrices sumandos, la primera es la que traduce la desviación del transporte riemanniano inducido por la métrica (II.10) —esto es, determinado por el campo eléctrico— respecto de la translación puramente euclídea que está representada por la segunda matriz. Si en vez de coordenadas cilíndricas hubiésemos elegido en el ambiente un sistema de referencia cartesiano, los elementos de esta segunda matriz hubieran resultado ser, evidentemente, todos nulos.

17.—El estudio de la curvatura afín y riemanniana de la lente electrónica  $D_e$  requiere el conocimiento del tensor de curvatura de Riemann-Christoffel:

$$R^i_{jkh} = \frac{\partial \Gamma^i_{jh}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^h} + \Gamma^i_{rk} \Gamma^r_{jh} - \Gamma^i_{rh} \Gamma^r_{jk} \quad (1).$$

En virtud de las propiedades de simetría y antisimetría de las componentes covariantes  $R_{ijkh}$  de este tensor <sup>(2)</sup>, las  $n^4 = 81$  componentes covariantes se reducen a  $\frac{1}{12} n^2 (n^2 - 1) = 6$  independientes, cuyos valores, deducidos de (II.12), son

$$(II.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{2323} = \frac{1}{2\sigma} r^2 \left( \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right)^2 - \frac{r^2}{4\sigma} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 - \frac{r^2}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} \right), \\ R_{2312} = 0, \\ R_{3131} = \frac{1}{2\sigma} r^2 \left( \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 - \frac{r^2}{4\sigma} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right)^2 - \frac{r^2}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} \right), \\ R_{3123} = -\frac{3}{4\sigma} r^2 \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{r^2}{2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z \partial r}; \end{array} \right.$$

(1) SCHOUTEN, pág. 86; BRILLOUIN, pág. 88. Las notaciones empleadas varían bastante de unos autores a otros. Aquí seguimos la de Brillouin, lo que trae consigo que algunas fórmulas aparezcan con signo contrario a aquel con que se encuentran en Schouten.

(2) SCHOUTEN, págs. 87-89; BRILLOUIN, ecuaciones VII. 83, 89 y 90.

$$(II.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{1212} = \frac{1}{2\sigma} \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} \right), \\ R_{1231} = 0. \end{array} \right.$$

De ellas se siguen, por elevación de índices mediante (II. 11') y teniendo en cuenta las condiciones antes citadas, las componentes  $R^i_{\cdot jkh}$  del tensor de curvatura. No tiene gran interés el explicitarlas; pero sí lo tiene, en cambio, transformar las fórmulas (II. 16) poniendo de manifiesto las magnitudes físicas que involucran. Observemos en primer lugar que, de acuerdo con las fórmulas (II. 13), las siguientes relaciones valen para las derivadas parciales de  $\sigma$ .

$$(II.17) \quad \begin{aligned} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right)^2 &= 4 \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right)^2 E^2, \quad (E^2 = E_z^2 + E_r^2) \\ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} &= \frac{2}{c^2} E_z^2 - 2 \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} &= \frac{2}{c^2} E_r^2 - 2 \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \end{aligned}$$

de las que se deduce fácilmente

$$\Delta \sigma = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} = \frac{2}{c^2} E^2 - 2 \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right) \Delta \Phi \quad (3)$$

Pero en virtud de la hipótesis (II. 9),  $\Delta \Phi = 0$ ; luego

$$(II.18) \quad \Delta \sigma = \frac{2}{c^2} E^2.$$

---

(3) Con el símbolo  $\Delta$  representamos aquí la laplaciana euclídea (cf. § 11).

Esto sentado, la nueva forma de las componentes  $R_{ijkl}$  es

$$\left. \begin{aligned}
 R_{2323} &= r^2 \left[ \left[ \frac{2}{\sigma} \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right)^2 - \frac{1}{c^2} \right] E_r^2 - \frac{1}{\sigma} \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right)^2 \times \right. \\
 &\quad \left. \times E_z^2 + \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right) \frac{\partial E_z}{\partial z} \right]; \\
 R_{3131} &= r^2 \left[ \left[ \frac{2}{\sigma} \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right)^2 - \frac{1}{c^2} \right] E_z^2 - \frac{1}{\sigma} \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right)^2 \times \right. \\
 &\quad \left. \times E_r^2 + \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right) \frac{\partial E_r}{\partial r} \right]; \\
 R_{1212} &= \left[ \frac{2}{\sigma} \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right)^2 - \frac{1}{c^2} \right] E^2 + \frac{1}{r} \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right) E_r; \\
 R_{2312} &= 0, \\
 R_{3123} &= -r^2 \left\{ \left[ \left[ \frac{3}{\sigma} \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right)^2 - \frac{1}{c^2} \right] E_r E_z - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right) \frac{\partial E_z}{\partial r} \right\}; \\
 R_{3123} &= 0;
 \end{aligned} \right. \quad (II.19)$$

o bien, introduciendo la velocidad  $v$  en vez del potencial,

$$\left. \begin{aligned}
 R_{2323} &= r^2 \left[ \left( \frac{2}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) E_r^2 - \frac{1}{v^2} E_z^2 + \frac{\eta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\partial E_z}{\partial z} \right], \\
 R_{2312} &= 0; \\
 R_{3131} &= r^2 \left[ \left( \frac{2}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) E_z^2 - \frac{1}{v^2} E_r^2 + \frac{\eta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\partial E_r}{\partial r} \right], \\
 R_{3123} &= r^2 \left[ - \left( \frac{3}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) E_r E_z + \frac{\eta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\partial E_z}{\partial r} \right], \\
 R_{1212} &= \left( \frac{2}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) E^2 + \frac{\eta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{E_r}{r}.
 \end{aligned} \right. \quad (II.19)$$

Lo mismo (II.19) que (II.19') muestran cómo se pueden deducir de los resultados de mediciones *puramente físicas* las componentes del tensor de Riemann-Christoffel ligado a la lente  $D_e$ .

18.—Sea  $P$  un punto de  $D_e$  y  $\pi$  una orientación plana que lo contiene, orientación definida, por ejemplo, por un bivector; sea  $S$  una superficie cualquiera que pasa por  $P$  y posee en él aquella orientación. Supongamos, además, que en  $S$ , en un cierto entorno de  $P$ , se ha trazado un doble sistema simplemente infinito de líneas tales que por cada punto de dicho entorno pasa una sola línea de la primera familia y una sola línea de la segunda sin ser tangentes entre sí. Finalmente, designemos con  $d_1$  y  $d_2$  las diferenciales respecto de los parámetros  $v_1$  y  $v_2$ , a que están referidas las líneas de los dos sistemas.

Por el punto  $P_1$  de la línea  $v_2 = C^{\text{te}}$  que pasa por  $P$ , e infinitamente próximo a  $P$ , pasa una línea  $v_1 = C^{\text{te}}$ ; por el punto  $P_2$  de la línea  $v_1 = C^{\text{te}}$  que pasa por  $P$ , e infinitamente próximo a  $P$ , pasa una línea  $v_2 = C^{\text{te}}$ . Sea  $P_{12} = P_{21}$  el punto de intersección de estas

dos líneas próximo al  $P$  (fig. 8) y consideremos el ciclo infinitesimal  $P P_1 P_{12} P_2 P$ . Siempre podemos suponer que el bivector  $d_1 x^{[i} d_2 x^{k]} = d$  define la misma orientación  $\pi$ —en último término bastaría, si no, llamar  $d_2$  a lo que hemos llamado  $d_1$ , y recíprocamente. Imaginemos ahora que transladamos un vector  $u^i$  del espacio vectorial  $\Pi$  tangente en  $P$  a  $D_e$  a lo largo

del ciclo  $P P_1 P_{12} P_2 P$ , en este sentido precisamente, hasta llegar de nuevo a  $P$ . La translación se efectúa, claro está, por medio de las componentes  $\Gamma_{jk}^i$  de la conexión afín de  $D_e$ . Tenemos así, finalmente, dos vectores aplicados en  $P$ , elementos, por lo tanto, de  $\Pi$ : el vector  $u^i$  y el  $\bar{u}^i$  que resulta de la translación. Se demuestra que entre las

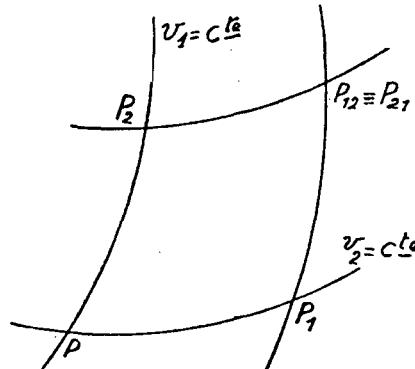


Fig. 8

componentes  $\dot{u}^i$  y  $u^i$  existen, en estas condiciones, las relaciones siguientes <sup>(1)</sup>:

$$(II.20) \quad \dot{u}^i = u^i - R^i_{jk} u^j d_1 x^k d_2 x^h.$$

Esto nos dice que, fijado un ciclo de aquellas características, la correspondencia entre un vector  $u^i$  aplicado en  $P$  y su transladado hasta  $P$  a lo largo del ciclo es una homografía vectorial infinitésima que transforma en sí mismo el espacio vectorial  $\Pi$  tangente en  $P$  a  $D_e$ . Esta homografía vectorial, es decir, la

$$(II.20) \quad \dot{u}^i = u^i + \Omega^i_j u^j,$$

donde, siguiendo a Cartan, hemos designado con  $\Omega^i_j$  la forma bilineal alternada  $\Omega^i_j = -R^i_{jk} d_1 x^k d_2 x^h$ , es la llamada *homografía vectorial asociada al ciclo*. Los coeficientes  $\Omega^i_j$  de la misma dependen, en efecto, tan sólo de éste.

Para que la homografía (II.20') se reduzca a la identidad es necesario y basta que  $\Omega^i_j u^j = 0$  cualquiera que sea  $u^j$ , es decir,  $\Omega^i_j = 0$ . Si además pretendemos que ello valga para cualquier orientación, deberá ser  $R^i_{jk} = 0$ . Cuando esto ocurre en todos los puntos de un dominio  $D \equiv D_e$ , o sea, cuando en  $D$  es  $R^i_{jk} = 0$ , la translación de un vector a lo largo de un contorno cerrado *cualquiera* contenido en  $D$  conduce a la identidad al volver al punto de partida, y la translación de los vectores es integrable en  $D$ . El espacio  $D$  es entonces un *espacio plano*, y si la conexión afín es riemanniana, el espacio es *euclídeo* <sup>(2)</sup>. El espacio  $D_e$  de la lente electrónica no es, por lo tanto, euclídeo, y en ésto descansa precisamente la posibilidad de obtener, por modo aproximado (aberraciones), un punto como imagen de otro punto mediante geodésicas de  $D_e$  (trayectorias electrónicas) <sup>(3)</sup>.

(1) Cf., por ejemplo, SCHOUTEN, pág. 83, o CARTAN, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann* (París, Gauthier-Villars, 1928, págs. 183 y 184). La demostración que da Brillouin (págs. 87-88) no es correcta, pues se basa en la

integrabilidad del transporte por paralelismo cuando substituye  $\frac{\partial u^j}{\partial x^h}$  por  $\Gamma^i_{kh} u^k$ .

Ni tan sólo tiene sentido hablar de una tal derivada, a menos de ser  $R^i_{jk} = 0$ .

(2) SCHOUTEN, pág. 171.

(3) Esta condición ( $R^i_{jk} \neq 0$ ) no basta por sí sola, pero es necesaria.

19.—Escribamos la relación (II. 20) en la forma

$$(II. 21) \quad \delta u^i = -\frac{1}{2} R^i_{jk} u^j d_1 x^{[k} d_2 x^{h]} = -\frac{1}{2} R^i_{jk} u^j f^{kh} d S,$$

en la que

$$\delta u^i = \dot{u}^i - u^i, \quad d_1 x^{[k} d_2 x^{h]} = d_1 x^k d_2 x^h - d_1 x^h d_2 x^k.$$

$f^{kh}$  es el bivector unitario correspondiente al  $d_1 x^{[k} d_2 x^{h]}$  y  $d S$  el área de éste. En consecuencia, la variación  $\delta u^i$  originada por la traslación a lo largo del ciclo depende sólo de la orientación,  $f^{kh}$ , y del área,  $d S$ , del mismo, a la que resulta ser proporcional. Para estudiar cómo varía  $\delta u^i$  con la primera, introduciremos el tensor antisimétrico

$$K_{ij}^{il} = -\frac{1}{\sqrt{g}} R_{ijkl} \quad \left\{ \begin{array}{l} g = \| g_{ik} \| = r^2 \sigma^3 \\ l k h = \text{permutación par de } 1, 2, 3. \end{array} \right.$$

Si, además,  $n_l = \sqrt{g} f^{kh}$  ( $l k h = \text{permutación par de } 1, 2, 3$ ) son las componentes covariantes del vector unitario normal a la orientación dada, la ecuación (II. 21) se escribe

$$(II. 21') \quad \delta u^i = (K_{ij}^{il} n_l) u^j d S,$$

o bien, simplemente,

$$(II. 21'') \quad \delta u^i = p^i_j u^j d S.$$

Ahora bien,  $p_{ij} = K_{ij}^{il} n_l$  es antisimétrico ( $i j$ ), por serlo  $K_{ij}^{il}$ ; luego (II. 21''), es decir, (II. 21), constituye una rotación infinitesimal. Las componentes contravariantes del vector eje de la rotación <sup>(1)</sup> son

---

Los primeros trabajos teóricos acerca de la obtención de imágenes de objetos con electrones se deben a H. Busch.

<sup>(1)</sup> Casi huega decirlo, pero claro está que podemos hablar de *eje* de la rotación, al igual que antes de *vector* normal a la orientación plana, porque  $D_e$  es un espacio de tres dimensiones.

$$p^m = \frac{1}{\sqrt{g}} p_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} K_{ij}^{-1} n_l, \quad m \ i \ j = \text{permutación par de } 1, 2, 3,$$

o bien

$$(II. 22) \quad p^m = K^{ml} n_l,$$

donde

$$(II. 23) \quad K^{ml} = \frac{1}{\sqrt{g}} K_{ij}^{-1} = - \frac{1}{g} R_{ijkl},$$

$\left. \begin{matrix} m \ i \ j \\ l \ k \ h \end{matrix} \right\} \text{permutaciones pares de } 1, 2, 3.$

En cuanto a sus *componentes ordinarias* ( $p_z$ ,  $p_r$ ,  $p_\phi$ ), un cálculo fácil nos las da en función de  $R_{ijkl}$  y de las componentes ordinarias ( $n_z$ ,  $n_r$ ,  $n_\phi$ ) del vector normal  $\vec{n}$  euclídeo unitario. Teniendo en cuenta (II.22), (II.23) y las relaciones generales

$$\left\{ \begin{array}{ll} A^1 = A_z, & A_1 = \sigma \ A^1 = \sigma A_z, \\ A^2 = A_r, & A_2 = \sigma \ A^2 = \sigma A_r, \\ A^3 = \frac{1}{r} A_\phi, & A_3 = r^2 \sigma A^3 = r \sigma A_\phi, \end{array} \right.$$

entre las componentes locales de un vector  $\vec{A}$  (métrica II.10 de  $D_e$ ) y sus componentes locales ordinarias (métrica euclídea ambiente), se obtiene

$$(II. 24) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_z = - \frac{1}{r^2 \sigma^{\frac{5}{2}}} (R_{2323} n_z + R_{2331} n_r), \\ p_r = - \frac{1}{r^2 \sigma^{\frac{5}{2}}} (R_{3123} n_z + R_{3131} n_r), \\ p_\phi = - \frac{1}{\sigma^{\frac{5}{2}}} R_{1212} n_\phi. \end{array} \right.$$

Finalmente, para (II. 21) resulta la fórmula elemental

$$(II. 21'') \quad \delta \vec{u} = + \sigma^{\frac{3}{2}} \vec{u} \wedge \vec{p} dS_e,$$

en la cual  $dS_e$  es el área del ciclo medida con la unidad del ambiente.

Consideremos, en particular, el vector  $\vec{p}$  de la rotación asociada a la orientación definida por el vector campo eléctrico, es decir, al vector unitario euclídeo  $\vec{n} = \left( \frac{\mathbf{E}_z}{\mathbf{E}}, \frac{\mathbf{E}_r}{\mathbf{E}}, 0 \right)$ ; tendremos, recordando, por ejemplo, (II. 19'):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^{\frac{3}{2}} p_z = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\mathbf{E}}{v^2} \mathbf{E}_z - \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} \right), \\ \sigma^{\frac{3}{2}} p_r = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\mathbf{E}}{v^2} \mathbf{E}_r - \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r} \right), \quad (\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}_z^2 + \mathbf{E}_r^2) \\ \sigma^{\frac{3}{2}} p_\phi = 0, \end{array} \right.$$

o lo que es lo mismo,

$$(II. 24') \quad \sigma^{\frac{3}{2}} \vec{p} = \frac{\mathbf{E}}{\sigma v^2} \vec{\mathbf{E}} - \frac{\eta}{\sigma \sqrt{1-\beta^2}} \text{grad } \mathbf{E},$$

$$\left( \text{grad } \mathbf{E} = \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z}, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \phi} \right), \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \phi} = 0 \right),$$

de donde

$$(II. 21_E) \quad \delta \vec{u} = \vec{u} \wedge \left( \frac{\mathbf{E}}{v^2} \vec{\mathbf{E}} - \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{grad } \mathbf{E} \right) \frac{dS_e}{\sigma}.$$

La relación vectorial (II. 21<sub>E</sub>) nos define la rotación asociada a un ciclo elemental descrito a partir de un punto P, en sentido directo respecto de  $\vec{\mathbf{E}}(P)$  y en un plano perpendicular a  $\vec{\mathbf{E}}(P)$ . Su validez

subsiste en todo punto de  $D_e$ , incluso sobre el eje de la lente, pues los segundos miembros de (II. 24) se conservan finitos para  $r \rightarrow 0$  debido a la presencia del factor  $r^2$  en las componentes  $R_{2323}$ ,  $R_{3131}$  y  $R_{2331}$  del tensor de curvatura (ec. II. 16, 19, 19'). El eje de la rotación, como era de prever, está situado en el plano meridiano que pasa por  $P$ , pero su dirección no coincide, en general, con la del campo eléctrico  $\vec{E}(P)$ . Por lo tanto, si trasladamos el vector  $\vec{E}(P)$  a lo largo de un ciclo elemental perpendicular a  $\vec{E}(P)$ , en sentido directo respecto de éste, obtendremos como vector trasladado en  $P$  el vector

$$(II. 25) \quad \vec{E}^* = \vec{E} - \frac{\eta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \vec{E} \wedge \text{grad } E - \frac{dS_e}{\sigma}.$$

La condición necesaria y suficiente para que  $\vec{E}^*$  coincida con  $\vec{E}$  es que  $\vec{E}$  y  $\text{grad } E$  sean paralelos o nulo  $\text{grad } E$  <sup>(1)</sup>. La primera circunstancia se da precisamente a lo largo del eje de la lente electrónica  $D_e$ , puesto que, en un punto genérico del campo,

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{1}{E} \left( E_z \frac{\partial E_z}{\partial z} + E_r \frac{\partial E_r}{\partial z} \right),$$

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{1}{E} \left( E_z \frac{\partial E_z}{\partial r} + E_r \frac{\partial E_r}{\partial r} \right),$$

y a lo largo del eje es

$$E_z = -V'(z), \quad E_r = 0,$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -V''(z), \quad \frac{\partial E_r}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial E_z}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial E_r}{\partial r} = \frac{1}{2} V''(z),$$

---

<sup>(1)</sup> Evidentemente hay que excluir que sea  $\vec{E} = 0$ , pues si  $\vec{E} = 0$ , deja de tener sentido hablar de  $\vec{n}_E$ .

siendo  $V'$  y  $V''$  las derivadas primera y segunda de la función  $V(z)$  que define el potencial del campo electrostático en los diferentes puntos del eje de la lente (1). Es natural, por otra parte, que sea así, dada la simetría del campo respecto de éste.

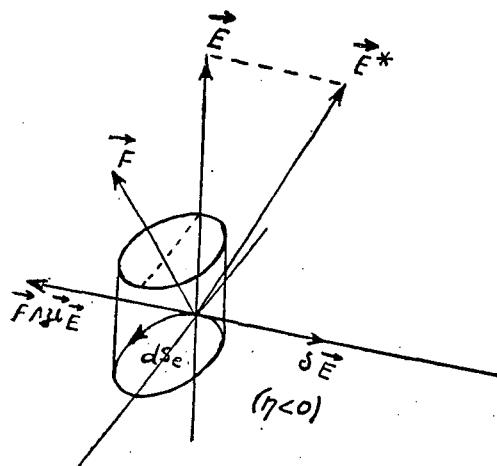


Fig. 9

siguiente,  $\vec{M} = k \vec{E} h dS_e$ . La acción del campo sobre ella se traduce en una fuerza

$$\vec{F} = (\vec{M} \nabla) \times \vec{E} = k E h dS_e \cdot \text{grad } \vec{E}.$$

Luego, en virtud de (II. 25),

$$\delta \vec{E} = \frac{\eta}{k h \sigma \sqrt{1 - \beta^2}} \vec{F} \wedge \vec{u}_E,$$

siendo  $\vec{u}_E$  el versor euclídeo del vector campo eléctrico (fig. 9).

(1) La función  $\Phi(z, r)$ , en efecto, es susceptible de ser desarrollada en serie de potencias de  $r$  convergente para valores suficientemente pequeños de  $r$ . El desarrollo es de la forma

$$\Phi(z, r) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k} V^{(2k)}(z).$$

Cf., por ejemplo, PICHT, pág. 9, o BUSCH (\*), pág. 976.

20.— En el párrafo anterior hemos determinado las componentes contravariantes  $p^m$  del vector que define la rotación infinitesimal del ciclo  $(n_l, dS)$ , (ec. II. 22). Las  $p^m$  son funciones lineales y homogéneas de las  $n_l$ , es decir, la correspondencia entre el vector  $p^m$  de la rotación asociada al ciclo y el vector unitario  $n_l$  que fija la orientación de éste es una homografía vectorial, la de matriz  $K^{ml}$ . Se llama *curvatura riemanniana* del espacio  $D_e$  en el punto  $P$  y en la orientación  $n_l$ , al producto escalar del vector  $n_l$  y su homólogo  $p^m$  en dicha homografía, esto es,

$$(II. 26) \quad K = n_m p^m = K^{ml} n_m n_l.$$

La cuádrica asociada a la homografía (II. 22) es la *cuádrica indicatrix* de Riemann,  $C_i$ , del espacio en el punto  $P$ ; su ecuación es la

$$(II. 27) \quad K^{ml} x_m x_l = 1, \quad x_m = \frac{n_m}{\sqrt{K}},$$

o, en componentes contravariantes,

$$(II. 27') \quad K_{ml} x^m x^l = 1. \quad (K_{ml} = g_{mk} g_{lh} K^{kh})$$

La longitud (métrica (II. 10)!) del segmento  $PM$ , determinado por el punto  $P$ , centro de la cuádrica, y el punto  $M$ , en que la recta base del vector  $n_l$  corta a  $C_i$ , vale, por ende,  $1: \sqrt{K}$ .

La perpendicular trazada por  $P$  al plano tangente a  $C_i$  en  $M$ , coincide con la recta base del vector rotación  $p^m$ .

Para obtener una representación euclídea de  $C_i$  podemos proceder de la siguiente manera: Sea  $\vec{v}$  el vector, aplicado en  $P$ , de componentes *ordinarias* (figura 10)

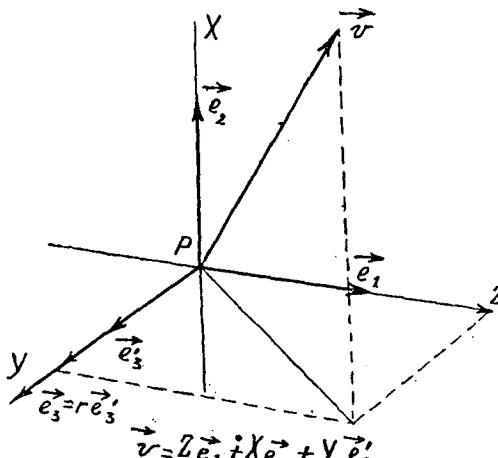


Fig. 10

$$Z = \frac{x_1}{\sqrt{\sigma}}, \quad X = \frac{x_2}{\sqrt{\sigma}}, \quad Y = \frac{x_3}{r\sqrt{\sigma}}.$$

Si el punto  $(x_1, x_2, x_3)$  pertenece a  $C_i$ , el cuadrado del módulo euclídeo de  $\vec{v}$  es precisamente  $\frac{1}{K}$ , puesto que

$$\begin{aligned} Z^2 + X^2 + Y^2 &= \frac{1}{\sigma} \left[ (x_1)^2 + (x_2)^2 + \frac{1}{r^2} (x_3)^2 \right] = \\ &= g^{ik} x_i x_k = \frac{1}{K}. \end{aligned}$$

Luego, dado un plano  $\pi$  que pase por  $P$ , la curvatura riemanniana en  $P$  del espacio  $D_e$  en la orientación de  $\pi$  es la inversa del cuadrado de la distancia euclídea del punto  $P$  al punto  $M$  en que la normal en  $P$  al plano  $\pi$  corta a la cuádrica  $\bar{C}_i$  de ecuación

$$\begin{aligned} (II.28) \quad \sigma (K^{11} Z^2 + K^{22} X^2 + K^{33} Y^2 + 2 K^{23} r X Y + \\ + 2 K^{31} r Y Z + 2 K^{12} Z X) = 1 \end{aligned}$$

respecto de la referencia euclídea local  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Evidentemente, las cuádricas  $C_i$  y  $\bar{C}_i$  son homotéticas respecto del centro  $P$  y característica  $k = \sqrt{\sigma}$ .

La ecuación de  $\bar{C}_i$  se escribe, poniendo de manifiesto los valores de  $K^{ml}$  (ec. II.23 y II.19'),

$$\begin{aligned} (II.28') \quad & \frac{1}{\sigma^2} \left[ \frac{E_z^2}{v^2} - \left( \frac{2}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) E_r^2 - \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial E_z}{\partial z} \right] Z^2 + \\ & + \frac{1}{\sigma^2} \left[ \frac{E_r^2}{v^2} - \left( \frac{2}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) E_z^2 - \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial E_r}{\partial r} \right] X^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\sigma^2} \left[ \left( \frac{2}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) E^2 + \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{E_r}{r} \right] Y^2 + \\
 & (II. 28') \quad + \frac{2}{\sigma^2} \left[ \left( \frac{3}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) E_r E_z - \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial E_z}{\partial r} \right] Z X = 1.
 \end{aligned}$$

Sus coeficientes se conservan finitos en todo  $D_e$  <sup>(1)</sup>, incluso para  $r=0$ , es decir, en el eje de la lente, donde  $\frac{1}{r} E_r$  es igual a  $V''(z)$  (Cf. § 20, nota).

Los ejes de las cuádricas  $C_i$  y  $\bar{C}_i$  coinciden. Estos ejes, las *direcciones principales* de Ricci en el punto  $P$ , están determinados por el sistema lineal homogéneo

$$(S) \quad \begin{cases} (K^{11} - \lambda) Z + K^{12} X = 0, \\ K^{21} Z + (K^{22} - \lambda) X = 0, \\ (r^2 K^{33} - \lambda) Y = 0, \end{cases}$$

en el que  $\lambda$  es raíz de la ecuación secular

$$\begin{vmatrix} K^{11} - \lambda & K^{12} & 0 \\ K^{12} & K^{22} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & r^2 K^{33} - \lambda \end{vmatrix} = (r^2 K^{33} - \lambda) \begin{vmatrix} K^{11} - \lambda & K^{12} \\ K^{12} & K^{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$\lambda_1 = r^2 K^{33},$$

$$\lambda_2, \lambda_3 = \frac{K^{11} + K^{22}}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{K^{11} - K^{22}}{2} \right)^2 + (K^{12})^2}.$$

Si la raíz  $\lambda_1 = r^2 K^{33}$  es simple, la dirección principal correspondiente es la  $Z = X = 0$ , esto es, la normal al plano meridiano que pasa por  $P$ . Si es doble, para lo cual es necesario y basta que  $(K^{11} - r^2 K^{33}) (K^{22} - r^2 K^{33}) - (K^{12})^2 = 0$ , la cuádrica es de revolución respecto de un eje situado en el plano meridiano. Si es triple, la cuádrica es

---

(1) En el interior de la lente electrónica es  $v \neq 0$ , o lo que es lo mismo,  $\Phi \neq V_0$ .

una esfera, en cuyo caso el espacio es isótropo en  $P$ ; de otro modo,  $D_e$  es en  $P$  de curvatura riemanniana localmente constante. En cualquier caso, por lo tanto, y en cualquier punto de  $D_e$ , la dirección perpendicular al plano meridiano es una dirección principal de Ricci <sup>(1)</sup>.

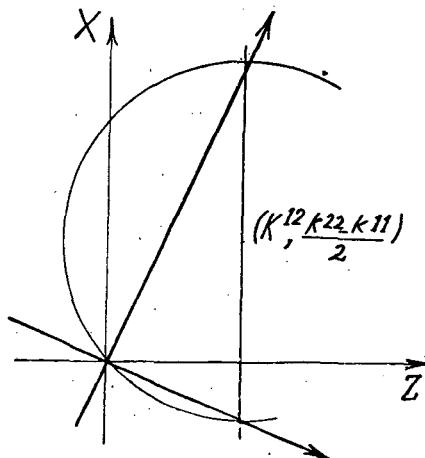


Fig. 11

Cuando  $\lambda_1$  es simple, las otras dos direcciones principales son las de los vectores

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = K^{12}, \\ X = \frac{K^{22} - K^{11}}{2} + \sqrt{\left(\frac{K^{22} - K^{11}}{2}\right)^2 + (K^{12})^2}, \\ Y = 0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = K^{12}, \\ X = \frac{K^{22} - K^{11}}{2} - \sqrt{\left(\frac{K^{22} - K^{11}}{2}\right)^2 + (K^{12})^2}, \\ Y = 0, \end{array} \right.$$

supuesto  $K^{12} \neq 0$ , y pueden obtenerse gráficamente a partir de los valores de  $K^{12}$  y  $\frac{1}{2}(K^{22} - K^{11})$  (fig. 11). En particular, si  $K^{12} = 0$ ,

(1) Cabe deducir este mismo resultado directamente de (II. 24): si  $n_z = n_r = 0$ , las componentes  $p_z$  y  $p_\phi$  del vector rotación son nulas y, por ende,  $\vec{p}$  es perpendicular al plano meridiano, paralelo a  $\vec{n}$ . En consecuencia, dicha perpendicular es dirección principal.

las direcciones principales son las de los ejes locales, y si  $K^{22} = K^{11}$ , las direcciones principales situadas en el plano meridiano son simétricas respecto de la dirección del eje de la lente.

Sea  $P$  un punto de éste. En tal caso, la ecuación (II.28') toma la forma

$$(II.28'')$$

$$\frac{1}{\sigma_0^2} \left( \frac{V'^2}{v^2} + \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} V'' \right) Z^2 -$$

$$- \frac{1}{\sigma_0^2} \left[ \left( \frac{2}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) V'^2 + \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} V'' \right] (X^2 + Y^2) = 1,$$

en la que recordaremos que, en cualquier punto del eje de la lente electrónica, éste y todas las direcciones perpendiculares a él son direcciones principales de Ricci. La curvatura riemanniana correspondiente a la orientación perpendicular al eje en  $P$  vale, según (II.28''),

$$K_{\text{norm.}} = \frac{1}{\sigma_0^2} \left( \frac{V'^2}{v^2} + \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} V'' \right)$$

$$(II.29_n)$$

$$\sigma_0 = (V_0 - V) \left( \frac{V_0 - V}{c^2} + 2\eta \right)$$

y la relativa a una orientación meridiana cualquiera

$$(II.29_m) \quad K_{\text{merid.}} = - \frac{1}{\sigma_0^2} \left[ \left( \frac{2}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) V'^2 + \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} V'' \right]$$

Basta tener en cuenta las ecuaciones (II.6) para poder expresar estos valores en función exclusivamente de  $V(z)$ , es decir, de la distribución del potencial a lo largo del eje.

Obsérvese, además, que si  $V' \neq 0$ , la fórmula (II.29) es un caso particular de la relación general

$$(E) \quad \vec{p} \times \sigma^2 \frac{\vec{E}}{E} = \frac{1}{\sigma^2} \left( \frac{\vec{E} \times \vec{E}}{v^2} - \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\vec{E}}{E} \times \text{grad } E \right),$$

(cf. (II. 24'), 9, 19). A lo largo del eje se tiene, en efecto,

$$\vec{E} = (-V', 0, 0) \quad \therefore E = |V'|, \quad \text{grad } E = \left( \frac{V'}{|V'|} V'', 0, 0 \right)$$

y substituyendo en la expresión anterior se obtiene, sin más, (II. 29). Sin embargo, desde otro punto de vista, la validez de (II. 29) es más general que la de (E) deducida de (II. 24'). La razón de ello descansa en que, conforme hicimos notar, esta última vale en tanto sea  $\vec{E} \neq 0$  y, por consiguiente, deja de tener sentido en aquellos puntos del eje en los que es  $V' = 0$ . En cambio, (II. 29) vale en cualquier punto del mismo, por cuanto da la curvatura riemanniana en la orientación perpendicular al eje, y no ya a la orientación normal a  $\vec{E}$ . Claro está que, si  $\vec{E} \neq 0$ , ambas orientaciones coinciden en los puntos P de aquél; pero cuando es  $\vec{E} = 0$ , la primera tiene aún sentido, mientras la segunda carece ya de significación.

21.— Las consideraciones que preceden justifican la de los dos siguientes casos particulares: Sea P un punto del eje en el cual  $V' = 0, V'' \neq 0$ , es decir, un punto en que la distribución del potencial electrostático a lo largo del eje de la lente presenta un máximo o un mínimo. La ecuación de la cuádrica  $\bar{C}$  será, de acuerdo con (II. 28''),

$$\frac{\eta V''}{\sigma_0^2 \sqrt{1-\beta^2}} Z^2 - \frac{\eta V''}{2 \sigma_0^2 \sqrt{1-\beta^2}} (X^2 + Y^2) = 1. \quad (\eta < 0)$$

Por consiguiente, en los puntos en que V es máximo o mínimo—sin que sea  $V'' = 0$ —la cuádrica  $\bar{C}$  es una hiperboloide de revolución respecto del eje de la lente electrónica, de una hoja si  $V'' > 0$ , esto es, en los máximos, y de dos hojas si  $V'' < 0$ , es decir, en los míni-

mos (1). Las mismas características presenta la cuádrica indicatriz de Riemann, homotética de la  $\tilde{C}_i$ . Tanto en uno como en otro caso el cono asintótico  $\Gamma$  es siempre el mismo:

$$2Z^2 - (X^2 + Y^2) = 0,$$

y no depende, por lo tanto, de la función  $V(z)$ .

Ahora bien, el punto  $P(z_0, 0, 0)$  es un punto singular de la superficie equipotencial  $\Phi(z, r) = V(z_0)$  que pasa por él. La ecuación de dicha superficie es de la forma

$$2V''Z^2 - V''(X^2 + Y^2) + F(X, Y, Z) = 0 \quad (2),$$

donde  $F(X, Y, Z)$  es un polinomio de segundo grado en  $X^2 + Y^2$ , cuyos coeficientes son, a su vez, funciones de  $X^2 + Y^2$  y de  $Z$ . El

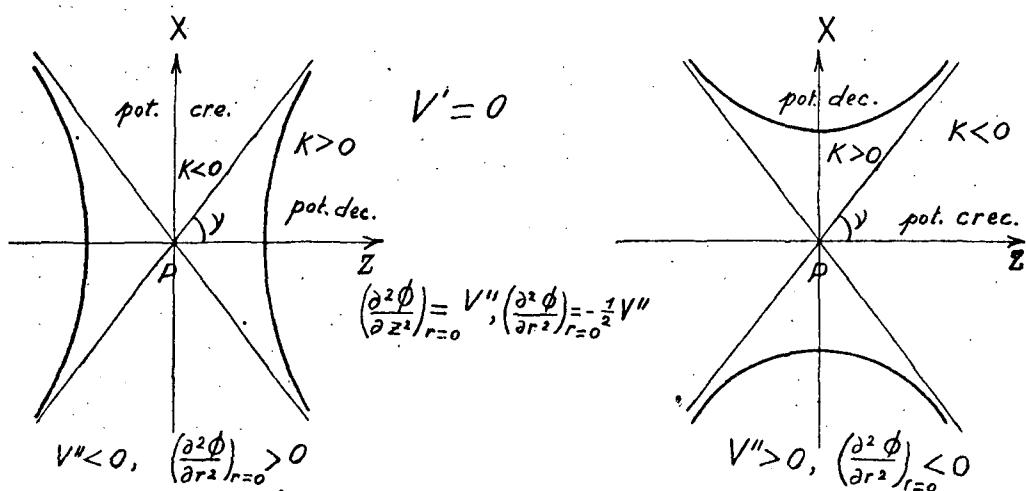


Fig. 12

punto  $P$ , si  $V'' \neq 0$ , es, en consecuencia, un punto cónico de la superficie  $\Phi(z, r) = V(z_0)$ . El cono de las tangentes en él a la superficie es precisamente el cono  $\Gamma$ . Podemos, pues afirmar que en un punto cónico de una superficie equipotencial situado en la intersección de ésta con el eje de la lente, el cono de las tangentes a la misma en

(1) Se trata de máximos y mínimos *a lo largo* del eje.

(2) Cf. § 19, nota. Basta hacer en ella  $z = z_0 + Z$  y  $r^2 = X^2 + Y^2$ . Véase también BRÜCHE-SCHERZER, pág. 66.

dicho punto coincide con el cono asintótico de la cuádrica indicatriz de Riemann de centro en él. La semiabertura de este cono común, el cual no depende de la forma de  $V(z)$ , sino de la presencia en  $P$  de un máximo o mínimo regular ( $V'' \neq 0$ ) de  $V(z)$ , vale

$$\operatorname{tg} \gamma = \sqrt{2} \quad \therefore \quad \gamma \simeq 54^\circ 44'.$$

Si en  $P$  se da un mínimo de  $V$ , la curvatura  $K_{\text{norm.}}$  es positiva, y las curvaturas  $K_{\text{merid.}}$  son iguales y negativas. Recíprocamente, si  $V(z)$  presenta en  $P$  un máximo,  $K_{\text{norm.}}$  es negativa, y positivas las  $K_{\text{merid.}}$ . En ambos casos, trátese de un máximo o de un mínimo, las normales a las orientaciones de curvatura positiva están dirigidas en el sentido de los potenciales  $\Phi(z, r)$  decrecientes (fig. 12). Estas circunstancias se dan en la práctica en algunos tipos de lentes de orificio y en las lentes simples <sup>(1)</sup>.

Supongamos ahora que en  $P$ , siempre sobre el eje, la derivada  $V'$  es  $\neq 0$ , pero que en él  $V'' = 0$ . La ecuación de la cuádrica se escribirá

$$\frac{V'^2}{\sigma_0^2 v^2} Z^2 - \left( \frac{2}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) \frac{V'^2}{\sigma_0^2} (X^2 + Y^2) = 1.$$

Sea cual fuere el signo de  $V'$ , se trata, pues, de un hiperboloide de revolución de dos hojas, la ecuación de cuyo cono asintótico (real) es

$$Z^2 - \left( 2 - \frac{v^2}{c^2} \right) (X^2 + Y^2) = 0.$$

El valor de la semiabertura de éste

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{2 - \frac{v^2}{c^2}}$$

---

<sup>(1)</sup> Cf. BRÜCHE-SCHERZER, págs. 66 y 71 y 91 (fig. 72).

depende de la velocidad, es decir, del potencial en P:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{\frac{V_0 - V}{c^2} \left( \frac{V_0 - V}{c^2} + 2\eta \right)}{\left( \frac{V_0 - V}{c^2} + \eta \right)^2}.$$

Evidentemente, pero,  $\operatorname{tg} \alpha$  está comprendida entre  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  y 1, o sea;

$$35^\circ 16' < \alpha < 45^\circ.$$

La variación de la razón  $\beta = \frac{v}{c}$  con el valor del potencial  $\Phi - V_0 > 0$  es pequeña. Así, por ejemplo, para  $\Phi - V_0 = 1$  V, es del orden de 0,002, y para  $\Phi - V_0 = 100$  kV,  $\beta \approx 0,55$ , lo que da para  $\alpha$  en el primer caso, prácticamente, la cota inferior antes indicada, y en el segundo,  $\alpha \approx 37^\circ 30'$ . En cuanto a las curvaturas riemannianas  $K_{\text{norm.}}$  y  $K_{\text{merid.}}$ , sus valores son

$$K_{\text{norm.}} = \frac{V'^2}{\sigma_0^2 v^2}, \quad K_{\text{merid.}} = - \frac{V'^2}{\sigma_0^2} \left( \frac{2}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right).$$

También el caso particular que acabamos de considerar se presenta en la práctica. Recuérdese, por ejemplo, la marcha del potencial a lo largo del eje de una lente electrónica de inmersión (figura 5, y Picht, pág. 136, fig. 30).

22.— Otra propiedad de la métrica de  $D_e$ , íntimamente vinculada al tensor de Riemann-Christoffel, es el *escalar de curvatura*, o *curvatura escalar* del espacio  $D_e$  <sup>(1)</sup>. Para calcularlo, determinemos primero el tensor contracto de Ricci-Einstein

$$(II. 30) \quad R_{hk} = R^i_{\quad hik}.$$

<sup>(1)</sup> SCHOUTEN, pág. 86, ecs. 124 y 125; BRILLOUIN, pág. 132. En cuanto a la notación, téngase presente lo dicho en la nota al principio del § 17.

Haciendo uso, por ejemplo, de las fórmulas (II. 19') se obtiene fácilmente

$$\left. \begin{aligned}
 R_{11} &= \frac{1}{\eta^2} \left( \frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) \left\{ 2 \left( \frac{2}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) E_z^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) E_r^2 - \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial E_z}{\partial r} \right\}, \\
 R_{23} &= 0; \\
 R_{22} &= \frac{1}{\eta^2} \left( \frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) \left\{ 2 \left( \frac{2}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) E_r^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) E_z^2 - \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial E_r}{\partial r} \right\}, \\
 R_{31} &= 0; \\
 R_{33} &= \frac{1}{\eta^2} \left( \frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) \left\{ \left( \frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) E^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{E_r}{r} \right\} r^2; \\
 R_{12} &= \frac{1}{\eta^2} \left( \frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) \left\{ \left( \frac{3}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) E_r E_z - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial E_z}{\partial r} \right\}.
 \end{aligned} \right. \quad (II. 30')$$

De estos valores resulta desde luego el escalar de curvatura

$$(II. 31) \quad R = R^1_1 = \frac{2}{\eta^4} \left( \frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right)^2 \left( \frac{3}{v^2} - \frac{2}{c^2} \right) E^2 \geq 0,$$

el cual, por consecuencia, es positivo, proporcional al cuadrado de la intensidad del campo eléctrico y nulo siempre y sólo cuando  $E = 0$ . El factor de proporcionalidad, que es una función de punto, se man-

tiene constante en cada superficie equipotencial; luego, medido el campo eléctrico en dos puntos de una misma de tales superficies, se tiene, sin más, la razón de las curvaturas escalares en ellos. Si nos limitamos a la aproximación no relativista, se puede escribir con bastante exactitud (hasta unos 10 kV)

$$R \approx \frac{3 E^2}{4 \eta (V_0 - \Phi)^3}.$$

Finalmente, el tensor  $L_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{4} R g_{ik}$ , que en nuestro caso tiene por componentes

$$L_{11} = \frac{1}{\eta^2} \left( \frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) \left\{ \left( \frac{5}{2v^2} - \frac{1}{c^2} \right) E_z^2 - \frac{1}{2v^2} E_r^2 - \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial E_z}{\partial r} \right\},$$

$$L_{23} = 0;$$

$$L_{22} = \frac{1}{\eta^2} \left( \frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) \left\{ \left( \frac{5}{2v^2} - \frac{1}{c^2} \right) E_r^2 - \frac{1}{2v^2} E_z^2 - \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial E_r}{\partial r} \right\},$$

$$L_{31} = 0;$$

$$L_{33} = -\frac{r^2}{\eta^2} \left( \frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) \left( \frac{E^2}{2v^2} + \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{E_r}{r} \right),$$

$$L_{12} = \frac{1}{\eta^2} \left( \frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) \left\{ \left( \frac{3}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) E_r E_z - \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial E_z}{\partial r} \right\};$$

cumple las condiciones  $\nabla_{[i} L_{h]k} = 0$  <sup>(1)</sup> que expresan la integrabilidad del sistema

$$4 L_{hk} = 2 \nabla_h s_k - s_h s_k + \frac{1}{2} (s_i s^i) g_{hk}.$$

Si éste es integrable, es decir, si existe una función  $\text{Log } \sigma'$  tal que el vector  $s_k = \frac{\partial \text{Log } \sigma'}{\partial x^k}$  lo satisface idénticamente; la métrica  $\sigma' g_{ik}$  es euclídea. No merece la pena comprobar que  $L_{hk}$  satisface aquellas condiciones, pues sabemos a priori que el sistema anterior es integrable: la métrica  $\frac{1}{\sigma} (\sigma g_{ik})$  es euclídea (cf. § 10), de modo que existe  $\sigma' = \frac{1}{\sigma}$ .

23.— Dos otros tipos de campos eléctricos bidimensionales se presentan en la práctica, el estudio de cuyos espacios conforme-euclídeos asociados es ahora ya fácil teniendo en cuenta lo que precede. Nos referimos a los dispositivos de desviación (prismas eléctricos) y a las rendijas, un tipo de lente cilíndrica estas últimas <sup>(2)</sup>.

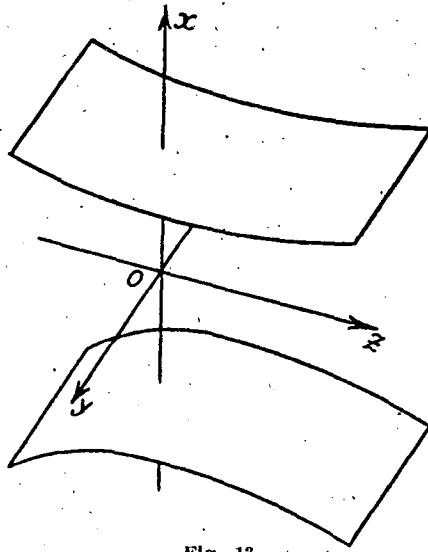


Fig. 13

respecto de una recta que tomaremos como eje  $z$  (fig. 13). Las dimen-

(1) Véase SCHOUTEN, págs. 169-171. Como de costumbre,  $\nabla_i$  es el símbolo de derivación covariante respecto de  $x^i$ , y  $[ ]$  indica la operación de alternación efectuada sobre los índices comprendidos dentro del paréntesis recto. Tanto lo que sigue cuanto la definición dada antes del tensor  $L_{hk}$  vale sólo para un espacio tridimensional.

(2) BRÜCHE-RECKNAGEL, pág. 114.

siones de las placas en la dirección de las generatrices es grande respecto de las dimensiones perpendiculares a éstas, de modo que en las proximidades del plano medio (plano  $xz$ ) la componente  $E_y$  del campo eléctrico es prácticamente nula, es decir, es nula la desviación transversal. Por razón de simetría, el plano  $yz$  será una superficie equipotencial, y, por el mismo motivo, la función  $\Phi(z, x)$  que define el campo eléctrico será de la forma

$$\Phi(z, x) = V + \phi(z, x),$$

donde  $V$  es una constante igual al valor del potencial en dicho plano y  $\phi(z, x)$  una función impar respecto de  $x$ :

$$\phi(z, x) = -\phi(z, -x).$$

De esto resulta que las superficies refractantes, esto es, las superficies equipotenciales, están dispuestas de modo fundamentalmente otro a como aparecen en las lentes electrónicas: en éstas los rayos electrónicos son más o menos normales a ellas, de forma que la acción desviadora del campo es pequeña por cuanto la dirección del rayo casi coincide con la del gradiente (sistema congruente) <sup>(1)</sup>; en un prisma electrostático, en cambio, los rayos forman ángulos pequeños con las superficies equipotenciales, y así la acción desviadora del campo es muy notable, dado que la dirección del rayo es casi normal al gradiente (sistema transgradoente). Ese efecto de deflexión, como es sabido, se persigue, por ejemplo, en los tubos de Braun <sup>(2)</sup>.

Una rendija electrostática (Schlitzblende) consiste simplemente en una placa conductora en la que se ha abierto una rendija de lon-

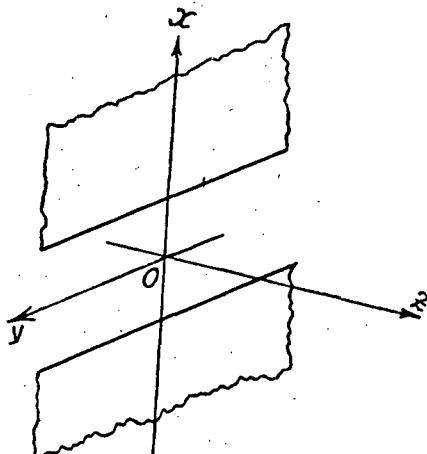


Fig. 14

(1) BRÜCHE-SCHERZER, pág. 55.

(2) BRÜCHE-RECKNAGEL, pág. 224.

gitud grande respecto de su anchura (fig. 14). Paralelamente al plano de la placa y a ambos lados de la misma se disponen dos electrodos, uno por lo menos de los cuales se encuentra a un potencial distinto del de la rendija. El campo eléctrico que así se obtiene posee dos planos de simetría, geométrica y eléctrica a la vez, perpendiculares entre sí y al plano de la rendija: el plano medio longitudinal, que tomaremos como plano  $x = 0$ , y el plano medio transversal, que será para nosotros el  $y = 0$ . En estas condiciones, el potencial  $\Phi$  dependerá sólo de  $z$  y de  $x$ , por lo menos en las proximidades de  $y = 0$ , y será una función par respecto de  $x$ :

$$\Phi(z, x) = \Phi(z, -x).$$

Las superficies equipotenciales, que evidentemente son cilindros de generatrices paralelas al eje  $y$ , se presentan en este caso como en las lentes típicas (lentes esféricas), es decir, aproximadamente normales a la dirección del rayo electrónico. Se trata, pues, de un sistema congradiante.

24. — Dado que lo mismo en los prismas electrostáticos que en las rendijas  $\Phi$  es sólo función de dos variables, determinaremos las magnitudes características del espacio conforme-euclídeo asociado en el caso general para luego examinar cómo repercute la naturaleza de la función  $\Phi$  en la estructura del mismo. En rigor, poco tendremos que añadir a lo visto anteriormente. La forma cuadrática fundamental expresada en función de las coordenadas cartesianas ambientes es ahora

$$ds^2 = \sigma(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

con lo que el tensor métrico tendrá por componentes

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad g^{ik} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma} \end{pmatrix},$$

$$(\|g_{ik}\| = \sigma^3, x^1 = z, x^2 = x, x^3 = y)$$

y la conexión afín riemanniana

$$\left. \begin{aligned}
 \Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial z}, & \Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x}, & \Gamma^1_{13} &= 0, & \Gamma^1_{22} &= -\frac{1}{2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \\
 \Gamma^1_{23} &= 0, & \Gamma^1_{33} &= -\frac{1}{2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial z}; \\
 \Gamma^2_{11} &= -\frac{1}{2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x}, & \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial z}, & \Gamma^2_{13} &= 0, & \Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \\
 \Gamma^2_{23} &= 0, & \Gamma^2_{33} &= -\frac{1}{2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x}; \\
 \Gamma^3_{11} &= 0, & \Gamma^3_{12} &= 0, & \Gamma^3_{13} &= \frac{1}{2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial z}, & \Gamma^3_{22} &= 0, \\
 \Gamma^3_{23} &= \frac{1}{2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x}, & \Gamma^3_{33} &= 0,
 \end{aligned} \right\}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial z} &= \frac{1}{\sigma} \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right) E_z, \\
 \frac{1}{2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= \frac{1}{\sigma} \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right) E_x.
 \end{aligned}$$

De éstas se deduce, al igual que en el § 16 (ec. II.15), la matriz de la afinidad infinitesimal definida por la traslación afín:

$$\begin{aligned}
 \delta &= -\frac{1}{\sigma} \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right) \\
 & \left( \begin{array}{ccc}
 E_z dz + E_x dx & E_x dz - E_z dx & -E_z dy \\
 -E_x dz + E_z dx & E_z dz + E_x dx & -E_x dy \\
 E_z dy & E_x dy & E_z dz + E_x dx
 \end{array} \right),
 \end{aligned}$$

en la que se observa la desaparición de la parte parásita que aparecía en II. 15 debido a que utilizábamos coordenadas no cartesianas.

Finalmente, las componentes independientes del tensor de curvatura  $R_{ijkl}$  son

$$\left\{
 \begin{array}{l}
 R_{2323} = \left[ \frac{2}{\sigma} \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right)^2 - \frac{1}{c^2} \right] E_x^2 - \frac{1}{\sigma} \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right)^2 E_z^2 + \\
 \quad + \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right) \frac{\partial E_z}{\partial z}, \\
 R_{2312} = 0; \\
 R_{3131} = \left[ \frac{2}{\sigma} \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right)^2 - \frac{1}{c^2} \right] E_z^2 - \frac{1}{\sigma} \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right)^2 E_x^2 + \\
 \quad + \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right) \frac{\partial E_x}{\partial x}, \\
 R_{3123} = - \left[ \frac{3}{\sigma} \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right)^2 - \frac{1}{c^2} \right] E_z E_x + \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right) \frac{\partial E_x}{\partial z}; \\
 R_{1212} = \left[ \frac{2}{\sigma} \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + \eta \right) - \frac{1}{c^2} \right] E^2, \\
 R_{1231} = 0;
 \end{array}
 \right. \quad (II.32)$$

o bien, en función de la velocidad  $v$  del electrón,

$$\left\{
 \begin{array}{l}
 R_{2323} = \left( \frac{2}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) E_x^2 - \frac{1}{v^2} E_z^2 + \frac{\eta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\partial E_z}{\partial z}, \\
 R_{2312} = 0, \\
 R_{3131} = \left( \frac{2}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) E_z^2 - \frac{1}{v^2} E_x^2 + \frac{\eta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\partial E_x}{\partial x}, \\
 R_{3123} = - \left( \frac{3}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) E_z E_x + \frac{\eta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\partial E_x}{\partial z};
 \end{array}
 \right. \quad (II.32')$$

$$\left. \begin{aligned} R_{1212} &= \left( \frac{2}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) E^2, \\ R_{1231} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

En cuanto al escalar de curvatura  $R$  y al vector  $\vec{\Omega} = -\sigma \frac{3}{2} \vec{p}$  de la rotación asociada a un ciclo infinitesimal, sus expresiones son en todo análogas a las antes obtenidas (§§ 19 y 22, ecs. II. 24 y II. 31):

$$(II. 33) \quad R = \frac{2}{\sigma^2} \left( \frac{3}{v^2} - \frac{2}{c^2} \right) E^2,$$

$$(II. 34) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega_z &= \frac{1}{\sigma} (R_{2323} \cdot n_z + R_{2331} \cdot n_x), \\ \Omega_x &= \frac{1}{\sigma} (R_{3123} \cdot n_z + R_{3131} \cdot n_x), \quad \delta \vec{u} = \vec{u} \wedge \vec{\Omega} dS_e, \\ \Omega_y &= \frac{1}{\sigma} R_{1212} \cdot n_y. \end{aligned} \right.$$

Por último, la ecuación de la cuádrica indicatriz de Riemann, mejor dicho, de su imagen  $\bar{C}_1$  (cf. § 20), es en cada referencia local la

$$(II. 35) \quad R_{2323} \cdot Z^2 + R_{3131} \cdot X^2 + R_{1212} \cdot Y^2 + 2 R_{2331} \cdot ZX + \sigma^2 = 0.$$

25.— Esto sentado, consideremos un prisma eléctrico y elijamos como sistema de coordenadas el indicado en la figura 13. Física y geométricamente, el plano  $y = 0$  es un plano de simetría. No así el  $x = 0$ , que lo es sólo desde el punto de vista geométrico. En virtud de lo dicho antes (§ 23), el desarrollo de  $\phi(z, x) = \Phi(z, x) - V$  en serie de potencias de  $x$  contendrá sólo las de grado impar, o sea, será de la forma

$$\phi(z, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} A_k(z),$$

expresión ésta en la que  $A_k(z)$  son funciones de  $z$  que se determinarán merced a la condición  $\Delta \phi = \Delta \Phi = 0$  (cf. § 15). Para cada valor de  $z$  y para todo  $x$  suficientemente pequeño deberá ser, por lo tanto,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} (A_{k+1} + A''_k) = 0,$$

es decir,

$$A_{k+1} = -A''_k,$$

de donde

$$\begin{aligned} A_2 &= -A''_1 = -A''_1, & (A_1 &= A) \\ A_3 &= -A''_2 = A^{IV}, \\ &\dots & \\ A_k &= (-1)^{k-1} A^{(2k-2)} \end{aligned}$$

Resulta así en definitiva

$$\begin{aligned} (\text{II.36}) \quad \Phi(z, x) &= V + \phi(z, x) = V + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} A^{(2k-2)}(z) = \\ &= V + Ax - \frac{A''}{3!} x^3 + \frac{A^{IV}}{5!} x^5 - \dots, \end{aligned}$$

y, por consiguiente,

$$\begin{aligned} (\text{II.37}) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_x = -A + \frac{1}{2} A'' x^2 - \frac{1}{24} A^{IV} x^4 + \dots, \\ E_z = -A' x + \frac{1}{6} A''' x^3 - \frac{1}{120} A^{IV} x^5 + \dots, \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$(II. 37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_x}{\partial x} = A' x - \frac{1}{6} A^{IV} x^3 + \dots, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial E_z}{\partial x} = -A' + \frac{1}{2} A''' x^2 - \dots, \\ \frac{\partial E_z}{\partial z} = -A'' x + \frac{1}{6} A^{IV} x^3 - \dots \end{array} \right.$$

En el plano  $x=0$ :

$$(II. 38) \quad \begin{aligned} E_x &= -A, & E_z &= 0, \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\frac{\partial E_z}{\partial x} = -A', & \frac{\partial E_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned}$$

y, además,

$$\sigma_0 = (V_0 - V) \left( \frac{V_0 - V}{c^2} + 2\eta \right) = C^{\text{te}},$$

lo que prueba, primero, que  $A$  es la componente  $-x$  de grad  $\Phi$  en los puntos de dicho plano <sup>(1)</sup>—la única no nula—, y, segundo, que la velocidad,  $v = v_0$ , del electrón en ellos es constante, lo que era de prever, dado que  $x=0$  es una superficie equipotencial.

De (II. 32') y (II. 38) se deducen, sin más, los valores de las componentes del tensor de curvatura en un punto genérico  $P$  de  $x=0$ :

$$(II. 39) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{2323} = \left( \frac{2}{v_0^2} - \frac{1}{c^2} \right) A^2, \quad R_{2312} = 0, \\ R_{3131} = -\frac{1}{v_0^2} A^2, \quad R_{3123} = -\frac{\eta}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} A', \\ R_{1212} = \left( \frac{2}{v_0^2} - \frac{1}{c^2} \right) A^2, \quad R_{1231} = 0, \end{array} \right.$$

<sup>(1)</sup> Supondremos que el sentido del eje  $x$  es tal, que la placa de potencial más elevado está en  $x > 0$ , de modo que  $A > 0$ .

y de éstos a su vez las componentes de la rotación  $\vec{\Omega}$  (II.34) asociada al ciclo elemental  $\vec{n} dS_e$ :

$$\vec{\Omega} = \left( \frac{1}{\sigma_0} \left( \frac{2}{v_0^2} - \frac{1}{c^2} \right) A^2 \cdot n_z - \frac{\eta}{\sigma_0 \sqrt{1 - \beta_0^2}} A' \cdot n_x, \right. \\ \left. - \frac{\eta}{\sigma_0 \sqrt{1 - \beta_0^2}} A' \cdot n_z - \frac{1}{\sigma_0 v_0^2} A^2 \cdot n_x, \frac{1}{\sigma_0} \left( \frac{2}{v_0^2} - \frac{1}{c^2} \right) A^2 \cdot n_y \right).$$

En particular, las rotaciones asociadas a ciclos elementales en torno de P, cuyas orientaciones sean las de los planos de coordenadas, son

$$\vec{\Omega}_z = \left( \frac{1}{\sigma_0} \left( \frac{2}{v_0^2} - \frac{1}{c^2} \right) A^2, - \frac{\eta}{\sigma_0 \sqrt{1 - \beta_0^2}} A', 0 \right), \\ \vec{\Omega}_x = \left( - \frac{\eta}{\sigma_0 \sqrt{1 - \beta_0^2}} A', - \frac{1}{\sigma_0 v_0^2} A^2, 0 \right), \\ \vec{\Omega}_y = \left( 0, 0, \frac{1}{\sigma_0} \left( \frac{2}{v_0^2} - \frac{1}{c^2} \right) A^2 \right).$$

Esta última nos dice que en cada punto P del plano  $x=0$  la dirección del eje  $y$ —la misma que la de las generatrices de las placas deflectoras—es una dirección principal de Ricci del espacio (1), cual debe ser, dada la simetría del campo respecto de cualquier plano  $y=C^{\text{te}}$ . Por lo que a las otras dos rotaciones se refiere, situadas ambas en el plano  $y=C^{\text{te}}$  que pasa por P, las pendientes de los vectores  $\vec{\Omega}_z$  y  $\vec{\Omega}_x$  respecto del eje  $z$  son:

$$\tan \alpha = - \frac{\eta v_0^2}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \cdot \frac{A'}{A^2} \cdot \frac{1}{2 - \beta_0^2}, \quad \tan \beta = \frac{\sqrt{1 - \beta_0^2}}{\eta v_0^2} \cdot \frac{A^2}{A'}.$$

(1) Esto vale, claro está, en tanto valga la independencia de  $\Phi$  respecto de  $y$  (bien sea porque nos mantenemos en las cercanías de  $y=0$ , o porque la dimensión  $y$  de las placas se pueda considerar prácticamente infinita).

Si  $A' = 0$ , y sólo en este caso, las direcciones de los ejes  $z$  y  $x$  son, en  $P$ , direcciones principales. Tal ocurre, por ejemplo, en los puntos en los cuales el *campo* eléctrico pasa por un máximo o un mínimo, en general en aquellos puntos en que es estacionario.

Para simplificar, introduzcamos la notación

$$a = \left( \frac{2}{v_0^2} - \frac{1}{c^2} \right) A^2 \geq 0, \quad b = \frac{A^2}{v_0^2} \geq 0,$$

$$c = -\frac{\eta A'}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}, \quad (c A' \geq 0, \eta < 0).$$

La ecuación de la cuádrica  $\bar{C}_i$  referida a ejes paralelos a los  $zxy$  y de origen en  $P$ , es (ec. II. 35)

$$a Z^2 - b X^2 + a Y^2 + 2c ZX + \sigma_0^2 = 0.$$

La intersección con el plano  $X = 0$  es la circunferencia imaginaria

de centro en  $P$  y radio  $i \frac{\sigma_0}{\sqrt{a}}$

$$Z^2 + Y^2 + \frac{\sigma_0^2}{a} = 0.$$

Luego los planos  $X = C^{\text{te}}$  son planos de secciones cílicas, y la recta  $Z'$  de los centros, diámetro conjugado del plano diametral  $X = 0$ , es la

$$\left\{ \begin{array}{l} aZ + cX = 0, \\ Y = 0, \end{array} \right.$$

perpendicular evidentemente a  $\vec{\Omega}_z$ , lo que podríamos haber afirmado de antemano (cf. § 20).

Al cortar  $C_i$  con el plano  $Z=0$ , obtenemos la hipérbola

$$(II.40) \quad \frac{b}{\sigma_0^2} X^2 - \frac{a}{\sigma_0^2} Y^2 = 1,$$

cuyo eje transverso es la paralela al eje  $x$  trazado por  $P$  y cuyos vértices son los puntos

$$\left( 0, \pm \frac{\sigma_0}{\sqrt{b}}, 0 \right)$$

Finalmente, la traza en el plano  $Y=0$  es la hipérbola  $\Gamma$  de ecuación

$$aZ^2 - bX^2 + 2cZX + \sigma_0^2 = 0.$$

La construcción geométrica de  $\Gamma$  es fácil. Observemos, en efecto, que el plano diametral  $Z=0$  tiene por diámetro conjugado en  $\bar{C}_i$  la perpendicular  $X'$  en  $Y=0$  al vector  $\vec{\Omega}_x$ . Luego, recordando lo antes dicho, podemos afirmar que de  $\Gamma$  conocemos el centro,  $P$ , y dos pares de diámetros conjugados,  $(X, X')$  y  $(Z, Z')$ , supuesto  $A' \neq 0$  <sup>(1)</sup>,

lo que, junto con el punto  $(0, \frac{\sigma_0}{\sqrt{b}}, 0)$ , determina por completo  $\Gamma$ .

La cuádrlica  $\bar{C}_i$  está engendrada por el movimiento de una circunferencia cuyo plano es paralelo al  $X=0$ , cuyo centro se mueve a lo largo de  $Z'$  y que se apoya constantemente sobre  $\Gamma$ . Cuando  $Z'$  coincide con el eje  $X$ ,  $\bar{C}_i$  será de revolución respecto del eje  $X$ , y el abatimiento de (II.40) sobre  $Y=0$  nos da  $\Gamma$ . Para ello es necesario y basta que  $c=0$ , es decir,  $A'=0$ , lo que se ve desde luego en la ecuación de  $\bar{C}_i$ .

---

(1) Si  $A'=0$ , los dos pares se reducen a uno solo, el  $X, Z$ , cuyos componentes resultan ser los ejes de  $\Gamma$ , en tanto que diámetros conjugados ortogonales.

Ahora bien, las pendientes de  $Z'$  y  $X'$  son, respectivamente,

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{\sqrt{1 - \beta_0^2}}{\eta v_0^2} \frac{A^2}{A'} (2 - \beta_0^2), \\ \operatorname{tg} \beta_1 &= \frac{-\eta v_0^2}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \frac{A}{A^2} = k,\end{aligned}\quad (k A' \geq 0)$$

de modo que

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{2 - \beta_0^2}{k}.$$

Por otra parte, la pendiente de la traza en el plano  $Y = 0$  de la superficie equipotencial que pasa por un punto próximo a  $P$  sobre la normal positiva a  $X = 0$  en  $P$  resulta de la ecuación

$$\left(A - \frac{1}{2} A'' x^2 + \dots\right) dx + \left(A' x - \frac{1}{6} A''' x^3 + \dots\right) dz = 0,$$

de donde

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \phi &= \frac{dx}{dz} = -\frac{A' x - \frac{1}{6} A''' x^3 + \dots}{A - \frac{1}{2} A'' x + \dots} = \\ &= -\frac{A}{A} x + \left(\frac{A'''}{6A} - \frac{A' A''}{2A^2}\right) x^3 - \dots \approx -\frac{A}{A} x.\end{aligned}$$

Es decir,  $\operatorname{tg} \alpha_1$  y  $\operatorname{tg} \phi$  tienen igual signo, de suerte que la recta  $Z'$ , orientada hacia los potenciales crecientes, se dirige a aquella región en que el gradiente del potencial tiende a disminuir. En los puntos  $P$  de  $x = 0$  en que este gradiente es estacionario, ( $A' = 0$ ),  $Z'$  coincide con la normal a  $X = 0$  en  $P$ .

26.— Consideremos ahora el caso de una rendija electrostática (fig. 14, § 23) y adoptemos los ejes de coordenadas antes indicados. El desarrollo de  $\Phi(z, x)$  en serie de potencias de  $x$  contendrá sólo términos de grado par:

$$\Phi(z, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} V_k,$$

donde  $V_0(z) = V(z)$  es el potencial en un punto cualquiera de  $x = 0$  <sup>(1)</sup>. Dado que

$$\Delta \Phi \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} (V''_{k+1} + V_{k+1}) = 0,$$

cualesquiera que sean  $z$  y  $x$  (con las restricciones que impone la convergencia), las funciones  $V_k(z)$  se obtienen a partir de  $V(z)$  mediante las ecuaciones

$$V_1 = -V_0'' = -V'',$$

.....

$$V_k + (-1)^k V^{(2k)}$$

.....

con lo que resulta para  $\Phi(z, x)$  el desarrollo

$$\begin{aligned} \Phi(z, x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} V^{(2k)}(z) = \\ &= V - \frac{1}{2} V'' x^2 + \frac{1}{24} V^{IV} x^4 - \dots, \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> En rigor,  $V(z)$  es el potencial en un punto cualquiera del eje, y a un lado y a otro de éste en dicho plano con tanta mayor aproximación cuanto mayor es la longitud de la rendija.

del que se deduce

$$E_x = V'' \cdot x - \frac{1}{6} V^{IV} x^3 + \dots$$

$$E_z = -V' + \frac{1}{2} V''' x^2 - \frac{1}{24} V^V x^4 + \dots,$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = V'' - \frac{1}{2} V^{IV} x^2 + \dots,$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} = V''' \cdot x - \frac{1}{6} V^V x^3 + \dots,$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -V' + \frac{1}{2} V^{IV} x^2 - \dots,$$

En particular, para  $x = 0$ ,

$$E_x = 0, \quad E_z = -V',$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = V'', \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = -V'',$$

de donde (cf. II. 32')

$$R_{2323} = -\frac{V'^2}{v_0^2} - \frac{\eta V''}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}, \quad R_{2312} = 0,$$

$$R_{8131} = \left( \frac{2}{v_0^2} - \frac{1}{c^2} \right) V'^2 + \frac{\eta V''}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}, \quad R_{8123} = 0,$$

$$R_{1212} = \left( \frac{2}{v_0^2} - \frac{1}{c^2} \right) V'^2, \quad R_{1231} = 0,$$

y

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} = & \left( -\frac{1}{\sigma_0} \left( \frac{V'^2}{v_0^2} + \frac{\eta V''}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \right) n_z, \right. \\ & \left. \frac{1}{\sigma_0} \left[ \left( \frac{2}{v_0^2} - \frac{1}{c^2} \right) V'^2 + \frac{\eta V''}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \right] n_x, \\ & \left. \frac{1}{\sigma_0} \left( \frac{2}{v_0^2} - \frac{1}{c^2} \right) V'^2 n_y \right).\end{aligned}$$

Los valores de las componentes de la rotación  $\vec{\Omega}$  asociada al ciclo  $\vec{n} dS_e$  en torno de un punto  $P$  del plano  $x = 0$  nos indican, pues, que en cualquier punto de dicho plano las direcciones principales de Ricci son las de los ejes  $z, x, y$ . Ello resulta, desde luego, por otra parte, de la forma de la ecuación de la cuádrica  $\bar{C}_i$  relativa a uno de tales puntos. En virtud de (II. 35) y de los valores de  $R_{ijkl}$  en el presente caso, la ecuación de  $\bar{C}_i$  se escribe, en efecto,

$$\begin{aligned}- & \left( \frac{V'^2}{v_0^2} + \frac{\eta V''}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \right) Z^2 + \left[ \left( \frac{2}{v_0^2} - \frac{1}{c^2} \right) V'^2 + \frac{\eta V''}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \right] X^2 + \\ & + \left( \frac{2}{v_0^2} - \frac{1}{c^2} \right) V'^2 Y^2 + \sigma_0^2 = 0.\end{aligned}$$

Para llevar a cabo la discusión más cómodamente, hagamos

$$\begin{aligned}a &= \frac{V'^2}{v_0^2} + \frac{\eta V''}{\sqrt{1-\beta_0^2}}, & b &= \left( \frac{1}{v_0^2} - \frac{1}{c^2} \right) V'^2 \geq 0, \\ c &= \left( \frac{2}{v_0^2} - \frac{1}{c^2} \right) V'^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Adviértase que  $b$  y  $c$  se anulan simultáneamente y que ello ocurre siempre y sólo cuando  $V' = 0$ . Este caso aparte, será  $bc \neq 0$ , y la ecuación de  $\bar{C}_i$  se escribirá

$$\frac{a}{\sigma_0^2} Z^2 - \frac{a+b}{\sigma_0^2} X^2 - \frac{c}{\sigma_0^2} Y^2 = 1,$$

lo que da para las curvaturas riemannianas correspondientes a los planos  $Z$ ,  $X$  y  $Y$

$$K_z = \frac{a}{\sigma_0^2}, \quad K_x = \frac{a+b}{\sigma_0^2}, \quad K_y = \frac{c}{\sigma_0^2}.$$

Si  $a > 0$  y, por consiguiente,  $a+b > 0$ ,  $\bar{C}_i$  es un hiperboloide de dos hojas (eje transverso, el  $Z$ ), la orientación de la superficie equipotencial que pasa por el punto  $P$  es de curvatura positiva, y de curvatura negativa todas las orientaciones normales a ella. Si  $a = 0$  ( $\therefore a+b > 0$ ),  $\bar{C}_i$  es un cilindro imaginario de generatrices paralelas al eje  $Z$ ; la orientación de la superficie equipotencial es de curvatura riemanniana nula, y todas las demás orientaciones en torno de  $P$  son de curvatura negativa. Supongamos ahora  $a < 0 < a+b$ :  $\bar{C}_i$  es un elipsoide imaginario, con lo que todas las orientaciones que pasan por  $P$  son de curvatura riemanniana negativa. Si  $a+b = 0$  ( $\therefore a < 0$ ),  $\bar{C}_i$  se reduce de nuevo a un cilindro imaginario, esta vez de generatrices paralelas al eje  $X$ ; la orientación de  $Z=0$  es de curvatura nula, y todas las demás, de curvatura negativa. Finalmente, para  $a < a+b < 0$ ,  $\bar{C}_i$  es un hiperboloide de dos hojas (eje transverso, el  $X$ ), y las curvaturas riemannianas de los planos  $Z=0$  y  $Y=0$  son negativas, y positiva la del  $X=0$ .

En un punto  $P_0$  en el que  $V' = 0$ ,  $\bar{C}_i$  se reduce al cilindro hiperbólico real

$$\frac{\eta V''}{\sigma_0^2 \sqrt{1 - \beta_0^2}} (Z^2 - X^2) = 1,$$

cuya directriz es una hipérbola equilátera del plano  $Y=0$ . La superficie equipotencial que pasa por  $P_0$  tiene por ecuación

$$(V_0 + V_0' Z + \frac{1}{2} V_0'' Z^2 + \dots) -$$
$$-\frac{1}{2} (V_0'' + V_0''' Z + \dots) + \dots = V_0,$$

o sea, limitándonos a los términos de segundo orden,

$$\left( Z + \frac{V_0'}{V_0''} \right)^2 - X^2 = \left( \frac{V_0'}{V_0''} \right)^2.$$

Para  $V'=0$ , y dentro de la aproximación fijada, la superficie equipotencial degenera, pues, en los dos planos  $Z^2 - X^2 = 0$ , que son, precisamente, los planos asintóticos de la cuádrica de Riemann asociada a  $P_0$ . Dicho con otras palabras: esos planos asintóticos son tangentes a la superficie equipotencial que pasa por  $P_0$  a lo largo de la arista que presenta en este punto. Un razonamiento por completo análogo al del § 21 prueba que también ahora las normales a las orientaciones de curvatura riemanniana positiva se dirigen hacia los potenciales decrecientes.

27.— Con esto damos por terminada la visión de conjunto de las propiedades más generales del espacio euclídeo-conforme asociado a una lente electrónica de tipo electrostático, el estudio de la geometría en pequeño del campo que la caracteriza. De acuerdo con lo que anunciamos (§ 9), la introducción del campo magnético modificará profundamente el esquema geométrico adecuado que acabamos de considerar, hasta el punto de conducirnos a una geometría esencialmente diferente, geometría en la que el elemento generador no es ya el punto, sino el conjunto de un punto y una recta que pasa por él, a la geometría de los espacios de Finsler.

### III. — EL ESPACIO DE FINSLER ASOCIADO A UNA LENTE ELECTRÓNICA ELECTRO-MAGNETOSTÁTICA

28. — En el § 12 demostramos que las trayectorias naturales posibles de un corpúsculo de masa en reposo  $m$  y carga eléctrica  $e$  sometido a la acción de dos campos superpuestos, electrostático y de potencial  $\Phi$  el uno, magnetostático y de potencial vector  $\vec{A}$  el otro, coincidían con los rayos de la óptica geométrica de un medio de índice de refracción

(II.8)

$$n(Q, \vec{s}_0) = \frac{c}{V_0 + \eta c^2} \left[ \sqrt{\epsilon (V_0 - \Phi) \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + 2\eta \right)} + \vec{A} \times \vec{s}_0 \right],$$

$(\epsilon \eta = |\eta|)$

es decir, eran las extremales del problema de variación  $\delta \int n d s_1 = 0$ , donde  $d s_1$  es el elemento lineal euclídeo,  $d s_1^2 = \gamma_{ij} d x^i d x^j$ . Si  $\vec{A}$  es función de punto y no se reduce a una constante, es decir, si efectivamente actúa sobre el corpúsculo un campo magnético—lo que supondremos siempre en lo que sigue—, el medio en cuestión es no-homogéneo y anisótopo; pero hay algo en el índice  $n$  que lo distingue de los índices de refracción que se suelen estudiar en la óptica geométrica de tales medios. En general, se supone que el índice  $n$  de un medio de aquellas características depende, sí, del punto y de la dirección del rayo que se considera que pasa por él, pero no del sentido en que se juzga recorrido el rayo (*anisotropía simétrica*).

ca). <sup>(1)</sup> El índice  $n$  (II.8), en cambio, depende esencialmente de la dirección del rayo y del sentido en que lo pensamos descrito.

También aquí el caso que particularmente nos interesa es aquel en que el corpúsculo ( $m, e$ ) es un electrón, por lo cual deberemos hacer en (II.8)  $\varepsilon = -1$ , ( $\eta < 0$ ). Las posibles trayectorias naturales son las extremales de la integral

$$\begin{aligned}
 & \int \left( \sqrt{(V_0 - \Phi) \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + 2\eta \right)} - \vec{A} \times \vec{s}_0 \right) ds_1 = \\
 & \text{(III.1)} \quad = \int \left( \sqrt{(V_0 - \Phi) \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + 2\eta \right)} \sqrt{\gamma_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k - A_i \dot{x}^i} \right) ds_1,
 \end{aligned}$$

en la que  $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{ds_1}$ . Ahora bien, es sabido que una integral de la forma  $\int_{s_0}^{s_1} L(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n) ds_1$  depende no sólo de las funciones  $x^i(s_1)$ , esto es, de la línea a lo largo de la cual se la calcula y del sentido en que la recorremos, sino también, en general, de la representación paramétrica, de la naturaleza del parámetro  $s_1$ . Con

(1) Es curioso que Picht, tan preciso en general, no haya insistido en esta diferencia, que es patente en la ec. (3, 15) de la pág. 36 (loc. cit.). También hay que advertir que la expresión que da él de  $(\nabla W^*)^2$ , donde  $W^* = \frac{2\pi}{h} \int L dt$ , es errónea.

Las fórmulas (I.12) y (II.1) nos dan, en efecto,  $\nabla W^* = \frac{2\pi}{h} (\vec{m} \vec{v} + e \vec{A})$ , sien-

do  $\vec{m}$  la masa en movimiento, y claro está que  $(\nabla W^*)^2 = \frac{4\pi^2}{h^2} (\vec{m}^2 \vec{v}^2 + e^2 \vec{A}^2 + 2 \vec{m} e \vec{v} \vec{A}_s)$ , y no igual a  $\frac{4\pi^2}{h^2} (\vec{m}^2 \vec{v}^2 + e^2 \vec{A}_s^2 + 2 \vec{m} e \vec{v} \vec{A}_s)$ , ( $\vec{A}_s = \vec{A} \times \vec{s}_0$ ). Lo que ocurre es que el vector normal  $\vec{n}$ , en el sentido de Herzberger (pág. 9), coincide con  $\lambda^{(1)} \nabla W^* : 2\pi$  y, por consiguiente, en la dirección y sentido  $\vec{s}_0$ ,

$$\lambda = \frac{\lambda^{(1)}}{n} = \frac{\lambda^{(1)}}{\vec{n} \times \vec{s}_0} = \frac{h}{(\vec{m} \vec{v} + e \vec{A}) \times \vec{s}_0} = \frac{h}{\vec{m} \vec{v} + e \vec{A}_s}.$$

otras palabras: si substituimos el parámetro  $s_1$  por otro  $\sigma$ ,  $s_1 = s_1(\sigma)$ , siendo  $s_1(\sigma)$  continua y creciente de  $s_0$  a  $s'$  cuando  $\sigma$  crece de  $\sigma_0$  a  $\sigma'$ , con derivada continua y no nula en dicho intervalo, el valor de la integral transformada  $\int_{\sigma_0}^{\sigma'} L[x^i(s_1(\sigma)), x^i(s_1(\sigma)) \cdot s_1'(\sigma)] d\sigma$  será distinto del de la primitiva, a pesar de extenderse a lo largo de la misma curva y recorrida en el mismo sentido <sup>(1)</sup>. Hay un caso, pero, en que ambas integrales coinciden, es decir, en que la integral depende únicamente de la línea y del sentido en que se la describe: es el que se da cuando la función  $L(x^i, \dot{x}^i)$  es homogénea positiva respecto de las  $\dot{x}^i$ , o sea, cuando, cualquiera que sea  $K$  positivo, es

$$L(x^i, K \dot{x}^i) = K^m L(x^i, \dot{x}^i),$$

relación en la que  $m$  es el grado de homogeneidad. Y éste es precisamente el caso en el integrando de (III.1), que es homogéneo positivo de primer grado. Luego, podemos prescindir de la significación del parámetro  $s_1$  y adoptar otro cualquiera, aunque ligado con  $s_1$  por las relaciones antes indicadas. Para indicar esta libertad de elección, escribiremos (III.1) en la forma

(III.1')

$$\int \left[ \sqrt{(V_0 - \Phi) \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + 2\eta \right)} \sqrt{\gamma_{ik} dx^i dx^k} - A_i dx^i \right] = \\ = \int L(x^i, dx^i),$$

donde, para abreviar, hemos hecho

(III.2)

$$L(x^i, dx^i) = \sqrt{(V_0 - \Phi) \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + 2\eta \right)} \sqrt{\gamma_{ik} dx^i dx^k} - A_i dx^i = \\ = \sqrt{\sigma} \sqrt{\gamma_{ik} dx^i dx^k} - A_i dx^i.$$

<sup>(1)</sup> Cf. GOURSAT, III, págs. 625-626. Desde el punto de vista cinemático, cabe interpretar este resultado diciendo que dicha integral depende no sólo de la trayectoria y del sentido en que es descrita, sino también de la ley del movimiento sobre ella.

29. — El cálculo de las extremales de  $\delta \int L(x^i, dx^i) = 0$  exige la integración del sistema euleriano

$$(III.3) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \quad \left( \dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt} \right)$$

en el que  $t$  es un parámetro cualquiera de referencia. Pero a este sistema no cabe aplicar la transformación de Legendre (§ 1), que lo conduciría a la forma hamiltoniana, en primer lugar porque el de-

terminante funcional  $\left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k} \right|$  es idénticamente nulo como con-

secuencia de la homogeneidad de grado 1 de  $L$ , y la no anulación idéntica de dicho determinante es una condición necesaria para la posibilidad de despejar en  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$  las  $x^i$  como funciones uniformes y continuas de los impulsos conjugados; en segundo lugar, porque la función de Hamilton correspondiente a una tal  $L$  resulta idénticamente nula <sup>(1)</sup>. Además, esa misma homogeneidad trae consigo que las ecuaciones (III.3) no sean independientes entre sí.

Si embargo, en casos como éste es posible obviar las dificultades que acabamos de señalar eligiendo oportunamente el parámetro de la representación de las extremales, del que, conforme sabemos, cabe disponer libremente. En efecto; introduzcamos en el sistema (III.3) la función

$$(III.4) \quad F(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n) = \frac{1}{2} \left\{ L(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n) \right\}^2,$$

donde, para mayor generalidad, suponemos  $L$  cualquiera, aunque homogénea positiva de primer grado, no ya precisamente de la forma (III.2). La función  $F$  es también, claro está, homogénea positiva,

---

(1) COURANT-HILBERT, págs. 100-101.

pero de segundo grado. En estas condiciones, el sistema (III.3) equivale al

$$(III.3') \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{L} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{1}{L} \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0.$$

Fijado el parámetro  $t$ , elijamos otro parámetro  $s$  ligado con  $t$  a lo largo de cada extremal por la condición

$$(III.5) \quad \frac{ds}{dt} = L \left( x^i, \frac{dx^i}{dt} \right).$$

La nueva representación paramétrica  $x^i(s)$  de un extremal cualquiera será una integral del sistema

$$\frac{ds}{dt} \cdot \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{L} \frac{ds}{dt} \frac{\partial F}{\partial x'^i} \right) - \frac{1}{L} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0,$$
$$\left( x'^i = \frac{dx^i}{ds} \right)$$

es decir, en virtud de (III.5), del sistema

$$(III.6) \quad \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial F}{\partial x'^i} \right) - \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0.$$

Por lo tanto, toda curva extremal de  $\delta \int L(x^i, dx^i) = 0$ , referida a un parámetro oportunamente elegido, es una integral de (III.6), aunque no una cualquiera, en principio, sino una a lo largo de la cual es  $F(x^i, x'^i) = \frac{1}{2} \left\{ L(x^i, x'^i) \right\}^2 = \frac{1}{2}$ . Pero es fácil ver que el sistema (III.6) admite la propia función  $F$  como integral primera: a lo largo de una línea integral cualquiera de (III.6) se tiene, de una parte,

$$\frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial x^i} x'^i + \frac{\partial F}{\partial x'^i} x''^i,$$

y de otra,

$$2 \frac{dF}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial F}{\partial x'^i} \right) x'^i + \frac{\partial F}{\partial x'^i} x''^i,$$

en fuerza del teorema de Euler relativo a las funciones homogéneas <sup>(1)</sup>. Si restamos de la segunda ecuación la primera, y dado que  $x^i(s)$  es una línea integral de (III.6), obtendremos en definitiva

$$\frac{dF}{ds} = \left\{ \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial F}{\partial x'^i} \right) - \frac{\partial F}{\partial x^i} \right\} x'^i = 0 \therefore F = C^{\text{te}},$$

lo que queríamos demostrar. Luego, si los valores iniciales  $x^i, x'^i$  cumplen la condición  $F(x^i, x'^i) = \frac{1}{2}$ , esta condición subsiste a lo largo de la línea integral de (III.6) por ellos determinada, línea integral que, por consiguiente, es una extremal de nuestro problema de variación.

Si el determinante funcional  $\left| \frac{\partial^2 F}{\partial x'^i \partial x'^j} \right|$  es  $\neq 0$ , el sistema

(III.6) de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

$$(III.6') \quad \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial x'^i \partial x'^j} x''^j + \frac{\partial^2 F}{\partial x'^i \partial x'^j} x'^j - \frac{\partial F}{\partial x'^i} = 0$$

puede conducirse a la forma normal, pues define las  $x''^j$  como funciones uniformes y continuas de las  $x^i, x'^i$ . Por cada punto de un dominio  $D(x^i)$  en el que  $F$  sea continua, con derivadas parciales continuas, por lo menos hasta el tercer orden, cualesquiera que sean las

$x'^i$  (finitas no todas nulas), y en el cual el determinante  $\left| \frac{\partial^2 F}{\partial x'^i \partial x'^j} \right|$

sea  $\neq 0$ , pasa entonces una extremal, y sólo una, del problema de variación  $\delta \int L(x^i, dx^i) = 0$ . El problema de variación se califica en

<sup>(1)</sup> Este teorema subsiste para las funciones homogéneas positivas, aun siendo este concepto menos restrictivo que el de homogéneas simplemente.

este caso de *regular*. Tal es el correspondiente a la función  $L$  de (III.2) cuando el campo electro-magnetostático no presente singularidades en el dominio  $D$ .

Finalmente, en las condiciones dichas, la reducción a la forma canónica de (III.6) es posible: los impulsos conjugados son  $p_i = \frac{\partial F}{\partial x'^i}$  y la función de Hamilton

$$H(x^i, p_i) = x'^i \frac{\partial F}{\partial x'^i} - F(x^i, x'^i) = F(x^i, x'^i),$$

todo ello con la condición  $H = F = \frac{1}{2}$ .

30. — Sea  $V_n$  una variedad  $n$ -dimensional referida a un sistema de coordenadas  $(x^i)$ , variedad en la que se ha planteado un problema de variación regular

$$(III.7) \quad \delta \int L \{ x^1(t), \dots, x^n(t), \dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t) \} dt = \\ = \delta \int L(x^i, dx^i) = 0,$$

donde  $L$  es una función homogénea positiva de las  $\dot{x}^i$ , continua y derivable, con derivadas continuas hasta el cuarto orden. Si convenimos en interpretar el valor de la integral

$$s = \int_{Q_0}^{Q} L(x^i, dx^i)$$

como *longitud* del arco orientado de curva  $\Gamma$  comprendido entre  $Q_0$  y  $Q$ , diremos que la variedad  $V_n$  es un *espacio métrico general* <sup>(1)</sup>, y también que el problema de variación caracterizado por la función ha inducido en  $V_n$  una *determinación métrica general*. El porqué de esta terminología lo veremos en el párrafo 32. Las extremales de (III.7), líneas integrales de (III.3) o de (III.6) con la condición inicial

<sup>(1)</sup> BERWALD, págs. 42-43.

$F(\overset{\circ}{x^i}, \overset{\circ}{x'^i}) = \frac{1}{2}$  (o  $L(\overset{\circ}{x^i}, \overset{\circ}{x'^i}) = 1$ ), son las geodésicas en  $V_n$  de dicha determinación métrica general—líneas de  $V_n$  de longitud estacionaria. La distancia entre dos puntos infinitamente próximos,  $P(x^i)$ ,  $P'(x^i + dx^i)$ , es el número

$$(III.8) \quad ds = L(x^i, dx^i);$$

la distancia entre dos puntos  $Q_0(\overset{\circ}{x^i})$  y  $Q(\overset{\circ}{x^i})$ , el valor de

$$s(\overset{\circ}{x^i}, \overset{\circ}{x^i}) = \int_{Q_0}^{Q} L(x^i, dx^i)$$

calculado a lo largo de la extremal (E) que une  $Q_0$  y  $Q$ . Esta distancia, que, cuando  $L$  es la (III.2), es proporcional al camino óptico entre  $Q_0$  y  $Q$  relativo al índice de refracción (II.8), o, lo que es lo mismo, a la acción de Maupertuis entre  $Q_0$  y  $Q$  relativa a la función de Lagrange (II.1) (cf. § 12), es, en el caso general, una función de las  $2n$  variables  $(\overset{\circ}{x^i}, x^i)$ , función que admite derivadas parciales de primer orden respecto de los  $2n$  argumentos. El cálculo de éstas es ya clásico (cf. § 3); los valores que resultan son

$$\frac{\partial s}{\partial x^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}, \quad \frac{\partial s}{\partial \overset{\circ}{x^i}} = \frac{\partial L}{\partial \overset{\circ}{\dot{x}^i}},$$

independientes, evidentemente, del parámetro a que se haya referido (E), dado que  $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$  y  $\frac{\partial L}{\partial \overset{\circ}{\dot{x}^i}}$  son funciones homogéneas positivas de grado cero. La diferencial de la distancia  $s(Q_0, Q)$  es, por consiguiente,

$$ds = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} dx^i - \frac{\partial L}{\partial \overset{\circ}{\dot{x}^i}} d\overset{\circ}{x^i}.$$

Elegido un punto  $P(x^i)$  y una dirección *orientada*, la determinada, por ejemplo, por un vector contravariante  $p^i$ , a la figura constituida por uno y otra la llamaremos un *elemento lineal de centro*  $P(x^i)$  <sup>(1)</sup>. Los parámetros independientes que lo fijan son en número de  $2n-1$ , pues las  $p^i$  pueden substituirse por  $Kp^i$ , siendo  $K$  *positivo* cualquiera. La función  $L$  permite vincular a cada elemento lineal  $(x^i, p^i)$  una  $n-1$  orientación, la definida por

$$\frac{\partial L(x, p)}{\partial p^i} dx^i = 0.$$

De toda dirección  $dx^i$  contenida en ella diremos que es *transversal* al elemento lineal dado, y también que éste es transversal a dicha orientación. En particular, los rayos que parten de un punto  $Q_0$  en la óptica geométrica (II.8) son transversales a una superficie de onda cualquiera de origen  $Q_0$  en los puntos en que la cortan, es decir, las posibles trayectorias naturales del corpúsculo ( $m, e$ ) de energía total  $mc^2 + eV_0$  que obedece al potencial cinético (II.1) cortan transversalmente a las ondas de Hamilton de origen  $Q_0$ . Es inmediato que la noción de transversalidad se reduce a la de ortogonalidad en sentido ordinario cuando  $L$  es de la forma

$$L = \sqrt{g_{ik}(x) dx^i dx^k},$$

lo cual ocurre, por ejemplo, cuando en (II.1) (II.8) es  $\vec{A} = 0$ , esto es, en las lentes electrónicas de tipo eléctrico.

31. — Hasta ahora sólo sabemos cómo medir longitudes en la  $V_n$ , pues únicamente se ha definido la distancia entre dos puntos infinitamente próximos. Pero la extensión a  $V_n$  de los conceptos fundamentales de la geometría diferencial por modo intrínsecamente ligado al problema de variación (III.7), exige la introducción del concepto

(1) No se confunda esta noción con la de elemento lineal en los espacios *puntuales* de conexión métrica. En éstos se suele llamar, algo impropriamente, elemento lineal a la distancia entre dos puntos infinitamente próximos,  $P$  y  $P'$ , sobrentendiendo *longitud* del elemento lineal.

de paralelismo y de determinación métrica, los que, a su vez, suponen el de tensor. Examinemos, pues, éstos en primer lugar.

Advirtamos, ante todo, que en este estadio no concebimos ya los puntos de  $V_n$  en sí, sino como centros de elementos lineales; es decir, pensamos en  $V_n$  no un espacio puntual, sino un espacio de elementos lineales <sup>(1)</sup>. Esto sentado, llamaremos tensor localizado o de base en el elemento lineal  $(x^i, p^i)$ , de orden  $p = h + k$  y exceso  $\varepsilon = h - k$  (covariante de orden  $h$ , contravariante de orden  $k$ ), a un ente determinado respecto de la referencia  $(x^i)$  por  $n^p$  componentes

$$t_{j_1 \dots j_h}^{i_1 \dots i_k} (x^i, p^i),$$

funciones homogéneas positivas de las  $p^i$  <sup>(2)</sup>, tales que al efectuar un cambio de coordenadas regular

$$\begin{cases} x^i = x^i (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n), \\ p^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \bar{p}^j, \end{cases} \quad \left\| \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right\| \neq 0$$

se transforman de acuerdo con la ley

$$t_{j_1 \dots j_h}^{i_1 \dots i_k} (x^i, p^i) = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{m_1}} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial \bar{x}^{m_k}} \frac{\partial \bar{x}^{l_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{l_h}}{\partial x^{j_h}} \bar{t}_{l_1 \dots l_h}^{m_1 \dots m_k} (\bar{x}^i, \bar{p}^i).$$

En apariencia, la definición es la misma que en los espacios puntuales; pero, en realidad, existe una diferencia esencial que no se advierte en la ley de transformación cuando entre los argumentos de que dependen explícitamente las componentes no figuran las  $p^i$ : en un espacio de elementos lineales carece de sentido hablar de tensor

(1) Es éste el estadio al que alude Berwald cuando escribe: "...ordnen wir zunächst jedem Punkte  $(x)$  unseres Raumes einen infinitesimalen Vektor  $(dx)$  in diesem Punkte zu, den wir das *ausgezeichnete Linienelement* des Punktes  $(x)$  nennen..." (pág. 45). Claro está, sin embargo, que el mismo elemento lineal puede determinarse con un vector contravariante finito cuyas componentes sean proporcionales a aquellas  $dx^i$ .

(2) En los tensores propiamente tales, la homogeneidad es de grado cero.

sin indicar explícitamente el *elemento lineal* al que se considera aplicado, y ello es así *incluso en el caso* en que las componentes *no dependen analíticamente* de los parámetros  $p^i$ . En particular, el vector contravariante  $p^i$ , que junto con  $P(x^i)$  fija el elemento  $(x^i, p^i)$ , se juzga aplicado a *este* elemento <sup>(1)</sup>.

El segundo estadio es el métrico-afín, es decir, la introducción de una métrica y de una diferencial absoluta en el espacio  $V_n$  de elementos lineales. La primera se define mediante el tensor fundamental covariante de segundo grado,  $g_{ij}(x^k, p^k)$ , cuyas componentes son funciones homogéneas positivas de grado cero de las  $p^i$ . A partir de él se establecen las magnitudes y operaciones ordinarias en cálculo tensorial—módulo de un vector, producto escalar de dos vectores, elevación y descenso de índices, etc.—, en el bien entendido, pero, de que cuantos entes intervengan en ellas deben tener como elemento base *el mismo* elemento lineal  $(x^i, p^i)$  al que están vinculados los valores  $g_{jk}(x^i, p^i)$ . Así, por ejemplo, el producto escalar de dos vectores  $X^i, Y^k$  aplicados al elemento  $(x^i, p^i)$  es el número

$$g_{jk}(x^i, p^i) X^j Y^k,$$

mientras que si los pensamos aplicados al elemento  $(x^i, p^i)$ , su producto escalar será, en general, otro:

$$g_{jk}(x^i, p^i) X^j Y^k,$$

Análogamente, los módulos de los vectores de base  $\vec{e}_k$  de la referencia local y los ángulos que forman dependen esencialmente de la dirección orientada que se elija para hacer del origen de dicha referencia un elemento lineal.

En cuanto al transporte paralelo de vectores—y, en general, de tensores—, se referirá a la traslación desde un elemento lineal  $(x^i, p^i)$

(1) Una generalización de este concepto de tensor y del de determinación métrica y derivación covariante a los espacios cuyos elementos son puntos y orientaciones *m dimensionales*, puede verse en el artículo de A. Kawaguchi “Ein metrischer Raum, der eine Verallgemeinerung des Finslerschen Raumes ist” (*Monatsch. für Math. und Phys.*, 1936, 43, 289-297). El caso  $m = 2$  se encuentra estudiado en Cartan, “Les espaces métriques fondés sur la notion d’aire” (*Act. Scient. et Indust.*, n.º 72, París, Hermann, 1933).

a otro infinitamente próximo ( $x^i + dx^i, p^i + dp^i$ ), acaso de igual centro ( $dx^i = 0, dp^i \neq 0$ ). Su definición, por lo demás, es semejante a la que se da en geometría ordinaria de los espacios puntuales de conexión afín: el vector trasladado  $\dot{X}^i$  de  $X^i$  desde el elemento  $(x^i, p^i)$  al  $(x^i + dx^i, p^i + dp^i)$  es, por definición, el vector

$$(III. 9) \quad \dot{X}^i = X^i - \Gamma_{jk}^i X^j dx^k - C_{jk}^i X^j dp^k,$$

igualdad en la que los coeficientes  $\Gamma_{jk}^i, C_{jk}^i$  son funciones de  $(x^i, p^i)$  homogéneas positivas de grado cero respecto de las  $p^i$ . Si  $X^i$  pertenece a un campo de vectores ( $X^i = X^i(x, p)$ ), las componentes del vector del campo aplicado en  $(x^i + dx^i, p^i + dp^i)$  son

$$X^i(x + dx, p + dp) = X^i(x, p) + \frac{\partial X^i}{\partial x^k} dx^k + \frac{\partial X^i}{\partial p^k} dp^k,$$

y la diferencial absoluta vale

$$(III. 10) \quad \begin{aligned} DX^i &= X^i(x + dx, p + dp) - \dot{X}^i = \\ &= \left( \frac{\partial X^i}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^i X^j \right) dx^k + \left( \frac{\partial X^i}{\partial p^k} + C_{jk}^i X^j \right) dp^k. \end{aligned}$$

La fusión de la métrica  $g_{jk}$  y la conexión afín (III. 9) se efectúa de acuerdo con el criterio de que el módulo de un vector no varía en la traslación. Se obtienen así entre  $g_{jk}$ ,  $\Gamma_{jk}^i$  y  $C_{jk}^i$  las relaciones siguientes:

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^h} = g_{jr} \Gamma_{kh}^r + g_{rh} \Gamma_{jh}^r = \Gamma_{khj} + \Gamma_{jkh}.$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial p^h} = g_{jr} C_{kh}^r + g_{rh} C_{jh}^r = C_{khj} + C_{jkh}.$$

Por lo demás, dichas funciones son cualesquiera—aparte la condición de homogeneidad antes indicada—<sup>(1)</sup>.

Un espacio de elementos lineales caracterizado por cuanto llevamos dicho en este párrafo, posee la estructura de un espacio de conexión euclídea en el sentido de Cartan <sup>(2)</sup>.

32. — Finalmente indicaremos que, conforme ha demostrado Cartan <sup>(3)</sup>, de toda variedad  $V_n$  concebida como soporte de elementos lineales se puede hacer un espacio de elementos lineales dotado de una conexión euclídea vinculada intrínsecamente a la función  $L$  de un problema de variación de la forma (III. 7) planteado en  $V_n$ . Las condiciones que impone a la conexión, en número de cinco <sup>(4)</sup>, conducen a los siguientes valores de  $g_{jk}$ ,  $\Gamma_{jk}^i$  y  $C_{jk}^i$ :

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial p^i \partial p^j}, \quad C_{ijh} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial p^h} = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F}{\partial p^i \partial p^j \partial p^h},$$

(III. 11)

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijh} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} + \frac{\partial g_{hj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} \right) + \\ &+ C_{jhr} \frac{\partial G^r}{\partial p^j} - C_{ijr} \frac{\partial G^r}{\partial p^h} - C_{hjr} \frac{\partial G^r}{\partial p^i}, \end{aligned}$$

donde

$$F(x^1, \dots, x^n, p^1, \dots, p^n) = \frac{1}{2} \left\{ L(x^1, \dots, x^n, p^1, \dots, p^n) \right\}$$

y

$$G^r = g^{rm} G_m, \quad 2G_m = \frac{\partial^2 F}{\partial p^m \partial x^k} p^k - \frac{\partial F}{\partial x^m}.$$

<sup>(1)</sup> Para la teoría de los espacios generalizados véase Cartan [3]. Para la teoría general de los espacios de Finsler, cf. Cartan [2].

<sup>(2)</sup> Cartan [2], § 3, pág. 5; cf. también Cartan [3], cap. IX y X.

<sup>(3)</sup> Cartan [2], págs. 10 y 11.

<sup>(4)</sup> A. de Mira Fernandes las reduce a tres (“Assiomatica degli spazi di elemento lineare”. *Portugaliae Math.*, 1941, 2, 7-12).

La distancia  $ds$  entre dos puntos de  $V_n$ ,  $(x^i)$  y  $(x^i + dx^i)$  infinitamente próximos, centros de dos elementos lineales,  $(x^i, p^i)$ ,  $(x^i + dx^i, p^i + dp^i)$ , definida como módulo del vector infinitesimal aplicado a  $(x^i, p^i)$ , vale

$$ds = \sqrt{g_{jk}(x^i, p^i) dx^j dx^k} = \sqrt{\frac{\partial^2 F}{\partial p^j \partial p^k} dx^j dx^k}.$$

En particular, si  $dx^i$  y  $p^i$  tienen igual dirección y sentido,  $dx^i = p^i dt$  ( $dt > 0$ ), y, por ende,

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\frac{\partial^2 F}{\partial p^j \partial p^k} p^j p^k dt} = \sqrt{2 F(x^i, p^i)} dt = \\ &= L(x^i, p^i) dt = L(x^i, dx^i), \end{aligned}$$

de acuerdo con (III.8).

Llamaremos *espacio de Finsler* asociado al problema de variación (III.7) al espacio  $V_n$  de elementos lineales estructurado por la conexión euclídea (III.11) subordinada a la función  $L(x^i, p^i)$  <sup>(1)</sup>.

Consideremos en particular las geodésicas de un tal espacio. Es sabido que de una geodésica cabe dar dos definiciones, métrica la una, afín la otra. Geodésica, en el primer sentido, lo es toda línea de longitud estacionaria. Se entiende por geodésica en el segundo sentido una línea tal que todos sus vectores tangentes son paralelos <sup>(2)</sup>, vectores que, en el espacio de Finsler, se suponen aplicados al elemento lineal que definen. Desde el primer punto de vista y refe-

(1) Para las relaciones entre el cálculo de variaciones y los espacios métricos generales, cf., por ejemplo, el artículo de L. Koschmieder, "Die neuere formale Variationsrechnung" (*Jahr. der Deutsch. Math. Verein.*, 1931, 40, 109-132), en particular págs. 113 a 124. Es menester advertir, con todo, que se refiere a la conexión afín de Berwald en tales espacios (BERWALD, pág. 45), no a la más general de Cartan.

(2) Es ésta la definición general de geodésica en un espacio de conexión afín, y no la que dan algunos autores, Brillouin, por ejemplo,  $D u^i = 0$ , donde  $u^i$  es el vector tangente relativo a un cierto parámetro (parámetro afín).

ridas al parámetro  $s$ , a la abscisa curvilínea, son las integrales de (III.6'), sistema que podemos escribir ahora, en virtud de (III.11),

$$a_{ij} \frac{d^2 x^j}{ds^2} + 2 G_i \left( x, \frac{dx}{ds} \right) = 0, \quad \left( p^i = \frac{dx^i}{ds} \right)$$

o bien

$$(III.12) \quad \frac{d^2 x^j}{ds^2} + 2 G^j \left( x, \frac{dx}{ds} \right) = 0.$$

Consideremos ahora una línea geodésica en sentido afín y refirámosla a un parámetro  $t$  cualquiera. El vector tangente  $p^i = \frac{dx^i}{dt}$ , cuyo elemento de apoyo es el  $(x^i, p^i)$ , trasladado al elemento  $(x^i + p_i dt, p_i + p^i dt)$ , tiene como componentes (cf. III.9)

$$\begin{aligned} p^i &= p^i - \Gamma_{jk}^i p^j p^k dt - C_{jk}^i p^j p^k dt, \\ &= p^i - \Gamma_{jk}^i p^j p^k dt = p^i - 2 G^i(x, p) dt \quad (1). \end{aligned}$$

Por otra parte, el vector tangente en  $(x^i + p^i dt)$  es el  $p^i + p^i dt$ . Si ambos vectores, asociados al mismo elemento lineal, han de ser paralelos, debe existir una función  $\phi(t)$  tal que

$$\frac{p^i - 2 G^i(x, p) dt}{p^i + p^i dt} = 1 - \phi(t) dt,$$

de donde

$$(III.13) \quad \frac{dp^i}{dt} + 2 G^i(x, p) = p^i \phi(t),$$

(1) Cartan no estudia las geodésicas desde este punto de vista. La única relación que utilizamos aquí, y que no hemos demostrado en lo que precede, es la  $p^i \Gamma_{ij}^h = \frac{\partial G^h}{\partial p^j}$  (cf. Cartan [2], pág. 16, ec. X). Todo lo demás se deduce de cuanto venimos diciendo.

o bien,

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + 2 G^i \left( x, \frac{dx}{dt} \right) = \frac{dx^i}{dt} \phi(t).$$

Este es, pues, el sistema de ecuaciones diferenciales de las geodésicas como líneas cuyas tangentes son paralelas entre sí. Introduzcamos en vez de  $t$  otro parámetro cualquiera  $\sigma = \sigma(t)$ ; un cálculo fácil conduce a la ecuación transformada

$$\left\{ \frac{d^2 x^i}{d\sigma^2} + 2 G^i \left( x, \frac{dx}{d\sigma} \right) \right\} \left( \frac{d\sigma}{dt} \right)^2 = \left\{ \phi(t) \frac{d\sigma}{dt} - \frac{d^2 \sigma}{dt^2} \right\} \frac{dx^i}{d\sigma}.$$

Basta determinar  $\sigma$  con la condición

$$\phi(t) \frac{d\sigma}{dt} - \frac{d^2 \sigma}{dt^2} = 0 \quad \therefore \quad \sigma = C_1 + C_2 \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^x \phi(z) dz} dx$$

(parámetro afín) para que el sistema (III.13) se convierta en el

$$\frac{d^2 x^i}{d\sigma^2} + 2 G^i \left( x, \frac{dx}{d\sigma} \right) = 0,$$

es decir, en el (III.12). Ambas definiciones son, pues, equivalentes, y es obvio que entre  $\sigma$  y  $s$  debe existir una relación de la forma  $\sigma = a + b s$ .

33. — Con esto queda demostrado lo que repetidamente venimos anunciando: a cada lente electrónica resultante de la superposición de un campo eléctrico y de un campo magnético estático corresponde un espacio de Finsler unívocamente determinado, al igual que a cada lente electrónica de tipo eléctrico corresponde un espacio euclídeo-conforme. A éste se reduce precisamente aquél cuando  $\mathbf{A} = 0$  en todo el dominio ocupado por la lente; basta, para verlo, con hacer

en (III. 2)  $A_i = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) <sup>(1)</sup>. La función determinante de la métrica finsleriana es la (III. 2) :

$$(III. 2) \quad L(x^i, p^i) = \sqrt{(V_0 - \Phi) \left( \frac{V_0 - \Phi}{c^2} + 2\eta \right)} \sqrt{\gamma_{ik} p^i p^k} - A_i p^i,$$

función que, evidentemente, es homogénea positiva de primer grado respecto de las  $p^i$ , pero no simplemente homogénea. Las geodésicas de este espacio son las trayectorias posibles de un electrón que penetra en el campo de la lente. Sus ecuaciones son invariantes de la

transformación  $A_i \rightarrow A_i + \frac{\partial U}{\partial x^i}$ , lo que corresponde al hecho de estar

definido el potencial vector  $A_i$ , salvo un gradiente aditivo, que deberá serlo de una función armónica si a  $A_i$  se ha impuesto la condición de Lorentz ( $\text{div } \vec{A} = 0$  en el caso estático).

Al contrario de lo que sucedía en el espacio euclídeo-conforme de una lente puramente eléctrica en la aproximación no-relativista (§ 15), la estructura del espacio de Finsler de una lente electrónica del tipo  $(\Phi, \vec{A})$  cambia en general al someter ésta a una transformación

$$\begin{aligned} x^i &\rightarrow k_1 x^i, & \eta &\rightarrow k_3 \eta, \\ \Phi - V_0 &\rightarrow k_2 (\Phi - V_0), & \vec{A} &\rightarrow k_4 \vec{A}, \end{aligned}$$

en la que  $k_1, k_2, k_3$  y  $k_4$  son constantes positivas, incluso dentro de los límites de aquella aproximación. En particular, las geodésicas correspondientes a campos iguales ( $k_2 = k_4 = 1$ ) y a corpúsculos de  $\eta$  distintas ( $k_3 \neq 1$ ) son distintas, y de ahí la posibilidad de utilizar campos  $(\Phi, \vec{A})$  en la espectrografía de masas. Pero es claro que la estructura se conserva cuando entre las  $k_i$  existe la relación

$$\sqrt{k_2 k_3} = k_4.$$

(1) Siempre podemos suponer  $\vec{A} = 0$  cuando no existe campo magnético, única circunstancia ésta que tiene sentido físico.

También en las lentes ( $\Phi, \vec{A}$ ) valen, pues, ciertas *leyes de semejanza*, pero son menos amplias que las correspondientes à las meramente eléctricas <sup>(1)</sup>.

34. — La definición de lente electrónica ( $\Phi, \vec{A}$ ) es en todo análoga a la de lente electrónica eléctrica: un dominio  $D_{em}$  del espacio en que se manifiestan un campo eléctrico,  $\Phi$ , y un campo magnético,  $\vec{A}$ , los cuales presentan la simetría de revolución en torno de una misma recta (eje de la lente). Se clasifican atendiendo a la distribución  $V$  del potencial eléctrico  $\Phi$  a lo largo del eje (cf. § 14). Si  $\Phi$  es constante (lente electrónica magnética), la clasificación carece de objeto, pues entonces también es constante la velocidad  $v$  del electrón (cf. § 11).

Adoptemos en  $D_{em}$  un sistema de coordenadas cilíndricas ( $x^1 = z, x^2 = r, x^3 = \phi$ ). El potencial vector  $\vec{A}$  es función exclusivamente de  $z$  y de  $r$ . Además, dado que las corrientes eléctricas que engendran el campo magnético carecen de componentes paralelas al eje de la lente, deberá ser  $A_z = 0$ . Finalmente, la condición  $\text{div } \vec{A} = 0$

nos da, en virtud de lo que acabamos de decir,  $\frac{\partial (r A_r)}{\partial r} = 0$ , o sea,  $r A_r = f(z) \therefore A_r = f(z) : r$ . Ahora bien, en el eje  $A_r = 0$ ; luego  $f(z) = 0$ , esto es,  $A_r = 0$ . La única componente no nula es la  $A_\phi(z, r) = A(z, r)$ , de forma que (III.2) se escribirá simplemente

$$(III.14) \quad L(x^i, p^i) = \sqrt{\sigma} \sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2 + r^2 (p^3)^2} - A r p^3.$$

Para valores de  $r$  suficientemente pequeños,  $A(z, r)$  puede desarrollarse en serie de potencias de  $r$ :

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+1)!} H^{(2k)}(z) \left(\frac{r}{2}\right)^{2k+1}$$

en la que  $H(z)$  es la componente  $z$  del campo magnético en un punto genérico del eje de la lente  $D_{em}$  <sup>(2)</sup>.

(1) Cf. BRÜCHE-RECKNAGEL, pág. 16.

(2) BUSCH [\*], pág. 978.

De (III.14) se deduce para  $F(x^i, p^i) = \frac{1}{2} \{ L(x^i, p^i) \}^2$  la expresión

(III.15)

$$F = \frac{1}{2} \left\{ \sigma (z^2 + \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + A^2 r^2 \dot{\phi}^2 - 2A \sqrt{\sigma} r \dot{\phi} \sqrt{z^2 + \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2} \right\}$$

en la que, por comodidad de notación, hemos substituido las  $p^i$  por las variables  $\dot{z}$ ,  $\dot{r}$ ,  $\dot{\phi}$ , sin que con ello se pretenda interpretarlas como derivadas respecto de un parámetro. En consecuencia,

$$(III.16) \quad \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z} &= \sigma \dot{z} - A \sqrt{\sigma} r \frac{\dot{\phi} \dot{z}}{R}, & \frac{\partial F}{\partial \dot{r}} &= \sigma \dot{r} - A \sqrt{\sigma} r \frac{\dot{\phi} \dot{r}}{R}, \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{\phi}} &= (\sigma + A^2) r^2 \dot{\phi} - \frac{A \sqrt{\sigma} r}{R} (z^2 + \dot{r}^2 + 2r^2 \dot{\phi}^2); \end{aligned}$$

y por lo tanto, ( $R = \sqrt{z^2 + \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2}$ )

$$(III.17) \quad \left\{ \begin{aligned} g_{11} &= \sigma - \frac{A \sqrt{\sigma} r}{R^3} \dot{\phi} (r^2 + r^2 \dot{\phi}^2), \\ g_{12} &= \frac{A \sqrt{\sigma} r}{R^3} z \dot{r} \dot{\phi}, \\ g_{13} &= - \frac{A \sqrt{\sigma} r}{R^3} \dot{z} (z^2 + \dot{r}^2); \\ g_{22} &= \sigma - \frac{A \sqrt{\sigma} r}{R^3} \dot{\phi} (z^2 + r^2 \dot{\phi}^2), \\ g_{23} &= - \frac{A \sqrt{\sigma} r}{R^3} \dot{r} (z^2 + \dot{r}^2); \\ g_{33} &= (\sigma + A^2) r^2 - \frac{A \sqrt{\sigma} r}{R^3} r^2 \dot{\phi} (3z^2 + 3\dot{r}^2 + 2r^2 \dot{\phi}^2). \end{aligned} \right.$$

Las componentes  $g_{ik}$  del tensor métrico se reducen, cual debe ser, a las (II.11) para  $A = 0$ . Pero la presencia de  $A$  altera las propiedades del espacio métrico intrínsecamente asociado a la lente hasta tal extremo, que las magnitudes métricas no dependen ya del punto como a tal, sino del complejo punto-dirección orientada del elemento lineal. Si en un punto del campo se encuentra el electrón, existe un elemento lineal, con centro en este punto, que nos aparece como privilegiado respecto de los demás de igual centro: aquel cuya dirección y sentido coinciden con los del movimiento de aquél. En este sentido, las cosas ocurren como si el electrón en movimiento determinara la métrica local. Por ejemplo: los vectores de base  $\vec{e}_i$  de la referencia local  $R(P)$  son ortogonales siempre y sólo cuando el electrón se mueve en  $P$  perpendicularmente al plano meridiano que pasa por  $P$  ( $z = \dot{r} = 0, \dot{\phi} \neq 0$ ).

Sea  $(x^i, \dot{x}^i)$  un elemento lineal de  $D_{em}$ . El módulo del vector contravariante  $\dot{x}^i$  de base  $(x^i, \dot{x}^i)$  vale

$$|\dot{x}| = \sqrt{g_{ik}(x, \dot{x}) \dot{x}^i \dot{x}^k} = L(x^i, \dot{x}^i).$$

El vector  $\dot{x}^i/L(x, \dot{x})$  es, por consiguiente, unitario y sus componentes covariantes son

$$\begin{aligned} u_i &= g_{ik}(x, \dot{x}) \frac{\dot{x}^k}{L(x, \dot{x})} = \frac{1}{L(x, \dot{x})} \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k} \dot{x}^k = \\ &= \frac{1}{L(x, \dot{x})} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}. \end{aligned}$$

Si recordamos, además, que el índice de refracción  $n(Q, \vec{s}_0)$  está ligado con  $L$  por la relación

$$n(Q, \vec{s}_0) = \frac{c}{V_0 + \eta c^2} L(x^i, \dot{x}^i), \quad (\text{Cf. § 28})$$

esto nos dice que el vector normal  $\frac{\partial n}{\partial x'^1}$ , en el sentido de la óptica ordinaria (1), correspondiente a un rayo luminoso que pase por  $(x^1)$  en la dirección y sentido  $(\dot{x}^1)$ , tiene la misma dirección y sentido que éste ( $V_0 + \eta c^2 < 0$ ), ya que

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial x'^1} &= \frac{c}{V_0 + \eta c^2} \frac{\partial L}{\partial x'^1} = \frac{c}{V_0 + \eta c^2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^1} = \\ &= \frac{c}{V_0 + \eta c^2} u_i. \end{aligned}$$

Al pronto, este resultado parece un tanto paradójico ante el hecho de que en la óptica ordinaria un vector tangente al rayo luminoso y el vector normal asociado son distintos. Pero este ser distintos es consecuencia de interpretar las dos ternas  $(x^1)$ ,  $\left(\frac{\partial n}{\partial x'^1}\right)$  como componentes de vectores en el sentido elemental de la geometría euclídea.

En rigor,  $x^1$  es un vector analítico contravariante, y  $\frac{\partial n}{\partial x'^1}$  un vector analítico covariante (2), y claro está que la comparación de uno y de otro no es posible sin la introducción de una métrica  $g_{ik}$  en el espacio; según sea ésta, así será la relación entre los vectores geométricos individualizados por aquellas ternas de números, vectores que juzgamos susceptibles de estar determinados, indistintamente, por vectores analíticos covariantes o contravariantes. En el esquema geométrico euclídeo, el rayo luminoso es *transversal* a la superficie de onda, el vector normal—de ahí su nombre—perpendicular a la misma.

También en el esquema finsleriano el vector  $\frac{\partial n}{\partial \dot{x}^1}$  es ortogonal a la superficie de onda; pero con él lo es a la vez el rayo luminoso. Y la razón de ello es obvia: en el espacio de Finsler determinado por el

(1) HERZBERGER, pág. 9.

(2) Cf. § 1, nota.

problema de variación  $\delta \int L(x^i, dx^i) = 0$ , la noción de transversalidad a que éste da lugar coincide con la de ortogonalidad.

Otra interpretación cabe todavía: en el sistema canónico que deriva de la función  $F$  (§ 29), el impulso conjugado,  $p_i$ , de la coor-

nada  $x^i$  es  $p_i = \frac{\partial F}{\partial x'^i}$ , igualdad ésta que se puede escribir

$$p_i = \frac{F}{\partial x'^i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x'^i \partial x'^k} x'^k = g_{ik} x'^k = g_{ik} \frac{x^k}{L(x, x)} = u_i;$$

luego  $u_i$  coincide con el impulso conjugado de  $x^i$ .

35. — En el § 18 vimos que la traslación de un vector a lo largo de un ciclo infinitesimal subordinaba en el espacio afín tangente en el punto de partida  $P$  una homografía vectorial. Si efectuamos el desarrollo del ciclo en este espacio, el ciclo en general no se cierra, sino que obtenemos como punto homólogo del  $P$  en el desarrollo dos puntos, el  $P$  y el  $P'$ , imagen éste de  $P$  concebido como punto final del ciclo en el espacio. La correspondencia entre el cuerpo de vectores en  $P$  y el de sus trasladados a  $P'$  en el desarrollo, es el producto de una traslación y una homografía vectorial infinitesimal. Para que la primera se anule es necesario y basta que sea cero el tensor de torsión

$$S^i_{jk} = \frac{1}{2} (\Gamma_{jk} - \Gamma_{kj}),$$

es decir, que la conexión afín sea simétrica. Los espacios riemannianos, en particular los euclídeos-conformes, carecen de torsión en virtud de la simetría ( $j k$ ) de los símbolos de Christoffel  $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ j k \end{smallmatrix} \right\}$ . En cuanto a la segunda, sabemos ya que se reduce a la identidad siempre y sólo cuando es nulo el tensor de curvatura.

Consideraciones análogas cabe hacer en los espacios de Finsler <sup>(1)</sup>, salvo que en ellos el ciclo no es un ciclo puntual, sino de elementos

<sup>(1)</sup> CARTAN [2], cap. XIII.

lineales. La curvatura aparte, nos interesa aquí en particular la torsión, caracterizada por el tensor

$$A_{h^i k} = g^{im} A_{hmk} = L g^{im} C_{hmk} \quad (1).$$

Dado que  $\|g^{im}\| \neq 0$ , la condición necesaria y suficiente para que el tensor de torsión se anule y con él se reduzca a la identidad la traslación asociada al ciclo de elementos lineales, es que sean nulas las componentes  $C_{hmk}$  definidas en (III.11), simétricas, evidentemente, respecto de los tres índices ( $h m k$ ). En el espacio de Finsler  $D_{em}$ , caracterizado por la función  $L$  (III.14), los valores de dichas componentes son

$$C_{111} = \frac{3}{2} A \sqrt{\sigma} r \left( \frac{\dot{\phi} \dot{z}}{R^3} - \frac{\dot{\phi} \dot{z}^3}{R^5} \right),$$

$$C_{112} = \frac{1}{2} A \sqrt{\sigma} r \left( \frac{\dot{\phi} \dot{r}}{R^3} - \frac{3 \dot{z}^2 \dot{r} \dot{\phi}}{R^5} \right).$$

$$C_{122} = \frac{1}{2} A \sqrt{\sigma} r \left( \frac{\dot{\phi} \dot{z}}{R^3} - \frac{3 \dot{r}^2 \dot{z} \dot{\phi}}{R^5} \right);$$

$$C_{222} = \frac{3}{2} A \sqrt{\sigma} r \left( \frac{\dot{\phi} \dot{r}}{R^3} - \frac{\dot{\phi} \dot{r}^3}{R^5} \right),$$

$$C_{113} = -\frac{1}{2} A \sqrt{\sigma} r \left( \frac{\dot{r}^2}{R^3} + \frac{3 r^2 \dot{z}^2 \dot{\phi}^2}{R^5} \right),$$

$$C_{223} = -\frac{1}{2} A \sqrt{\sigma} r \left( \frac{\dot{z}^2}{R^3} + \frac{3 r^2 \dot{r}^2 \dot{\phi}^2}{R^5} \right);$$

---

(1) CARTAN [2], págs. 13 y 32.

$$C_{333} = -\frac{3}{2} A \sqrt{\sigma} r^3 \frac{(z^2 + r^2)^2}{R^5},$$

$$C_{183} = \frac{3}{2} A \sqrt{\sigma} r^3 \left( \frac{z\dot{\phi}}{R^3} - \frac{r^2 z^2 \dot{\phi}^2}{R^5} \right),$$

$$C_{233} = \frac{3}{2} A \sqrt{\sigma} r^3 \left( \frac{r\dot{\phi}}{R^3} - \frac{r^2 r \dot{\phi}^2}{R^5} \right);$$

$$C_{123} = \frac{1}{2} A \sqrt{\sigma} r \left( \frac{\dot{z}\dot{r}}{R^3} - \frac{3r^2 z \dot{r} \dot{\phi}^2}{R^5} \right).$$

La torsión sólo se anula, pues, en todo  $D_{em}$  cuando es  $A = 0$ , es decir, cuando la lente electrónica es una lente  $D_e$ , una lente de tipo puramente eléctrico. Pero entonces el espacio de la lente no es ya un espacio de Finsler, sino un espacio euclídeo-conforme que se transforma en euclídeo cuando es  $\Phi = C^{te}$ , esto es, en ausencia total de campo. Algo hay en el comportamiento del electrón—e igual diríamos de otro corpúsculo cualquiera dotado de carga eléctrica—que nos evoca esos tres estadios. Imaginemos primero un electrón libre: sus trayectorias, para el observador euclídeo, son rectas; no hay campo, y el espacio es euclídeo. Si ahora entra en juego un campo eléctrico, las trayectorias dejan de ser rectas para transformarse en geodésicas de un espacio curvo; es el espacio euclídeo-conforme que ya estudiamos, cuyo tensor de curvatura es diferente de cero (§ 17). Finalmente, si se superpone al campo eléctrico un campo magnético, las trayectorias son geodésicas de un espacio de Finsler dotado de torsión, y es notable que, a la vez, aparezca en dichas trayectorias, y desde el punto de vista del observador euclídeo, un alabeamiento de *todas* ellás debido precisamente al campo magnético <sup>(1)</sup>.

---

(1) PICHT, pág. 22; BRÜCHE-SCHERZER, pág. 117.

## ÍNDICE BIBLIOGRÁFICO (1)

- ARDENNE, M. von: *Elektronen-Übermikroskopie* (Berlín, Springer, 1940).
- BERWALD, L.: "Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus" (*Math. Zeitsch.*, 1926, 25, 40-73).
- BRILLOUIN, L.: *Les tenseurs en mécanique et en élasticité* (París, Masson, 1938).
- BRÜCHE, E., y SCHERZER, O.: *Elektronengeräte* (Berlín, Springer, 1934).  
— *Geometrische Elektronenoptik* (Berlín, Springer, 1934).
- BUSCH, H.: "Eine neue Methode zur  $\frac{e}{m}$  Bestimmung" (*Phys. Zeitsch.*, 1922, 23, 438-441).
- (\*) "Berechnung der Bahn von Kathodenstrahlen im axialsymmetrischen elektromagnetischen Felde" (*Ann. der Physik*, 1926, 81, 974-993).
- CARTAN, E.: [1] *Leçons sur les invariants intégraux* (París, Hermann, 1922).  
[2] "Les espaces de Finsler" (*Act. Scient. et Ind.*, n.º 79. París, Hermann, 1934).  
[3] "La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés" (*Act. Scient. et Ind.*, n.º 194, París, Hermann, 1935).  
— *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann* (París, Gauthier-Villars, 1928).
- COURANT, R., y HILBERT, D.: *Methoden der Mathematischen Physik*, vol. II (Berlín, Springer, 1937).
- FINSLER, P.: *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen* (Dissert., Göttingen, 1918).
- GLASER, W.: "Über optische Abbildung durch mechanische Systeme und die Optik allgemeiner Medien" (*Ann. der Physik*, 1933, 18, 557-585).
- GOURSAT, E.: *Course d'Analyse mathématique*, vol. III (París, Gauthier-Villars, 1942).

---

(1) Nos limitamos a indicar aquellas obras o memorias a que nos hemos referido en el texto, indicando en general sólo el autor, y que guardan estrecha relación con el tema que hemos estudiado.

- HERZBERGER, M.: *Strahlenoptik* (Berlín, Springer, 1931).
- KOSCHMIEDER, L.: "Die neuere formale Variationsrechnung" (*Jahr. der Deutsch. Math. Verein.*, 1931, 40, 109-132).
- MARIANI, J.: "Sur les limites d'application de la géométrie métrique en physique nucléaire" (*J. Physique*, 1931, 296-306).
- MIRA FERNANDES, A. DE: "Assiomatica degli spazi di elemento lineare" (*Portugaliae Math.*, 1941, 2, 7-12).
- PICHT, J.: *Einführung in die Theorie der Elektronenoptik* (Leipzig, J. A. Barth, 1939).
- SCHERZER, O.: "Über einige Fehler von Elektronenlinse" (*Z. Physik*, 1936, 101, 593-603).
- SCHOUTEN, J. A.: *Der Ricci-Kalkül* (Berlín, Springer, 1924).
- SCHRÖDINGER, E.: "Quantisierung als Eigenwertproblem" (*Ann. der Physik*, 1926, 79, 489, 527).
- WHITTAKER, E. T.: *Analytical Dynamics* (Cambridge University Press, segunda edición, 1917).

## Í N D I C E

	<u>Páginas</u>
INTRODUCCIÓN .....	5
I.— Las ondas de Hamilton en mecánica clásica .....	7
II.— El espacio euclídeo-conforme asociado a una lente electrónica eléctrica.	29
III.— El espacio de Finsler asociado a una lente electrónica electro- magnetostática .....	83
ÍNDICE BIBLIOGRÁFICO .....	107