

**ANÁLISIS DE LOS PROCESOS COGNITIVOS Y DE LAS
INTERACCIONES SOCIALES ENTRE ALUMNOS (16-17) EN LA
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE COMPARAN ÁREAS DE
SUPERFICIES PLANAS. UN ESTUDIO DE CASOS**

Tesis doctoral de Pedro Cobo Lozano
Dirigida por el Dr. Josep M. Fortuny

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals de
la Universitat Autònoma de Barcelona

Enero de 1998

E) Episodio de ejecución

La ejecución se inicia realmente en las intervenciones 20 y 21, donde los alumnos comienzan a aplicar la fórmula del área del triángulo, y continúa en la 33', después del episodio de evaluación local. Damos por terminada la ejecución cuando Laia parece no creerse el resultado que han obtenido (intervención 37) e inicia un proceso de verificación.

En este episodio, Laia comienza a aplicar las fórmulas de las áreas de los triángulos al mismo tiempo que los dos alumnos van identificando simbólicamente los elementos de los triángulos. La ejecución se desarrolla totalmente en cooperación, a pesar de que cada alumno va escribiendo en su folio respectivo.

F) Verificación

El episodio de verificación abarca desde la intervención 38 hasta el final del proceso de resolución y surge como consecuencia de la desconfianza que Laia muestra en el resultado que han obtenido.

La sorpresa que ambos alumnos experimentan, en especial Laia, cuando observan que las áreas de los dos triángulos rayados del enunciado son iguales les lleva a iniciar un repaso de algunos de los resultados locales que han conseguido, de algunos aspectos de la planificación y, en dos ocasiones, de la solución a la que han llegado.

Según sea el tema objeto de diálogo, podemos diferenciar en este episodio cinco partes:

a) Entre las intervenciones 39 y 43, los alumnos observan si la altura del triángulo ADM sobre el lado AM coincide o no con el lado DM.

b) Entre las intervenciones 44 y 48, Jaume pone en duda la relación entre la altura del paralelogramo y la suma de las alturas de los triángulos AMD y ABM sobre los lados AM, y AB, respectivamente, que él mismo había introducido.

c) Entre las intervenciones 49 y 57, los alumnos vuelven a considerar la altura del triángulo ADM sobre el lado AM y a compararla con DM. En este momento apuntan la posibilidad de que este triángulo sea rectángulo.

d) La pausa de la intervención 59 da paso a un proceso más ordenado de verificación, que consiste en que los alumnos leen el enunciado, identifican el objetivo y, a partir de él, repasan la solución que han obtenido. Con este procedimiento de simple repetición, pretenden autoconvencerse de que los triángulos tienen las mismas bases y alturas y, por tanto, la misma área, sin aportar ningún tipo de justificación nueva. Antes de producirse una segunda lectura, Laia desvía brevemente la atención de Jaume hacia una supuesta descomposición del triángulo AMD que no tiene consecuencias (intervención 67).

e) La pausa de la intervención 69 da lugar a una nueva lectura en la que los alumnos, por fin, centran su atención en la consideración de que M es un punto cualquiera de la diagonal. Visualizan las igualdades de bases y alturas de los triángulos rayados del enunciado de la forma: "Estirant cap aquí el punt M" [hacia el vértice C], y observan que la base es común y la altura no varía.

De esas cinco partes que hemos diferenciado en el episodio de verificación, resaltamos tres características que consideramos importantes: la autorreflexión de Jaume sobre la igualdad entre las alturas que propuso en el episodio de exploración; la vuelta a la lectura en dos ocasiones, siguiendo en ambos casos procesos de verificación basados en la repetición de argumentos para justificar la solución que obtienen; y la aceptación de la equivalencia de los triángulos rayados del enunciado del problema, que consiguen a base de mover el punto M a lo largo de la diagonal AC y de visualizar la coincidencia de la base y la igualdad de las alturas.

Si analizamos las intervenciones directivas de ambos alumnos para hacernos una idea del control que cada uno de ellos ejerce sobre el proceso de resolución, observamos que la Laia marca más la dirección del proceso. Para hacer tal afirmación nos basamos en los siguientes hechos: Laia es la alumna que, con sus dudas sobre el resultado que obtienen, genera la verificación que tiene lugar después del episodio de ejecución; en las intervenciones 47 y 49, Laia deja claro que la relación que ha propuesto Jaume ($h=h_1+h_2$) no la han utilizado, zanjando la duda de su compañero sobre la repercusión de esa igualdad en el proceso de resolución; ella inicia la lectura en las dos ocasiones en las que se produce; y ella es también la que, en la segunda de las lecturas, resalta el hecho de que M es un punto cualquiera, dando a entender la posibilidad de que esté situado en cualquier lugar de la diagonal AC, lo que induce a Jaume a asociar esa idea con la de movimiento y a proponer estirar el segmento AM a lo largo de AC.

Si exceptuamos la referencia de Jaume a la relación entre las alturas de los triángulos y del paralelogramo que hace en la intervención 44, pensamos que la actuación de Jaume en este episodio no tiene prácticamente ninguna incidencia en la dirección del proceso, ya que sus intervenciones siempre son consecuencia de las directivas de Laia.

A pesar del protagonismo de Laia a la hora de guiar el proceso de resolución con sus intervenciones directivas, los alumnos no tienen un papel comunicativo definido en este episodio, puesto que alternan intercambios en los que las preguntas sobre los contenidos de intervenciones anteriores corresponden tanto a Laia como a Jaume. Posiblemente eso sea debido a la poca confianza y a las dudas que ambos tienen, sobre todo en la parte del episodio comprendida entre las intervenciones 38 y 57.

Esa situación de dudas y desconfianzas es muy evidente en un intercambio de desacuerdo —intervenciones 54 a 57— en el que los alumnos cambian de opinión en cada intervención. Más que un desacuerdo basado en el mantenimiento de opiniones diferentes, defendidas o no con argumentos, es un desacuerdo que se origina como consecuencia de la ausencia de convicciones propias.

Tras las dos vueltas a la lectura que se producen, los intercambios se construyen a base de repetir los mismos argumentos —igualdad de bases y alturas, después de la primera lectura, y “anar tirant del punt M cap a C”, después de la segunda— para autoconvencerse de la bondad de la equivalencia de las áreas.

8.3.1.3. Características generales del proceso de resolución

a) Papeles comunicativos de los alumnos

Como podemos ver en las Tablas 8.3.1 y 8.3.2, hay bastante igualdad en el número de intercambios de cada tipo que protagonizan cada uno de los alumnos.

La razón de intercambios progresivos respecto al total —29 a 40, considerando los de dos y tres intervenciones— es bastante alta si la comparamos con otros procesos de resolución. Ahora bien, a pesar del carácter local que tienen la mayoría de los intercambios en el amplio episodio de verificación, en el que los alumnos repasan las informaciones introducidas anteriormente, la razón de intercambios que aportan información novedosa en el contexto global del proceso de resolución es también considerablemente alta —16 de 40—, lo que caracteriza a un proceso dinámico, y más si tenemos en cuenta que la inmensa mayoría de dichos intercambios se producen en las 38 primeras intervenciones.

	COOPERATIVO	VALIDACIÓN	PREGUNTA-RESPUESTA	TOTAL
Laia-Jaume	10(5)*	2	0	12(5)
Jaume-Laia	9(5)	1	0	10(5)
TOTAL	19(10)	3	0	22(10)

* Entre paréntesis indicamos los intercambios que aportan información nueva en el contexto global del proceso de resolución.

Tabla 8.3.1. Intercambios de dos intervenciones.

	VALIDACIÓN-CONTINUACIÓN		ACLARATORIO		INTERRUPCIÓN		TOTAL	
	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.
Laia-Jaume-Laia	1(1)*	2	3(2)	3	1(0)	0	5(3)	5
Jaume-Laia-Jaume	3(2)	1	2(1)	2	0	0	5(3)	3
TOTAL	4(3)	3	5(3)		1(0)	0	10(6)	8

* Entre paréntesis indicamos los intercambios que aportan información nueva en el contexto global del proceso de resolución.

Tabla 8.3.2. Intercambios de tres intervenciones

b) Esquema de la sucesión de episodios

En los párrafos siguientes resaltamos los aspectos que nos parecen más relevantes del proceso de resolución desde la perspectiva de una visión global del mismo.

Los alumnos sólo identifican el enfoque que sigue la línea 3 —“aplicación de fórmulas”— del espacio básico del problema del paralelogramo (Capítulo 5, p. 100)—, que consiste en expresar las fórmulas de las áreas de los triángulos que quieren comparar y buscar relaciones entre sus elementos (bases y alturas).

A pesar de que el desarrollo de este enfoque algebraico no exige necesariamente una identificación simbólica de los elementos de los triángulos (véase el proceso de resolución

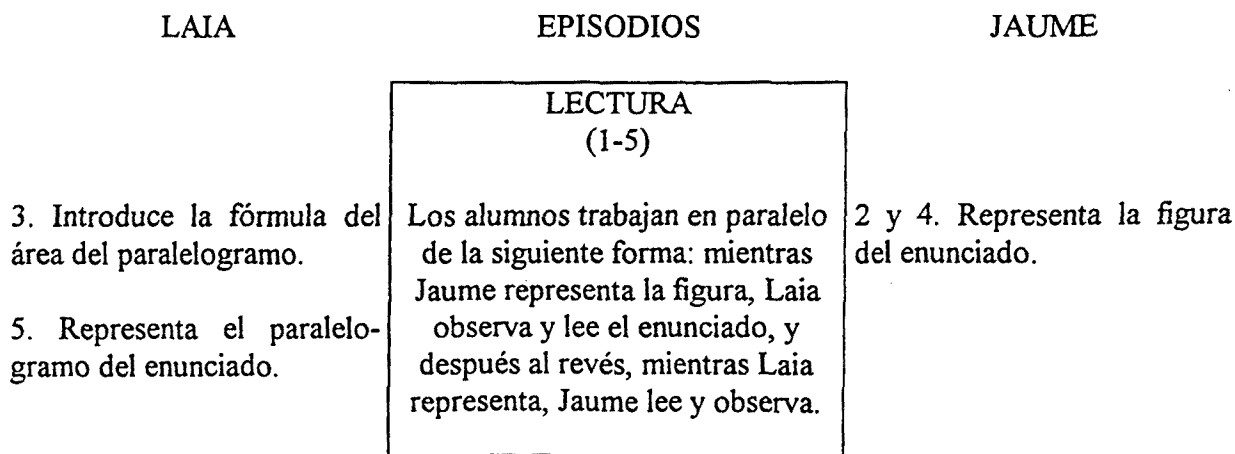
de este mismo problema llevado a cabo por Pere y Lluís, apartado 8.4.1.2), Laia y Jaume modifican en dos ocasiones la representación simbólica de las alturas: en la primera, representan por h_1 a la altura del triángulo ADM sobre el lado AM y, por h_2 , la del ABM sobre AB; y después de la intervención 29, representan la altura del triángulo ABM sobre AM mediante h_1 y la del ADM sobre AM mediante h_2 . Eso supone un cierto descontrol si tenemos en cuenta que en las figuras que hacen se mantienen hasta el final ambas representaciones simbólicas.

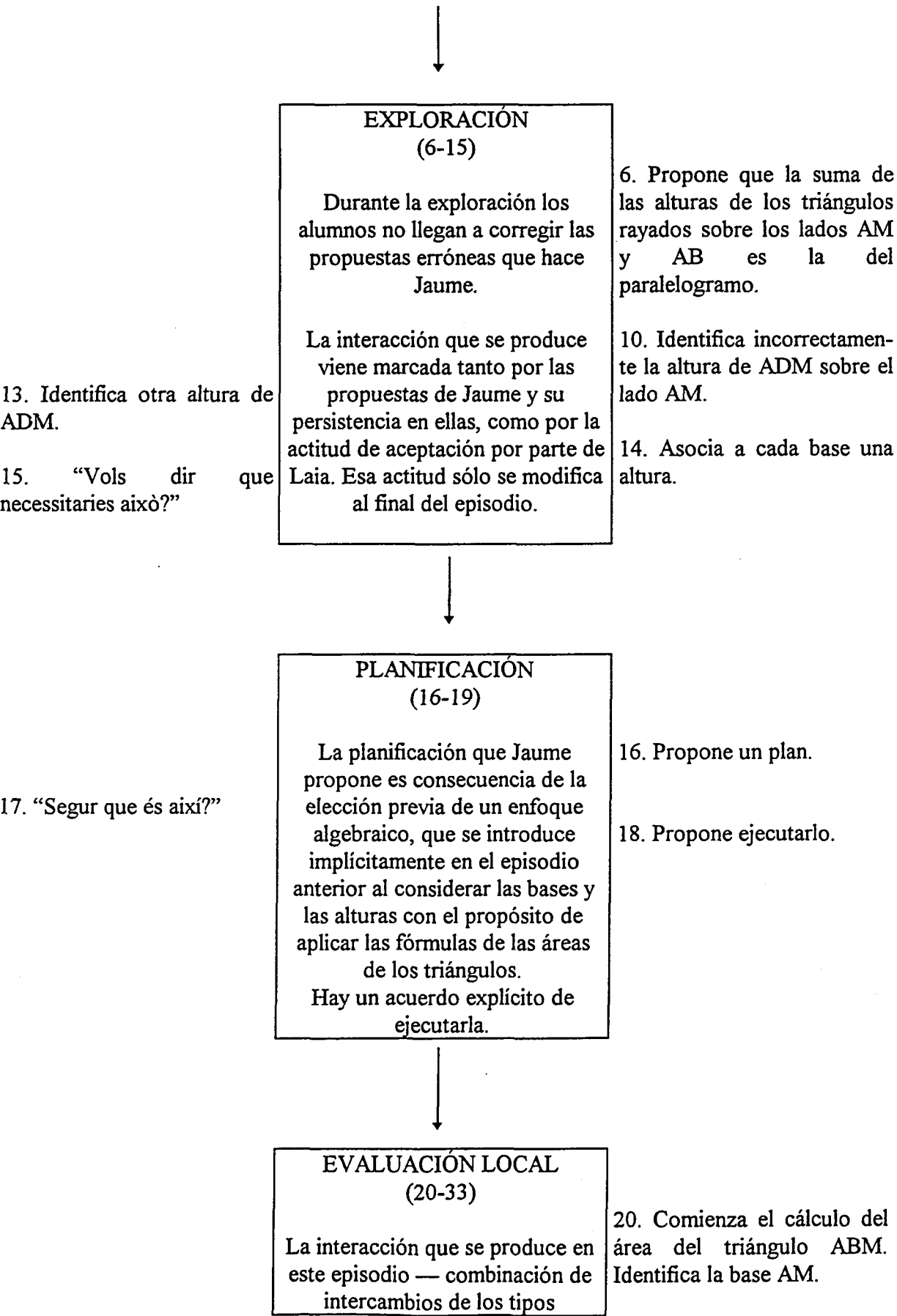
Por lo que se refiere a la introducción de información nueva que resulte relevante para el desarrollo del proceso de resolución, consideramos que las intervenciones 23 y 27 de Laia, en las que identifica la altura de ABM sobre AM y expresa la igualdad de las alturas de los triángulos que se comparan, son los puntos clave que hacen que los alumnos encuentren rápidamente una solución. El resto del proceso de resolución está condicionado por la falta de un razonamiento que justifique, sobre todo, la igualdad de las alturas. Esa falta de argumentación hace que los alumnos duden del resultado que obtienen. La característica general del proceso de resolución es que los alumnos introducen informaciones nuevas y no tienen necesidad de justificarlas de otra forma que no sea la simple apreciación visual de los elementos de la figura.

No hemos observado en el proceso de resolución referencias a conceptos concretos, si exceptuamos cuando Laia, en la intervención 27, asocia la idea de altura a la de perpendicularidad. Ahora bien, gran parte del proceso de resolución se centra en el reconocimiento de las alturas de los triángulos. Esa dedicación puede ser la causa de la corrección de las deficiencias que ambos alumnos tienen de la representación de las alturas de un triángulo (véanse en los apartados 9.3.1 y 9.3.2 la comparación que hacemos entre los resultados de la prueba inicial y final).

También nos llama la atención de este proceso de resolución la rapidez con que los alumnos consiguen una solución del problema —aproximadamente 5 minutos y medio—, en comparación con la duración del episodio de verificación —aproximadamente 6 minutos—. Esta verificación —larga si la comparamos con la duración de los demás episodios— está justificada si pensamos en el tipo de argumentación que utilizan los alumnos, basada en apreciaciones visuales, y en la dificultad que supone, en tales circunstancias, dar por buena la equivalencia de los triángulos ABM y AMD.

ESQUEMA GRÁFICO DE LA SUCESIÓN DE EPISODIOS





- 23. Identifica la altura desde B hasta AM, en el triángulo ABM.
- 27. Asocia la altura con la perpendicular e identifica la igualdad de las dos alturas de los triángulos rayados sobre el lado común AM.
- 31. Interrumpe a Jaume para asociar DM con una altura de ADM.

aclaratorio, validación-continuación e interrupción— es consecuencia de que las aportaciones que hace Laia están en contradicción con las que realizó Jaume en el episodio de exploración.

A Jaume se le presenta una oportunidad de aprendizaje relacionada con la identificación y representación de alturas de triángulos.

- 22. “Com seria l’altura?”



- 33'. Expresa el área del triángulo ABM.
- 35 y 37. Expresa las áreas de los triángulos ABM y AMD.

EJECUCIÓN
(33'-37)

La ejecución se inicia realmente en las intervenciones 20 y 21 en las que los alumnos comienzan a aplicar la fórmula del área del triángulo y, tras la revisión local, se reanuda en la 33'. La ejecución se desarrolla en cooperación.

- 34. Simboliza la base AM.
- 36. Expresa el área de los triángulos ABM y ADM. Concluye que son iguales.



- 41. Asocia la altura del triángulo ADM con MD.
- 52 y 54. Desacuerdo sobre la rectangularidad del triángulo

VERIFICACIÓN
(38-76)

El episodio de verificación surge de la desconfianza de Laia en el resultado que han obtenido.

Laia marca la dirección del proceso de resolución. En cambio, si exceptuamos la referencia de Jaume a la relación entre las alturas de los triángulos y del paralelogramo, la actuación de Jaume no tiene prácticamente

- 44. Insiste en la igualdad de las alturas y rectifica la idea que introduce en la intervención 6.
- 53 y 55. Desacuerdo sobre la rectangularidad del triángulo

AMD.	ninguna incidencia en la dirección del proceso de resolución.	AMD.
57'. Inicia la lectura del enunciado.	Vuelven a la lectura del enunciado y lo hacen independientemente durante casi un minuto. La lectura no tiene incidencia en el proceso ya que vuelven a dialogar sobre la igualdad de las áreas.	
69'. Inicia de nuevo la lectura del enunciado. Se fija en que M es un punto cualquiera.	Vuelven a la lectura, por separado durante 30''. Ahora sí que tiene incidencia en el proceso, ya que detectan la variabilidad del punto M.	70. Propone la idea de desplazar el punto M hacia el C.

8.3.2. Actuación de Laia y Jaume en la resolución del problema del hexágono

8.3.2.1. Transcripción del proceso de resolución

1. Laia: [Lectura] *Dibuixem-lo!*
2. Jaume: *Dibuixem l'hexàgon.*

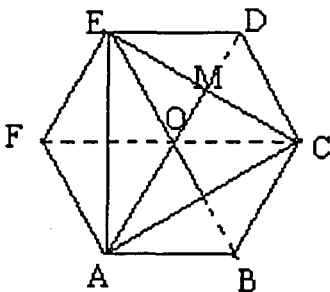


Figura 8.3.7

3. Laia: [Representa la Figura 8.3.8].
4. Jaume: [Representa un hexágono y une A con D].

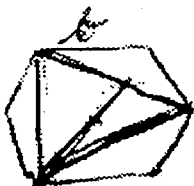


Figura 8.3.8

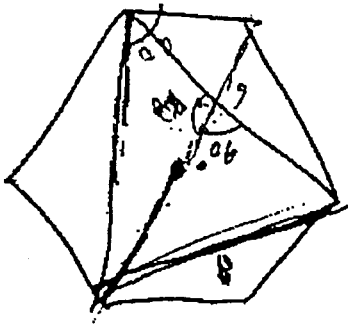


Figura 8.3.9

5. Laia: *Un sí, un altre no* [lee].
6. Jaume: *Aquest vèrtex amb aquest?* [traza las líneas AD y BE], *o com?* [indicando dos vértices opuestos del hexágono], *o aquest?*
7. Laia: *Un sí i un altre no, jo he posat aquest* [A] *sí, aquest* [B] *no, aquest* [C] *sí.*
8. Jaume: *Sí, sí* [tacha el hexágono que había representado y, después de fijarse en Laia, representa la Figura 8.3.9].
9. Laia: *Surt un triangle, ara hem de buscar la relació entre les àrees. Àrea de l'hexàgon era... al perímetre per l'apotema dividit entre 2* [escribiendo: $H = \frac{\text{perímetre} \cdot \text{apotema}}{2}$].
10. Jaume: *Sí, què és l'apotema?*
11. Laia: *És la recta des del mig* [centro del hexágono] *fins al vèrtex* [A].
12. Jaume: *Ah val, des del centre fins al vèrtex?* [OA].
13. Laia: *Sí, però és que ho tenim mal dibuixat això d'aquí* [se refiere a la figura], *això ha de ser equilàter* [indica el triángulo ACE], *no?*
14. Jaume: *Sí / àrea del triangle, base per altura partit per 2.*
15. Laia: *I la base?, com és?* [representa un triángulo equilátero, Figura 8.3.11]. *Lavors si és equilàter...* [representa sus tres alturas] */ Ah!, això ja està aquí, això és l'apotema* [OA, identifica en su triángulo equilátero lo que ha llamado apotema], *no?*
16. Jaume: *Sí.*
17. Laia: *L'apotema és la... no, res.*
18. Jaume: *És mitja altura* [compara OA con AD].
19. Laia: *Ah sí!, no arriba a ser mitja.*
20. Jaume: *Sí, està al centre, no?, dius que serà fins aquí* [indica OA]. *Des d'aquí fins aquí* [OA] *hi ha el mateix que d'aquí a aquí* [OD].
21. Laia: *Ah és clar!, vale, ah!, però això no és la meitat de l'altura* [indica OM].
22. Jaume: *Ah no!, que ho he fet fins aquí* [indicando OD] / [da la vuelta al folio y se mira el hexágono de otra forma] <pausa(12)>
23. Laia: *Comencem a posar..., a calcular l'àrea de l'hexàgon?, o no?*
24. Jaume: *Sí, però com?, no tenim res* [al mismo tiempo que continúa observando el hexágono al revés]. *I si seguim això, per aquí* [continuant el segmento OM hasta D] *queden dos trapezis d'aquests, no?* [representa dos trapezios], *queda així i així* [hace la Figura 8.3.10] <pausa(7)>

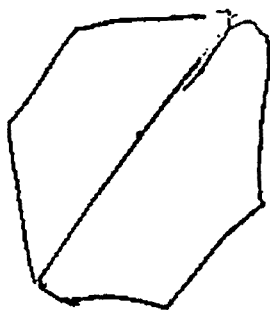


Figura 8.3.10

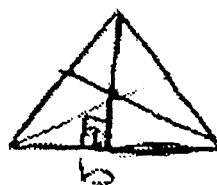
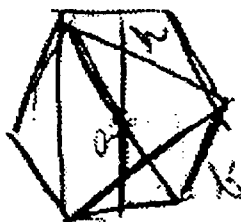


Figura 8.3.11

25. Laia: [Observa y no dice nada]. *Ah!, això és un triangle rectangle* [indica AMC de la Figura 8.3.9 representada por Jaume], *llavors podem saber..., saps el que et dic?*
26. Jaume: *Si, aquest és 90* [indica el ángulo AMC].
27. Laia: *Ah!, llavors l'altura* [AM] *serà igual a la hipotenusa, però això no sabem què és* [EC].
28. Jaume: *Aquest costat d'aquí* [señala correctamente la hipotenusa, AE, del triángulo AME] <pausa(47)>
- 28'. Jaume: *Què se t'acut?*
29. Laia: *No, és que jo començaria a donar números, no sé. A veure, la base del triangle seria això* [en el triángulo que ha dibujado escribe b, Figura 8.3.11], *totes són iguals* [se refiere a los lados], *l'altura és això* [indica la altura perpendicular a b, Figura 8.3.11]. *El problema és això* [indica uno de los lados inclinados del triángulo, Figura 8.3.11].
30. Jaume: *Si, aquest tros d'aquí també* [señala el segmento OM].
31. Laia: *Però és que això és...* [indica el triángulo ACE], *no vols dir que la suma d'això* [AB] *i això* [BC] *dóna això* [AC]? *no, res. No, no dóna res.*



<30 s>

Figura 8.3.12

32. Jaume: [Señala los segmentos de la Figura 8.3.9].
33. Laia: [Representa un nuevo hexágono, Figura 8.3.12, no mira lo que hace Lluís].
34. Jaume: [Sigue con el folio al revés] *Tenim el triangle d'aquí* [ADC], *aquest és 90* [indica el ángulo ACD]. *Això d'aquí* [AD] *és dues vegades l'apotema i llavors podem trobar el costat* [AC].
35. Laia: *Així ja tenim la...*
36. Jaume: $\equiv$ *La base* [se refiere a la base del triángulo ACE]. *Això d'aquí és 90, no?, sí,* [indica el ángulo AMC].
37. Laia: *Llavors això seria..., ah!, d'aquí a aquí seria 90* [indica ACD].
38. Jaume: *Sí, ah!, això és 90, això* [indica el ángulo ACD].
39. Laia: *Sembla que aquest també* [AMC], *però tant és, vale!* [cada uno trabaja, por separado, sobre sus dibujos respectivos].
40. Jaume: [Representa otro hexágono regular, Figura 8.3.13 y el triángulo ACE].

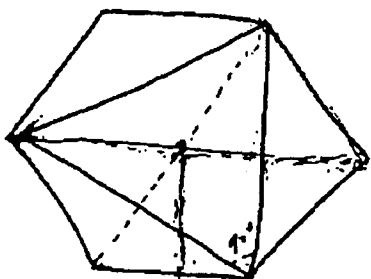


Figura 8.3.13

<64 s>

41. Laia: [Traza líneas, las recalca y pone las letras en la Figura 8.3.12]. *Què fem?*
42. Jaume: *Això és 90* [ángulo ACD, Figura 8.3.13, ignora la pregunta de Laia].
43. Laia: *Aquest b d'aquí és tot això* [AB] [hablan por separado]. *El perímetre...* [escribe: "perímetre 6b"].
44. Jaume: *L'apotema és això d'aquí a aquí o d'aquí a aquí* [indica desde el centro hasta los vértices del hexágono].
45. Laia: *Sí, és igual, com és regular. No sé si va al vèrtex o va aquí al mig* [se refiere al centro del lado].
46. Jaume: *Em sembla que va al mig, eh que sí?, fins aquí.*
47. Laia: *Sí, al mig.*
- <52 s> [Laia recalca los segmentos de la Figura 8.3.12].
48. Jaume: [Representa las diagonales AD y CF].
49. Laia: *És que si fem això* [se refiere a aplicar la fórmula del área del hexágono], *representa que tenim dues incògnites, tenim aquest* [AB] *i després tenim l'apotema i haviem de trobar una relació entre les dues coses.*
50. Jaume: *Sí /*
51. Laia: *I si de moment fem això amb les dues incògnites i després busquem això* [se refiere a las fórmulas de las áreas del hexágono y del triángulo] *a veure, què passa.*
52. Jaume: *Vale, fes!*
53. Laia: *És per fer alguna cosa. Àrea és 6 b, b és això* [el lado del hexágono], *per apotema partit per 2.* [escribe: $\text{Àrea H.} = \frac{6b \cdot a}{2}$]. *Això és l'àrea. I ara hem de buscar l'àrea d'aquest* [ACE] *que deu ser la base...* [señala los lados del triángulo sin encontrar ninguna forma de expresarlos].
54. Jaume: *I així?, mira. L'apotema has dit que era això, no?, d'aquí a aquí* [OP, la representa y la recalca].
55. Laia: *Això* [OP] *és l'altura del trapezi si t'hi fixes, i si busquem...?*
56. Jaume: *O sigui, que l'altura del trapezi és l'apotema* [representa el trapezio de la Figura 8.3.14].

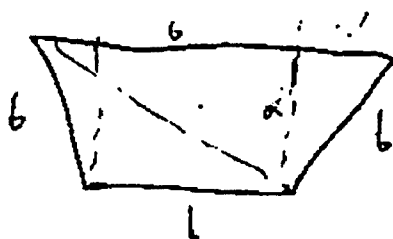


Figura 8.3.14

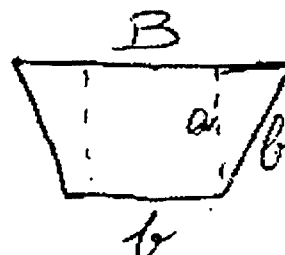


Figura 8.3.15

57. Laia: *Sí* [representa també un trapezi, Figura 8.3.15], *llavors això és b* [indica un lado inclinado del trapezio] *i això també, b* [indica la base pequeña del trapezio].
58. Jaume: *Això és b, això és b* [pone "b" en todos los lados del trapezio menos en la base grande]. *Això és...* [indica la base grande] *i l'àrea del trapezi, com és?, base gran més base petita partit per 2 per l'altura* [escribe: $A = (B+b) \cdot h/2$].

59. Laia: *Això és base gran, la base gran..., la base gran és igual que..., no és igual a l'altura.*
60. Jaume: *A l'altura del triangle menys això* [indica DM, debería decir más en lugar de menos] /
61. Laia: *És a, l'altura és a* [se refiere a la altura del trapezio], *és que això* [DM] *ho podem trobar perquè si tenim a i b podem trobar això* [DM] *aplicant el teorema de Pitàgoras, no?, però és clar, què són a i b.*
62. Jaume: *Trobar això* [se refiere a lo mismo, DM].
63. Laia: [Insiste en aplicar el teorema de Pitàgoras]. *És que tot són lletres* [trabaja en el triángulo rectángulo DMC, Figura 8.3.15] <pausa(33)>
64. Jaume: *A veure, aquí* [se refiere al trapezio, Figura 8.3.14] *hi ha dos triangles rectangles, aquest* [AMC] *i un altre per aquí sobre* [AME], *llavors amb això podem trobar-ho, o no?* [señala DM].
65. Laia: *És això, que estem buscant massa coses. Podem fer $b^2 = a^2 + c^2$ i $b = \sqrt{a^2 + c^2}$, i ara tenim..., però què?*
66. Jaume: [Mientras tanto Jaume representa dos alturas del trapezio, Figura 8.3.14]. *I si fem això.*
67. Laia: *Llavors pots fer $(a^2 + c^2)/2$, mira!, ah no!, i després la b és..., ah!* [Jaume intenta hablar mientras mira lo que hace Laia], *ja està!, mira, més 2c, no?*
[escribe: $At = \frac{(\sqrt{a^2 + c^2} + 2c)\sqrt{a^2 + c^2} \cdot a}{2}$].
- <48 s>
68. Jaume: [Fijándose en lo que hace Laia]. *I ara, potser, aïllar, algun sistema o alguna cosa.*
69. Laia: *Ara tens aquest* [fórmula del área del hexágono: Área hex: $6b \cdot a/2$].
70. Jaume: *També és b.*
71. Laia: *b també, és la mateixa b, em sembla* [se refiere a las dos fórmulas, escribe :
Área H. = $\frac{6\sqrt{a^2 + c^2} \cdot a}{2}$], *em sembla que ens estem liant, eh?*
72. Jaume: *Sí* [rien].
73. Laia: *I ara què?, ah!, ja tenim dues incògnites, ja tenim un sistema, ara podem seguir treballant, i amb això què trobarem? Ah!, la b què és?*
74. Jaume: *La b és això* [indica un lado del hexágono].
75. Laia: *La b és cada costat, =és cada costat=, sí /*
76. Jaume: *=és cada costat=, la proporció l'aconseguiríem entre això i això* [lado del triángulo ACE y del hexágono].
77. Laia: *A veure, a veure, i si tornem a repassar això, per a mi que això no...* [se refiere a todos los desarrollos que han hecho hasta ahora].
78. Jaume: *Tornem a començar, va!* [vuelve a empezar a representar el hexágono regular y el triángulo de dentro, Figura 8.3.16].
- <26 s>
79. Laia: [Empieza también a representar la Figura 8.3.17].
80. Jaume: *L'apotema era d'aquí a aquí* [OP], *no?, que és el mateix que...*
81. Laia: *= Ah!, d'aquí a aquí hi ha el mateix que d'aquí a aquí, no?* [indica OM y MD], *llavors seria l'apotema seria, seria...*
82. Jaume: *I si agafem..., que és el mateix d'aquí a aquí que d'aquí a aquí* [indica los radios del hexágono].

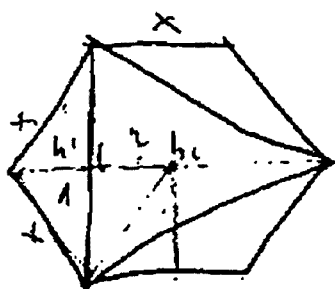


Figura 8.3.16

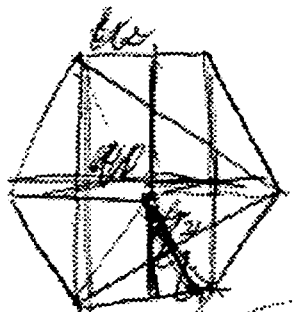


Figura 8.3.17

83. Laia: *D'aquí a aquí que d'aquí a aquí, és clar!, ja tenim que..., què tenim? / no ens serveix de res això / Això [OM] sabem que és l'apotema dividit entre 2 i això serà...*
84. Jaume: *Què és l'apotema partit per 2?*
85. Laia: *Això [OM], suposo que és la meitat [se refiere a la mitad del radio del hexàgon]. Ah!, això és un rombe, mira és un rombe! [indica ABCO, dándole la vuelta al folio].*
86. Jaume: *Fem aquesta fins aquí [representa OC].*
87. Laia: *Jo vaig trobant més figures aquí [indica la representación que ha hecho].*
88. Jaume: *Vols dir que l'apotema no anava aquí? [indica el centro del lado], no anava aquí [al vèrtex], anava al mig, jo l'he dibuixat aquí [al centro del lado] /*
89. Laia: *Apa!, és clar, sí, sí, sí.*
90. Jaume: *Bueno, és que jo no sé que és l'apotema, eh?*
91. Laia: *Sí, sí*
92. Jaume: *Queda enmig del costat [indica OP. Trabaja por separado].*
93. Laia: *Ha de baixar al costat [representa dos segmentos perpendiculares que pasan por el centro y dividen al hexàgon en 4 trapezios iguales, Figura 8.3.17], ens quedem amb quatre trapezios, mira, ens quedem amb dos triangles [EDM y DMC], això seria b [lado del hexàgon].*
- <47 s>
94. Jaume: *Aquest triangle i aquest [ACE y CDE] tenen la mateixa base, no?*
95. Laia: *Sí.*
96. Jaume: *I l'altura [AM] d'aquest [ACE] és tot això [indica la diagonal AD] menys aquest tros d'aquí [MD].*
97. Laia: *Sí [observa].*
98. Jaume: *A veure, l'àrea del petit [CDE], posem triangle 1 i 2 [triàngulo ACE]. El de l'1 és la base aquesta... [CE].*
99. Laia: *Que seria b [representa b en la Figura 8.3.16].*
100. Jaume: *No!, és això [señala el lado del triàngulo], bueno b, sí, aquesta h_1 [altura de CDE] i h_2 [altura de ACE], A_1 és igual a $b \cdot h_1 / 2$ i la del triangle 2, és la base, igual, per l'altura 2 partit per 2, A_2 és igual a $b \cdot h_2 / 2$, i ara..., ara podem aïllar...*
101. Laia: *És clar, i aquesta [A1] la multipliques per 3 i sumes això [àrea del triàngulo ACE] i et dona tota l'àrea [la del hexàgon].*
102. Jaume: *Ah vall!, ja està, ara fem, o sigui, l'àrea del 2, que és... àrea del 2, que és..., no!, l'àrea de tot l'hexàgon és l'àrea d'aquest, el 2...*

- 103.Laia: *És que tens costats, hem de posar costats, hem de posar costats, eh?, aquests són costats, això és x , això és x , això és x* [pone “ x ” en los lados del hexágono].
- 104.Jaume: *No calen* [los lados] *per fer l'àrea, és base per altura i la base sempre és b* [se refiere a EC], *és tres vegades la base d'aquest* [CDE] *per la d'aquest* [ACE].
- 105.Laia: *Què?*
- 106.Jaume: *Sí, perquè d'aquest n'hi ha un* [ACE] *i d'aquest* [CDE] *n'hi ha tres.*
- 107.Laia: *Més la d'aquest* [ACE].
- 108.Jaume: *Sí, sí, més la d'aquest. L'àrea de l'hexàgon és tres base per l'altura aquesta* [h₁] *partit per 2 més...* [escribe: $A_{\text{hex.}} = \frac{3 \cdot b \cdot h_1}{2} + \frac{b \cdot (2 \cdot h_1)}{2}$].
- 109.Laia: [Se fija en lo que escribe Jaume y escribe lo mismo].
- 110.Jaume: *Ara d'aquí es pot aïllar la... b és la mateixa / per exemple d'aquí* [$A_1 = b \cdot h_1 / 2$], *la base és $2A_1$ per h_1 i ara, no sé, i ara substituïm la base que hem trobat aquí* [en $A_2 = b \cdot h_2 / 2$].
- 111.Laia: *Però és que tenim moltes incògnites A_1 i A_2 i la relació que hi ha entre l'àrea d'aquesta* [A_1] *i d'aquesta* [A_2] *és... no la sabem.*
- 112.Jaume: *Ah bueno!, d'aquí a aquí* [OD] *ha ser doble, si això* [CE] *passa per la meitat, la altura aquesta* [AM] *és dues vegades la d'aquesta* [MD], *llavors on hi ha h_2 posem $2h_1$. En comptes de h_2 , $2h_1$, i aquí també, b per $2h_1$* [escribe: $A_2 = b \cdot 2h_1 / 2$].
- 113.Laia: [Escribe: $A_{\text{hex.}} = \frac{3 \cdot b \cdot h_1 + b \cdot 2h_1}{2}$].
- 114.Jaume: *Ara sí que podem aïllar la b ; b és $2A_1$ per h_1 i ara aquí A_2 i substituïm la b aquí, $2A_1$ per $2h_1$ trobarem la relació entre aquesta àrea i aquesta* [se refiere a la de los triángulos ACE y CDE], *entre aquestes dues, no?*
- 115.Laia: [Acaba de despejar la b en las expresiones: $A_1 = \frac{b \cdot h_1}{2}$; $A_2 = \frac{b \cdot h_2}{2}$; $b = \frac{2A_1}{h_1}$; $b = \frac{2A_2}{2h_1}$]. *Sí, sí* [repasa las operaciones], *com has fet això?*
- 116.Jaume: [Repasa las expresiones y rectifican].
- 117.Laia: [Escribe: $\frac{2A_1}{h_1} = \frac{2A_2}{2h_1}$]. *I ara tenim dos..., ah no!* <pausa(86)>. *Però és que aquí podem calcular l'àrea de l'hexàgon en funció de....* <pausa(65)>. *És que aquí* [se refiere a la expresión de la intervención 109] *podem calcular l'àrea de l'hexàgon en funció..., de què?, no.*

[Tiempo total: 25m 40s].

8.3.2.2. Microanálisis del proceso de resolución

A) Episodio de lectura

El trabajo en paralelo de los alumnos, desde casi el comienzo del episodio, favorece el error que Jaume comete al intentar interpretar gráficamente el enunciado del problema. Él desbloquea su situación preguntando a Laia (intervención 6) sobre la forma de unir los vértices para obtener el triángulo CAE.

La rectificación de Jaume y la introducción de la fórmula del área del hexágono, que Laia hace en la intervención 7, marcan el inicio del episodio de análisis.

B) Episodio de análisis

La finalidad que persiguen los alumnos en este episodio es expresar las fórmulas de las áreas del hexágono —intervención 9— y del triángulo —intervención 14— para compararlas. Tratan de conseguir esta comparación buscando relaciones entre los elementos de las figuras —relacionan la apotema del hexágono con la altura del triángulo (intervenciones 17 a 22)—. Estamos, pues, ante un enfoque similar al que los alumnos identifican en el proceso de resolución anterior.

A pesar de que las intervenciones 9 y 14 nos indican claramente la dirección del proceso de resolución, el resto del episodio parece un cúmulo de despropósitos, tanto por la revisión de conocimientos que los alumnos hacen, como por el diálogo que se produce entre las intervenciones 17 a 22.

En la revisión de conocimientos (intervenciones 10 a 13), que se corresponde con una breve evaluación local inmersa en el episodio de análisis, Laia identifica de forma errónea la apotema del hexágono.

Entre las intervenciones 17 y 22, hay un desacuerdo entre los alumnos que se origina como consecuencia de una confusión, ya que Jaume se refiere a AD como si fuera la altura del triángulo ACE y la compara con el segmento OA, al que llama apotema del hexágono, mientras que Laia piensa que su compañero se está refiriendo al segmento OM.

En las respuestas al ítem 5 de la prueba inicial, habíamos detectado el desconocimiento de ambos alumnos sobre lo que es la apotema de un polígono regular. En aquella situación, Jaume asociaba la apotema del pentágono con una de sus diagonales y Laia ni siquiera era capaz de identificar la fórmula del área del pentágono regular. Esta no identificación contrasta ahora con el contenido de la intervención 9, en el que Laia expresa correctamente la fórmula del área del hexágono regular. Pensamos que esa incoherencia puede ser debida a las dificultades que presenta el ítem 5, pues no es lo mismo presentar un pentágono que un hexágono, y menos si aquél está inmerso en un amplio conjunto de figuras. Además, en el ítem 5, se pueden asociar al pentágono dos fórmulas, de las que Laia ya había identificado una.

En cuanto a los papeles comunicativos de los alumnos, entendemos que Laia asume el papel de ir introduciendo información nueva (intervenciones 9, 11 y 13) —fórmula del área del hexágono, lo que es la apotema y la identificación del triángulo ACE como equilátero—, en la intervención 9, por iniciativa propia, y, en las 11 y 13, como consecuencia de las preguntas de Jaume. Entre las intervenciones 14 y 16 los alumnos cambian los papeles.

C) Episodio de exploración

La pregunta de Laia en la intervención 23 —“Comencem a posar..., a calcular l'àrea de l'hexàgon?”— parece que orientará el proceso de resolución hacia una ejecución que aplique de inmediato las fórmulas introducidas en el episodio anterior, pero las dudas de Jaume —“Sí, però com?, no tenim res” (intervención 24)— lo desvía hacia una exploración en la que los contenidos de las intervenciones están relacionados con identificaciones de figuras —trapezios y triángulos rectángulos— y con propuestas que acaban siendo

abandonadas casi de forma inmediata. La poca profundización de los alumnos en sus propuestas convierte el episodio en una búsqueda aleatoria de información sin una finalidad clara.

Las pausas de las intervenciones 22, 24 y 28, y el trabajo en paralelo de las intervenciones 31 a 34, dividen al episodio en cuatro partes, que comienzan con las intervenciones siguientes: la 23, que inicia el episodio; la 25, en la que Laia introduce la información de que AMC es un triángulo rectángulo, lo que da paso a un breve diálogo cooperativo que acaba obviándola; la 28' —“Què se t'acut?”—, que precede a la importante sugerencia de Laia de particularizar —“Es que jo començaria a donar números” (intervención 29)—, que se abandona casi al mismo tiempo que se propone; y la 34, en la que Jaume identifica el triángulo ACD como rectángulo.

Pensamos que Laia abandona su propia propuesta de particularización, ya que la hace sin confianza y sin darle importancia, de manera que ella misma desvía la atención de Jaume al continuar su intervención identificando relaciones entre los elementos del triángulo ACE, sin ser consciente de la importancia que puede tener la asignación de valores concretos a los elementos de las figuras.

Estamos, pues, ante un episodio del que resaltamos tres características: después de las pausas y del trabajo en paralelo, los alumnos introducen información nueva sobre la que no profundizan y que resulta irrelevante para el desarrollo del proceso de resolución; Laia apunta lo que sería un enfoque que podría conducir a una solución por el camino de la particularización, pero su desconfianza en él hace que se abandone casi de inmediato; y hay una alternancia de los papeles comunicativos de los alumnos por lo que se refiere a la realización de preguntas y a la continuación cooperativa del diálogo.

D) Episodio de evaluación local-1

Los alumnos no acaban sacando provecho de las aportaciones que hacen en el episodio anterior. La situación de bloqueo en la que se encuentran les lleva a repasar, por separado —entre las intervenciones 39 y 44 (Figura 8.3.18)—, algunas de dichas aportaciones.

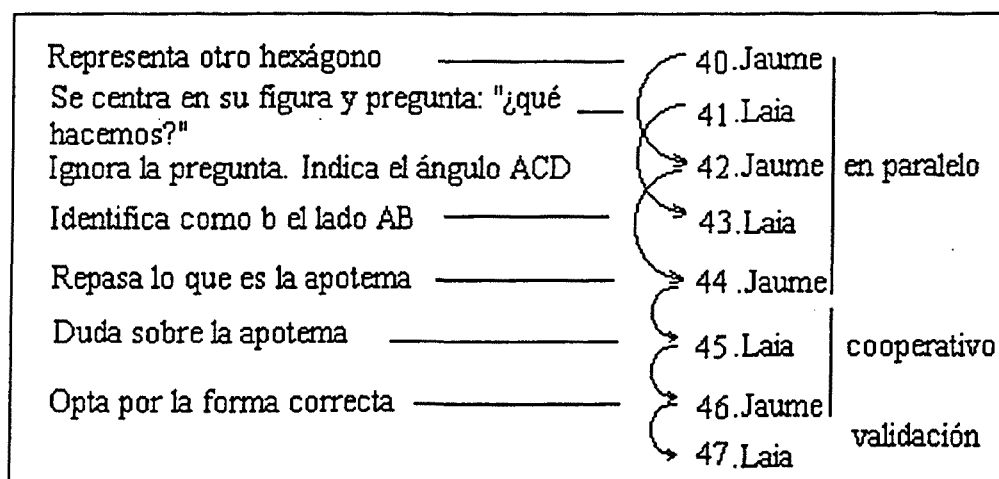


Figura 8.3.18

A partir de la intervención 44 le llega el turno a la apotema. Laia duda sobre si la apotema va desde el centro del hexágono a uno de sus vértices o al punto medio de uno de sus lados, la confirmación de Jaume de que va al centro de uno de los lados y la validación posterior de Laia parece rectificar el error que se había producido desde el principio (Figura 8.3.18).

A la vista de los resultados de la prueba inicial, podemos afirmar que la cooperación de los alumnos ha contribuido a que se les presente a ambos la oportunidad de incorporar el concepto de apotema a su estructura conceptual, o de modificar la idea que tenían de él.

E) Episodio de planificación

Como consecuencia de la reflexión individual de las intervenciones 47 y 48, Laia reconduce el proceso de resolución proponiendo un plan que es, en definitiva, una vuelta a su idea original (intervención 23) de empezar a aplicar las fórmulas de las áreas del hexágono y del triángulo para buscar después las relaciones pertinentes entre sus elementos.

Las características de esta planificación las resumimos a continuación:

- Ha surgido del enfoque algebraico por el que los alumnos optaron al principio del proceso de resolución.
- Es propuesta íntegramente por Laia —mediante dos intercambios consecutivos del tipo validación-continuación— para tratar de salir de la situación de bloqueo en la que se encuentran —“Ès per fer alguna cosa” (intervención 53)—.
- Es poco concreta porque deja en el aire no sólo la forma en que encontrarán la relación entre la apotema y el lado del hexágono (intervención 49), sino la de estos elementos con la base y la altura del triángulo ACE.
- La actitud pasiva de Jaume, que se limita a validar la propuesta de Laia y a pedir su ejecución (intervención 52), no contribuye ni a modificar el plan de su compañera, ni a buscar una mayor precisión del mismo.

F) Episodio de ejecución

La poca precisión de la planificación propuesta por Laia lleva a los alumnos a expresar la fórmula del área del hexágono en función del lado y de la apotema (intervenciones 53 y 71); a aplicar el teorema de Pitágoras para buscar la relación entre la apotema y el lado del hexágono (intervenciones 61 a 66); y a olvidarse de calcular el área del triángulo ACE, sustituyéndola por la de uno de los dos trapecios en que una diagonal del hexágono divide a éste (intervenciones 55, 56 y 67). La sustitución del cálculo del área del triángulo ACE por la del trapecio no está contemplada en la planificación y no acertamos a comprender la finalidad que persiguen los alumnos con ese cálculo.

A nivel comunicativo, la mayor parte del episodio es una sucesión de intercambios cooperativos sólo interrumpidos por un intercambio del tipo validación-continuación encabezado por Laia, que coincide con su propuesta de aplicar el teorema de Pitágoras para calcular el valor del segmento DM (intervención 61), y por el trabajo en paralelo de los alumnos entre las intervenciones 64 y 68.

La ejecución acaba cuando Laia reconoce que la situación a la que han llegado no tiene salida —“Em sembla que ens estem liant” (intervención 71)— y cuestiona, con dos preguntas casi consecutivas —“I ara què?”, y “amb això què trobarem?” (intervención 73)—, lo que seguiría después, desconfiando del plan que ella misma había propuesto. Con intervenciones directivas como las anteriores y como las que dan origen a la planificación, Laia orienta, a su manera, el proceso de resolución.

G) Episodio de evaluación local-2

Las preguntas de Laia al finalizar el episodio anterior ponen de manifiesto que la ejecución no ha conseguido su objetivo y provocan el replanteamiento de la situación a la que los alumnos han llegado.

Una vez más, una intervención directiva de Laia —“A veure, i si tornem a repassar això” (intervención 77)—, apoyada por Jaume —“Tornem a començar, va!” (intervención 78)—, hace que los alumnos empiecen una nueva representación del hexágono y que revisen las relaciones más sencillas entre sus elementos —igualdad de los radios del hexágono (intervención 80), igualdad de OM y MD (intervención 79) e identificación errónea del radio con la apotema (intervención 81)—. Este último tema vuelve a centrar la atención de los alumnos al final de la revisión.

Los alumnos trabajan casi todo el episodio en paralelo, únicamente interactúan cuando Jaume se percata del error de Laia, que vuelve a confundir la apotema del hexágono con su radio. Dos preguntas de aquél (intervenciones 82 y 86) vuelven a redefinir el concepto y a situarlo en su acepción correcta.

El carácter impulsivo y poco persistente de Laia le lleva a introducir informaciones que abandona rápidamente. Nos referimos, en concreto, a las intervenciones 83' y 85, en las que hace referencia a un rombo que nunca vuelve a aparecer después. Por el contrario, observamos que Jaume está más centrado en comprender y aclarar la propuesta errónea de Laia sobre la apotema.

En definitiva, Laia provoca la revisión local con sus dos intervenciones (71 y 73) de control. Además, este episodio se caracteriza por el trabajo en paralelo que desarrollan los alumnos, sólo interrumpido por las preguntas de Jaume sobre la apotema, y por la reincidencia en el tema de la identificación de la apotema.

H) Episodio de ejecución

Las reflexiones individuales que se producen durante el trabajo en paralelo de la intervenciones 92 a 94, en la que Laia continúa descomponiendo el hexágono —ahora en cuatro trapecios—, son el origen de la ejecución que Jaume comienza.

La intención inicial de Jaume de calcular las áreas de los triángulos ACE y CDE adquiere sentido cuando Laia introduce la idea de expresar el área del hexágono como la del triángulo ACE más tres veces la del ADE (intervención 101). En ese momento, pensamos que los alumnos encontrarían la solución fácilmente.

Dos son las causas que provocan el fracaso final del intento de encontrar la razón de las áreas del hexágono y del triángulo:

La primera, y más importante, es la ausencia de una planificación inicial, lo que hace que los alumnos no tengan claros los pasos que han de dar y olviden el objetivo que pretenden conseguir. Estamos, en definitiva, ante una situación en la que la ausencia de control del proceso repercute negativamente en la obtención de un resultado final que parece tan cercano. Nos referimos, en concreto, a la obsesión de los alumnos —arrastrada desde episodios anteriores— por despejar la base y por el número de incógnitas, lo que les lleva a no ver (intervención 112 y siguientes) que lo que han de comparar son las áreas del hexágono ($A_{\text{hex.}}$) y del triángulo ACE (que ellos han llamado A_2), habiendo llegado a expresarlas en función de los mismos elementos — b y h_1 —.

Y la segunda, menos importante porque incide más en el resultado que en el proceso, es la introducción por parte de Jaume de una relación errónea entre las alturas h_2 y h_1 de los triángulos ACE y CDE, respectivamente —“... si això [CE] passa per la meitat, l'altura aquesta [AM] és dues vegades la d'aquesta [MD], llavors on hi ha h_2 posem $2h_1$...” (intervención 112)—, que sólo tiene importancia por el razonamiento incorrecto de Jaume y por su incidencia en el resultado final.

En el inicio del episodio, Jaume encabeza dos intercambios seguidos del tipo validación-continuación que consiguen involucrar a Laia en la idea de calcular las áreas de los dos triángulos. El resto del episodio se desarrolla en cooperación, sólo interrumpida en dos ocasiones: en la intervención 105, en la que Laia pide aclaración de la propuesta anterior de Jaume, y en la 108, con un intercambio de validación-continuación encabezado por Jaume. Además, observamos que el diálogo cooperativo que se produce —que tiene como temas las identificaciones simbólicas, las aplicaciones inmediatas de fórmulas y las sustituciones en ellas de las relaciones entre sus elementos— progresa en la dirección de una solución que al final no se consigue.

Tenemos aquí un ejemplo de un diálogo cooperativo relativamente largo, en el que el proceso de resolución progresa significativamente, pero no llega a su fin último porque se construye sin una planificación previa y, durante el mismo, no hay elementos de control que determinen con claridad el objetivo que los alumnos persiguen, independientemente de las deficiencias de los contenidos matemáticos de las intervenciones y del insuficiente desarrollo de las expresiones que consiguen. Éste es el caso del cálculo del área del hexágono en la intervención 113, $A_{\text{hex.}} = \frac{3bh_1 + b \cdot 2h_1}{2}$, que Laia no llega a expresar de la forma: $A_{\text{hex.}} = \frac{5bh_1}{2}$, lo que hubiera contribuido a la comparación con $A_2 = \frac{b \cdot 2h_1}{2}$.

En la intervención 117 damos por terminado el proceso de resolución debido a la larga duración del mismo y a la desilusión que se produce en los alumnos cuando no obtienen el resultado final, lo que les lleva a una situación en la que se combinan las largas pausas con las referencias a la expresión del área del hexágono en función de alguna cosa —“... en funció..., de què?” (intervención 117)—.

8.3.2.3. Características generales del proceso de resolución

a) Papeles comunicativos de los alumnos

El diálogo de los alumnos se caracteriza por el gran número de intercambios cooperativos que se produce (Tabla 8.3.3) y, de ellos, la alta proporción —29 de 37— que aportan información nueva en el contexto global del proceso de resolución. Una revisión de

los momentos en que este diálogo cooperativo se ha producido y de su relación con los contenidos matemáticos de las intervenciones nos ayudará a identificar sus características más significativas.

	COOPERATIVO	VALIDACIÓN	PREGUNTA-RESPUESTA	TOTAL
Laia-Jaume	18(14)*	1	2(1)	21(15)
Jaume-Laia	19(15)	1	2(1)	22(16)
TOTAL	37(29)	2	4(2)	43(31)

* Entre paréntesis indicamos los intercambios que aportan información nueva en el contexto global del proceso de resolución.

Tabla 8.3.3. Intercambios de dos intervenciones

	VALIDACIÓN-CONTINUACIÓN		ACLARATORIO		INTERRUPCIÓN		TOTAL	
	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.
Laia-Jaume-Laia	6(4)*	2	2(2)	1	0	0	8(6)	3
Jaume-Laia-Jaume	4(2)	2	0	1	0	1	4(2)	4
TOTAL	10(6)	4	2(2)	2	0	1	12(8)	7

* Entre paréntesis indicamos los intercambios que aportan información nueva en el contexto global del proceso de resolución.

Tabla 8.3.4. Intercambios de tres intervenciones

Como es fácil de imaginar, la información globalmente nueva que los alumnos aportan no está, en la mayoría de los casos, en la línea de la solución que ellos casi llegan a obtener. En concreto, observamos que los diálogos cooperativos se mantienen durante más tiempo y producen mayor progreso en los dos episodios de ejecución. En el segundo de ellos, a diferencia del primero, ese progreso, que va unido a la forma de atacar el cálculo de las áreas de las figuras y que está basado en algunas intervenciones con un contenido matemático deficiente, pone a los alumnos muy cerca de obtener una solución.

En el resto del proceso de resolución no hay un mantenimiento sostenido del diálogo cooperativo, ya que se producen como máximo dos o tres intercambios cooperativos seguidos. En la mayoría de los casos, ese breve diálogo cooperativo surge tras las pausas o reflexiones individuales de cada uno de los alumnos. Por ejemplo, los diálogos que siguen a las pausas de las intervenciones 24 y 28, que tienen su origen en sendas preguntas de Laia y Jaume, respectivamente, y los que siguen a los trabajos en paralelo que acaban en las intervenciones 44 y 80, que tienen como tema la apotema del hexágono.

Observamos ligeras diferencias entre uno y otro alumno en cuanto a las preguntas que cada uno de ellos hace. Todos los intercambios aclaratorios (Tabla 8.3.4) en los que Jaume

pregunta sobre el contenido de la intervención anterior de Laia tienen como tema la apotema del hexágono. En cambio, las preguntas de Laia no hacen referencia a intervenciones anteriores de Jaume y en algunos casos, como las de las intervenciones 23 (demanda de validación), 41 y 73, son el preludio del inicio de nuevos episodios.

Por último, hemos de indicar que el desacuerdo que se produce entre las intervenciones 18 a 22 es consecuencia de un mal entendimiento cuando los alumnos señalan, sobre la figura, los segmentos a los que se refieren. Por tanto, no podemos decir que sea consecuencia de una verdadera disensión entre ellos.

b) Esquema de la sucesión de episodios

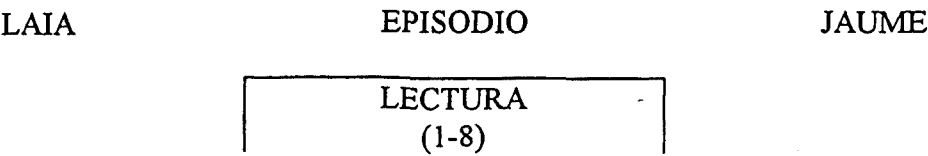
Los alumnos se inclinan por un enfoque algebraico que consiste en expresar las fórmulas de las áreas del hexágono, a pesar de que al final calculen el área del hexágono como suma de cuatro triángulos, y del triángulo ACE para tratar de compararlas después de buscar relaciones entre sus elementos. Este enfoque sigue la línea 2 del espacio básico del problema del hexágono.

Una visión general del proceso de resolución nos hace reparar en la influencia que ha tenido Laia en su evolución. Excepto la última ejecución, los demás episodios han sido iniciados por intervenciones directivas suyas, lo que pone de manifiesto el control que ha ejercido sobre el proceso. En cambio, esa influencia sobre la evolución de los episodios no ha contribuido a que los alumnos profundicen en muchas de las informaciones que han ido introduciendo, sobre todo en la idea de Laia de empezar a dar números (intervención 29), y no se ha extendido al último episodio, en el que hemos notado la ausencia de una línea directriz que marcara el objetivo y que obligara a los alumnos reflexionar sobre lo que habían conseguido.

No podemos obviar en este análisis global las referencias que los alumnos hacen a la apotema del hexágono. En tres momentos del proceso de resolución revisan este concepto que, al final, no aplican debido a la forma que tienen de calcular el área del hexágono como suma de cuatro triángulos.

Posiblemente la impulsividad de Laia sea la causa de la poca profundización en el análisis de las informaciones que van aportando. Esa impulsividad ha contribuido a la diversificación de episodios que se han ido generando (véase el esquema gráfico del proceso de resolución al final de este apartado), poniéndose de manifiesto la naturaleza cíclica y dinámica que ha de tener la actividad de resolver problemas, según M. L. Fernández y otros (1994).

ESQUEMA GRÁFICO DE LA SUCESIÓN DE EPISODIOS



3. Representa correctamente el hexágono y el triángulo.

La interpretación errónea del enunciado por parte de Jaume es consecuencia del trabajo en paralelo de los alumnos.

Jaume desbloquea su situación preguntando a Laia sobre la forma de unir los vértices para obtener el triángulo.

4. Interpreta incorrectamente el enunciado.

6. Pregunta sobre la forma de unir los vértices.

8. Rectifica.



9. Expresa la fórmula del área del hexágono.

ANÁLISIS (9-22)

Enfocan la resolución de forma algebraica y se inclinan desde el principio (intervención 9) por la utilización de fórmulas.

Hacen referencia explícita y errónea al conocimiento del concepto de apotema.

11. No da una respuesta correcta.

10. Pregunta lo que es la apotema.

13. Identifica como equilátero el triángulo ACE.

Al principio Laia asume el papel de ir introduciendo información nueva, primero, por iniciativa propia, después, como consecuencia de las preguntas de Jaume. Entre las intervenciones 14 y 16 los alumnos cambian los papeles comunicativos.

14. Expresa la fórmula del área del triángulo.

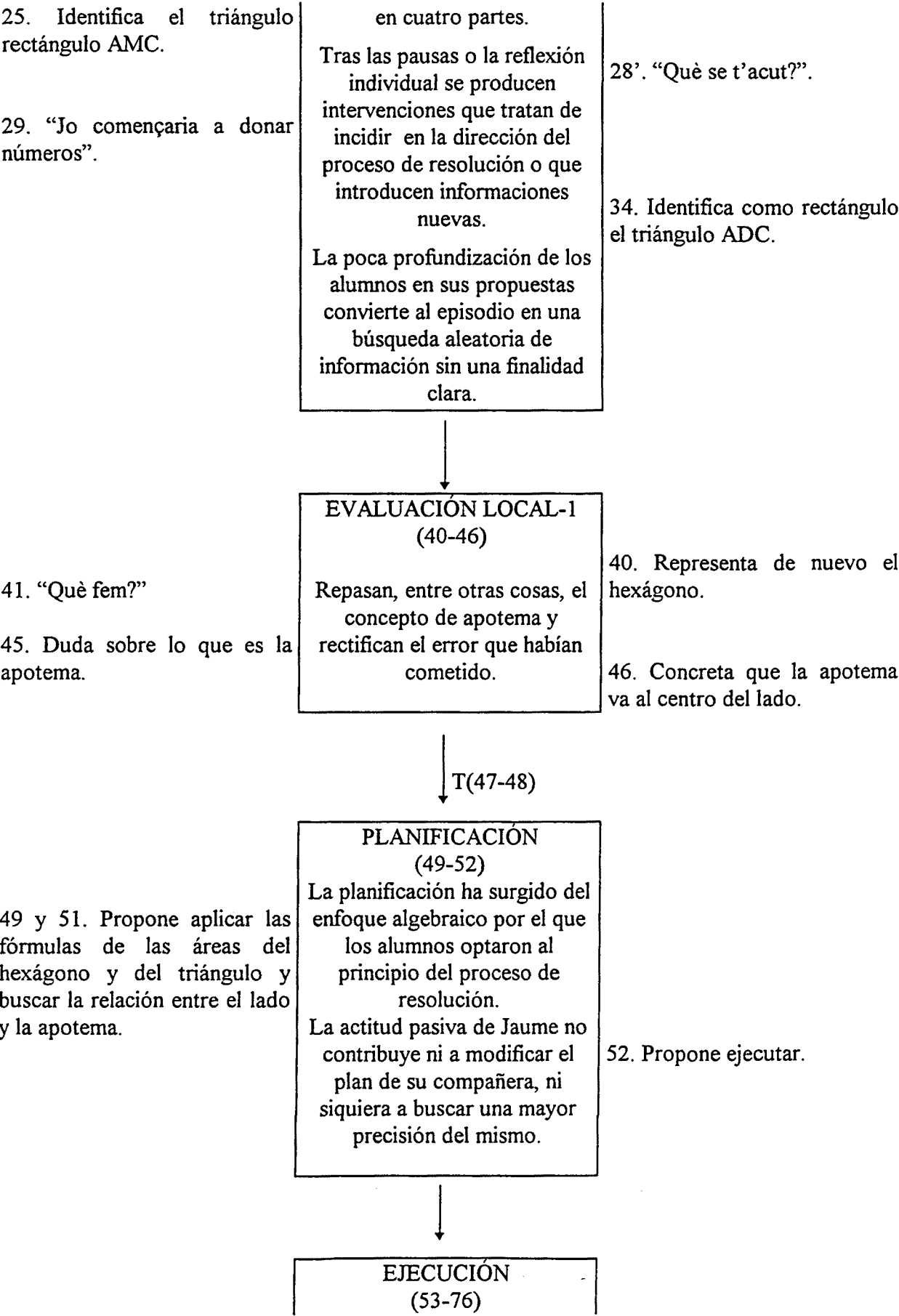


23. Pregunta si empiezan a calcular el área del hexágono.

EXPLORACIÓN (23-39)

Las pausas que se producen, en las intervenciones 24 y 28, y el trabajo en paralelo, entre las 31 y 34, dividen al episodio

24. Divide el hexágono en dos trapezios.



53. Expresa la fórmula del área del hexágono y el deseo de buscar el área del triángulo ACE.	Tanto en la planificación como en la ejecución, Laia orienta, a su manera, el proceso de resolución con intervenciones directivas.	
55. Identifica la altura del trapecio ABCF con la apotema	Los cálculos que Laia realiza tienen por finalidad de expresar el área del trapecio y del hexágono en función de la apotema de éste.	56. Asocia la altura del trapecio con la apotema.
65. Aplica el teorema de Pitágoras para expresar CD — lado del hexágono— en función de CM —apotema— y de DM.	La sucesión de intercambios cooperativos es la característica interlocutiva más frecuente en este episodio.	58. Expresa la fórmula del área del trapecio.
67. Sustituye la expresión obtenida en 65 en la fórmula del área del trapecio.		
71. Sustituye la expresión obtenida en 65 en la fórmula del área del hexágono.		
73. “I ara què?”		



EVALUACIÓN LOCAL-2 (77-93)		
77. “A veure, a veure, i si tornem a repassar això”.	Laia provoca este episodio con sus intervenciones de control.	
79. Representa el hexágono.	Se caracteriza tanto por el trabajo en paralelo que desarrollan los alumnos, sólo interrumpido por las preguntas de Jaume sobre la apotema, como por la reincidencia en el tema de la identificación de la apotema.	78. Representa el hexágono.
83. Vuelve a confundir la apotema.		80. Vuelve a indicar lo que es la apotema.
		88. Aclara lo que es la apotema.



EJECUCIÓN (94-117)		
99. Simboliza las bases de los triángulos. 101. Explica cómo calcular el área del hexágono. 103. Propone una identificación simbólica para los lados del hexágono. 113. Expresa el área del hexágono. 115. Despeja el lado del triángulo e iguala.	La ejecución se desarrolla casi íntegramente de forma cooperativa y se caracteriza por la falta de control de los alumnos. Se produce un progreso significativo del proceso de resolución, pero no llega a su fin último por tres motivos: porque la interacción no tiene su origen en una planificación previa; porque no hay elementos de control que determinen con claridad el objetivo que los alumnos persiguen; y porque hay alguna deficiencia en los contenidos matemáticos de las intervenciones.	94. Indica que los triángulos ACE y CDE tienen la misma base.
		98. Identifica el área del triángulo CDE como A_1 y la del ACE como A_2.
		100. Calcula las áreas de los triángulos en función de b —lado del triángulo— y h_1 y h_2 —alturas de cada triángulo—.
		108. Expresa el área del hexágono.
		112. Relaciona erróneamente la altura (h_1) del triángulo CDE con la (h_2) del triángulo ACE. 114. Indica que han de despejar el lado (b) del triángulo de las expresiones de A_1 y A_2.

8.3.3. Actuación de Laia y Jaume en la resolución del problema del triángulo

8.3.3.1. Transcripción del proceso de resolución

1. Jaume: [Lectura].

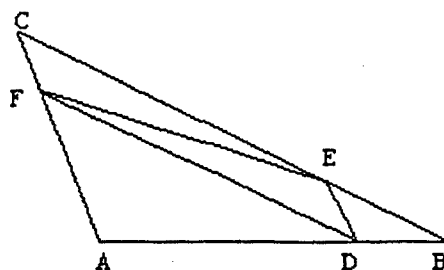


Figura 8.3.19

2. Laia: *A veure, ABC és?*

3. Jaume: *És el triangle* [indica ABC, Figura 8.3.19, lee en silencio].
4. Laia: *Que divideix al segment AB en dos segments que estan en proporció 3 a 1* [leyendo también].
5. Jaume: *O sigui, que aquest* [señalando con los dedos en AD tres partes iguales al segmento DB] *és el triple que aquest, no?* [segmento BD].
6. Laia: *Vale!*
7. Jaume: *Sent els segments EF i DE paral·lels als costats AC i CB* [continúa leyendo].
8. Laia: *Aquest [DE] és paral·lel a aquest [AF].*
9. Jaume: *Aquest [CE] és paral·lel a aquest [FD], i aquest [FE] és paral·lel a aquest [AD], no?*
10. Laia: *Aquest [FD] amb aquest [CE].*
11. Jaume: *Aquest [DE] amb aquest [AF] i aquest [FD] amb aquest [EC].*
12. Laia: *Sí. [Continúa leyendo]. Si FE és la diagonal del paral·lelogram..., què és un paral·lelogram?*
13. Jaume: *Aquest d'aquí* [indica el DECF].
14. Laia: *O aquest* [pone el dedo siguiendo el segmento FE para indicar la figura ADEF].
15. Jaume: *Aquesta diagonal, sí* [se refiere a EF].
16. Laia: *No, la diagonal és aquesta, aquesta, la d'enmig* [indica el segmento FD].
17. Jaume: *Això [EF], no?*
18. Laia: *No, l'altra* [se refiere a FD].
19. Jaume: *No, és aquest paral·lelogram d'aquí* [indicando DECF].
20. Laia: *I aquest... [ADEF], ah no!, vale, vale /*
21. Jaume: *La diagonal EF...* [lee].
22. Laia: *Aquest* [indica el triángulo BDE], *quina relació hi ha entre aquest [DBE] i... quin és l'altre?*
23. Jaume: *Entre aquest [DBE] i aquest d'aquí [EFC].*
24. Laia: *Aquest, FEC. Vale, la relació serà... s'hauria de calcular el trapezi aquest [ADEF], l'àrea del gran [se refiere al ABC] i llavors..., no sé. A veure, tornem a llegir-lo* [los dos leen en silencio durante 32 s].
25. Jaume: *Això d'aquí* [indica DB] *és 1, o sigui, la base serà 1.*
26. Laia: *Sí, i això, 3* [se refiere al segmento AD].
27. Jaume: *I això, 3.*
- 27'. Jaume: *Anem a dibuixar-lo* [empiezan a representar cada uno de ellos las figuras 7.3.28 (Jaume) y 7.3.29 (Laia) simultáneamente, en silencio y cada uno en su folio durante 30 s] <pausa(22)>

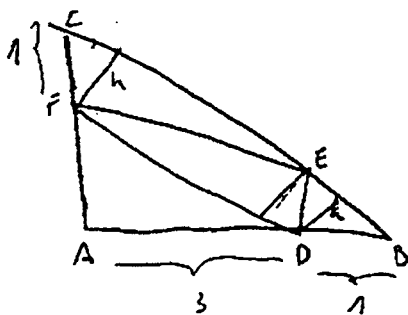


Figura 8.3.20

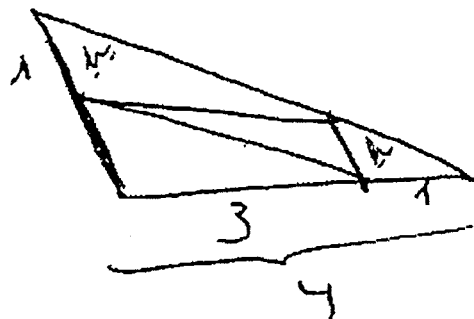


Figura 8.3.21

28. Laia: *I això [DB] no és igual que això [DE]?*

29. Jaume: *Aquest és igual que aquest? En el dibuix* [se refiere a la figura del enunciado] *aquest* [DE] *és igual que aquest* [FC].
30. Laia: *Sí?, ho diu?*
31. Jaume: *És clar, si és un paral.lelogram.*
32. Laia: *Són segments paral·lels als costats...* [lee].
33. Jaume: *Si són paral·lels, aquest* [FD] *és igual que aquest* [EC] *i aquest* [DE] *és igual que aquest* [FC].
34. Laia: *És clar, és clar, doncs..., doncs... / ja tenim una cosa que és igual en els dos triangles* [BDE y EFC].
35. Jaume: *Quina?*
36. Laia: *Que si hem de calcular l'àrea dels triangles, ja tenim algo que és igual* [indica los lados DE y FC]. *Ah!, i això..., no, això ...* [indica los lados AD y FA y hace la indicación de que sean perpendiculares].
37. Jaume: *No, és que els dos són iguals* [DE y FC].
38. Laia: *== És que hauriem de tenir això* [BC] *per saber la relació, no?, per tenir això, tenim això* [AB] *que és...*
39. Jaume: *== 4.*
40. Laia: *4 i després...* [escribe 4 en el dibujo], *i després això* [FC] *que és algo que és igual a això* [DE] <pausa(30)>
41. Jaume: *I a partir d'aquest triangle* [ADF], *i sabem que té la mateixa base* [FD] *que el paral.lelogram aquest* [FDEC] *i només canvia l'altura /*
42. Laia: *A veure,* [volviendo al enunciado] *és que ens demanen les àrees i l'àrea, per exemple, d'aquest* [DBE], *l'altura és això* [indica la altura sobre el lado BE].
43. Jaume: *Sí, o així* [indica la altura sobre el lado DB].
44. Laia: *Aquest* [FEC] *serà aquí* [indica su altura sobre el lado EC] <pausa(22)>
45. Jaume: *Això d'aquí, quina figura és?, això d'aquí* [se refiere al trapecio FDBC] *sense aquest triangle* [se refiere a toda la figura menos el triángulo ADF, que lo cubre con el dedo].
46. Laia: *Un trapezi. Ah!, i això, clar, l'altura d'aquest* [altura del triángulo DBE sobre el lado BE] *és l'altura d'aquest* [altura del triángulo FEC sobre EC. Señalan con los dedos sobre la figura del enunciado].
47. Jaume: *Sí, ho dic perquè podem agafar aquest triangle* [FDE].
48. Laia: *== Ah!, és clar!, és que l'altura dels dos triangles* [DBE y FEC] *és la mateixa, perquè és això* [vuelve a señalar las dos alturas].
49. Jaume: *Ah!, clar sí.*
50. Laia: *Sí, tenen la mateixa altura* [representa las dos alturas, en la Figura 8.3.21].
51. Jaume: *O sigui, això és h* [escriben h sobre las dos alturas, Figura 8.3.20].
52. Laia: *Vale, fem això, aquesta ja la sabem?*
53. Jaume: *Quina?, aquesta?* [indica la diagonal FE].
54. Laia: *Això* [FD].
55. Jaume: *No / i si agafem tot el triangle sencer, podem saber quant val això, tot això* [indica el lado BC].
56. Laia: *Ja, però és el que hem dit que no...*
57. Jaume: *== Que no sabem l'altura aquesta* [altura del triángulo ABC sobre el lado BC].
58. Laia: *I a més a més que ens falta..., només tenim un costat* [se refiere al AB], *ai!, i un angle, no!, no!* [indicando el ángulo A], *és que no ho veig /* [escribe h en las dos alturas, Figura 8.3.21] <pausa(35)>

- 58'. Laia: *L'àrea del paral.lelogram és base per altura* [indica FDEC].
59. Jaume: *Sí*.
60. Laia: *L'altura, bueno, la tenim, però ens pot servir i la base...* [señala FD y después AD], *és que aquest triangle* [ADF], *per exemple, sabem que això* [AB] *és 3*.
61. Jaume: *I l'altre, 1* [se refiere a DB].
62. Laia: *Llavors això* [FD] *seria igual a la base, que ens serviria si volem calcular això* [área de FEC], *per l'altura, això és 3* [AD], *llavors això* [AF] *sabem que és x menys això* [indica FE y DE], *que també ens serviria per a després calcular aquest* [se refiere al área del triángulo DBE], *o sigui, que tindríem tres incògnites, però...*
63. Jaume: *== Tu faries l'àrea de tot el triangle aquest* [se refiere al ABC].
64. Laia: *Jo faria l'àrea del petit* [indicando el lado FD].
65. Jaume: *La del petit*.
66. Laia: *És que no ho sé. És que per fer la del gran... ah!, també. És que per fer la del gran... també, també, és el mateix, no? /.*
67. Jaume: *Si això és 1* [DB], *això també és 1?* [FC].
68. Laia: *No, no és el mateix, ens falta l'altura* [se refiere a la altura del triángulo ABC sobre el lado BC].
69. Jaume: *Si aquest és paral.lel a aquest* [DF y BC], *llavors aquest costat ha de ser igual que aquest* [DB y FC], *o sigui, això d'aquí dalt* [FC] *també és 1* [lo escribe], *sí*.
70. Laia: *Ah!, clar, ah!, pues ja està, no?, és fàcil, no?, va!, pues calculem això, ara sí podem calcular això, a veure si podem calcular això* [EC], *no?*
71. Jaume: *Ah no!, és que no tenim...* [indica la altura de FEC sobre EC].
72. Laia: *== No, però no, és que això no ens servirà de res perquè ens falta aquesta altura* [altura del triángulo ABC sobre BC] <pausa(82)>
73. Jaume: *Aquests triangles són iguals, no?* [FDE y FEC], *aquest i aquest*.
74. Laia: *Ah!, clar, sí, és que aquí ens ha de donar algo* [se refiere a algún dato más, se va al enunciado y vuelve a leer], *algo que fos rectangle o algo*.
75. Jaume: *Sí* <pausa(30)>
76. Laia: *Això és la diagonal* [FE] *del paral.lelogram, que ens diguin el paral.lelogram és que s'ha de fer servir, no?*
77. Jaume: *L'altura d'aquí també és igual a aquesta, a aquesta i a aquesta* [se refiere a las alturas de los triángulos DBE, FDE y FEC sobre los lados BE, FD y EC, respectivamente].
78. Laia: *I això és un rectangle* [se refiere al rectángulo formado por las dos alturas "h" y los lados FD y BC, Figura 8.3.21], *base per altura, l'àrea d'això* [rectángulo] *és base per altura, doncs ...* <pausa(27)>
79. Jaume: *Hem de trobar la relació que hi ha entre això* [CE] *i això* [EB] *amb això d'aquí* [indica el segmento FD] *perquè com l'altura serà la mateixa...*
80. Laia: *== Com?*
81. Jaume: *La relació que hi ha entre aquesta base* [CE] *i aquesta* [EB], *perquè l'altura és la mateixa als dos llocs*.
82. Laia: *Sí, sí*.
83. Jaume: *Després aïllem l'altura i ja tenim la relació*.
84. Laia: *És que això, vols dir que no és això de la proporció, és a dir, si això és això* [DE es a AC], *saps el que fèiem fa molt temps amb una cosa així, allò...* [hace la Figura 8.3.22].

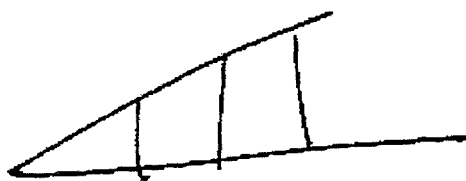


Figura 8.3.22

85. Jaume: *Sí, sí.*
86. Laia: *Si aquest és igual a aquest, llavors..., i s'igualaven els segments.*
87. Jaume: *Sí, sí.*
88. Laia: *I això és paral·lel [indica los segmentos DE y AC], o sigui ...*
89. Jaume: *Si aquest triangle d'aquí [DBE] es fa més gran i va fent això... [indica el ABC].*
90. Laia: *Sí, sí, ah!, aquest [DB] és això, 1, sobre 1, aquest costat [indica DE] és això sobre 3, és aquest [indica AC].*
91. Jaume: *Sí.*
92. Laia: *I ara aquests costats d'aquí [CE], no sé <pausa(12)> Aquest farà 3? [indica CE] / no tinc ni idea! <pausa(22)>*
93. Jaume: *Agafar dos triangles, per a mi hem d'agafar dos triangles primer [se refiere a ADF y FDE], i després trobar la base aquesta d'aquí [FD] i a partir d'aquí ja estarà.*
94. Laia: *La base aquesta d'aquí?*
95. Jaume: *Sí, trobar això d'aquí, que és el mateix que això d'aquí [se refiere a la igualdad entre EC y FD], a partir, no sé, d'aquests dos triangles [ADF y FDE] que tenen la mateixa base <pausa(7)>*
96. Laia: *Espera't! a veure, a veure...*
97. Jaume: *= Aquest triangle... [FEC].*
98. Laia: *Hi ha manera de trobar la diagonal [FE] si tenim les dues altures? [h]. Llavors saques la diagonal i llavors... d'aquest [DBE], i tens l'altura i pots calcular aquest [FD], saps el que vull dir?*
99. Jaume: *No, no és igual.*
100. Laia: *No, perquè això [DB] no és igual que això [DE] <pausa(27)>*
101. Jaume: *Hem de trobar això [FD] a partir d'aquests dos triangles [ADF y FDE], però no sé com. La base és comuna, la base és la mateixa, això d'aquí [FD] i aquest té aquesta altura [indica la altura del FDE sobre el lado DF].*
102. Laia: *= Que és igual a aquesta [señala h], aquesta altura.*
103. Jaume: *= És igual que aquesta, igual que aquesta [las mismas tres alturas].*
104. Laia: *Vale!*
105. Jaume: *Però aquesta no la sabem [indica la altura del triángulo ADF sobre el lado DF].*
106. Laia: *Però és que jo diria que podem saber aquesta diagonal [FD], bueno, això, a partir d'això [FE] i d'algo d'aquí [indica la altura h, sobre la Figura 8.3.19], perquè el paral·lelogram ens ho donen, no sé / Si això... [DB], no!, és que això no és 1 / No sé <pausa(18)>*
107. Jaume: *I si això [lado DE] és 1 i el triangle [DBE] és equilàter.*
108. Laia: *No, equilàter no, aquest [BE] no és 1. Que aquests dos [DE y DB] siguin... / però és que si t'hi fixes, això [DB] és bastant igual a això [DE].*

- 109.Jaume: *Sí, per això, ho podem fer a ull.*
- 110.Laia: *Sí, més o menys [rien] / sí, clar!, clar!, això ha de ser... Clar que ha de ser igual que això! [se refiere a DE y DB], ah no!*
- 111.Jaume: *El trapezi, aquest... [FDBC] la fórmula ..., quina és la fórmula?*
- 112.Laia: *És allò del trapezi, base gran... [escribe: $\frac{B+b}{2} \cdot h$].*
- 113.Jaume: *Base gran més base petita partit per dos...*
- 114.Laia: *==La h és la mateixa que les d'abans [se refiere a la del triángulo DBE]. La base gran és això [CE] més això [EB].*
- 115.Jaume: *La base petita seria això [AF] i això [AD], ah no! [da la vuelta al folio y se mira la figura al revés] les bases seran els dos paral.lels, clar!, han de ser aquests dos [DE y AF], no?*
- 116.Laia: *Com?*
- 117.Jaume: *Han de ser aquestes dues les bases [indica DE y AF], no?, la gran i la petita.*
- 118.Laia: *Vols dir?, de quin m'ho estàs demanant?, jo pensava que deies d'aquest [indica el trapezio FDBC].*
- 119.Jaume: *No, d'aquest [ADEF] dels dos triangles aquests [ADF y DFE] /*
- 120.Laia: *La base? [indica AD].*
- 121.Jaume: *No, és que aquesta no és la base.*
- 122.Laia: *Pensava que deies d'això [FDBC] / A veure, una cosa, si això és paral.lel... [indica FD y se refiere a FD y BC].*
- 123.Jaume: *Quins?, aquests? [indica FD y BC].*
- 124.Laia: *Sí, vols dir que això [DB] no ha de ser igual a això [DE]?, perquè si això tirés molt cap aquí [sigue una línea más inclinada que DE], o sigui, això [FE] és una diagonal, clar!, no!, CF és igual a EB? /*
- 125.Jaume: *CF igual a EB?*
- 126.Laia: *[Va al enunciado] no, no, diu que són paral.les /*
- 127.Jaume: *CF és igual a DB.*
- 128.Laia: *CF és igual a DB? Això igual a això [representa sólo los segmentos CF y DB, a parte] / això no ha de ser igual.*
- 129.Jaume: *La base també estarà en la proporció 3 a 1, no?, si l'únic que fas..., si aquí n'hi ha 3 a 1 [indica CE y EB], aquí [indica CE y EB] també seguirà sent de 3 a 1, no?, si ho fas més gran...*
- 130.Laia: *Sí.*
- 131.Jaume: *La base aquesta [CE] també serà 3 vegades més gran que aquesta [EB] i l'altura és la mateixa i ja està, no? [rien].*
- 132.Laia: *Sí, és això, això és el que deiem, que és com si féssim allò... [indica dos líneas concurrentes y dos paralelas], ir tirando.*
- 133.Jaume: *Sí, o sigui CE, no. Si, CE és 3EB [escribe], 3 vegades EB, ara l'àrea d'aquest, del CFE, és, si d'aquí [igualdad CE=3EB] aïllem la EB, EB serà CE partit per 3, llavors... entens? Mira l'àrea de CFE és la base, que és...*
- 134.Laia: *A veure, és que hi ha tantes lletres que no...*
- 135.Jaume: *== L'àrea d'aquest d'aquí [escribe A_{CFE}].*
- 136.Laia: *Sí.*
- 137.Jaume: *És CE, que és la base, partir per l'altura [escribe: $A_{CFE} = \frac{CE}{h}$] i l'àrea del DBE [escribe A_{DBE}] és l'EB, que l'EB és CE partit per 3, partit per l'altura*

- [escribe: $A_{DBE} = \frac{CE/3}{h}$] i ara aïllem l'altura d'aquí [indica las dos igualdades que han obtenido], que és la mateixa. Ah sí!, ara igualement les dues altures [indica las h de las dos igualdades], només tindrem la incògnita aquesta [A_{CFE}]. Has copiat això? [rien].
- 138.Laia: [Copiando las expresiones que escribe Jaume y escuchando lo que dice] *Espera, però, base per altura?* [extrañada].
- 139.Jaume: *Ah sí!, sí, base per altura partit per 2, sí, sí* [tachando lo que había escrito y volviendo a escribir: $A_{CFE} = \frac{CE \cdot h}{2}$ y $A_{DBE} = \frac{\frac{CE}{3} \cdot h}{2}$]. Àrea de CFE [A_{CFE}] és CE per h partit per 2, i l'àrea del DBE [A_{DBE}] és CE partit per 3 per h partit per 2.
- 140.Laia: [Escribe lo mismo que Jaume].
- 141.Jaume: *I ara aïllem les h d'aquí. Sí, perquè són iguals.*
- 142.Laia: *I si les diem 1 i 2 als triangles?, no, és que ens confondrem.*
- 143.Jaume: *L'altura $h = 2A_{CFE}/CE$ i l'altura d'aquest és $h = A_{DBE}/CF$* [cada uno por su lado]. *Ara les hem d'igualar* [despeja las alturas, las iguala: $\frac{2 \cdot A_{CFE}}{CE} = \frac{6 \cdot A_{DBE}}{CE}$ y simplifica].
- 144.Laia: [Continúa la resolución por su cuenta].
- 145.Jaume: *Ja està!, dóna 3 vegades.*
- 146.Laia: *== Això es pot tatxar* [CE, y el 2 con el 6 en la igualdad que han planteado] *i queda 3 vegades. Ja està!*
- 147.Jaume: [Escribe: $A_{CFE} = 3 \cdot A_{DBE}$. Solución].
- 148.Laia: *Vols dir que és 3 vegades? Ah!, aquest i aquest, clar.*
- 149.Jaume: *Sí, ja està, ho deixem així, no?*

8.3.3.2. Microanálisis del proceso de resolución

A) Episodio de lectura

Las características del enunciado del problema —largo y con bastantes referencias a los elementos de la figura (triángulos, paralelogramo, segmentos paralelos, diagonal, áreas, etc.)— hacen que sea difícil de comprender en sólo una primera lectura.

Ante esa situación, los alumnos facilitan la comprensión del enunciado dividiéndolo en partes, es decir, leyendo trozos del mismo e interpretando su significado. Esta forma de proceder la repiten en varias ocasiones: entre las intervenciones 3 y 6, se centran en el significado de la razón que hay entre los segmentos AD y DB; entre las intervenciones 7 y 11, tratan de comprender, de forma cooperativa, las relaciones de paralelismo que describe el enunciado; entre las intervenciones 15 y 21, llegan a una situación de desacuerdo (Figura 8.3.23) que tienen su origen en un error de interpretación de Laia (intervención 14) en la lectura de una parte del enunciado; y entre las intervenciones 21 y 27, en las que ambos alumnos delimitan el objetivo del problema, intentan proponer un plan y, tras una nueva lectura en silencio, empiezan a hacer una representación gráfica alternativa a la del enunciado que es el preludio de la búsqueda de relaciones entre sus elementos.

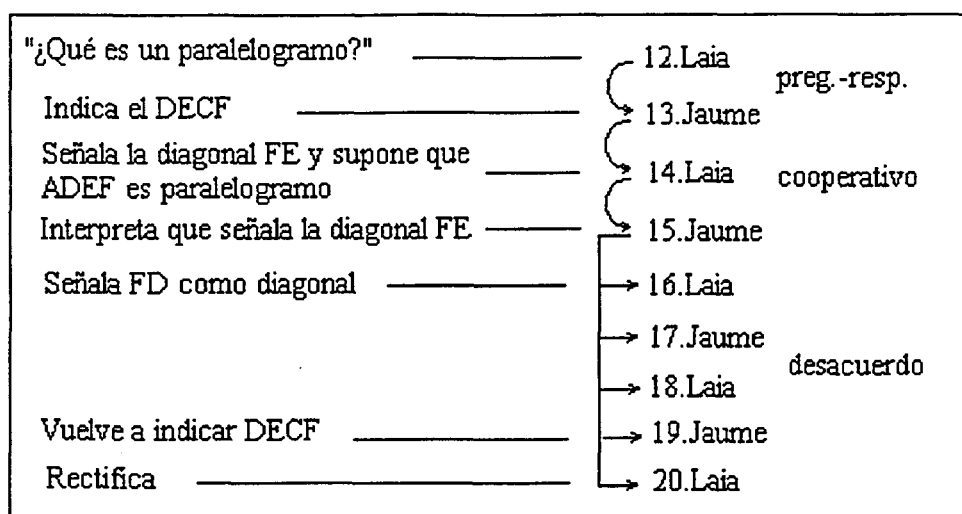


Figura 8.3.23

De este episodio resaltamos tres características:

- Para comprender el enunciado del problema los alumnos tratan de interpretar, en la figura que se les adjunta, las frases y palabras asociadas a los conceptos matemáticos que se citan. Así pues, interpretan el hecho de que los segmentos estén en proporción 3 a 1, identifican qué segmentos son paralelos, tratan de comprender lo que es un paralelogramo, y concretan las áreas que se han de comparar.
- Los intercambios comunicativos que se producen para comprender los diferentes conceptos y relaciones que se establecen en el enunciado tienen su origen, unas veces, en simples lecturas de las partes correspondientes del mismo (intervenciones 4, y 7) y, otras, en lecturas, seguidas de preguntas directas sobre tales conceptos o relaciones (intervenciones 12 y 22).
- Como en casi todos los procesos de resolución que analizamos en este trabajo, el episodio de lectura acaba con una representación gráfica alternativa a la del enunciado, con ella, los alumnos comienzan a afrontar la exploración.

B) Episodio de exploración

Los alumnos comienzan en la intervención 28 una breve búsqueda de relaciones entre los elementos de la figura que dura hasta la intervención 36. Dicha búsqueda la inicia Laia con una demanda de validación —“I això [DB] no és igual que això [DE]?”— y Jaume es el que va introduciendo información nueva —identifica la igualdad de DE y FC (intervención 29) y la de FD y EC (intervención 33)—, que la obtiene directamente del enunciado, pero que no aparece en él. Jaume justifica ambas igualdades aludiendo a la condición de paralelogramo de FDEC.

En la intervención 36, Laia está dando a entender el enfoque que pondrán en práctica al referirse al cálculo de las áreas de los triángulos.

En el breve diálogo que tiene lugar en este episodio, Jaume se limita a expresar relaciones de igualdad de determinados segmentos (Figura 8.3.24), obtenidas directamente de la interpretación del enunciado. En cambio, Laia estimula la introducción de información

de su compañero con una propuesta inicial (intervención 28), rectificada inmediatamente por Jaume, y con una confirmación (intervención 32) de la justificación dada por Jaume a la afirmación que él mismo había introducido.

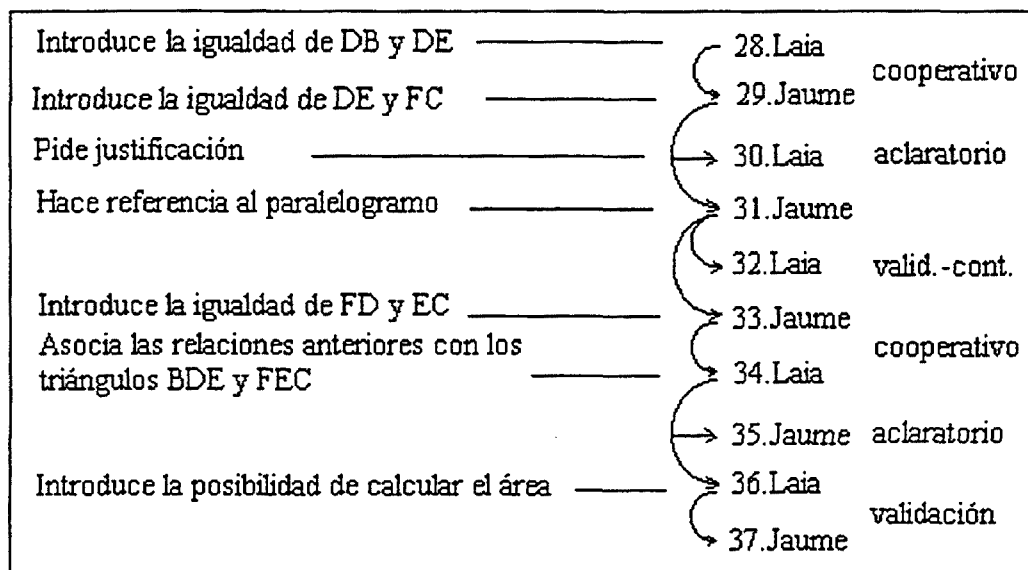


Figura 8.3.24

C) Episodio de análisis/exploración

En la intervención 36, Laia expresa verbalmente el único enfoque que los alumnos han puesto en práctica en los dos procesos de resolución que llevamos analizados —la aplicación de las fórmulas de las áreas de las superficies que comparan—.

En la intervención 38, los alumnos empiezan a clarificar lo que quieren conseguir —“És que hauriem de tenir això [BC] per saber la relació, no?”—, aunque la forma de enfocar la búsqueda del objetivo que pretenden nos parece poco estructurada, de ahí la calificación que hemos dado al episodio.

Decimos que la búsqueda del objetivo que persiguen —encontrar valores numéricos para el lado BC (intervención 38) y para el CE (intervención 70)— es poco estructurada porque no podemos identificar una línea clara de actuación, en cambio, son muchos los intentos que hacen los alumnos por encontrar dichos segmentos, pero de forma bastante desordenada, puesto que no hay un hilo conductor en sus propuestas. Tampoco apreciamos regularidad alguna en la asunción de papeles comunicativos por parte de cada alumno.

La única información nueva la aporta Laia en la intervención 48 —“... és que l'altura dels dos triangles [DBE y FEC] és la mateixa”—, que surge como consecuencia de una pregunta de Jaume (intervención 45) sobre la identificación de la figura FDBC. Esa información de Laia resulta relevante para el desarrollo del proceso de resolución.

Los alumnos intentan buscar valores numéricos para los segmentos BC y CE de las siguientes formas: consideran el paralelogramo FDEC (intervención 58); tratan de decidirse entre el triángulo “grande” (ABC) y el “pequeño” (ADF); hacen propuestas erróneas, como la igualdad de los segmentos DB y FC, basándose en el paralelismo de DF y BC

(intervención 69); identifican la igualdad de los triángulos FDE y FEC (intervención 77); etc.

En este episodio, las pausas son frecuentes, pero los alumnos, tras ellas, siempre hacen aportaciones novedosas —intervenciones 41, 45, 58', 73 y 79—, aunque no siempre en la dirección de la solución que al final encuentran. Dichas aportaciones contribuyen a relanzar el proceso de resolución.

En definitiva, éste es un episodio en el que los alumnos fijan un objetivo, lo abordan de forma que no siguen una línea de actuación definida, y en el que no hemos podido determinar una regularidad interactiva determinada.

D) Episodio de planificación

El episodio que hemos calificado como planificación es una prolongación del episodio de análisis/exploración. Se inicia en la intervención 79, cuando Jaume reduce el problema de la comparación de las áreas de los triángulos DBE y FEC a la de sus bases CE y DE, respectivamente, y se extiende hasta la intervención 84.

La propuesta de Jaume se basa en encontrar la relación entre las bases de los triángulos y en expresar, después, las fórmulas de sus áreas para despejar de ellas las alturas e igualarlas.

La planificación que Jaume propone es consecuencia de la inclinación implícita de ambos alumnos, desde el episodio de lectura, por un enfoque algebraico, que considera las relaciones entre las bases y alturas para aplicar las fórmulas de las áreas de los triángulos. Estamos, pues, ante una situación similar a las de los procesos de resolución del problema del paralelogramo y del hexágono que estos mismos alumnos desarrollan (apartados 8.3.1.2 y 8.3.2.2).

El plan es propuesto por Jaume íntegramente. Laia se limita a pedir aclaración sobre la propuesta de su compañero y a validarla posteriormente.

La planificación ha surgido del episodio de análisis/exploración, en el que los alumnos han identificado la igualdad de las alturas de los triángulos DBE y FEC sobre los lados BE y CE, respectivamente, y hacen intentos para encontrar los valores numéricos de los lados BE, BC y CE, aunque, en dicho episodio, no hayamos encontrado evidencias de que se les ocurra relacionarlos, es decir, expresar CE en función de BE.

Sobre el plan propuesto por Jaume podemos decir lo siguiente: es apropiado para encontrar la solución; no es ni aceptado ni rechazado explícitamente por los alumnos, aunque suponemos que hay una aceptación implícita si tenemos en cuenta la evolución posterior del proceso de resolución, en la que los alumnos se centran en la búsqueda de la relación entre los segmentos BE y CE; y no es discutido por Laia y, por tanto, no se modifica.

E) Episodio de evaluación local

En el episodio que hemos calificado como evaluación local, los alumnos hacen referencias explícitas a sus conocimientos sobre los contenidos matemáticos implicados en la resolución del problema. En este caso, Laia, tras la planificación propuesta por Jaume,

introduce la proporcionalidad de segmentos y explica, sin nombrar y de una forma muy ambigua, su idea del teorema de Tales.

Jaume se incorpora en la intervención 89 a las referencias que Laia hace de la proporción. En dicha intervención explica de forma intuitiva la idea que tiene de la semejanza de triángulos —“Si aquest triangle d’aquí [DBE] es fa més gran i va fent això... [ABC]”—. Su explicación es coherente con las respuestas que da a los ítems 7b y 7c de la prueba inicial (apartado 7.3). En el 7b, aplicaba a su manera el teorema de Tales para obtener correctamente la relación que pedíamos. En el 7c, hacía referencia a la proporcionalidad, pero era incapaz de obtener la relación que pedíamos, ya que se inclinaba por aplicar la fórmula del área del triángulo debido a su desconocimiento de la relación entre la razón de semejanza y la razón de las áreas.

La interacción que se produce en este episodio (Figura 8.3.25) se compone de una sucesión de intercambios del tipo validación-continuación, en los que Laia va explicando vagamente su idea de la proporcionalidad de segmentos, mientras Jaume va validando. Interpretamos que esa validación es real porque la sucesión de intercambios es interrumpida por Jaume con una intervención (89) cooperativa, en la que explica, también vagamente, su idea de la semejanza de triángulos.

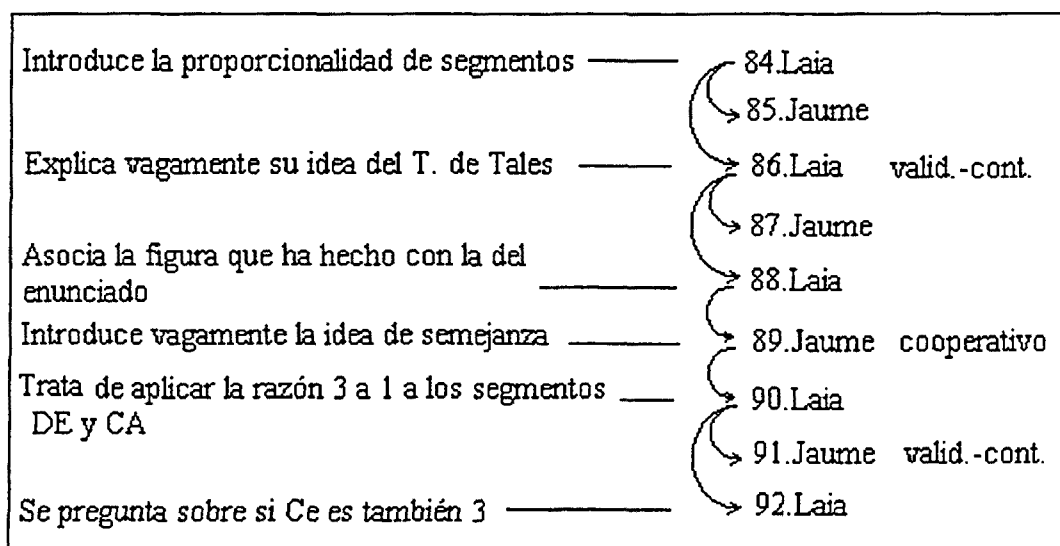


Figura 8.3.25

F) Episodio de análisis

Hemos calificado como análisis a este episodio porque las acciones de los alumnos tienen una finalidad clara: “Trobar la base aquesta d’aquí [FD]”, a la que Jaume se refiere en las intervenciones 93, 95 y 101.

La búsqueda del segmento FD cambia inicialmente la filosofía de la planificación, la cual reducía el problema a la búsqueda de la relación entre FD (o CE) y BE. A pesar de ello, al final de este episodio, los alumnos consiguen la relación deseada e inician la ejecución.

Tras la identificación del objetivo que persiguen (intervenciones 93 y 95), los alumnos abordan la búsqueda del segmento FD de formas muy diversas:

En primer lugar, trabajan en paralelo entre las intervenciones 95 y 99, pues mientras Jaume asocia los triángulos ADF, FDE y FEC por tener la misma base (FD), Laia trata de calcular la diagonal FE a partir de las alturas de los triángulos DBE y FEC sobre los lados BE y CE, respectivamente.

Después, entre las intervenciones 101 y 105, hay un breve repaso cooperativo de las igualdades de las alturas que los alumnos ya habían identificado. Esta cooperación da paso a propuestas tanto de Jaume, que considera el triángulo DBE como equilátero, como de Laia, que intenta de calcular FD a partir de la diagonal FE.

Y por último, la pregunta de Jaume sobre el trapecio (intervención 111) da paso a una alternancia en los papeles comunicativos de los alumnos (Figura 8.3.26), pues de la confusión que se produce cuando cada alumno se refiere a un trapecio diferente (intervenciones 115 a 121), aclarada por el papel comunicativo que asume Laia de preguntar sobre las intervenciones de Jaume, pasan a una sucesión de dos intercambios aclaratorios (intervenciones 122 a 126), en los que Jaume es ahora el que pregunta sobre las propuestas de igualdad de segmentos que hace su compañera. Al final (entre las intervenciones 129 y 132), es Laia la que asume el papel de validar la aportación que Jaume hace, en la que consigue encontrar la relación entre los segmentos CE y BE.

Estamos, pues, ante un episodio en el que los alumnos tienen claro el objetivo que persiguen y abordan su consecución de forma diversificada tanto por lo que se refiere a las propuestas que hacen —la mayoría de ellas rechazadas—, como por la variedad interactiva que desarrollan.

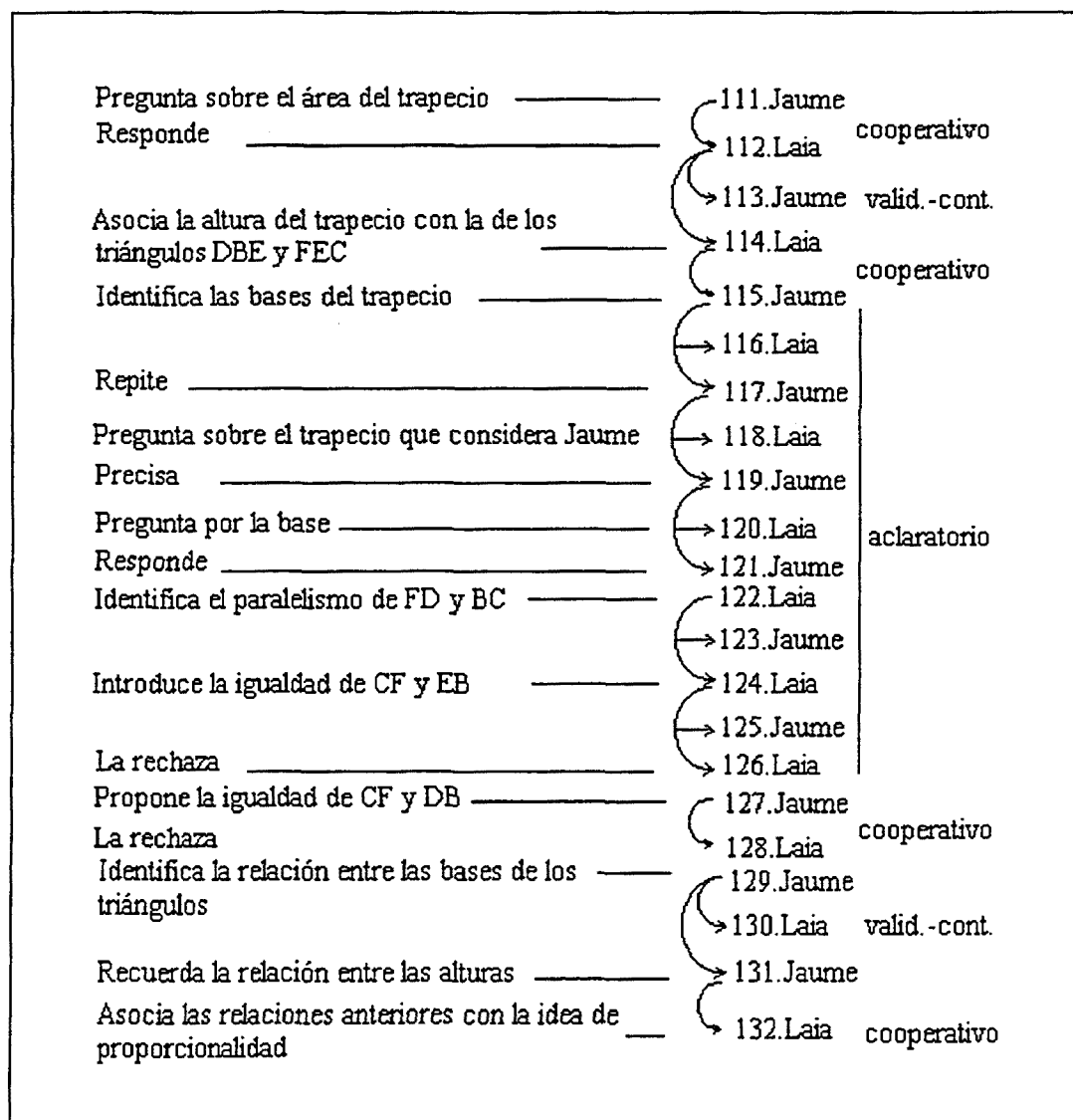


Figura 8.3.26

G) Episodio de ejecución

El episodio de ejecución se inicia en la intervención 133 y se extiende hasta el final del protocolo.

La identificación que Jaume hace en el episodio anterior de la relación entre las bases CE y BE de los triángulos, unida a la igualdad entre las alturas, que Laia había obtenido en la intervención 46, permite a ambos alumnos iniciar la ejecución de la forma que hemos explicado en el episodio de planificación.

El tipo de interacción que se produce tiene dos partes bien diferenciadas:

En la primera, entre las intervenciones 133 y 139 (Figura 8.3.27), Jaume lleva la iniciativa al encabezar intercambios del tipo validación-continuación e interrupción. Posiblemente el hecho de que Jaume sea el alumno que ha identificado la relación entre las

bases ha originado que sea él el primero en lanzarse, de forma precipitada, a ejecutar el plan propuesto. Esa precipitación, que se evidencia con la interrupción de la intervención 135, le conduce a expresar de forma errónea las fórmulas de las áreas de los triángulos (intervención 137).

Laia valida las aportaciones de su compañero y observa lo que él escribe desde una perspectiva que complementa la función que él desempeña. La observación de Laia — desde fuera— de la ejecución que Jaume comienza, le permite ver el error que éste comete y provocar su rectificación.

La situación que aquí se produce es similar a la que identificábamos en la resolución que Rosa y Anna hacen del problema del cuadrado (p. 235) y que analizamos en el Capítulo 10 bajo el epígrafe de “modelo interactivo de complementariedad de funciones” (pág. 421).

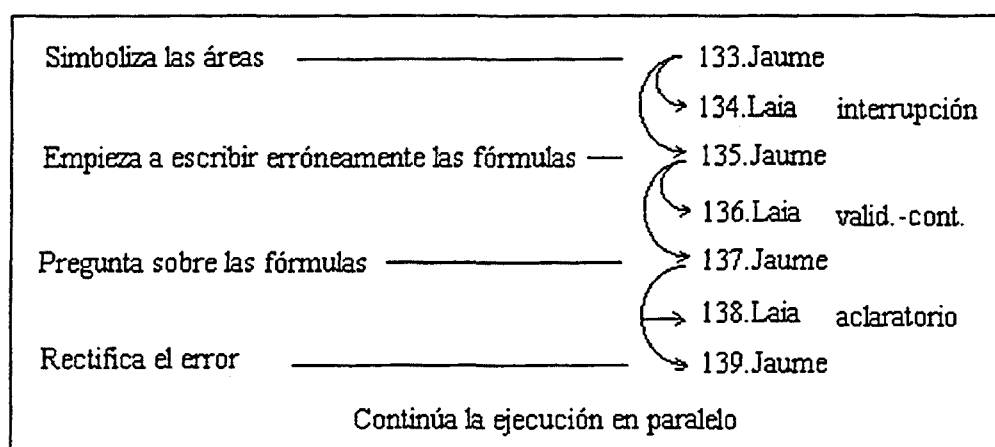


Figura 8.3.27

En la segunda, desde la intervención 140 hasta el final, los alumnos trabajan en paralelo. Esta situación de trabajo en paralelo se caracteriza porque Jaume continúa expresando en voz alta lo que escribe, mientras que Laia, por su cuenta y en silencio — excepto en la intervención 142 en la que hace una pregunta que no es atendida por su compañero—, escribe sus propias expresiones de las fórmulas. Al final, ambos alumnos llegan al mismo resultado e inmediatamente dan por finalizada la resolución.

8.3.3.3. Características generales del proceso de resolución

a) Papeles comunicativos de los alumnos

A la vista de las Tablas 8.3.5 y 8.3.6 no podemos establecer muchas diferencias entre los papeles comunicativos de cada uno de los alumnos. A pesar de ello, comentamos algunos aspectos que nos permiten hacernos una idea global del proceso de resolución desde el punto de vista comunicativo.

Si consideramos las cifras de ambas Tablas, observamos en Jaume una inclinación mayor a validar las aportaciones de Laia —6 validaciones de Laia, todas ellas tienen continuación por parte de Jaume, por 11 de Jaume, de las que 8 tienen continuación por parte de Laia—, lo que supone un mayor grado de atención de Jaume hacia su compañera,

aunque al final ambos alumnos contribuyen casi de igual forma a la continuación progresiva del diálogo —20 intercambios que Jaume continúa progresivamente (10 de dos intervenciones y 10 de tres), por 20 de Laia (11 de dos intervenciones y 9 de tres)—.

Una diferencia significativa que observamos en la Tabla 8.3.6 entre ambos alumnos es el número de intercambios aclaratorios repetitivos. Esa diferencia es consecuencia, principalmente, de la persistencia de Jaume en la confusión que se produce entre ambos (intervenciones 115 y 121) a la hora de considerar un trapecio u otro.

	COOPERATIVO	VALIDACIÓN	PREGUNTA-RESPUESTA	TOTAL
Laia-Jaume	16(9)*	3	2(1)	21(10)
Jaume-Laia	17(9)	0	2(2)	19(11)
TOTAL	33(18)	3	4(3)	40(21)

* Entre paréntesis indicamos los intercambios que aportan información nueva en el contexto global del proceso de resolución.

Tabla 8.3.5. Intercambios de dos intervenciones

	VALIDACIÓN-CONTINUACIÓN		ACLARATORIO		INTERRUPCIÓN		TOTAL	
	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.
Laia-Jaume-Laia	5(5)*	3	3(3)	1	1(1)	0	9(9)	4
Jaume-Laia-Jaume	6(4)	0	4(4)	4	2(2)	0	12(10)	4
TOTAL	11(9)	3	7(7)	5	3(3)	0	21(19)	8

* Entre paréntesis indicamos los intercambios que aportan información nueva en el contexto global del proceso de resolución.

Tabla 8.3.6. Intercambios de tres intervenciones

También podemos observar un alto porcentaje —15 de un total de 33— de intercambios cooperativos que no introducen informaciones nuevas en el contexto global del proceso de resolución. Buscando en el protocolo dónde se producen, llegamos a la conclusión de que la mayoría de ellos se dan en el episodio de lectura y tienen como referencia de fondo las diferentes partes del enunciado.

Los intercambios globalmente progresivos son mayoría —40 de un total de 69 (si incluimos los de dos y tres intervenciones)—, aunque bastantes no estén en la dirección de la solución que los alumnos encuentran al final, pero contribuyen a que el proceso sea bastante dinámico. Muchos de esos intercambios se producen en los episodios de exploración y análisis/exploración.

A pesar de que en el episodio de análisis/exploración hemos calificado como progresivos a muchos de los intercambios que lo componen, el dinamismo que hemos preconizado para la totalidad del proceso de resolución puede ser engañoso aquí si tenemos en cuenta las pausas que se producen —4 minutos aproximadamente—. Tras estas pausas los alumnos suelen introducir información nueva —intervenciones 41, 45, 58', 73 y 79— que, aunque en muchos casos no tenga repercusión posterior, sirve para relanzar e impulsar el proceso de resolución.

Por último, hemos observado que en dos momentos diferentes del protocolo —entre las intervenciones 15 y 21 y entre las 115 y 121— se producen confusiones como consecuencia de interpretaciones erróneas de Laia, en el primer caso, y de Jaume, en el segundo, sobre lo que su compañero o compañera quieren expresar. Ambas situaciones se afrontan de forma diferente, ya que mientras la primera origina un intercambio de desacuerdo, la segunda se resuelve mediante demandas de aclaraciones de Laia sobre lo que Jaume va diciendo.

b) Esquema de la sucesión de episodios

Una visión general del proceso de resolución, como la que mostramos en el esquema gráfico de la sucesión de episodios al final de este apartado, nos permite analizar los puntos clave y su repercusión en el desarrollo del proceso.

Observamos que los alumnos optan por el enfoque que hemos identificado como “aplicación del teorema de Tales” en el espacio básico del problema del triángulo (pág. 109). En dicho enfoque se pretende buscar la relación entre las bases y alturas de los triángulos para aplicar las fórmulas correspondientes.

Los alumnos no presentan ninguna alternativa a este enfoque. En las intervenciones 24, 36 y 38, Laia expresa la única forma de abordar el problema, que coincide con la que hemos descrito en el párrafo anterior. Jaume no rechaza las intervenciones de Laia, al contrario, se incorpora a ellas en la intervención 41, haciendo referencia explícita, por primera vez, a las bases y alturas de los triángulos.

Hemos identificado cuatro puntos clave en el proceso de resolución:

- La forma en que Jaume hace la pregunta de la intervención 45 —“Això d'aquí, quina figura és?”—, en la que se refiere a la figura FDBC, pero tapando con el dedo el triángulo ADF, lo que favorece que Laia identifique la igualdad de las alturas de los triángulos DBE y FEC sobre el lado BC.
- La reducción que Jaume hace del problema a la comparación de los segmentos CE y BE, lo que permite a los alumnos, después de haber identificado la igualdad de las alturas, tener un objetivo mucho más preciso.
- Las referencias a la proporción que Laia inicia en la intervención 84 —realizando incluso una figura alusiva al teorema de Tales—, que acaban con una pregunta suya (intervención 92) —“Aquest farà 3?”—, refiriéndose al segmento CE —. Esa identificación de Laia hubiera podido desembocar en la identificación de la relación entre CE y BE, de no ser por la forma de hacerla —sin convicción alguna— y por la forma que tiene de continuar su propia intervención —“No tinc ni idea!”—. Así, el redescubrimiento de tal relación queda aplazado hasta la intervención 129.

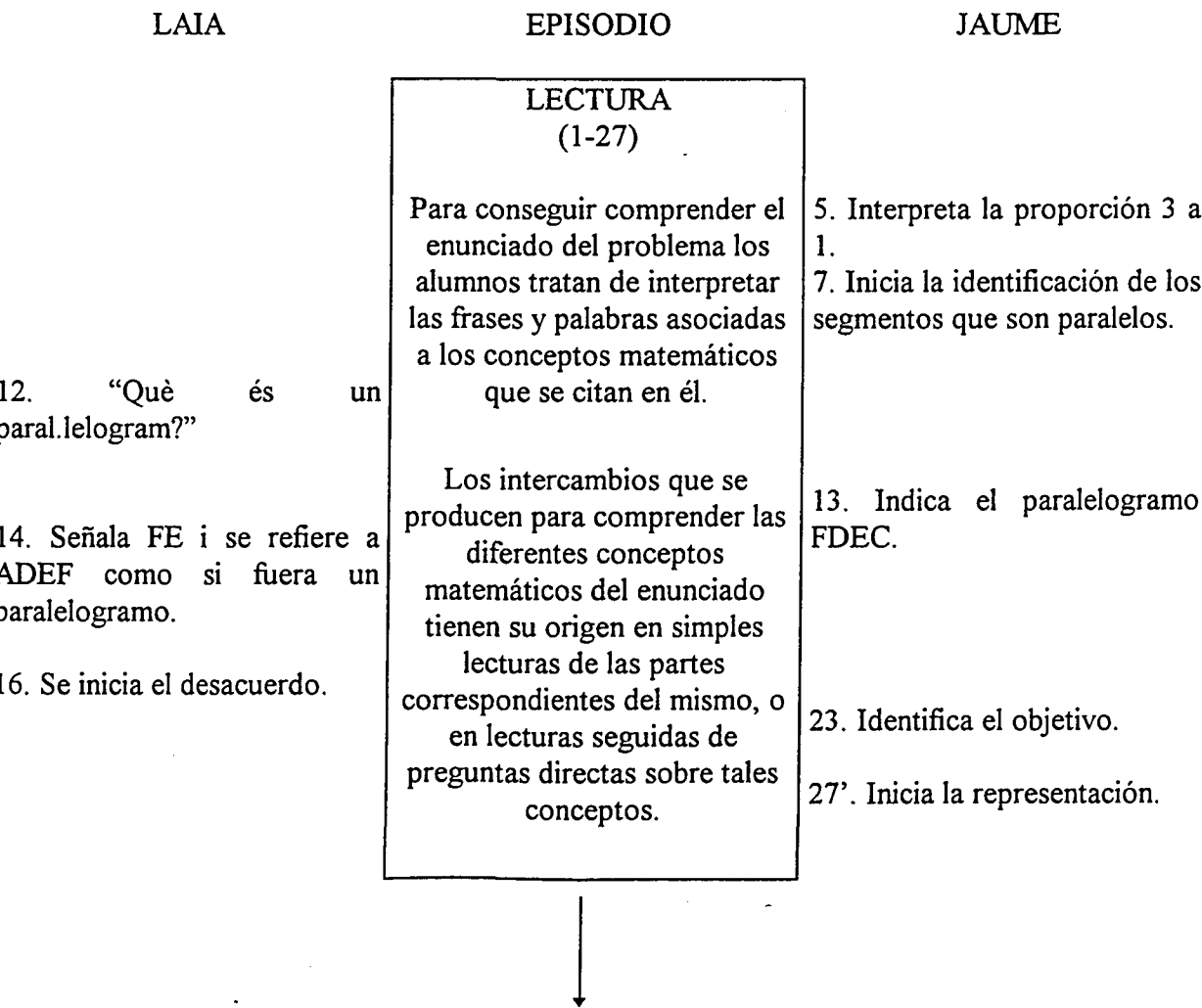
• La propuesta de Jaume (intervención 129) sobre la relación entre las bases de los triángulos despeja el camino de la ejecución.

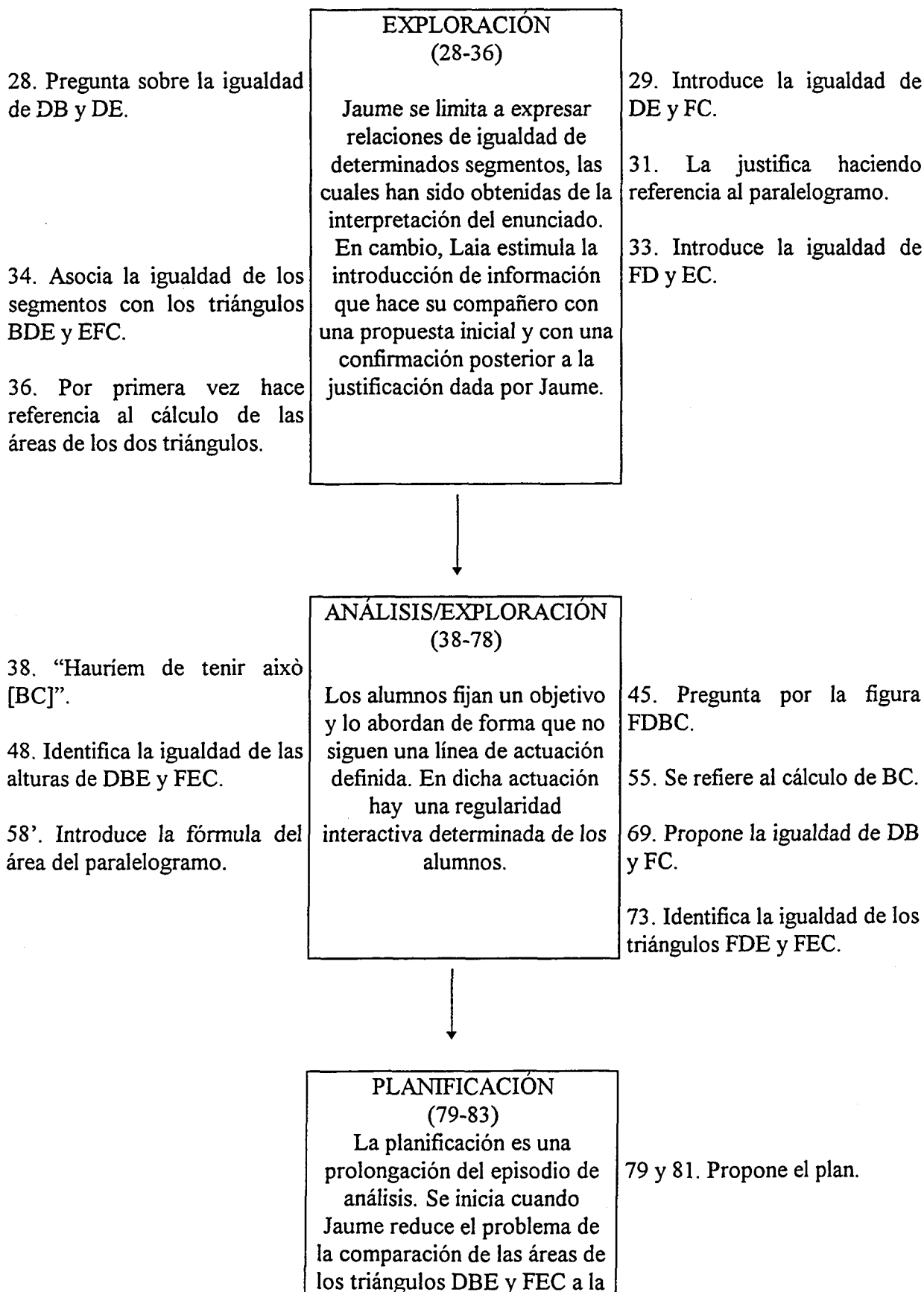
En cuanto a la evolución general de los episodios hemos de resaltar dos aspectos que nos parecen interesantes:

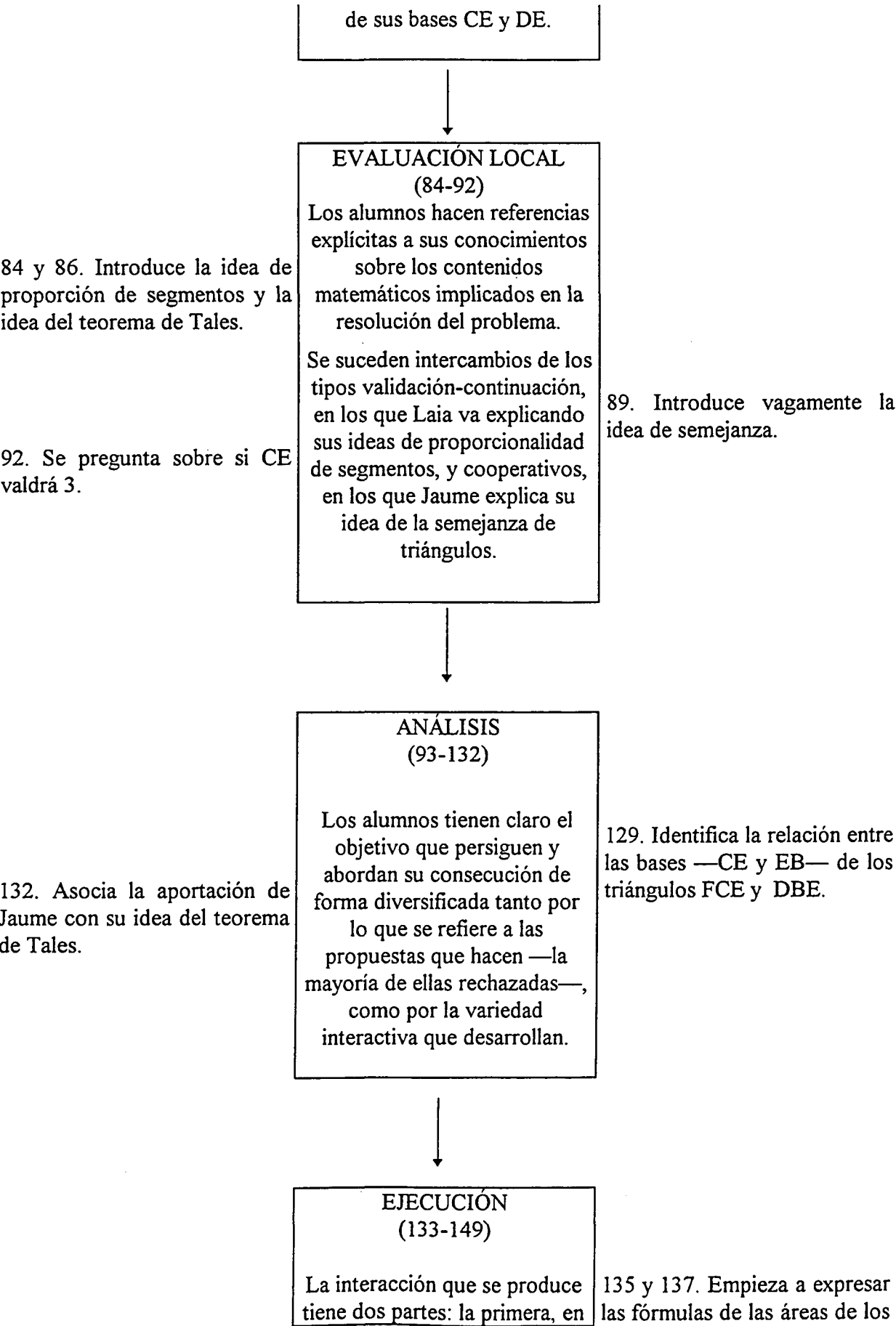
• La propuesta de planificación, en la que Jaume reduce el problema a la búsqueda de una relación lineal, que divide el proceso de resolución en dos partes. En la primera, tras un proceso de comprensión del enunciado, caracterizado por la interpretación de cada uno de los conceptos que aparecen en el mismo, los alumnos, buscan relaciones entre los elementos de las figuras sin un objetivo claro y de una forma bastante desordenada. En la segunda, el objetivo es claro, y la forma en que van introduciendo información nueva es más estructurada.

• Los alumnos no sienten la necesidad de realizar una verificación de la resolución, ni de la solución, ni siquiera del resultado, debido a la forma tan expresiva y convincente con que Laia acepta, en la intervención 132, la relación entre las bases de los triángulos que Jaume propone en la intervención 129, recordando las referencias que habían hecho anteriormente al teorema de Tales.

ESQUEMA GRÁFICO DE LA SUCESIÓN DE EPISODIOS







146. Obtiene el resultado.

la que Jaume, tras la introducción de información nueva del episodio anterior, lleva la iniciativa; y la segunda, en la que los alumnos trabajan en paralelo.

triángulos.

143. Despeja las alturas de las dos fórmulas y las iguala.

147. Obtiene el resultado.

8.3.4. Actuación de Laia y Jaume en la resolución del problema del cuadrado

8.3.4.1. Transcripción del proceso de resolución

1. Jaume: [Lectura].

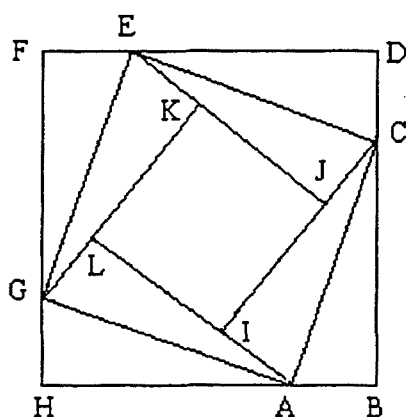


Figura 8.3.28

2. Laia: *A veure, a veure, poc a poc* [comienza a leer otra vez], *doblegant les quatre cantonades queda...*
3. Jaume: *O sigui, doblgant cap aquí* [señala figura del enunciado].
4. Laia: *Ah clar!, queda..., què queda?, queda aquest* [señalando el cuadrado rayado IJKL].
5. Jaume: *Però sobren trossos, no?*
6. Laia: *No, a mi també m'ho semblava, però en el cas d'aquest quadrat* [cuadrado BDFH] *el doblemguem per aquí* [AC], *aquest per aquí, aquest també* [indicando los lados por los que se dobla: AC, CE, EG y GA].
7. Jaume: *Vale.*
8. Laia: *Val, busca la raó entre els costats AB i BC* [continúa leyendo en voz baja].
9. Jaume: *Els costats AB i BC* [va leyendo y señalando] *dels triangles doblgats de forma que la raó entre les àrees d'aquest quadrat* [indica el rayado, IJKL] *i del primer* [indica el BDFH]. *Dibuixem-lo!* [comienza a hacer un cuadrado].
10. Laia: *== A veure, al quadrat gran, què li posem?, quin número li posem?, quina lletra? És l'àrea de l'1, per exemple, àrea de l'1 dividit entre l'àrea del quadrat petit* [IJKL], *que és el 2, ha de ser 1/4* [escribe: $\text{Àrea1}/\text{Àrea2} = 1/4$], *no?, a mi em dóna això.*
11. Jaume: *Sí. la del petit* [IJKL] *és l'1?*

12. Laia: *No, bueno depèn; entre l'àrea del quadrat ratllat* [lee el enunciado].
13. Jaume: *Sí, l'àrea del petit [IJKL] dividit entre el gran.*
14. Laia: *Ah sí!, val.*
15. Jaume: *Àrea del petit és A_1* [escriben los dos $A_1/A_2=1/4$ y continúa haciendo la representación, por separado].
16. Laia: [Empieza a hacer la Figura 8.3.29]. *És una mica difícil de dibuixar. M'he colat..*
17. Jaume: [Tacha la figura que había empezado y comienza la representación de la Figura 8.3.30]. *Una cosa així.*
18. Laia: *M'he colat una mica aquí* [continúa la representación], *no ho faig!* [la tacha]. *Vinga va!*

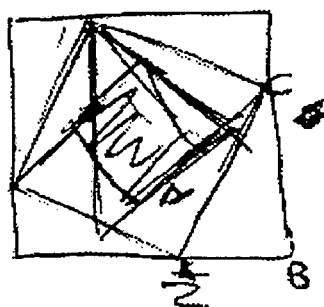


Figura 8.3.29

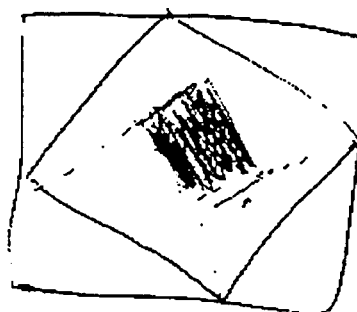


Figura 8.3.30

19. Jaume: *Aquest costat és x , aquest gran* [indica el lado HB].
20. Laia: *El BC?*
21. Jaume: *No, el gran* [HB].
22. Laia: *Ah vale!*
23. Jaume: *O sigui, x és igual a AC més AB, no, AC més...*
24. Laia: *==Un moment que agafem l'àrea del triangle petit, o sigui, l'àrea del triangle gros i la fem igual a 4* [se refiere al área del cuadrado BDFH].
25. Jaume: *No.*
26. Laia: *No?* [sorprendida].
27. Jaume: *No, em sembla que no. Es pot fer...? No, perquè llavors... l'àrea del quadrat gros és 4 vegades més que l'àrea de l'altre.*
28. Laia: *Ah! és clar.*
29. Jaume: *O sigui, ja no s'hauria de fer res.*
30. Laia: *Sí, perquè el que ens demana és que busquem... què busquem?, la raó entre aquests dos, entre aquest costat i aquest* [AB y BC] */ no sé.*
- 30'. Laia: *Això* [HB] *és igual que això* [BD] *i l'àrea del quadrat és $x^2 = 4$. O sigui, agafant aquest, això pot ser més coses* [refiriéndose a otros valores], *però això pot ser l'àrea...* [se refiere a que A_2 sea igual a 4].
31. Jaume: *Sí, una àrea és 4 i l'altra és 1, sí.*
32. Laia: *Per tant cada costat seria 2* [escribe 2 en el lado del cuadrado grande (BDFH)].
33. Jaume: *Ara x és igual a 2 i, o sigui, BC més AB, perquè això* [AB] *és igual a això* [CD], *és 2, no?*
34. Laia: *Sí.*
35. Jaume: [Escribe: $BC + AB = 2$], *y llavors aquest d'aquí* [IJ] *també és 1, no?*
36. Laia: *Sí.*

37. Jaume: *Sí, sí, perquè la divisió entre aquest i aquest [A₁ y A₂] ha de donar 0.25 [indica la razón entre las áreas]. Aquesta ha de ser 4 vegades més, segur! [escribe un 1 en el lado del cuadrado rayado].*
38. Laia: *Val <pausa(37)> [durante esta pausa los alumnos miran el enunciado].*
39. Jaume: *Estem fent 1/4 [se refiere al primer apartado del enunciado].*
40. Laia: *Sí, primer hem de fer que la raó sigui això, després que la raó sigui això, i després que la raó sigui això [se refiere a 1/4, a 1/9 y a 1/n, respectivamente]. O sigui, hem de fer el problema, primer, agafant 1/4 i, després, anar fent.*
41. Jaume: *Sí, l'hem de fer amb cada..., és a dir, fer com tres exercicis.*
42. Laia: *Em sembla que sí /*
- 42'. Laia: *Això és el mateix que això [indica CJ y CD].*
43. Jaume: *El què?*
44. Laia: *Aquesta cosa d'aquí és igual que això [CJ y CD]?, sembla més petit si t'hi fixes, [señalando en la figura del enunciado los segmentos AB y AI] és la mateixa distància, no?*
45. Jaume: *Sí, sí, perquè aquest triangle [ABC] és igual que aquest [ACI] i això [AB] i això... [AI].*
46. Laia: *Doncs això [ABC] ha de ser igual que això [ACI], així doncs, això [AB] és igual que això [AI], vale.*
47. Jaume: *Vale! I ara aïllem AB, AB és...*
48. Laia: *Com?*
49. Jaume: *Sí, d'aquí, d'això, de què AB+BC és 2, AB serà 2 menys BC, així només tenim BC.*
50. Laia: *[Escribe: 2-BC]. Ah vale!*
51. Jaume: *Sí, ara tenim..., tenim BC, tenim BC i prou.*
52. Laia: *Sí, però BC no l'hem de calcular pas. Ah!, però igualment és altre costat diferent, saps? Ens damana el vèrtex..., no sé.*
53. Jaume: *No, ja, però tot aquest costat [se refiere a x] és 2 i per fer la demostració no podem posar 2 al quadrat, que dona 4, hem de posar això, això, BC, BC... més 2 menys BC, que dona 2 al quadrat, dona igual [rien].*
54. Laia: *Però és que no l'hem de demostrar, hem de buscar la relació entre els costats AB i BC, pues ja està, pues és una quarta part, diria jo [dividiendo el segmento AB en tres partes].*
55. Jaume: *Com?, com?*
56. Laia: *Que és una quarta part també, no? És que no ho veig, a veure, si agafes AB...*
57. Jaume: *AB, sí és igual a això [indica AI y DC].*
58. Laia: *És igual que aquest tros d'aquí [DC], mires el costat [BD] i el divideixes entre aquest tros que hi ha [divide el lado BD, aproximadamente en 4 segmentos iguales a DC].*
59. Jaume: *Que és un quart ja ho sabem [se refiere a la relación entre las áreas], ara l'hem fer tot amb lletres, no?, i demostrar que...*
60. Laia: *== Ah!, no, no, és que això és diferent, això és l'àrea [indica A₂] i ens està demanant la relació entre els dos costats [AB y BC], però no té res a veure, o sigui, a part de...*
61. Jaume: *== Sí.*
62. Laia: *Això és res més que per agafar valors perquè t'està demanant...*
63. Jaume: *== Que la divisió entre això [DC] i això [CB] sigui ...*

64. Laia: *D'això [AB] entre això [BC], quant és? Hem de fer, no sé... / Trobar, a partir d'aquesta àrea... [área rayada], clar, tenim aquest costat [JK], pues podem trobar la..., mira sabem que això és AB [lo señala].*
65. Jaume: *Sí, i això d'aquí [EF] també.*
66. Laia: *L'àrea de..., no! L'altura d'aquest triangle [EJC] seria 1 més AB, llavors l'àrea d'aquest [EJC] seria, l'àrea seria, ja està, ja trobem aquesta [EC], i de què ens servirà?*
67. Jaume: *Perquè és aquest costat del quadrat [indica el cuadrado ACEG].*
68. Laia: *Sí, però no t'ho demanen / Sí!, llavors tindrem aquest [CA] i podrem trobar AB, ja el tindrem, una incògnita, llavors ja podrem trobar el quadrat i aquest [AB] ja el tindrem. A què no em segueixes?, és que no m'aclaro [rien]. A veure, vull dir, ens demanen que trobem... més o menys...*
69. Jaume: *La divisió entre...*
70. Laia: *Hem de trobar valors d'alguna cosa.*
71. Jaume: *Sí, que sigui, per exemple, $3/8$ o algo així.*
72. Laia: *Bueno, que això és igual a això ja ho tenim [indica $BC+AB=2$]. BC [repasa], ¡vale!, per això..., vale. Llavors aquesta àrea, hem de fer servir la del petit [IJKL], llavors l'1, 1 més AB [escribe: $1+AB$] és igual a aquesta cosa d'aquí [JE] que és igual a l'altura del triangle aquest [JEC]. L'altura, sí, vale, sí.*
73. Jaume: *Perquè llavors podem trobar aquest [CA], bueno, sabent aquest [EC] sabem aquest [CA] i després podem trobar algo, que aquest triangle... [ABC], alguna cosa [señalando los lados AB y BC], o no?/*
- 73'. Jaume: *Què hem de fer, posar un sistema agafant que la raó d'aquest [A_1] dividit per aquest [A_2] és $1/4$ i posant A i B [indica AB] B i C [BC] dividit per això [indica AB/BC] ha de ser igual a alguna cosa, posant A i B [indica AB] en funció de l'àrea o l'àrea en funció d'A i B [AB] per després resoldre el sistema, no? / Entens? / A veure, AB partit per BC és igual a x, posem, i ara l'àrea d'aquest [cuadrado BDFH] ho posem en funció dels costats, per exemple, AB al quadrat..., tu què faries?*
74. Laia: *Sí, [indicando lo que ha escrito], posem l'àrea en funció dels costats, és clar AB més BC, sí, sí.*
75. Jaume: *I ara fem que... [se refiere al lado IJ].*
76. Laia: *==Ja està!, ja està!, AB...*
77. Jaume: *Fem que això...*
78. Laia: *==Ah!, ja està!, fas AB...*
79. Jaume: *És 1 menys AB això que dius tu. L'àrea del de dintre [se refiere al cuadrado IJKL] és 1 menys AB.*
80. Laia: *==Però és que si fem, espera, si fem AB més CB al quadrat és igual a l'àrea del 2 [escribe: $(AB + CB)^2 = A_2$], que és igual a 4.*
81. Jaume: *Sí / això d'aquí [JK].*
82. Laia: *==Ja tenim una relació, llavors tenim que BC i AB / no, i llavors sabem que algo d'aquí dins... [se refiere a IJKL y señala el segmento KJ] i sabem que... /*
83. Jaume: *Aquest costat quant és? [se refiere al lado KJ]. És 1... [indica JK].*
84. Laia: *És 1 més AB.*
85. Jaume: *És 1 menys AB, no?*
86. Laia: *Ah!, ja està, 1 menys AB al quadrat és igual a 1 [ha escrito: $(AB+CB)^2 = \text{Àrea}_2=4$; $(1-AB)^2=1$]. Els costats hauriem de ficar AB és igual..., AB, i, per*

- exemple, i CB és igual a z , i ja està, res més, tenim dues incògnites i un sistema. Sabem que x més z al quadrat és igual a 4.
87. Jaume: *A veure, l'AB, per exemple, quant és?, és x , i CB és z [lo escriu], i la divisió entre això i això [A_1/A_2] és x , n'haurà tres [se refere a las incògnitas].*
88. Laia: *Sí, però és que primer trobem x i z i després ja ho dividim, x dividit per z serà igual a... Saps el que vull dir?, trobarem x , llavors ja podrem saber...*
89. Jaume: *Sí.*
90. Laia: *Llavors ens demana AB , que és y , y dividit entre z , perquè ja tindrem els valors, ja ens donarà un número.*
91. Jaume: *Sí.*
92. Laia: *Vinga!, una diferència al quadrat [se refere a $(1-y)^2$], s'ha de fer el quadrat del primer i tot això, no?*
93. Jaume: *Què fas, x més z al quadrat?*
94. Laia: *Fem aquesta [se refere a $(1-y)^2$] i ho aïllem.*
95. Jaume: *Sí.*
96. Laia: *Desenvolupem això.*
97. Jaume: *A veure, a veure, què has fet?, x més z què són?, x és...*
98. Laia: *x és AB , ai no!, x és..., a veure, on ho tinc.*
99. Jaume: *És y [intenta empenyar en otro folio].*
100. Laia: *Merda!, no! [ha puesto x en lugar de y]. Sí, no, no, que sí, que sí. Hem d'apuntar-lo [rectifica, pone y en lugar de x en la primera ecuación del sistema y le queda: $(y+z)^2=4$; $(1-y)^2=1$].*
101. Jaume: *Ho torno a copiar, la y , la x , fem que la y ..., AB és y .*
102. Laia: *BC és z , i AB és y , ja està.*
103. Jaume: *y més z al quadrat és igual a 4, i 1 menys y al quadrat és igual a 1, vale, és això.*
104. Laia: *Jo et volia dir una cosa, això [$(1-y)^2$] quan l'eleves al quadrat és el quadrat del primer i tot això, no?*
105. Jaume: *Sí, bueno fem el de la y que només hi ha una incògnita, i aïllem la y [se refere a la resolució de la ecuación $(1-y)^2=4$] y la substituïm.*
106. Laia: *== En aquesta [se refere a la ecuación $(y+z)^2=4$], vale, ho desenvolupem ja.*
107. Jaume: *Desenvolupem el de sota i aïllem la y , ja que no hi ha més que y , aquí no hi ha z .*
108. Laia: *Vale [cada uno por separado escriben: $1+y^2-2y=1$], y al quadrat menys $2y$ és igual a 0.*
109. Jaume: *L'1 es pot tatxar, no?, sí.*
110. Laia: *I per y menys 2 és igual a 0. Hi ha dues solucions [rien]. Què estic fent!, em dona... [le ha dado $y(y-2)=0$].*
111. Jaume: *El de la y , que és zero, no pot ser, és impossible.*
112. Laia: *Un moment [tachando $y=0$], pues y és igual a 2.*
113. Jaume: *y igual a 2, i la y què és?*
114. Laia: *La y és l'AB.*
115. Jaume: *AB que és això [indica el segmento AB], és això.*
116. Laia: *Això no és lògic / no, no.*
117. Jaume: *AB , el seu quadrat és igual a 4 / [comprueban, miran si la solució es viable].*
118. Laia: *[Desilusionada] AB , però és que ja teníem que AB i BC , això [indica $AB+BC=2$] no l'hem fet servir, que BC ..., o sigui que en principi AB és igual a*

2, y més z és igual a 2, pues la y és igual a 2 menys z. Ah!, és que aquí, és clar, ens havia de sortir...

119.Jaume: No, però l'hem fet bé això [repasa el sistema], no? /

120.Laia: Però, no entens?, es pot agafar el camí aquest de l'àrea [indica $(AB+CB)^2 = \text{Area}2=4$] perquè 2 al quadrat també és 4, com agafar això que ja teníem $[BC+AB=2]$, i com donaria? Això és allò de l'àrea [indica $(y+z)^2=4$], és clar... No, va, va que no anavem tan... va. A veure, què sabem [haciendo una raya para separar lo anterior], sabem que AB, que l'hem dit y, més la z, és que això és veritat, és igual a 2, l'àrea és 4.

121.Jaume: Sí.

122.Laia: Llavors sabem que l'1... [indica ED], hem dit que això [AB] és igual que això [CD].

123.Jaume: No, és el que hem fet malament, imagina que això és 2 [HB] i això d'aquí [DE] ja no és la meitat d'això [AB. Quiere decir el doble], no?, a veure...

124.Laia: És clar. Home, sí que ho és [indica BC y CD y mide con el dedo la longitud de ambos segmentos], no, sí! Sí que ho és, mira, això és òptica [vuelve a comparar la longitud de los segmentos con el dedo], veus?, arriba al nus, sí ho és.

125.Jaume: Sí?

126.Laia: És òptica!

127.Jaume: Així, l'hem fet bé.

128.Laia: Clar home! Ah!, i d'aquí a aquí [señala DF], ah no!, res, res / Va, vale, imaginem que sí, perquè no tenim res més, no?, i llavors tens que 1, això és 1 [ED], menys aquest trosset [DC], és que aquí no sé què hem fet [señala el sistema que han resuelto].

129.Jaume: És que l'hem fet bé.

130.Laia: És que hem d'anar una mica al tanto, hem ficat que 1 menys aquest tros [AB].

131.Jaume: Menys..., y què era?

132.Laia: y és AB. És igual a l'àrea d'això, no està bé, saps?

133.Jaume: Has posat 4 i era 2.

134.Laia: No, no, no és això.

135.Jaume: Sí.

136.Laia: No, no, no és aquí el fallo, mira, hem fet, mira, això és l'àrea [indica IJKL] i hem ficat que l'àrea d'aquest quadrat [IJKL] és igual a 1 menys això [DC], és clar, això és 1, l'àrea.

137.Jaume: Sí, sí.

138.Laia: O sigui, 1 és igual a 1 al quadrat [rien].

139.Jaume: A veure, aquest costat quant és? [ED], és 1.

140.Laia: Hem dit que podíem trobar el costat aquest [BC], fent 1 més AB [indica DC], saps el que vull dir?, i després trobem aquest [DC], i això [IA y AB] ja ho sabem, és AB.

141.Jaume: AB.

142.Laia: [Indica el lado AB que se dobla y el original] i llavors trobem aquest [BC] y este [AB], que ens faria trobar aquest [AC], que ens faria trobar aquest [BC].

143.Jaume: Trobem aquest costat d'aquí [AC].

144.Laia: Perquè..., espera't un moment, CB és igual a 1 més AB [escribe].

145.Jaume: Sí.

- 146.Laia: *I CB és z, és igual a 1 més..., no pot ser, espera, sí, CB és z que és això [indica el lado CB], això és igual a això [AB y AI], perquè aquests dos són iguals [AB y AI].*
- 147.Jaume: *Sí, aquest i aquest, sí.*
- 148.Laia: *O sigui, aquest tros [CB] sí que és igual a aquest [IC]. Aquest tros és igual que aquest [repite].*
- 149.Jaume: *Sí, sí.*
- 150.Laia: *O sigui, que CB és igual a 1 més això [AB], que és igual a això [AI. Escribe el sistema: $y + z = 2$; $z = 1 + y$].*
- 151.Jaume: *Vale [copia el sistema].*
- 152.Laia: *Sí, vale, pues ja està y més z és igual a 2; z igual a 1 més y, vale, y és igual a 2 menys z [resolviendo el sistema], z és igual a 1 més 2 menys z, 2z és igual a 3, z és igual a $3/2$, mira que bé!, i la y, la y, $3/2$, ah no!, i la y és 2 menys $3/2$.*
- 153.Jaume: [Resuelven el sistema por separado]. *z és $3/2$, t'ha donat [comparando su resultado con el de Laia], i la y?*
- 154.Laia: *La y, la busques, 4 menys $3/2$ és igual..., y és igual a $1/2$, pues podria ser, no?, no!, no pot ser.*
- 155.Jaume: *z era CB [no atiende a lo que dice Laia].*
- 156.Laia: *Ens dóna al revés, com ens dóna? /*
- 157.Jaume: *Ja, ens dóna bé, AB és y.*
- 158.Laia: *Que AB sigui $1/2$ i això [BC] sigui $3/2$... Ah!, bueno, és clar [mirando la figura del enunciado].*
- 159.Jaume: *És clar, que això sigui $1/2$ i això sigui $3/2$ ja ho tenim. Ara hem de dividir això [los valores obtenidos], no? O sigui, la raó entre AB dividit per BC, o sigui, $1/2$ dividit per $3/2$ [lo divide].*
- 160.Laia: *Sí [lo escribe].*
- 161.Jaume: *Ara posem, l'escrivim amb lletres, AB partit per BC és igual a $1/3$, solució [lo escribe].*
- 162.Laia: *Ara què?, fem el b.*
- 163.Jaume: *Tornem una altra vegada a fer el mateix. Ara és cada cop [se refiere a los apartados b y c].*
- 164.Laia: *Sí.*
- 165.Jaume: *CB, bueno el mateix, sabem que això és 1 [ED], però no, no pot ser això que hem fet abans de l'àrea d'aquesta manera.*
- 166.Laia: *Sí, sí que està bé, em sembla.*
- 167.Jaume: *Però si ara diu que el 9, o sigui, que això [BFGH] seran 9 vegades més gran que això [IJKL]. Ah!, també pot ser i dóna aquesta miniatura de quadrat [señala un cuadrado pequeño dentro del IJKL] per molt més gran que sigui això [BDFH].*
- 168.Laia: *Sí, bueno, la relació del gran al petit [escribe: $A1/A2=1/9$]. l'àrea del gran és 9 vegades més gran que la del petit.*
- 169.Jaume: *Així doncs, 1 més y és igual, a quant?, a z?, i com hem fet això?*
- 170.Laia: *z era..., AB era sempre y.*
- 171.Jaume: *z més y és igual a 2, ja està!, i què donava això? Ah no! [tacha el 2 y pone un 3], z més y és igual a 3 [escribe: $z + y = 3$].*
- 172.Laia: *[Escribe: $1 + y = z$]. L'àrea del petit és aquest costat al quadrat [KJ].*
- 173.Jaume: *Ja està, és canviar el 3 perquè és 9 vegades.*
- 174.Laia: *3 per 3, 9, vale, sí [resuelven el sistema por separado].*

- 175.Jaume: *z és igual a 1 més y.*
- 176.Laia: *2y és igual a 2, y és igual a 1, no?*
- 177.Jaume: *Què he fet ara aquí?, no sé què he fet* [mientras resuelve el sistema: $1 + y = z$; $z + y = 3$. Escriben por separado].
- 178.Laia: *Sí, aquesta ja està aïllada, la z* [se refiere a la ecuación $1 + y = z$], *que és 1 més y més y igual a 1 més 2y.*
- 179.Jaume: *Ah és clar!* [tachando lo que antes había escrito]. *1 més y més y és igual a 3; 2y és igual a 2.*
- 180.Laia: *I ara tornem a dividir.*
- 181.Jaume: *y és igual a...?*
- 182.Laia: *No, y és igual a 2, z és igual a..., no!, y és igual a 1 i z és igual a 2. I ara tornem a dividir.*
- 183.Jaume: *Què era y dividit entre z?*
- 184.Laia: *Sí, y dividit entre z, sí, és 1 partit per 2* [escribiendo: $\frac{y}{z} = \frac{1}{2} = \frac{AB}{BC}$].
- 185.Jaume: *Un mig, ja està!*
- 185' Jaume: *Ara el c és 1, n; 1, n, era 1 més y és igual a z i z més y és n* [escribiendo el sistema: $1 + y = z$; $z + y = n$] *y quedarà que 1 més y més y és igual a n* [resolviendo].
- 186.Laia: *1 més 2y.*
- 187.Jaume: *2y és igual a n menys 1, y és igual a n dividit 2.*
- 188.Laia: *Es igual a n menys 1, no? Com passa aquí?* [se refiere al 1].
- 189.Jaume: *Sí* [rectificando].
- 190.Laia: *n menys 1 partit per 2, llavors z, la z és 1 més n menys 1 partit per 2* [escribe en su folio].
- 191.Jaume: [Segue resolviendo por su cuenta].
- 192.Laia: *La z és 1 més n partit per 2. Fas el mínim que és 2* [por separado].
- 193.Jaume: *Jo he passat aquest* [no atiende].
- 194.Laia: *Fas el mínim que és 2; 2 dividit entre 1, 2; 2 entre 2, 1; 2 més n menys 1 que es 1 més n, dividit entre 2.*
- 195.Jaume: *La y entre la z seria: $\frac{n-1}{2} : \frac{1+n}{2}$, seria: $\frac{n-1}{1+n}$.*
- 196.Laia: [Escribe el resultado: $\frac{\frac{n-1}{2}}{\frac{1+n}{2}} = \frac{n-1}{1+n}$; $\frac{AB}{BC} = \frac{n-1}{1+n}$, sin mirar lo que hace Jaume].

8.3.4.2. Microanálisis del proceso de resolución

A) Episodio de lectura

El episodio de lectura abarca las intervenciones 1 a 18, con un breve inciso entre las intervenciones 10 a 15, en el que los alumnos identifican simbólicamente las áreas de los cuadrados IJKL y BDFH (A_1 y A_2) y expresan la proporción a la que se refiere el enunciado ($\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{4}$).

Estamos, pues, ante un episodio de lectura interrumpido por uno muy breve de análisis —identificación simbólica de elementos—, cuya finalidad es ayudar a interpretar mejor los datos del problema.

En cuanto a la lectura propiamente dicha distinguimos dos partes: la anterior a la identificación simbólica —intervenciones 1 a 9—, en la que los alumnos dialogan de forma cooperativa sobre las acciones de doblar las cuatro esquinas del cuadrado BDFH y la interpretación de lo que resulta; y la de después de la identificación simbólica —intervenciones 16 a 18—, en la que los alumnos tratan de copiar por separado la figura del enunciado.

En este episodio observamos que los alumnos sólo se refieren al objetivo del problema —buscar la razón $\frac{AB}{BC}$ — en la intervención 9. Esa escasa reflexión sobre el objetivo puede repercutir negativamente en el resto del proceso si tenemos en cuenta la forma de presentar el enunciado del problema por la que hemos optado (véase apartado 5.3.4). En cambio, prestan mucha atención a la representación de la figura que acompaña al enunciado, aunque Laia, al final, no la consiga.

La identificación simbólica de las áreas de los cuadrados tiene su origen en una intervención directiva de Laia en la que pregunta sobre la letra que asignarán a cada área —“Què li posem? (...), quina lletra?” (intervención 10). Esa intervención interrumpe la acción anterior de Jaume en la que instaba a copiar la figura del enunciado —“Dibuixem-lo!”—.

B) Episodio de análisis

El episodio de análisis se extiende desde la intervención 19, en la que Jaume identifica simbólicamente el lado del cuadrado grande (BDFH), hasta la pausa de la intervención 38.

Los alumnos introducen en este episodio cinco informaciones nuevas —algunas de las cuales inciden positivamente en el desarrollo posterior del proceso (véase el apartado 8.3.4.3)—, que son las siguientes por orden de aparición:

- La identificación simbólica del lado del cuadrado BDFH —“Aquest costat és x , aquest gran [HB]” (intervención 19)—.
- La asignación del valor 4 al área del cuadrado grande (A_2) —“Un moment que agafem (...) l'àrea del triangle gran i la fem 4” (intervención 24)—. Como consecuencia de ello, Laia asigna el valor 2 al lado HB del cuadrado BDFH (intervención 32).
- La expresión del lado x como suma de los lados BC y AB (intervención 33).
- El reconocimiento de la igualdad de CD y AB (en la misma intervención 33).
- La asignación del valor 1 al lado IJ del cuadrado IJKL (intervenciones 35 y 37).

Como podemos observar, Jaume (intervenciones impares) tiene más protagonismo que Laia en la introducción de información, no sólo en cuanto al número de aportaciones nuevas que realiza, sino por la forma en que se desarrolla el diálogo después de cada una de ellas. Así, las aportaciones de Jaume son, en todos los casos, inmediatamente validadas por Laia, es decir, están inmersas en intercambios del tipo validación-continuación o validación. En la intervención 24, Laia reproduce la particularización que introducía en la resolución del problema 10 de la prueba inicial, al inferir entonces las igualdades $A_1 = 5$ y $A_2 = 8$ de la

proporción $\frac{A_1}{A} = \frac{5}{8}$. Esa intervención origina un intercambio de desacuerdo en el que se pone de manifiesto la falta de comprensión del enunciado por parte de Jaume —“O sigui, ja no es tindria que fer res” (intervención 29)— al confundir el objetivo del problema con el cálculo del área de los cuadrados. Al final, Jaume acepta y asume (intervenciones 31 y 37) la información aportada por Laia.

En este episodio ya podemos intuir la inclinación de los alumnos por un enfoque algebraico, que consiste en obtener los lados de los cuadrados a partir de la relación que hay entre sus áreas y en buscar relaciones entre los segmentos que componen dichos lados.

Como resumen del análisis de este episodio podemos decir que:

- Hay un mayor protagonismo de Jaume no sólo por las aportaciones que realiza, sino por la forma de asumirlas —Laia las valida, sin más, mientras Jaume las discute, aunque finalmente las acepta y las hace suyas—.

- Podemos observar que los alumnos se inclinan por un enfoque algebraico, que consiste en asignar valores concretos a las áreas — $A_1=1$ y $A_2=4$ —, de acuerdo con la interpretación que hacen de la proporción $\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{4}$, para obtener el valor de sus lados y, a partir de ellos, buscar la relación entre los segmentos AB y BC.

C) Episodio de lectura

La pausa de la intervención 38 evidencia una situación de bloqueo a la que los alumnos llegan después de la asignación de valores concretos a las áreas de los cuadrados y a sus lados. Al final de dicha pausa, los alumnos vuelven a leer el enunciado en silencio y concretan, en dos intercambios cooperativos y uno de validación (intervenciones 38 a 42), la forma de afrontar la resolución del problema.

D) Episodio de análisis

El episodio de análisis se inicia con la vuelta de los alumnos a la identificación de igualdades entre los segmentos de la figura del enunciado (intervención 42'). Tratan de buscar un sistema de ecuaciones que les permita obtener los valores de AB y BC para encontrar su razón. Esta búsqueda la hacen a partir de las condiciones del problema, asignando los valores 1 y 4 a las áreas de los cuadrados, de acuerdo con la interpretación que han hecho de que la razón entre dichas áreas sea de $\frac{1}{4}$.

Este episodio lo podemos dividir en cuatro partes:

- En la primera —entre las intervenciones 42' y 46—, que se desarrolla de forma cooperativa, los alumnos utilizan la igualdad de los triángulos que se doblan —ABC y ACI— para justificar las igualdades que proponen —CJ con CD y AB con AI—.

- En la segunda —entre las intervenciones 47 y 53—, Jaume utiliza las igualdades anteriores como argumento para volver a proponer la expresión $AB + BC = 2$ y despejar de ella AB. El desarrollo posterior, sustituyendo $AB = 1 - BC$ en la expresión de la que habían

partido $-(AB + BC)^2 = 4-$, les lleva a una situación de bloqueo de la que intentan salir identificando el objetivo que persiguen (intervención 54).

- En la tercera —entre las intervenciones 54 y 60—, Laia establece una conjetura al proponer que la razón entre los lados AB y BC sea igual que la de las áreas, es decir, 1 a 4. Laia comprueba la propuesta que hace midiendo con los dedos la relación entre DC y CB. Jaume la acepta provisionalmente, pero pide su demostración “con letras” —“Que és un quart ja ho sabem, ara l’hem de fer tot amb lletres” (intervención 59)—.

- En el resto del episodio —entre las intervenciones 62 y 74—, los alumnos hacen intentos por encontrar los valores de EC a partir del área del triángulo EJC, y los de CA a partir del cuadrado ACEG (intervenciones 67 y 74), pero en ambos casos los abandonan. En el primero, por una reflexión de Laia: “I perquè ens serveix?” (intervención 66); y en el segundo, porque Jaume introduce una propuesta de planificación en la intervención 73’.

En todo el episodio observamos que las iniciativas de cualquiera de los alumnos son aceptadas por el otro. Eso es debido a la falta de ideas para salir de los bloqueos en los que se encuentran. Las continuas referencias que los alumnos hacen a lo largo del episodio al objetivo del problema (intervenciones 54, 60, 63 y 64, y 70) son el recurso que utilizan cuando no saben cómo seguir.

A pesar de la aceptación inicial de las iniciativas, notamos en Jaume una mayor tendencia a justificar las informaciones que introduce él o su compañera (intervenciones 45 y 59). Por el contrario, Laia se inclina más por validar las informaciones, basándose en las apreciaciones visuales de las figuras (intervenciones 44 y 58).

Las informaciones que se introducen originan inicialmente intercambios de los tipos validación-continuación o aclaratorio y se continúan con breves diálogos cooperativos. El esquema de sucesión de intercambios que mostramos en la Figura 8.3.31 se da a lo largo de todo el episodio, coincidiendo sus límites con cada una de las partes en que lo hemos dividido.

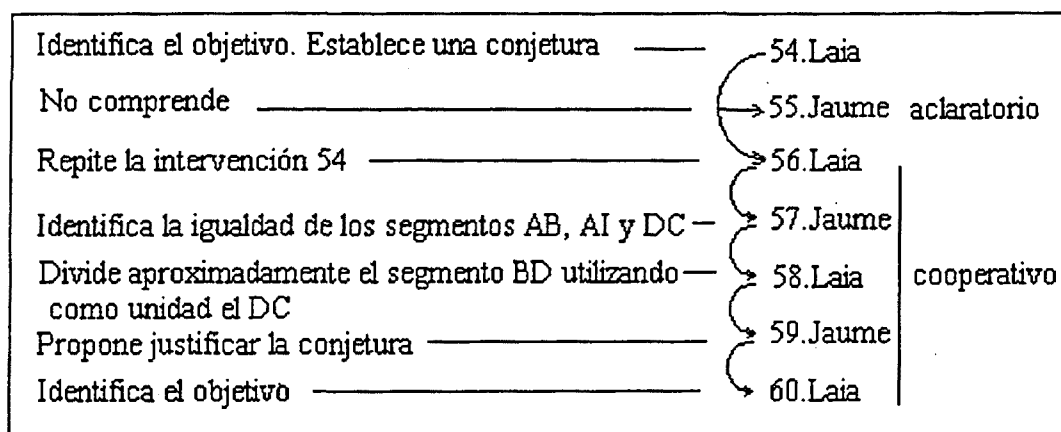


Figura 8.3.31

E) Episodio de planificación/ejecución

La propuesta de planificación que Jaume hace en la intervención 73’, y que Laia resume en la 74, es el comienzo de este episodio, que se extiende hasta la intervención 112.

A pesar de que la planificación está definida en la intervención 73' y de que, a partir de ese momento, los alumnos se dedican a resolver los sistemas de ecuaciones que han planteando, hemos calificado el episodio como planificación/ejecución porque en determinados momentos del mismo (intervenciones 88, 90, 92, 104, 105 y 107) los alumnos vuelven a hacer previsiones sobre cómo resolverán los sistemas que plantean y qué harán después con los resultados que obtengan.

Lo que hemos calificado como planificación —intervenciones 73' y 74— no es más que una simple vuelta de los alumnos a la propuesta que habían hecho en episodios anteriores. Esa propuesta estaba relacionada con la interpretación — $A_1 = 1$ y $A_2 = 4$ — que hacían de la proporción $\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{4}$, a la que Jaume añade ahora la idea vaga de introducir en el sistema la razón $\frac{AB}{BC}$ como incógnita.

La ejecución posterior se ajusta a esta planificación, pero los alumnos expresan incorrectamente el área del cuadrado IJKL en función de los segmentos AB y BC. Además, la identificación simbólica que hacen en la planificación — $\frac{AB}{BC}$ lo representan por “x”— contribuye a crear más confusión en el primer sistema que plantean (intervenciones 86 y 87).

El diálogo que sigue a la propuesta de planificación se caracteriza por las continuas interrupciones de Laia, quien no sólo no aporta nada, sino que no deja que Jaume lo haga.

Estas interrupciones acaban cuando Jaume pregunta por el lado KJ del cuadrado IJKL —“Aquest costat quant és?”— en la intervención 83. Esta intervención inicia el planteamiento de un primer sistema de ecuaciones de forma doblemente errónea: la primera ecuación está equivocada, debería ser $(BC-AB)^2 = 1$ (intervenciones 84 a 86), y en la segunda Laia se confunde de incógnita al poner x en lugar de y (intervención 87).

Jaume provoca la rectificación del segundo de los errores con la pregunta: “A veure, què has fet?, x més z què són?, x és...” (intervención 97). Tras esa rectificación los alumnos resuelven el sistema que resulta.

Las dudas que genera el resultado que obtienen dan paso a un nuevo episodio que hemos calificado como verificación, en el que rectifican el primero de los errores que identificábamos anteriormente.

Destacamos a continuación las tres características que consideramos más relevantes de este episodio:

- El diálogo que se produce tras la planificación se caracteriza por una sucesión de cuatro intercambios en los que Laia interrumpe las intervenciones de su compañero. Durante dicho diálogo, los alumnos no aportan ninguna información nueva.
- Las intervenciones directivas de Jaume en momentos clave tienen una repercusión positiva en el desarrollo del episodio. Así, por ejemplo, la intervención 83 —“Aquest costat quant és?”— provoca el inicio del planteamiento del sistema, la intervención 87 —en la que identifica tres incógnitas— provoca una explicación, bastante incomprensible, de Laia sobre qué encontrarán y lo que harán con lo que encuentren, y la intervención 97 —“ x més z què són?, x és...”— es el origen de la rectificación de uno de los errores que habían cometido.

- A pesar del control que Jaume ejerce en determinados momentos, observamos que, en otros, acepta las informaciones que introduce Laia sin profundizar en ellas, por muy difíciles de interpretar que sean (intervenciones 88 y 90), limitándose a validar lo que va diciendo su compañera. Esas validaciones sin reflexión son el motivo de que, durante una parte del episodio, los alumnos no perciban los dos errores que cometen.

F) Episodio de verificación

Los alumnos inician el episodio de verificación de forma cooperativa —intervenciones 113 a 118—. En estas intervenciones comparan el resultado que han obtenido — $AB = 2$ — con la idea de que el área del cuadrado grande sea 4, lo que les lleva a desconfiar de dicho resultado. Al final de ese diálogo cooperativo, Laia toma la iniciativa empezando una tímida revisión del planteamiento del sistema de ecuaciones, en la que propone la utilización de la ecuación $BC + AB = 2$ en lugar de la $(BC + AB)^2 = 4$.

El resto del episodio se caracteriza por una sucesión de intercambios de los tipos validación-continuación y aclaratorios encabezados por Laia, quien comprueba, midiendo con los dedos, una relación entre segmentos introducida por Jaume —intervenciones 124 a 130—. Un intercambio de desacuerdo (intervenciones 133 a 138), en el que los alumnos inician una revisión del sistema que han propuesto, pone fin al episodio.

En un intento de resumir, diremos que las características que nos parecen más relevantes de este episodio son :

- La evaluación cooperativa del resultado que los alumnos obtienen, lo cual les lleva a desconfiar de él y a iniciar una revisión de los pasos que han seguido para plantear el sistema y para resolverlo. No hemos podido identificar en la actuación de los alumnos un esquema claro de verificación, sino, más bien, intentos desordenados de buscar dónde está el error que cometen.

- El intento de Laia de sustituir una de las ecuaciones del sistema, precisamente la que tiene bien planteada.

- La forma que tiene Laia —midiendo con los dedos— de comprobar la relación entre dos de los segmentos de la figura del enunciado, lo que pone de manifiesto la poca rigurosidad de sus procedimientos y la asociación que hace de la figura con las relaciones concretas de sus elementos.

- La revisión de la segunda ecuación que Laia inicia —“És que hem d'anar una mica al tanto...”(intervención 130)— produce un desacuerdo en la identificación del fallo que los alumnos cometen.

G) Episodio de ejecución (del apartado a)

Jaume da por finalizadas las risas que provoca la intervención 138 preguntando sobre el valor del segmento ED (intervención 139) y respondiéndose él mismo. A pesar de que esa intervención no es atendida por Laia, genera un cambio en la actuación de ambos alumnos, y se puede considerar como el inicio del episodio de ejecución.

Entre las intervenciones 140 y 149, Laia vuelve a expresar las igualdades entre los segmentos que habían obtenido en episodios anteriores y a identificar simbólicamente los segmentos que consideran como incógnitas. Esa forma de relanzar el proceso de resolución

tiene sus frutos en la intervención 150 en la que Laia plantea, ahora de forma correcta, el nuevo sistema de ecuaciones. La resolución en paralelo (intervenciones 152 y 153) de dicho sistema acaba cuando Jaume intenta contrastar los valores que acaban de obtener para los segmentos AB y BC (intervención 153 y 155) y cuando Laia duda sobre ellos (intervención 156). El episodio termina en las intervenciones 159 y 161, en las que los alumnos calculan la razón $\frac{AB}{BC}$ y proponen iniciar la resolución del apartado *b*.

En los párrafos siguientes resaltamos las características de este episodio que nos parecen más relevantes, tanto desde el punto de vista de los contenidos de las intervenciones que se producen, como del papel comunicativo que asumen los alumnos.

En primer lugar, destacamos la forma de aproximarse al planteamiento del nuevo sistema. Esa aproximación se caracteriza por un repaso previo de las igualdades obtenidas en episodios anteriores, que sirve a los alumnos para relanzar el proceso de resolución. Ese repaso lo podríamos haber calificado como evaluación local, pero no lo hacemos así por la conexión tan directa y tan seguida que tiene con el planteamiento del sistema.

Una situación de relanzamiento del proceso de resolución similar a la que analizamos aquí se produce en la resolución que Rosa y Anna hacen del problema del triángulo (p. 213), aunque ambas situaciones se diferencian por el papel comunicativo que asumen los alumnos. En el caso de Rosa y Anna el diálogo era cooperativo, en el caso que nos ocupa ahora Jaume asume el papel de validar las aportaciones de Laia, mientras que ésta se responsabiliza de continuar el diálogo, que acaba con el planteamiento del nuevo sistema de ecuaciones (Figura 8.3.32).

En segundo lugar, es interesante destacar no sólo el trabajo en paralelo —ya habitual— que se produce mientras los alumnos resuelven el sistema, sino el contraste de resultados que Jaume intenta hacer al final del mismo —“*z és 3/2, t’ha donat, i la y?*” (intervenciones 153 y 155)—, que queda un poco diluido por las dudas de Laia sobre los valores que han obtenido para los segmentos AB y BC.

Y por último, destacamos que las dudas a las que hacíamos referencia en el párrafo anterior son provocadas por la pregunta que Laia hace en la intervención 156: “*Com ens dóna?*”, en la que no sabe si los valores de AB y BC están cambiados o no. Tras un breve diálogo cooperativo, Laia acepta el resultado al observar en la figura del enunciado que BC es un segmento mayor que el AB.

Los alumnos dan por bueno el resultado que obtienen y pasan directamente a la resolución del apartado *b*. No se produce, por tanto, una evaluación de dicho resultado, en contraste con la verificación que se producía después del episodio de ejecución anterior.

H) Episodio de ejecución (del apartado *b*)

Laia inicia la resolución del apartado *b* en la intervención directiva 162 —“*Ara què?, fem el b*”—, pero Jaume es el que asocia la ejecución que van a iniciar con la del apartado *a* —“*Tornem una altra vegada a fer el mateix*” (intervención 163)—, desligando la relación concreta entre las áreas, que propone en el apartado *b*, de la figura que acompaña al enunciado —“*Ah!, també pot ser, i dóna aquesta miniatura de quadrat [señala un cuadrado más pequeño dentro del IJKL]*” (intervención 167)—.

El resto del episodio lo podemos dividir en tres partes: en la primera —entre las intervenciones 168 y 174—, los alumnos tratan de adaptar el sistema que habían planteado en el apartado *a* a la nueva situación; en la segunda —entre las intervenciones 175 y 180—, resuelven en paralelo el sistema que obtienen; y en la tercera —de la intervención 181 a la 185—, obtienen el resultado definitivo al dividir los valores de *y* y de *z* que acaban de obtener.

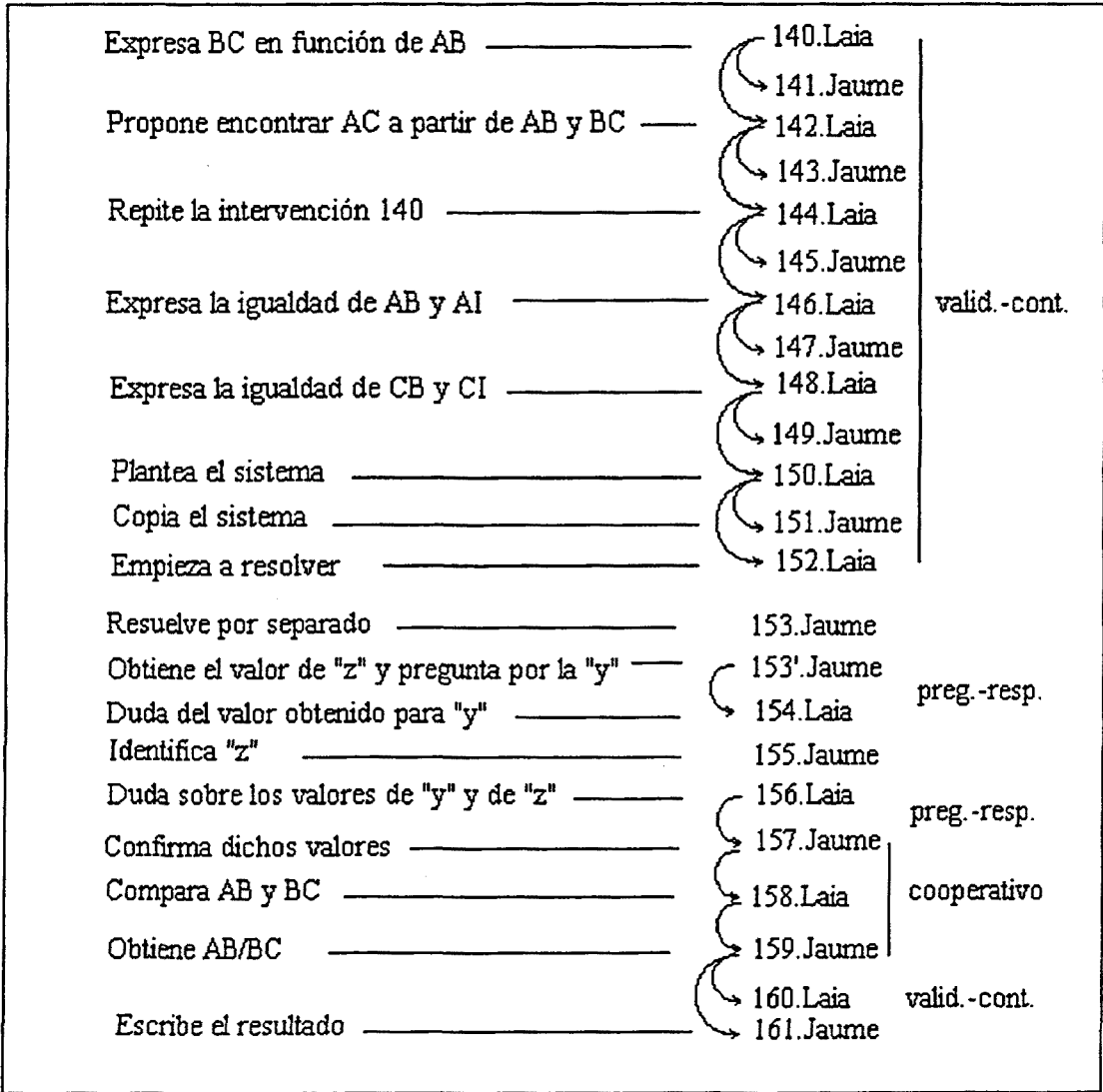


Figura 8.3.32

En esta ejecución no se produce ningún tipo de verificación de la resolución del sistema de ecuaciones ni del resultado final.

Independientemente del trabajo en paralelo de los alumnos (intervenciones 175 a 180) en el que resuelven el sistema que acaban de plantear, los papeles comunicativos de Laia y Jaume son diferentes. Jaume empieza el episodio encabezando dos intercambios del tipo validación-continuación (Figura 8.3.33). En ellos resuelve las dudas que se plantea sobre la posibilidad de que la razón entre las áreas de los cuadrados de la figura del enunciado pueda ser ahora $1/9$. En el resto del episodio, Jaume asume el papel de relacionar la ejecución que

están haciendo con la del apartado *a*, y lo consigue mediante la realización de determinadas preguntas que, además, contribuyen a reactivar el diálogo. Estas preguntas son normalmente demandas de validación de las informaciones que va introduciendo —“1 més y és igual..., a quant?, a z?, com l’hem fet això?” (intervención 169); “què he fet jo ara aquí?” (intervención 177); “y és igual a... ?” (intervención 181); y “què era, y dividit entre z?” (intervención 183)—.

Por el contrario, Laia no hace preguntas en todo el episodio y se limita, muchas veces, a validar las afirmaciones y las demandas de su compañero —intervenciones 164, 166 y 174, en el primer caso, y, 182 y 184, en el segundo—.

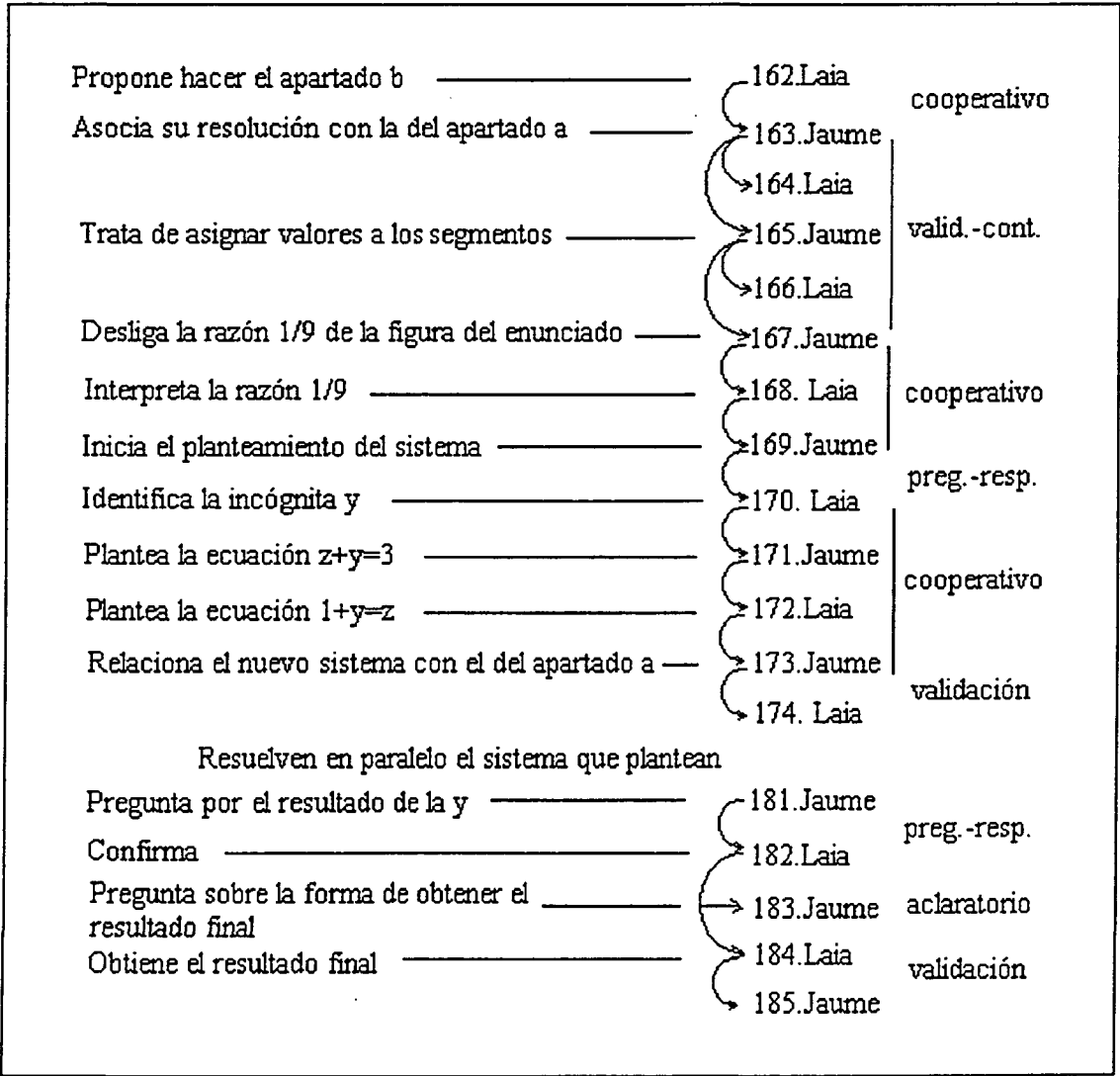


Figura 8.3.33

I) Episodio de ejecución (del apartado *c*)

La resolución del apartado *c* se inicia en la intervención 185'. Los alumnos aprovechan el sistema que habían planteado en la resolución de los apartados anteriores

para iniciar la ejecución de éste. Comienzan la ejecución sustituyendo el 9 por la n en la ecuación $z + y = 9$.

Este episodio tiene dos particularidades respecto a los anteriores: por un lado, la carrera frenética que los alumnos inician, por separado —ninguno de los dos atiende a lo que dice o hace el otro—, para obtener el resultado final; y, por otro, la falta de control que evidencian cuando no aplican correctamente los logros conseguidos en los episodios anteriores.

Las razones por las que los alumnos abordan la resolución de este apartado con tanta rapidez pueden ser el deseo de acabar rápidamente la resolución, después de la larga duración de la misma, o la competencia que se establece entre ellos para ver quién obtiene antes el resultado. Esta forma tan precipitada de actuar es la causa de que los alumnos no reflexionen sobre la manera de generalizar el sistema de ecuaciones al caso en que la razón entre las áreas de los cuadrados sea 1 a n . Eso se evidencia en la sustitución del 2 y del 3 —valores de los lados de los cuadrados BDFH en los apartados anteriores— por n en lugar de por $\sqrt{n}$, como correspondería al ser ésta la longitud del lado del cuadrado en el tercer apartado.

En esta ejecución, como en la anterior, tampoco hay una reflexión sobre el resultado final.

8.3.4.3. Características generales del proceso de resolución

a) Papeles comunicativos de los alumnos

En cuanto al papel comunicativo que asume cada alumno, observamos una mayor tendencia de Laia a continuar el diálogo que ella misma inicia, es decir, hay una diferencia significativa entre el número de intercambios de tres intervenciones de la forma Laia-Jaume-Laia y los de la forma Jaume-Laia-Jaume (véase Tabla 8.3.8). Donde más se manifiesta esa diferencia es en los episodios de planificación/ejecución y de verificación. A pesar de que, en ellos, la continuación del diálogo por parte de Laia suele ser repetitiva o localmente progresiva, limitándose Jaume a validar las aportaciones de su compañera o a preguntar sobre su contenido.

A pesar de todo lo dicho anteriormente, en el cómputo global de intercambios (Tablas 8.3.7 y 8.3.8) la contribución de ambos alumnos al progreso del proceso de resolución (intercambios progresivos) es equiparable.

	COOPERATIVO	VALIDACIÓN	PREGUNTA.- RESPUESTA	TOTAL
Laia-Jaume	31(15)*	2	3(1)	36(16)
Jaume-Laia	26(13)	3	5(2)	34(15)
TOTAL	57(28)	5	8(3)	70(31)

* Entre paréntesis indicamos los intercambios que aportan información nueva en el contexto global del proceso de resolución.

Tabla 8.3.7. Intercambios de dos intervenciones

	VALIDACIÓN-CONTINUACIÓN		ACLARATORIO		INTERRUPCIÓN		TOTAL	
	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.
Laia-Jaume-Laia	11(4)*	4	3(2)	4	1(1)	3	15(7)	11
Jaume-Laia-Jaume	6(5)	2	2(1)	0	0	0	8(6)	2
TOTAL	17(9)	6	5(3)	4	1(1)	3	23(13)	13

* Entre paréntesis indicamos los intercambios que aportan información nueva en el contexto global del proceso de resolución.

Tabla 8.3.8. Intercambios de tres intervenciones

Hemos de destacar aquí el tipo de diálogo que se produce en el episodio de ejecución (del apartado *a*), en el cual Laia consigue plantear el sistema de ecuaciones encabezando varios intercambios seguidos del tipo validación-continuación. En este episodio, tras la resolución del sistema en paralelo, los alumnos inician un breve diálogo cooperativo que tiene su inicio en una intervención directiva de Laia (156).

También observamos (Tablas 8.3.7 y 8.3.8) una diferencia significativa entre el número de preguntas que realiza cada alumno que producen reacción en su interlocutor. Así, mientras son 12 las preguntas de Jaume que producen reacción en Laia —5 de ellas en intercambios del tipo pregunta-respuesta y 7 del tipo aclaratorio—, sólo son 5 las de Laia que son respondidas por su compañero —3 inmersas en intercambios pregunta-respuesta y 2 en intercambios aclaratorios—.

¿Significa eso que las intervenciones de Laia se caracterizan por una ausencia casi total de preguntas? Un recuento de las preguntas que Laia hace nos confirma una respuesta negativa al interrogante que nos planteamos. Laia hace un total de 18 preguntas —5 de las cuales están encuadradas en los intercambios que aparecen en las tablas— y en 13 ocasiones Laia no deja tiempo a que su compañero para que reaccione, respondiéndose ella misma. Eso le ocurre también a Jaume en sólo 5 ocasiones.

Estamos, pues, ante un tipo de diálogo en el que la realización de preguntas adquiere un protagonismo importante, pero en el que las reacciones que producen en cada alumno no están equilibradas, debido a la impulsividad de Laia que responde inmediatamente a la mayoría de sus propias preguntas.

b) Esquema de la sucesión de episodios

El enfoque que los alumnos ponen en práctica no afronta la resolución global de los tres apartados del problema desde un punto de vista deductivo. Tampoco hacen una asignación de valores concretos a los segmentos AB y BC para obtener, por tanteo, las soluciones a los apartados *a* y *b*, y por inducción la del *c*. El enfoque que tratan de ejecutar, como en el caso de la resolución del problema del cuadrado de Rosa y Anna (apartado

8.2.4.2), consiste en resolver cada uno de los apartados —del α al c — y calcular, en cada caso, los segmentos AB y BC a partir del planteamiento de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que obtienen de la interpretación de la proporción $\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{4}$.

A pesar de la resolución separada de cada uno de los apartados del problema, hemos notado que los alumnos tratan de adaptar los logros obtenidos en los apartados anteriores a las nuevas situaciones, aunque la celeridad con la que abordan la resolución del tercer apartado del problema sea la causa de la falta de control, lo que provoca el error en la generalización que se pretende en dicho apartado.

Además de lo reseñado anteriormente, hay cuatro aspectos de este proceso que queremos destacar:

En primer lugar, la falta de profundización inicial en la comprensión del objetivo del problema, lo que provoca un intercambio de desacuerdo (intervenciones 24 a 31) y las reiteradas intervenciones especificando y concretando dicho objetivo. Además, ese continuo recurrir al objetivo del problema lo utilizan los alumnos no sólo para tener presente que lo que han de calcular es la razón de dos segmentos y no la de las áreas, sino como recurso para intentar salir de las situaciones de bloqueo.

En segundo lugar, la alternancia en la sucesión de los episodios de lectura y análisis en la resolución del apartado α (véase el esquema gráfico de la sucesión de episodios al final de este apartado), donde las informaciones que se introducen se discuten de forma mayoritariamente cooperativa. Así como la importancia del episodio de verificación en el que los alumnos desconfían de la validez del resultado que obtienen.

En tercer lugar, las intervenciones directivas de Jaume (83, 87 y 97) en el episodio de planificación/ejecución provocan revisiones y rectificaciones. Esas intervenciones se alternan con otras (episodios de planificación/ejecución y verificación) de asentimiento y poca reflexión por parte de Jaume, lo que facilita los continuos errores que se van produciendo.

Y finalmente, hemos de resaltar la tendencia de Laia a justificar visual y manualmente las relaciones que introduce entre los elementos de las figuras, como se puede observar concretamente en dos momentos del proceso de resolución —intervenciones 54 y 123 a 126—, y las asociaciones de las relaciones que obtienen con la figura concreta que acompaña al enunciado, como explícitamente se manifiesta en la intervención 44. En cambio, notamos en Jaume un mayor sentido de la rigurosidad, tanto por las referencias explícitas que hace a demostrar las afirmaciones suyas y las de su compañera —la más llamativa es la de la intervención 59, en la que propone demostrar la conjetura que ha introducido Laia—, como por la ausencia de intervenciones en las que relaciona los resultados que obtienen con las figuras que van realizando (en la intervención 167 desliga la figura concreta del enunciado de la relación 1/9).

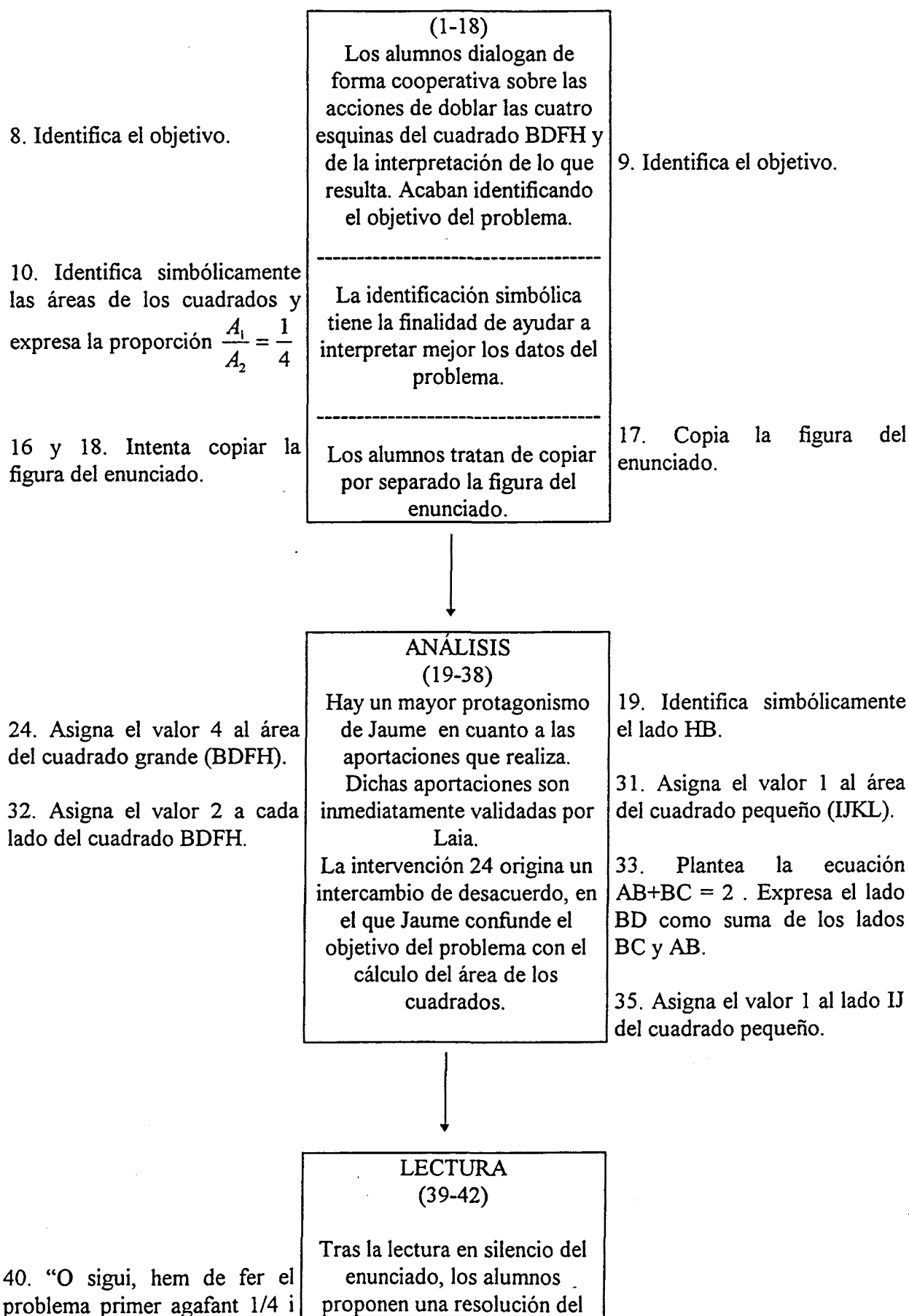
ESQUEMA GRÁFICO DE LA SUCESIÓN DE EPISODIOS

LAIA

EPISODIO

JAUME

LECTURA



després anant fent”.

problema separando los apartados del enunciado y empezando por el primero.

ANÁLISIS
(42’-73)

42’. Identifica la igualdad de CJ y CD.

Notamos en Jaume una tendencia a justificar las informaciones que introduce él y su compañera

45. Se basa en la igualdad de los triángulos ABC y ACI para justificar la de los segmentos CJ y CD, y la de AB y AI.

54. Identifica el objetivo. Establece la conjetura de que la razón entre los lados AB y BC sea 1 a 4, como la de las áreas.

Laia se inclina más por validar las informaciones basándose en las apreciaciones visuales de las figuras.

49. Vuelve a proponer la ecuación $AB+BC = 2$.

58. Comprueba la propuesta que hace midiendo con los dedos la relación entre DC y CB.

Las informaciones que se introducen originan inicialmente intercambios de los tipos validación-continuación o aclaratorios y se continúan con breves diálogos cooperativos.

59. Propone justificar la conjetura “con letras”.

En el resto del episodio, los alumnos recurren con frecuencia a identificar el objetivo del problema como recurso para salir de las situaciones de bloqueo.

PLANIFICACIÓN/
EJECUCIÓN (apartado a)
(73’-112)

84. Inicia el planteamiento de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Independientemente de la planificación inicial, los alumnos hacen previsiones a lo largo del episodio sobre cómo resolverán los sistemas que plantean y qué harán con los resultados que obtengan.

73’. Propone el plan.

83. Pregunta por el valor de KJ.

87. Identifica tres incógnitas en el sistema que plantea Laia.

97. Provoca la rectificación de

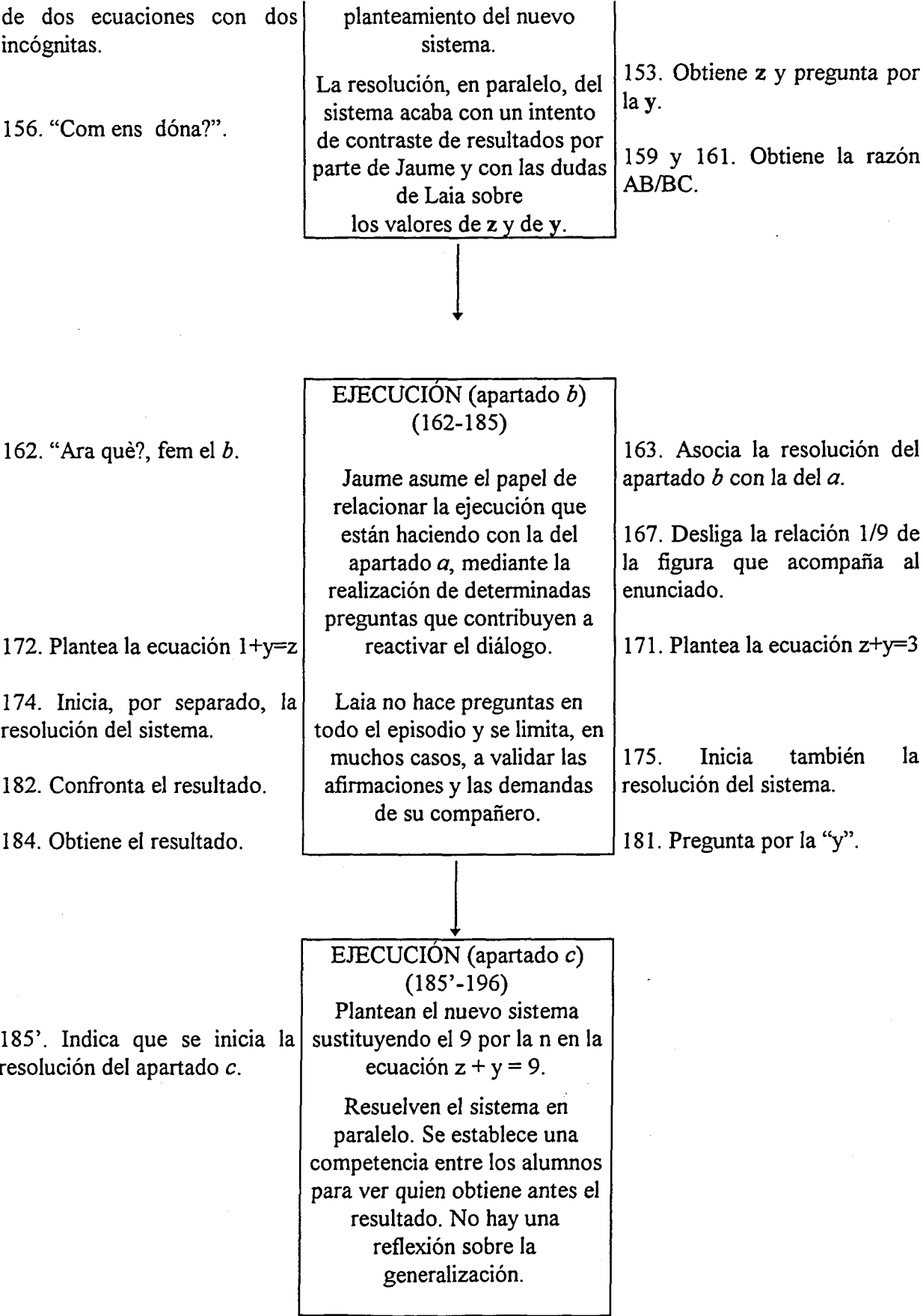
100. Rectifica y propone el sistema: $(y+z)^2=4$; $(1-y)^2=1$.	Las intervenciones directivas de Jaume (83, 87 y 97) repercuten positivamente en el desarrollo del episodio	uno de los errores del sistema.
104. Propone empezar la resolución del sistema por la ecuación $(1-y)^2=1$.		111. Descarta la solución $y=0$.



VERIFICACIÓN (113-139)		
116. Compara el resultado obtenido con el segmento AB de la figura. No lo encuentra lógico.	La verificación se inicia de forma cooperativa. A la cooperación sigue una sucesión de intercambios de los tipos validación-continuación y aclaratorios encabezados por Laia. No hemos podido identificar en los alumnos un esquema claro de verificación, sino intentos desordenados de buscar dónde está el error que comenten.	113. Pregunta qué es la “y”.
118. Revisa el planteamiento del sistema.		
120. Intenta sustituir la ecuación $(AB + BC)^2 = 4$ por la $AB + BC = 2$.		
124. Mide con los dedos en la figura del enunciado para comparar un relación entre dos segmentos.		129. Trata de convencerse de que lo han hecho bien.
136. Parece que identifica el error.		133. Se inicia el desacuerdo.



EJECUCIÓN (apartado a) (140-161)	
140. Vuelve a expresar BC como 1 más AB.	El repaso de las igualdades obtenidas en episodios anteriores sirve a los alumnos para relanzar el proceso de resolución. Jaume asume el papel de validar las aportaciones de Laia, mientras que ésta se responsabiliza de continuar el diálogo, que acaba con el
146. Identifica CB como z y vuelve a expresar la igualdad de AB con AI.	
150. Plantea el nuevo sistema	



8.4. Análisis de los procesos de resolución de Pere y Lluís

8.4.1. Actuación de Pere y Lluís en la resolución del problema del paralelogramo

8.4.1.1. Transcripción del proceso de resolución

1. Pere: [Lectura].

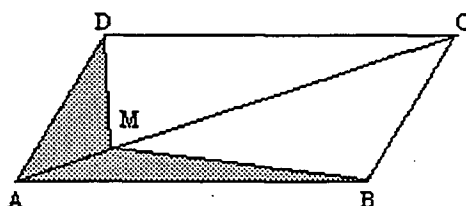


Figura 8.4.1

1'. Pere: [Miran la Figura 8.4.1] <pausa(20)>. *Em sembla que aquests triangles són iguals* [indica MBC y MCD].

2. Lluís: *Aquests triangles són iguals* [MBC y MCD], *els dos, val!* <pausa (7)>

2'. Lluís: *AM és una base, bueno, sí, és un costat comú, un costat comú als dos triangles.*

3. Pere: *Sí, i l'alçada seria la mateixa, jo diria que és la mateixa* [sin demasiada convicción. Indicando la altura desde el vértice B sobre CM]. *Són les mateixes àrees, diria.*

4. Lluís: *L'alçada és la mateixa? A veure.*

5. Pere: *Sí.*

6. Lluís: *L'alçada és la mateixa? A veure, què fa l'alçada d'aquest* [AMD]?

7. Pere: *L'alçada d'aquest és aquesta* [indica la perpendicular desde D hasta el segmento MC], *sí?*

8. Lluís: *Ah vale!, vale, sí, sí.*

9. Pere: [Representa la Figura 8.4.2]. *Si fem això, paral.lela, paral.lela, aquesta és igual que aquesta* [representa los dos segmentos marcados con flechas, Figura 8.4.2]. *Si les bases i les alçades són les mateixes...*

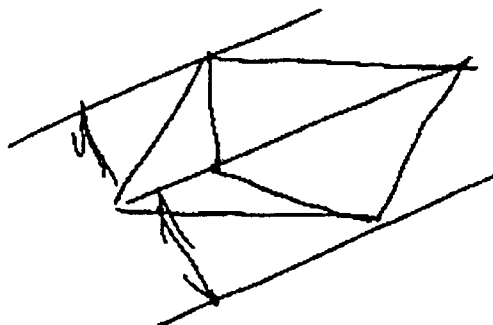


Figura 8.4.2

10. Lluís: *Les àrees són iguals. Llavors hem de fer un quocient i llavors sortirà que A_1 és igual a A_2 , representa, saps? Si fem un quocient i fem les dues àrees per separat, les dividim i sortirà al final la relació de què A_1 , que és l'àrea del primer triangle, és igual a A_2 , perquè diu la relació / suposem això.*

11. Pere: *Sí.*

12. Lluís: *Posem... El paral.lelogram està dividit en un segment AC que fa que els triangles ABC i ACD siguin iguals. Llavors els triangles ABM i AMD són també*

iguals perquè tenen la mateixa base, AM, i la mateixa alçada, de D a la diagonal i de B a la diagonal.

13. Pere: *Sí, sí.*

14. Lluís: *I, per això, com que l'àrea del triangle és àrea de la base per l'alçada, ai!, no, base per altura partit per 2, doncs coincideix, com la base és igual i l'alçada que és igual, les àrees són iguals. Fem això i ja està. El plantejament és així. Fem? [Escribe: “el paral.lelogram està dividit en un segment AC que fa que aquest paral.lelogram es transformi en dos triangles iguals”].*

<55 s>

15. Pere: [Al mismo tiempo escribe: “com la diagonal parteix al paral.lelogram en dos triangles iguals”].

16. Lluís: *L'alçada és la mateixa* [dudando].

17. Pere: *Home, si l'alçada és...*

18. Lluís: *== Si tu fas la perpendicular del segment AC a B és igual que la perpendicular del segment AC a D. Perquè l'alçada d'aquest petit [AMD], has de prolongar aquest costat [AM] i fer la perpendicular.*

19. Pere: *I si els costats són iguals, la distància de B i de D a la diagonal és la mateixa.*

20. Lluís: *Sí, sí, això ho fa perquè la base és comuna i llavors si la base és comuna, les dues alçades han de ser iguals, perquè tenen la mateixa distància d'un punt a la base, o no?*

21. Pere: *Sí.*

22. Lluís: *Bueno, perquè estan dintre del mateix paral.lelogram, si no, no seria així, però com demana la relació, el que estem dient...*

23. Pere: *== Són iguals.*

24. Lluís: [Continúa escribiendo: “per una altra part els dos triangles ratllats tenen la mateixa (AM) i la mateixa altura perquè és la distància d'un vèrtex a la diagonal.

$$A_1 = \frac{AM \cdot h}{2}, A_2 = \frac{AM \cdot h}{2}, A_1 = A_2].$$

<60 s>

25. Pere: [Al mismo tiempo escribe: “ABM = ADM, per a = $\frac{bh}{2}$ perquè tenen la mateixa base i altura”].

[Tiempo total: 6m 23s].

8.4.1.2. Una solució immediata

La característica més destacada de este proceso de resolució es la rapidesa con que los alumnos encuentran una solució. Por ese motivo, primero, hacemos una descripció general del mismo y, después, profundizamos en los aspectos que nos parecen más relevantes.

Pere, después de la pausa que sigue a la lectura del enunciado, introduce la primera informació nueva (intervenció 1'), que consiste en identificar como iguales los triángulos MBC y MCD.

La identificació posterior (intervenció 2'), por parte de Lluís, del lado común —AM— de los triángulos ABM y ADM y la referencia a él como base de ambos provocan que Pere introduzca las alturas (intervenció 3) de los dos triángulos sobre dicha base y proponga su igualdad.

Las preguntas posteriores de Lluís (intervenciones 4 y 6) sobre dichas alturas obligan a Pere a justificar, a su manera, tal igualdad (intervención 9).

La introducción de informaciones nuevas se acaba en la intervención 10. Igualmente se podría haber acabado el proceso de resolución de no ser el afán de Lluís de explicar detallada y reiterativamente, con sus propias palabras, el razonamiento que siguen.

En este breve proceso de resolución hay algunos aspectos en los que queremos incidir:

En primer lugar, las referencias a las bases y alturas de los triángulos hace que los alumnos se inclinen, casi desde el primer momento, por un enfoque basado en la utilización de fórmulas para justificar la equivalencia de los triángulos que se comparan. El enfoque que ponen en práctica sigue la línea 3 —aplicación de fórmulas— del espacio básico del problema del paralelogramo (p. 100).

A pesar de que el enfoque algebraico que los alumnos ejecutan es fácil de identificar en el proceso de resolución que siguen, en determinados momentos de dicho proceso da la impresión de que vayan a utilizar la técnica de equivalencia por complemento, basada en la combinación de la equivalencia de los triángulos ABC y ACD —que citan en la intervenciones 12, 14 y 15— y la de los triángulos MBC y MCD —a la que se refieren en la intervención 1’—.

En segundo lugar, la insistencia de Lluís en el tema de las alturas tanto en su representación —“A veure, què fa l'alçada d'aquest [AMD]?” (intervención 6)—, como en su igualdad —intervenciones 4 y 6—, sobre la que vuelve en la intervención 16. En ninguno de los casos —intervenciones 9, 18, 19 y 20—, los alumnos dan argumentos suficientes que justifiquen que, en un paralelogramo, son iguales las distancias de dos vértices opuestos a la diagonal que une los otros dos.

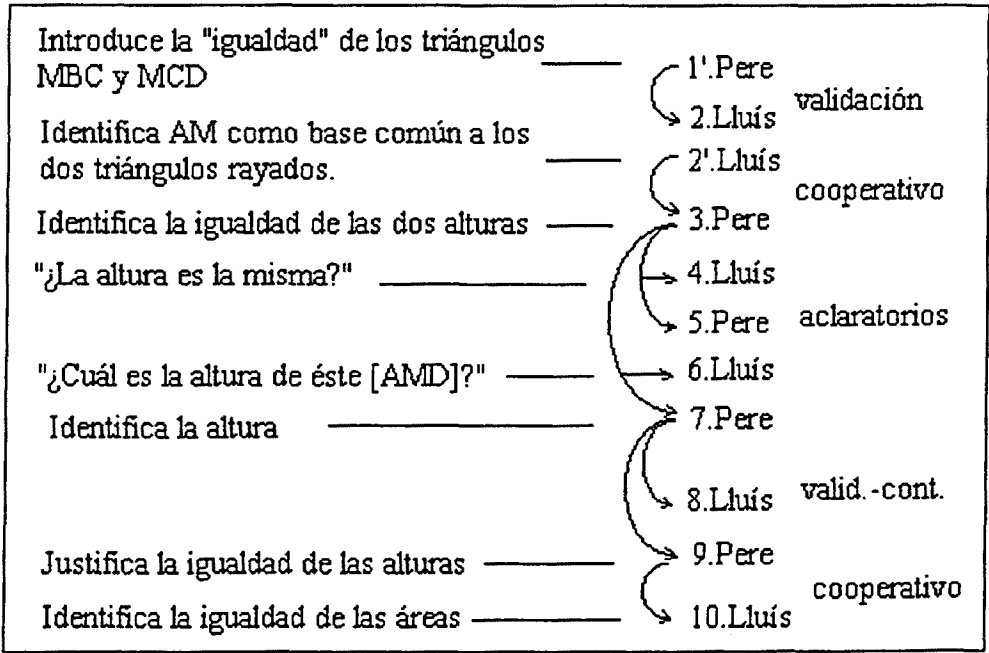


Figura 8.4.3

Por último, observamos, en cuanto a los papeles comunicativos de los alumnos, dos partes bien diferenciadas: en la primera de ellas —dentro de lo que pudiéramos llamar episodio de análisis (entre las intervenciones 1' y 10)—, Pere introduce la igualdad de las alturas, a la que siguen dos preguntas de Lluís que obligan a su compañero a asumir el rol de responderlas, para lo cual las identifica gráficamente dichas alturas y trata de justificar su igualdad (Figura 8.4.3); en la segunda —a partir de la intervención 10—, Pere se limita a validar las intervenciones de Lluís, que repite los mismos argumentos hasta el final del proceso. En esta parte del proceso de resolución, el diálogo se caracteriza por dos sucesiones de intercambios de los tipos validación-continuación e interrupción encabezados por Lluís, a las que siguen dos intervalos de trabajo en paralelo en los que los alumnos escriben lo que Lluís va diciendo.

8.4.2. Actuación de Pere y Lluís en la resolución del problema del hexágono

8.4.2.1. Transcripción del proceso de resolución

1. Lluís: [Lectura].

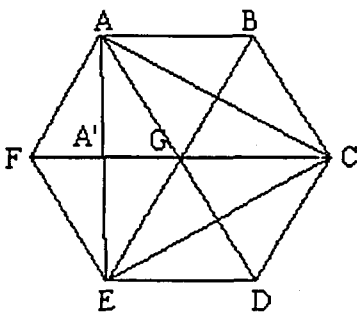


Figura 8.4.4

- 2. Pere: *Dibuixem-lo!*
- 3. Lluís: *Sí, diu un hexàgon, diu que unim un sí i un no, vale. Queda així* [empieza a representar la Figura 8.4.5, raya el triángulo del centro y pone letras en los vértices, Figura 8.4.5], *queda així?*
- 4. Pere: [Representa el hexágono y el triángulo ACE, Figura 8.4.6]. *Vale* [se refiere al hexágono que acaba de representar, Figura 8.4.6].

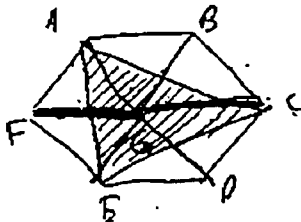


Figura 8.4.5

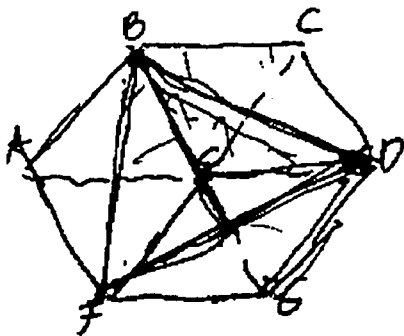


Figura 8.4.6

5. Lluís: *Si en un hexàgon regular s'uneixen alternativament tres dels seus vèrtexs s'obté un triangle* [vuelve a leer], *val! Busca la relació entre l'àrea de l'hexàgon i la del triangle obtingut. L'àrea de l'hexàgon la podem fer com sis vegades l'àrea d'un triangle equilàter de dins.*
6. Pere: *Sí* [pone letras a los vértices del hexágono y los une con el centro].
7. Lluís: [Observa lo que hace Pere] *Mira, em sembla que ja ho sé, ja està* [une también los vértices con el centro].
8. Pere: *== Mira, mira, així, no?* [refiriéndose a dos de los triángulos equiláteros en que ha quedado dividido el hexágono, Figura 8.4.6].
9. Lluís: *Sí.*
10. Pere: *O sigui, si agafem els dos triangles...* [indica las líneas BG y BD. Se refiere a los triángulos BGD y BDC, Figura 8.4.6], *o no?*
- 10'. Pere: *Què volies dir tu?*
11. Lluís: *L'àrea de l'hexàgon és el mateix que si agafem els sis triangles equilàters i ja està, vale!, i l'àrea aquesta d'aquí* [ACE, Figura 8.4.5], *la del triangle petit, la de dins, a veure... /*
12. Pere: [Insiste en su idea original]. *Si agafem els dos triangles* [indica BGD y DCB, se refiere al rombo BGDC, Figura 8.4.6] *i partim per la meitat, és la diagonal* [indica BD].
13. Lluís: *Si agafem els dos triangles?*
14. Pere: *Sí, si agafem els dos triangles aquests* [indica el rombo], *és ben bé..., ho parteixes per la meitat* [BD], *sí o no?*
15. Lluís: *Sí* <pausa(30)>
- 15'. Lluís: [Raya la línea FC, Figura 8.4.5]. *A veure* <pausa(18)>
16. Pere: *Això queda clar que és la meitat* [indica el triángulo BGF y se refiere a la mitad del rombo].
17. Lluís: *Sí /* [suspira].
18. Pere: *No sé, si ho dividim en tres parts... /* [se refiere a la división del hexágono en tres rombos].
19. Lluís: *O sigui, si agafem la part de dalt* [se refiere a FCBA, Figura 8.4.5] *tenim un trapezi amb una diagonal feta* [CA, Figura 8.4.5], *perquè és un costat del triangle* [ACE] *i una alçada* [indica la mitad del segmento AE], *i una alçada, perquè clar en un hexàgon, en un hexàgon, això* [FC] *és paral·lel a això* [ED], *vol dir que això* [AE] *és perpendicular.*
20. Pere: *Sí, sí* [atento a lo que comenta Lluís]
21. Lluís: *L'alçada ja està feta, llavors ens quedarà reduït a un problema d'aquest tipus* [representa la Figura 8.4.7] *A, B, C i F, i aquí tenim un costat més a baix* [traza AA'], *vol dir que això és perpendicular* [AA' perpendicular a FC, Figura 8.4.4], *vale, i aquí tenim una diagonal* [traza AC, Figura 8.4.7] *que és un dels costats del triangle que ens diuen* [ACE], *vale, llavors la meitat del triangle* [AA'C, mientras lo raya, Figura 8.4.4, trabaja sobre la Figura 8.4.7], *perquè això és la meitat del triangle dibuixat* [ACE], *aquesta meitat i aquesta* [indica, sobre el hexágono, los dos triángulos AA'C y EA'C] *són simètriques, perquè hi ha la mateixa distància d'aquí fins aquí* [indica de A a A' sobre el hexágono] *que d'aquí fins aquí* [de A' a E], *llavors tenim aquí un triangle rectangle* [indica AA'C sobre el trapecio] *i aquí un trapezi* [el de la Figura 8.4.7], *tenim feta la diagonal* [AC] *i llavors, a veure, quan ja tenim fet això, a veure... /*

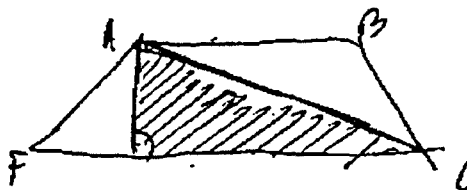


Figura 8.4.7

22. Pere: *Això és el doble d'això* [indica FC y AB sobre el trapezio].
23. Lluís: *Com? La base aquesta d'aquí és el doble d'aquesta?* [indica lo mismo que Pere].
24. Pere: *Sí.*
25. Lluís: *Sí? Això no ho sabia jo.*
26. Pere: *Ja, si ho partim per la meitat* [se refiere al hexágono y señala la diagonal AC de su figura], *això [AC] són dos costats, si aquests [FEG] són triangles equilàters, el radi...* [FG], *bueno, per dir-ho així, el radi és un costat.*
27. Lluís: *El radi?*
28. Pere: *Bueno, la distància d'un vèrtex al centre és un radi, no?*
29. Lluís: *Vale.*
30. Pere: *Doncs aquí [FC] són dos radis, bueno, dos costats, i aquí [AB, Figura 8.4.6] és un.*
31. Lluís: *Sí, sí, ja t'entenc, bueno, però això partint de què... / però vols dir que la base aquesta [FC del trapezio de la Figura 8.4.7] és el doble d'aquesta? [AB], sí o no?, segur?*
32. Pere: *Sí, si són triangles equilàters, per força.*
33. Lluís: *No et diu que..., ah!, els triangles, sí, els de dintre són equilàters, molt bé.*
34. Pere: *I això [FC] són dos costats i això [AB], un.*
35. Lluís: *Hosti!, sí, sí, és clar, molt bé.*
36. Pere: *L'àrea del trapezi?* [recordando] *base de sota més la de sobre per l'alçada, pot ser? /*
37. Lluís: *Bueno, però l'àrea del trapezi la podem buscar tenint l'àrea dels tres triangles* [indica los triángulos equiláteros que componen el trapezio]. *Fem les àrees dels tres triangles, les sumem i ja tindrem l'àrea del trapezi. Els tres triangles equilàters, fem la seva àrea, les sumem i punt.*
38. Pere: *I...?*
39. Lluís: *I tindrem l'àrea del trapezi, la multipliquem per dos i ja tindrem l'àrea de tot l'hexàgon.*
40. Pere: *L'àrea de l'hexàgon.*
41. Lluís: *I no cal que busquis l'àrea d'un trapezi / El que és clar és que hem de buscar la relació entre l'àrea d'un d'aquests triangles equilàters* [indica uno de los 6 triángulos equiláteros que componen el hexágono] *i l'àrea del trapezi [FCBA, sobre el hexágono, Figura 8.4.5], quan ja l'hàgim feta només es tindrà que multiplicar per dos, perquè forma un altre trapezi i... /*
42. Pere: [Escribe G en el centro del hexágono, piensa por separado, no ha escuchado nada de lo que ha dicho Lluís].
43. Lluís: *Ara* [mirando lo que ha escrito Pere] *fem..., fem que aquest punt* [centro del hexágono] *sigui el punt G. Aquestes són àrees dels triangles* [escribe: "àrees dels triangles"], *i l'alçada d'un triangle serà l'alçada d'un trapezi, pel que hem dit abans, llavors podem fer que l'àrea..., l'alçada dels dos triangles i del trapezi són iguals i llavors es tataran quan es divideixin; i la base AB és la meitat de la*

- base FC [indica sobre su hexágono] i la base FC és dues vegades la base d'un dels triangles equilàters, eh?, vale, em sembla que ja ho podem fer.
44. Pere: [No ha escuchado nada de lo que ha dicho Lluís]. Àrea de l'hexàgon és igual, àrea és igual... Fes-ho per l'àrea de... [indica el trapezio].
45. Lluís: Poso els punts per saber el que he d'aplicar [escribe y va diciendo en voz alta: "alçada triangle = alçada trapezi; base trapezi = base triangle; base trapezi' = base triangle"]].
46. Pere: [Al mismo tiempo, por separado, empieza a escribir las igualdades siguientes, correspondientes al área del trapezio:
- $$A = \frac{b+B}{2}h = \frac{b+2b}{2}h = \frac{3b}{2}h].$$
47. Lluís: Hem d'aplicar això [se refiere a las líneas que ha escrito] i ha de sortir, eh?
48. Pere: [Acaba de escribir la tercera igualdad de su intervención anterior].
49. Lluís: Hem de fer que surtin els tres per anar simplificant, simplificant fins que surti una relació, és l'única manera que veig jo que es pugui fer, eh?, o no? Perquè quan ja aconseguim tot això [se refiere a lo que ha escrito], ja ho hem fet perquè aquí [indica los dos trapezios del hexàgon] és simètric tota l'estona.
50. Pere: [No atiende]. O sigui, per trobar això [señala, sobre su hexàgon, Figura 8.4.6, el triàngulo rectàngulo ACA', Figura 8.4.4], l'àrea del...
51. Lluís: = L'àrea del triangle aquest... [indica, sobre su hexàgon, el triàngulo rectàngulo ACA', Figura 8.4.4].
52. Pere: Això és la meitat [AC] si va de vèrtex a vèrtex [indica AC], no?, parteix els dos triangles equilàters [AGB y GCB] en dos, no?
53. Lluís: Sí.
54. Pere: Per tant, l'àrea d'aquest, l'àrea de tot això [indica AGC, Figura 8.4.4] és la meitat d'això, és la meitat de tot això [AGCB, Figura 8.4.4].
55. Lluís: Sí, sí, però és clar, quan aconseguim l'àrea de tot [indica el hexàgon], ho dividim per dos [indica el trapezio FCBA, Figura 8.4.5] i l'àrea d'aquest triangle [AA'C] pel que has dit, tu quan fas la diagonal AC parteixes els triangles equilàters en dos, parteixes els triangles equilàters en dos, i aquest també [FAG] perquè fas l'alçada. Aquest [FAG] el parteixes en dos, segur, perquè fas l'alçada.
56. Pere: Sí.
57. Lluís: I aquests dos [AGCB] els parteixes igual. Què passa?, sí, aquests també els parteixes en dos perquè tu fas... [representa la Figura 8.4.8], fas passar per aquí [trazando la línea del centro, Figura 8.4.8], i això i això són iguals [se refiere a los dos triàngulos que obtiene en la Figura 8.4.8] <pausa(18)>
- 57' Lluís: Ho tenim ja, vols dir que no és així? <pausa(32)>
- 57'' Lluís: A veure, un triangle equilàter per buscar-li el centre sempre ho podries fer..., mitjanets, com bisectrius, com mediatris, sempre et surtirà el matiex.
58. Pere: [Piensa sin hacer caso a lo que ha dicho Lluís]. Sí.

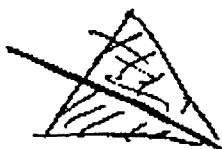


Figura 8.4.8

59. Lluís: *El triangle és equilàter, llavors si tu fas d'un vèrtex [C] a un altre vèrtex [E, en su hexàgon, Figura 8.4.5] d'un altre triangle i són, representa, com a oposats perquè aquest [A] no coincidiria amb aquest [C], llavors quan va d'aquí [A] fins aquí [C] ha de passar per..., ha de passar pel... [indica el punto donde GB y AC se cortan], ha de passar per...*
60. Pere: [No atiende] = *Espera un moment, la distància aquesta [indica A'C en la Figura 8.4.4] és un costat [indica GC] i mig [GA'], d'aquí fins aquí [A'C] és un costat i mig, no?*
61. Lluís: *Quina?*
62. Pere: *D'aquí fins aquí és un costat i mig [vuelve a repetir].*
63. Lluís: *Sí.*
64. Pere: *Tres mitjos, tres costats partits per dos, no?, i això [FD] són dues altures.[se refiere a las alturas de los triángulos GEF y EGD, Figura 8.4.6].*
65. Lluís: *Sí.*
66. Pere: *Per tant són tres mitjos d'un costat per dos h [escribe: $3/2c.2h$], vale?, entens?*
67. Lluís: *Els tres mitjos del costat..., vale, és clar, sí, sí.*
68. Pere: *Bueno, llavors aquest costat per l'alçada partit per dos i per sis [escribe: $6. c.h / 2$].*
69. Lluís: *Vale, aquesta és la de l'hexàgon, molt bé.*
70. Pere: *I aquí / a veure [comprueba en voz baja lo que ha hecho, señalando los valores sobre el hexàgon], base per alçada partit per dos [repasa la última fórmula que ha escrito y escribe los resultados simplificados $3/2c.h$ y $3.c.h$].*
71. Lluís: *Aquest tres mitjos del costat no m'agrada, eh?*
72. Pere: [No le hace caso, vuelve a repasar sobre el hexàgon].
73. Lluís: *Aquest un i mig que poses, aquest un i mig que poses, un sí que és un costat perquè..., perquè..., però no és un costat, és un costat del triangle equilàter, però no un costat de...*
74. Pere: [Está pensando y repasando] = *Ah!, partit per dos [divide por 2 la expresión $3/2c.2h$] l'àrea del triangle és, per tant, tres mitjos de c per h [se refiere al área del triángulo ACE, Figura 8.4.4] i això és tres, [se refiere a que el área del hexàgon es 3 veces c por h], saps?*
75. Lluís: *Però una cosa, com has trobat els tres mitjos de c aquí?*
76. Pere: *Un [CG, Figura 8.4.4] i mig [GA'].*
77. Lluís: *Però això és el triangle equilàter, ah vale!, clar.*
78. Pere: *El triangle de dintre.*
79. Lluís: *Sí, vale, hosti!, molt bé, no, però aquest costat [CG] és dels triangles equilàters, no del triangle del mig [ACE].*
80. Pere: *Però és per agafar una distància /*
81. Lluís: *Sí, per agafar una distància, molt bé, però amb això no estàs fent res del triangle de l'altre [se refiere al ACE]*
82. Pere: = *D'aquest [ACE].*
83. Lluís: *Sí, estàs fent l'alçada del triangle de dintre [ACE] amb això.*
84. Pere: *Sí.*
85. Lluís: *Vale, i la base?*
86. Pere: *Dues alçades del triangle [indica FD], dues alçades del triangle [FEG], sí?*
87. Lluís: *Vale, vale, vale, molt bé, ja ho he vist.*

88. Pere: [Escribe: $A_{tr.} = \frac{\frac{3}{2} \text{costat} \cdot 2 \cdot h}{2} = \frac{3}{2} c \cdot h$; $A_{hex.} = 6 \cdot \frac{c \cdot h}{2} = 3 \cdot c \cdot h$;
 $\frac{A_{tr.}}{A_{hex.}} = \frac{\frac{3}{2} \cdot c \cdot h}{3 \cdot c \cdot h} \Rightarrow 2A_{tr.} = A_{hex.}$ y acaba].
89. Lluís: [Mientras tanto Lluís va escribiendo y hablando: “l’altura del triangle de dintre és 1’5 vegades un costat dels triangles equilàters que formen l’hexàgon, $\tilde{h} = 1’5c$. La base del triangle de dintre és $2h'$ dels triangles $\Rightarrow h = 2h'$ ”]. *Amb això ja pots calcular l’àrea del triangle de dins* [se refiere a la relación de las alturas que ha escrito: $h = 1.5c$ y $h = 2h'$], *però, i llavors..., vale, ja està, ja està, vale*
[continúa escribiendo: “ $6\left(\frac{c \cdot h}{2}\right)$ = àrea de l’hexàgon; $\frac{2 \cdot h \cdot \tilde{h}}{2}$ = àrea del triangle de dins”].
- 89'. Lluís: *Quan ja tens les dues àrees, les divideixes?*
90. Pere: *És clar!*, [espera].
91. Lluís: [Percatándose de que Pere ha acabado]. *A quina conclusió arribes?*
- 91'. Lluís: [continúa escribiendo: $\frac{6 \cdot c \cdot h}{2} = 3c \cdot h \Rightarrow \frac{3 \cdot c \cdot h}{h \cdot \tilde{h}} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow 3c \cdot A_2 = A_1 \cdot \tilde{h}$].
- 91''. Lluís: *Per qué substitueixes...?, no, la h del triangle de dins la substitueixes, representa, vale, per què número la substitueixes?*
92. Pere: *Substitueixes la $\tilde{h}$ aquesta* [indica $\tilde{h} = 1.5 c$]. *L'alçada aquesta [BM] és un costat i mig.*
93. Lluís: *Sí.*
94. Pere: *No és el que has fet aquí?* [indica $\tilde{h} = 1.5 c$].
95. Lluís: *No, un i mig dels costats de..., un i mig pel costat del triangle equilàter és l'alçada del triangle de dins, vale.*
96. Pere: *Substitueixes allà i ja ho tens.*
97. Lluís: *Però aquí / Ah vale!* [escribe: $3c \cdot A_2 = A_1 \cdot 1.5$], *llavors es tatxa* [el 3 con el 1.5 y pone 2], *no, el c no es tatxa, amb què es tatxa el c?*
98. Pere: *Un costat i mig* [indica $A_1 \cdot 1.5$], *vale?*
99. Lluís: *El c no es tatxa.*
100. Pere: *Sí.*
101. Lluís: *No, on es tatxa?*
102. Pere: *Tres costats* [indica $3cA_2$] *i aquí un costat i mig* [indica $A_1 \cdot 1.5$].
103. Lluís: *Ah!* [pone c en la expresión $3c \cdot A_2 = A_1 \cdot 1.5$, obteniendo, $3c \cdot A_2 = A_1 \cdot 1.5 \cdot c$ y tacha], *ja està, ja està, vale!*
[Tiempo total: 21m 10s].

8.4.2.2. Microanàlisi del proceso de resolució

A) Episodio de lectura

Consideramos que la acción de leer el enunciado produce en Pere la reacción — “Dibuixem-lo” (intervención 2)— de hacer una representación gráfica que lo interprete.

Esa intervención directiva —la especie de “orden”, diríamos nosotros— de interpretar gráficamente el enunciado producida por Pere marca el desarrollo del episodio.

Otro aspecto que hemos de tener en cuenta en este inicio del proceso de resolución es el trabajo en paralelo que desarrollan los alumnos. Así, Pere desde la intervención 2 se centra en hacer su representación y no atiende a la demanda que le hace Lluís en la intervención 3 —“Queda així?”—, lo que obliga a éste a validarse su propia representación.

El trabajo en paralelo de los dos alumnos en este comienzo no acaba con un contraste de las representaciones que cada uno hace para validarlas, sino con la propuesta de Lluís de dividir el hexágono en seis triángulos equiláteros. Esa ausencia de contraste no tiene repercusiones posteriores debido a que la interpretación gráfica que ambos alumnos hacen del enunciado es correcta.

Así pues, podemos decir como resumen que:

- la intervención 2 marca la evolución del episodio hacia la representación del hexágono que se describe en el enunciado. Dicha representación será la referencia utilizada por los alumnos a lo largo del proceso de resolución;
- los alumnos trabajan en paralelo a partir de la intervención 2, validándose cada uno de ellos su propia interpretación gráfica del enunciado.

B) Episodio de análisis

Se inicia el episodio en la intervención 5', en la que Lluís introduce la descomposición del hexágono en 6 triángulos equiláteros. En la intervención 6, Pere identifica los triángulos a los que se refiere Lluís mediante la intervención gestual de representarlos poniendo letras en los vértices y uniéndolos con el centro.

La intervención 5' produce una reacción en Pere que clasificamos como intercambio cooperativo porque él identifica gráficamente los triángulos a los que Lluís se refiere; es decir, Pere produce un tipo de información que hemos llamado “información equivalente”.

Pere (intervenciones 10 y 12) selecciona dos triángulos equiláteros consecutivos que forman el rombo AGCB (Figura 8.4.4) e introduce la idea de partirlos por la mitad según la diagonal AC. En la intervención 16, Pere insiste en su idea anterior de dividir el rombo en dos triángulos iguales, que culmina en la intervención 18, donde propone, sin más, la división del hexágono en tres rombos.

Entendemos que hay una finalidad (un hilo conductor) en las sucesivas aportaciones de Pere, pero la propuesta final, hecha sin demasiada convicción —“No sé, si ho dividim en tres parts... [se refiere a la división del hexágono en tres rombos]” (intervención 18)— y que hubiera resuelto el problema de forma inmediata, no es tomada en cuenta por Lluís.

La razón por la que la información de Pere no se considera es que Lluís, ya desde la pausa que se produce en la intervención 15' —donde raya con insistencia el segmento FC—, viene gestando una nueva propuesta, que propone en la intervención 19 y completa en la 21.

Hay en este episodio dos intervenciones que cambian la dirección del proceso: la primera coincide con la introducción, por parte de Lluís, del tema de la división del hexágono (intervención 5'), que es el origen de las demás aportaciones; y la segunda coincide con la pausa que se produce en la intervención 15, que es el origen de la introducción, por parte de Lluís, del plan que propone (intervención 19), obviando por completo el enfoque identificado por Pere en la intervención 18.

Como resumen de la interpretación que acabamos de hacer podemos decir que:

• Lluís inicia el episodio con la propuesta de división del hexágono en 6 triángulos. Pere va desarrollando su forma particular de dividir el hexágono (Figura 8.4.9). Esta división la hace en tres fases: primero, considera dos triángulos consecutivos para formar un rombo (aunque esta palabra no llegue a pronunciarla); más tarde, propone la división del rombo AGCB en dos triángulos iguales a partir de su diagonal AC; y, por último, sugiere la división del hexágono en tres rombos.

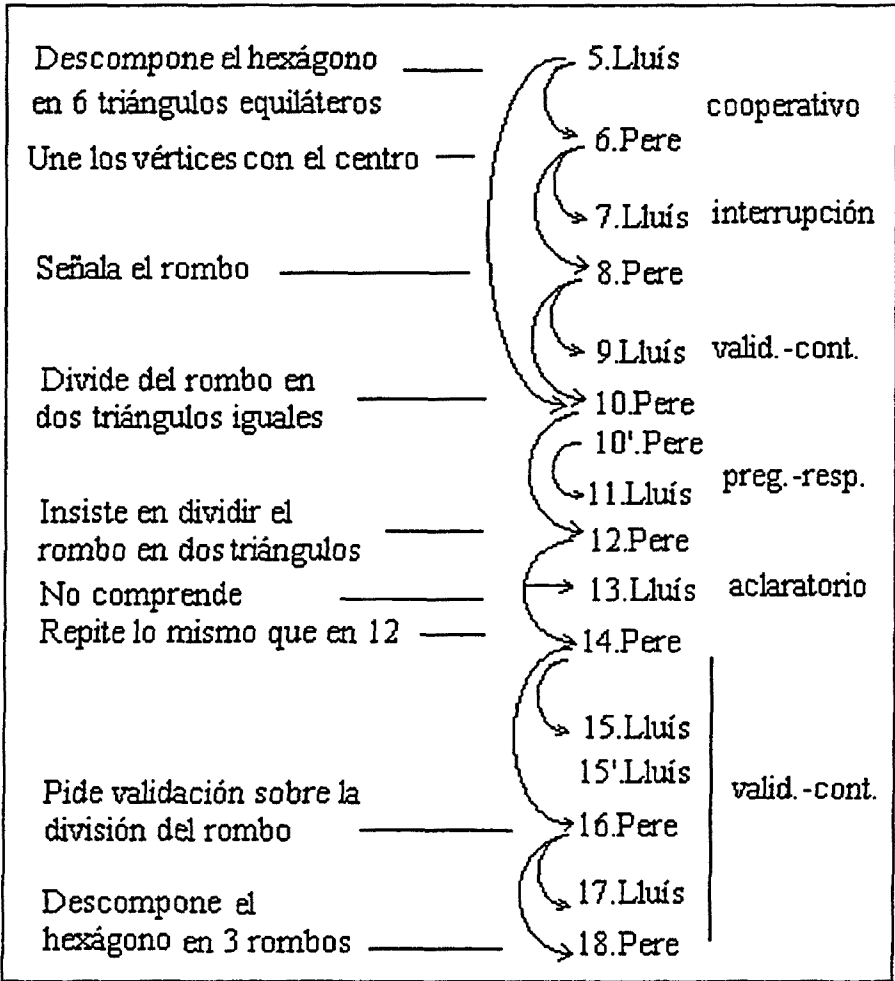


Figura 8.4.9

- Las sucesivas aportaciones de Pere son el origen de intercambios de los tipos aclaratorio y validación-continuación. La mayoría de dichos intercambios son progresivos, por lo que podemos considerar que el episodio se desarrolla de forma bastante dinámica.
- El papel principal que desempeña Lluís durante el episodio es el de validar las aportaciones que hace Pere y hacer alguna pregunta aclaratoria. Por el contrario, Pere introduce informaciones nuevas sobre las que demanda validación en muchos casos.
- Hay dos intervenciones que marcan la dirección del proceso: la que coincide con el inicio del episodio (intervención 5'), en la que Lluís propone la división del hexágono, y la intervención gestual 15', en la que Lluís divide el hexágono en dos trapecios. Además, esta

última propuesta desvía la atención de Pere, consiguiendo que se abandone el enfoque que éste ha propuesto.

C) Episodio de planificación

La planificación es una prolongación del episodio de análisis. Tiene su origen en la intervención 15' en la que Lluís traza la diagonal FC del hexágono (Figura 8.4.4). El plan consiste en reducir el problema a otro equivalente, dividiendo el hexágono en dos trapezios mediante la diagonal FC. Esta diagonal divide a su vez el triángulo ACE en dos triángulos rectángulos iguales (tal afirmación la justifica haciendo referencia a la simetría de la figura respecto de la diagonal FC del hexágono). El problema queda así reducido a la búsqueda de la razón entre el área del trapecio y la de uno de dichos triángulos rectángulos.

Además de proponer la división del hexágono en dos trapezios, Lluís identifica (intervención 19) tanto la diagonal de uno de ellos, asociándola a uno de los lados del triángulo ACE, como su altura. Justifica que AA' es la altura del triángulo refiriendo que AE es perpendicular a los segmentos paralelos DE y FC (Figura 8.4.4).

Podemos observar que no hay una aceptación explícita del plan propuesto ni ninguna manifestación de ejecutarlo, pero ambas cosas las damos por supuestas basándonos, en primer lugar, en la propuesta que hace Pere —intervención 22— de relación entre las dos bases del trapecio y, después —intervención 36 y siguientes—, en el comienzo efectivo del cálculo del área del trapecio por parte de Pere. El desarrollo del proceso, sobre todo a partir de la intervención 36, supone la aceptación implícita del plan.

La planificación, que se inicia formalmente en la intervención 19, da lugar a un intercambio del tipo validación-continuación iniciado por Lluís, en el que Pere sólo se limita a validar la aportación de su interlocutor. Dicha aportación está relacionada con la división del hexágono en dos trapezios iguales.

Lluís hace un aporte significativo de ideas en la intervención 21, puesto que en ella completa su plan representando el trapecio FCBA e identificando el triángulo AA'C, del que justifica que es rectángulo y que es la mitad del ACE.

En resumen, podemos afirmar que la planificación surge del episodio de análisis, pero no es consecuencia de la profundización y consideración de los enfoques identificados previamente en ese episodio. Surge de forma espontánea y es aceptada implícitamente por ambos interlocutores. Lleva la iniciativa Lluís y el único intercambio que se produce es del tipo validación-continuación dirigido por dicho locutor, produciéndose un progreso significativo de la segunda intervención respecto de la primera (intervención 19).

D) Episodio de evaluación local-1

Este episodio, que abarca las intervenciones 22 a 35, lo inicia Pere con el establecimiento de la relación entre las bases —“Això és el doble d'això” [indica FC y AB sobre el trapecio] (intervención 22)— del trapecio FCBA, que se convierte en tema de diálogo en las próximas intervenciones. Esa afirmación es importante porque da lugar (intervención 30) a la explicitación de la relación de igualdad entre el radio y el lado del hexágono, que después será clave en la aplicación de las fórmulas para obtener la solución.

La duda que genera en Lluís la relación entre las bases del trapecio —una el doble de la otra— hace que pregunte sobre su validez. En la intervención 25, Lluís manifiesta explícitamente desconocer tal relación.

Es en la intervención 26 donde Pere justifica que la base FC del trapecio es doble de la AB, basándose en que los 6 triángulos que componen el hexágono son equiláteros y, por tanto, el lado del hexágono es igual a su radio. La introducción del “radio” hace que Lluís (intervención 27) pregunte sobre él. Pere satisface la demanda de su compañero con una explicación concreta y correcta de lo que entiende por radio de un hexágono.

La continuación del episodio tiene que ver con las dudas de Lluís (intervención 31) sobre la relación entre las bases del trapecio. Esta relación se confirma cuando Pere hace referencia a la condición de equiláteros de los 6 triángulos en que han dividido el hexágono.

El episodio termina cuando Lluís (intervención 35) comprende y da por válidas las aportaciones y justificaciones de Pere.

Se produce una oportunidad de aprendizaje por parte de Lluís cuando llega a comprender la relación entre las dos bases del trapecio o cuando Pere le aclara el significado del radio del hexágono y su igualdad con el lado. Además de que Lluís manifiesta explícitamente desconocer la relación entre las bases del trapecio, como hemos dicho antes, también sabemos que desconoce la relación del radio con el lado, según se evidenció en la resolución del problema 8A de la prueba inicial (véase apartado 7.4.1.2).

Este episodio lo consideramos como un inciso entre la planificación y el análisis en el que los alumnos repasan algunos conocimientos que surgen como consecuencia de la introducción, por parte de Pere, de la relación entre las bases del trapecio. Es por eso que hemos clasificado este episodio como “evaluación local”, teniendo en cuenta que en esta categoría incluimos todos los aspectos que están relacionados con una valoración del estado actual de los conocimientos de los alumnos.

En este episodio se producen combinaciones de intercambios de los tipos aclaratorio y validación-continuación, culminados todos ellos con uno del tipo validación al final del episodio, en el que Lluís acepta las aportaciones de Pere.

Las acciones producidas por Pere para aclarar las dudas y demandas de Lluís no son, en general, repetitivas, es decir, Pere produce intervenciones bastante clarificadoras, como, por ejemplo, cuando explica lo que entiende por radio (intervención 28) o cuando justifica la igualdad radio-lado haciendo referencia a que los triángulos son equiláteros (intervención 32), o, después (intervención 34), cuando compara las dos bases del trapecio contando los lados del hexágono que contiene cada una de ellas (Figura 8.4.10).

Así pues, la conducta de Lluís se caracteriza por el hecho de realizar preguntas aclaratorias (intervenciones 25, 27 y 31) sobre elementos de contenido introducidos por Pere, así como por validar (intervenciones 29, 33 y 35) las aportaciones efectuadas por su interlocutor. En cambio, Pere responde a las preguntas de Lluís introduciendo conocimientos y argumentaciones nuevas (intervenciones 22, 24, 26, 28 y 32).

Profundizando en el análisis anterior podemos afirmar que:

- El episodio se inicia con la intervención 22 en la que Pere tiene la intención de empezar la ejecución del plan propuesto e introduce, por medio de una aserción, un tema que se convierte en objeto de discusión (intervención problematizada de carácter directivo), lo cual produce en Lluís una reacción inicial (intervención 23) que es simplemente una demanda de validación de la aportación efectuada por Pere. El episodio termina con el

acuerdo de ambos alumnos. En particular, cuando Lluís comprende y da por válidas las aportaciones y justificaciones de Pere.

- La persistencia en la comprensión, por parte de Lluís, de la relación entre las bases del trapecio (intervenciones 23, 25 y 31) y del radio del hexágono (intervención 27) hace que se revisen determinados conceptos relacionados con los elementos del hexágono regular (radio de la circunferencia circunscrita y su relación con el lado del hexágono, igualdad de los lados del hexágono, condición de equiláteros de los triángulos obtenidos al unir el centro con cada uno de los vértices del hexágono).
- Los papeles comunicativos predominantes de los interlocutores son: *a)* Lluís desempeña el papel de realizar preguntas (generalmente demandas de aclaración y de confirmación —intervenciones 23, 25, 27 y 31—) y de validar las aportaciones realizadas por Pere (intervención 29, comienzo de la 31, 33 y 35), aunque las validaciones de las intervenciones 29 y 31 podemos considerarlas como “retroalimentación del discurso”, y no como validaciones reales, si tenemos en cuenta que Lluís, al final de la intervención 31, vuelve a preguntar sobre la validez de la relación entre las bases del trapecio, dando a entender que todavía no tiene clara dicha relación; y *b)* Pere asume el papel principal de responder a las preguntas de Lluís (intervenciones 24, 26, 28 y 32), y en sus respuestas introduce elementos cognitivos nuevos (Figura 8.4.10).

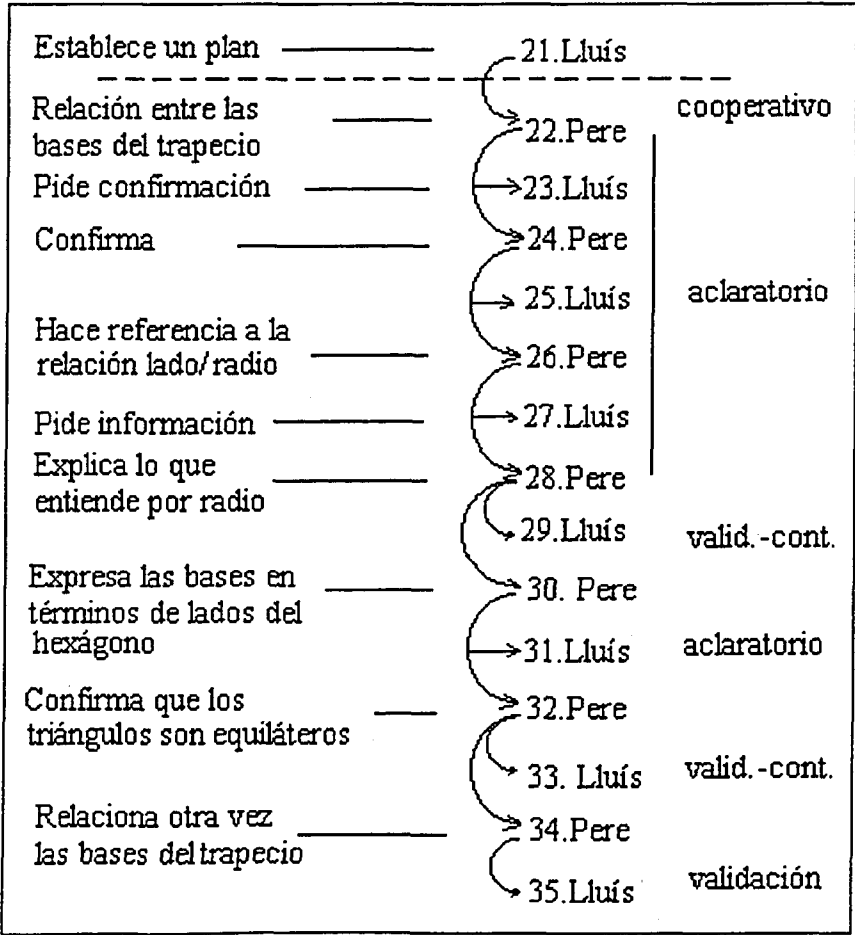


Figura 8.4.10

- Podemos clasificar el diálogo entre Pere y Lluís como “progresivo”. Para hacer tal afirmación nos basamos en que tanto Pere como Lluís, cada uno en su papel, contribuyen a dicha progresión de la forma siguiente: *a)* Pere produce intervenciones que van aportando elementos nuevos al discurso, como, por ejemplo, cuando justifica (intervención 26) la relación entre las bases del trapecio basándose en la obtención de éste a partir del hexágono y en la igualdad del radio y el lado, o cuando da una definición precisa de lo que entiende por radio (intervención 28), o cuando vuelve a recurrir a la condición de triángulos equiláteros (intervención 32) para justificar la relación entre las bases del trapecio; y *b)* Lluís va realizando preguntas, no conformándose con las respuestas dadas por Pere, hasta que logra comprender la relación que hay entre las bases del trapecio.

- Hay evidencia de que se produce una oportunidad de aprendizaje por parte de Lluís (intervención 25) —que surge como consecuencia de la justificación de la relación entre las bases del trapecio FCBA— y que está asociada a la condición de equiláteros que tienen los triángulos obtenidos al unir el centro de un hexágono regular con cada uno de sus vértices y, por tanto, a la relación de igualdad entre el lado y el radio de dicho hexágono.

E) Episodio de análisis

Este episodio lo inicia Pere (intervención 36) recordando la fórmula del área del trapecio y tiene una continuación cooperativa de Lluís (intervención 37), que propone una forma alternativa de calcular dicha área.

37. Lluís: *Bueno, però l'àrea del trapezi la podem buscar tenint l'àrea dels tres triangles* [indica los triángulos equiláteros que componen el trapecio]. *Fem les àrees dels tres triangles, les sumem i ja tindrem l'àrea del trapezi. Els tres triangles equilàters, fem la seva àrea, les sumem i punt.*

La aplicación de la fórmula del área del trapecio se aplaza hasta la intervención 46 porque la propuesta de Lluís capta, momentáneamente, la atención de Pere, que en la intervención 38 pide a Lluís que le aclare la finalidad de su exposición. La respuesta que Lluís le da, haciendo referencia al cálculo del área del trapecio para después calcular el área del hexágono, parece no satisfacer a Pere, que desconecta de lo que dice su compañero hasta la intervención 50.

Lluís insiste en el cálculo del área del trapecio utilizando la descomposición en tres triángulos equiláteros que sumados le darán el área de aquél y recuerda las relaciones entre la altura del trapecio y la de uno de los 6 triángulos equiláteros que componen el hexágono, así como la relación entre las bases del trapecio (intervenciones 41 y 43). Dichas relaciones le permiten hacer una previsión, nada clara, sobre la razón entre las áreas de tales figuras (trapecio y triángulo equilátero) con la finalidad —interpretamos nosotros basándonos en la intervención 49— de calcular el área del trapecio y a partir de ella la del hexágono.

El inicio del episodio se caracteriza por dos intercambios del tipo cooperativo (intervenciones 21-36 y 36-37), ya que Pere recoge la idea del plan propuesto por Lluís (intervención 21) aportando la fórmula del área del trapecio y Lluís introduce una información equivalente. A partir de ese momento Lluís toma la iniciativa insistiendo en la descomposición del trapecio, lo que da lugar a una demanda de aclaración por parte de Pere que hace que Lluís le responda (intervención 39) explicando cómo a partir del área del trapecio se puede obtener la del hexágono.

La confirmación que Pere produce en la intervención 40, repitiendo las últimas palabras de Lluís, nos hace pensar que Pere ha comenzado a desconectarse de su compañero, desconexión que se hace efectiva por parte de ambos a partir de la intervención 43, ya que en la 42, Lluís, fijándose en la identificación que Pere hace del centro del hexágono, produce todavía un intercambio que hemos clasificado como cooperativo (intervenciones 42 y 43), puesto que la aportación de la intervención 43, donde identifica las alturas referidas anteriormente, parece haber sido consecuencia de la referencia gestual de Pere al centro del hexágono (Figura 8.4.11).

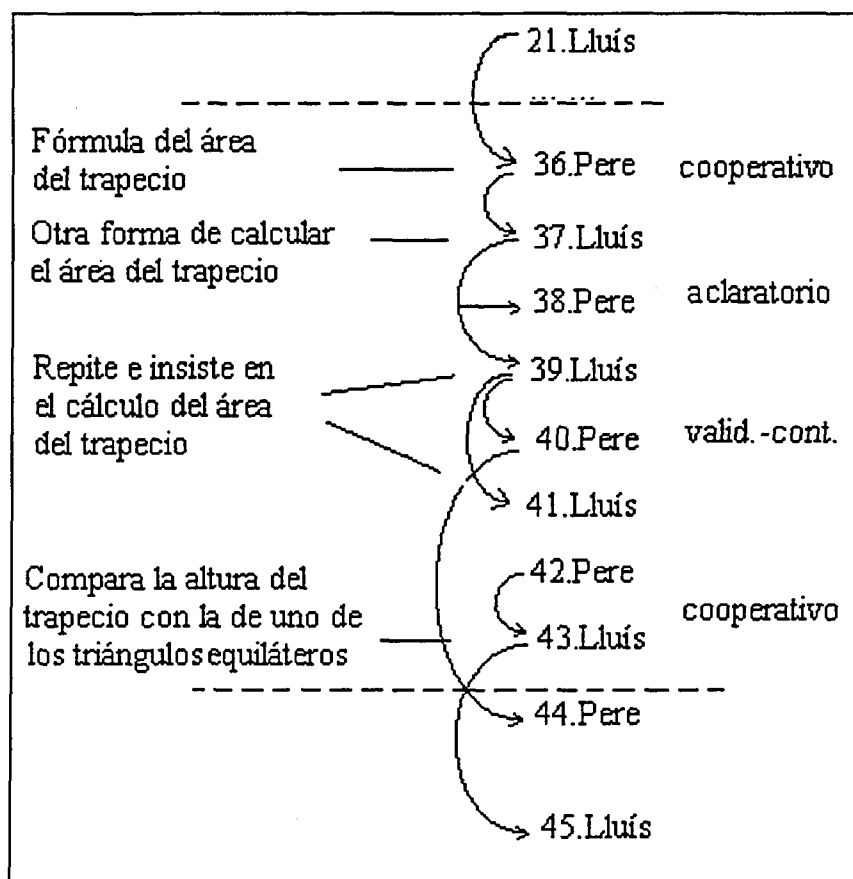


Figura 8.4.11

De la interpretación y el análisis de este episodio podemos concluir que:

- El comienzo de este episodio parece prometedor en el sentido de que se inicia con dos intercambios cooperativos: el primero de ellos, producido como consecuencia del intento de Pere de iniciar la ejecución del plan establecido, y el segundo iniciado con una propuesta alternativa para el cálculo del área del trapecio. Las propuestas realizadas por Lluís no son atendidas después por Pere, que acaba el episodio no escuchando a su compañero.

- Hay en este episodio tres aportaciones que es necesario resaltar, aunque ninguna de las tres es considerada, después, en el desarrollo del proceso: la identificación (con alguna incorrección) de la fórmula del área del trapecio por parte de Pere; la propuesta, por parte

de Lluís, de una forma equivalente de calcular dicha área; y la identificación de la altura del trapecio y su comparación con la altura del triángulo AFG.

F) Episodio de transición/ejecución

Las intervenciones de este episodio —de la 44 a la 49— son de dos tipos: las producidas por Pere —por escrito y sin verbalizar—, que están relacionadas con la aplicación de la fórmula del área del trapecio, en la que aplica la relación entre sus bases, y las de Lluís, que nada tienen que ver con las de su compañero, que insiste en guardar las relaciones entre los elementos del trapecio (bases y altura) que han obtenido previamente.

En la intervención 49, cuando Lluís ya ha acabado de hacer su recopilación de relaciones, éste hace una previsión sobre la aplicación de dichas relaciones semejante a la producida en la intervención 43.

Los alumnos no aportan ninguna información nueva y el único elemento de control que se produce es el hecho de que Lluís se para a resumir y escribir las relaciones antes mencionadas.

Todos los intercambios de este episodio se producen en paralelo, es decir, no hay comunicación entre los alumnos (Figura 8.4.12). Tenemos, pues, una situación de trabajo en la que uno de los alumnos está continuamente hablando —en algunos momentos al mismo tiempo que escribe— y el otro permanece en silencio, pero escribiendo cosas que no tienen nada que ver con lo que dice o hace su interlocutor.

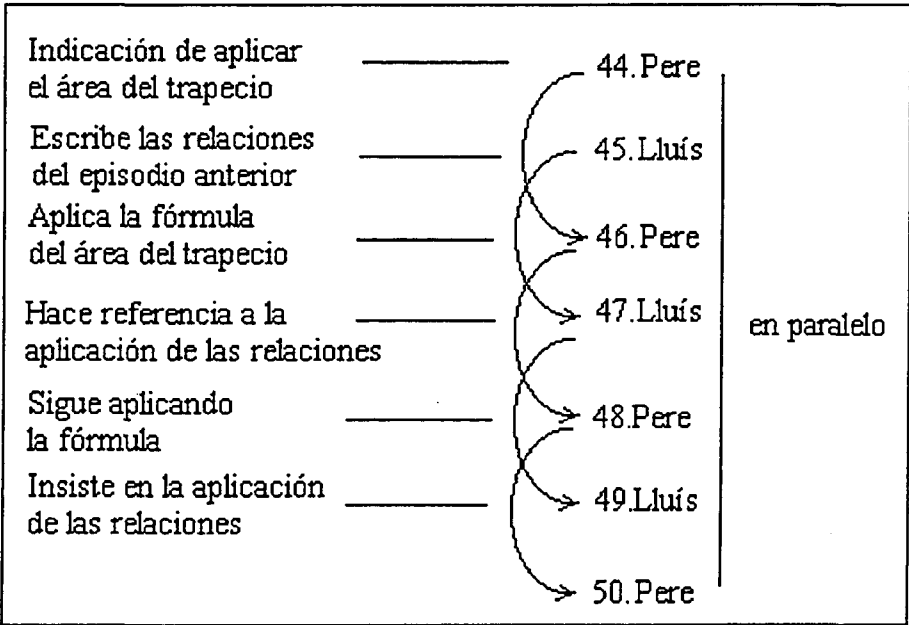


Figura 8.4.12

La situación de trabajo en paralelo condiciona la identificación del episodio al que hemos denominado como “transición/ejecución”, puesto que —debido a la desconexión entre los alumnos— mientras Lluís guarda la información obtenida de las revisiones anteriores, escribiéndola incluso (episodio al que hemos identificado como de transición),

Pere entra de lleno en la ejecución escribiendo expresiones algebraicas que tienen que ver con la aplicación de la fórmula del área del trapecio, en la que, además, tiene en cuenta la relación entre sus bases (intervenciones 46 y 48).

De la interpretación y el análisis de este episodio podemos concluir que:

- Los alumnos trabajan por separado (en paralelo), ignorando cada uno de ellos lo que el otro dice o hace.
- Las expresiones orales de Pere son escasas (intervenciones 44 y 50), mientras que Lluís no para de hablar (en la intervención 45 habla al mismo tiempo que escribe). A pesar de eso, no se produce una situación en la que Pere observe de forma pasiva y esté atento a lo que dice Lluís, sino que trabaja en silencio y por su cuenta.
- Lluís se limita a almacenar (escribiendo) resultados intermedios obtenidos en episodios anteriores (intervención 45) y a hacer previsiones sobre lo que piensa que se ha de hacer (intervención 47 y 49), mientras tanto, Pere está tratando de calcular el área del hexágono (ejecución), para ello, intenta aplicar la fórmula del área del trapecio (intervención 44 y 46) y la relación entre las dos bases (intervención 48) que habían obtenido con anterioridad.

G) Episodio de análisis

Este episodio abarca desde la intervención 50 a la 59.

Pere acaba de aplicar el área del trapecio y parece centrarse ahora, captando la atención de Lluís, en el cálculo del área del triángulo AA'C (intervención 50), de acuerdo con el plan que Lluís había establecido (intervenciones 19 y 21).

50. Pere: *O sigui, per trobar això [señala, sobre su hexágono, Figura 8.4.6, el triángulo rectángulo ACA', Figura 8.4.4], l'àrea del...*

En las intervenciones 52 y 54, Pere recupera el rombo AGCB que había considerado en la intervención 12 —con la finalidad de calcular el área del triángulo AA'C— e insiste en su división en dos triángulos iguales mediante la diagonal AC. La propuesta de Lluís (intervención 55), que recoge la idea de Pere en relación al rombo, es la de una ejecución geométrica consistente en dividir el trapecio FCBA en un rombo AGCB y en el triángulo equilátero FGA. La división del rombo en dos triángulos iguales AGC y ACB, y del triángulo FGA en otros dos mediante la altura AA', solucionaría el problema de forma inmediata.

55. Lluís: *Sí, sí, però és clar, quan aconseguim l'àrea de tot [indica el hexágono], ho dividim per dos [indica el trapecio FCBA, Figura 8.4.5] i l'àrea d'aquest triangle [AA'C] per ho que has dit..., tu quan fas la diagonal AC parteixes els triangles equilàters en dos, parteixes els triangles equilàters en dos, i aquest també [FAG] perquè fas l'alçada. Aquest [FAG] el parteixes en dos, segur, perquè fas l'alçada.*

Esta propuesta surge de forma natural como consecuencia de la consideración y división del rombo, por parte de Pere, en las intervenciones anteriores, con las consiguientes validaciones por parte de Lluís.

En las intervenciones siguientes, 57, 57', 57'' (intercaladas con pausas) y 59, Lluís trata por todos los medios de convencer a Pere sobre la veracidad de la división que propone, pero Pere, obsesionado con la consecución de una ejecución algebraica, según se

pone de manifiesto en la intervención 60, no le hace caso, y Lluís desiste, abandonándose, así, sin una reflexión profunda, la ejecución geométrica propuesta por Lluís.

Los intercambios que se producen hasta este momento son del tipo validación-continuación dirigidos por Pere (intervenciones 50 a 54). En la intervención 55, Lluís genera la propuesta que hemos explicado al comienzo de este apartado, por lo que se puede considerar un intercambio cooperativo.

A partir de la intervención 55 se cambian los papeles y es Lluís el que dirige un intercambio de validación-continuación (intervenciones 55 a 57) que acaba no siendo escuchado por Pere, hasta el punto de no responder éste a la pregunta directa realizada en la intervención 57'. La validación que Pere hace en la intervención 58 se puede considerar retroalimentativa del diálogo, ya que en la intervención 60 Pere introduce una información que nada tiene que ver con lo que Lluís viene diciéndole en las intervenciones anteriores.

Podemos apuntar como aspecto más sobresaliente de este episodio la propuesta de Lluís de dividir el triángulo AA'C para calcular su área. Esta forma de actuar no es atendida por Pere, que responde con el silencio a la propuesta de su compañero. La poca capacidad que tiene Lluís de convencer a Pere influye en el abandono de esa propuesta. En la Figura 8.4.13 mostramos la sucesión de intercambios de este episodio.

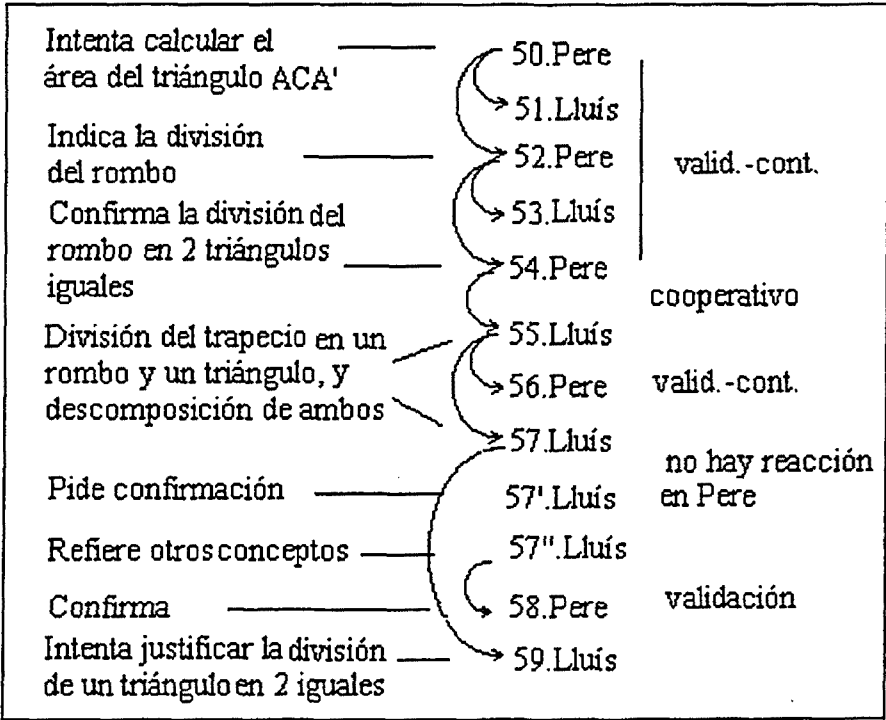


Figura 8.4.13

H) Ejecución

El rumbo del proceso cambia cuando Pere encuentra la relación entre A'C —altura del triángulo AA'C— y el lado del hexágono (intervención 60). Esta aportación junto con la relación entre la base AE del triángulo ACE y la altura de uno de los 6 triángulos

equiláteros que componen el hexágono (intervención 64) cambia el proceso de resolución, orientándolo hacia una ejecución algebraica en lugar de geométrica.

60. Pere: [No atiende] = *Espera un moment, la distància aquesta* [indica A'C en la Figura 8.4.4] *és un costat* [indica GC] *i mig* [GA'], *d'aquí fins aquí* [A'C] *és un costat i mig, no?*

64. Pere: *Tres mitjos, tres costats partits per dos, no?, i això* [FD] *són dos altures*. [se refiere a las alturas de los triángulos GEF y EGD, Figura 8.4.6].

En las intervenciones siguientes (66 y 68) Pere calcula el área del triángulo ACE y la del hexágono en función del lado de éste —al que llama, sin identificarlo explícitamente, “c”— y de la altura de uno de los 6 triángulos equiláteros —a la que llama “h”, igualmente sin identificarla—, mientras Lluís observa cómo lo hace.

La gestión del proceso se vuelve a resentir puesto que ahora la ejecución no se ajusta a la planificación propuesta (Pere calcula las áreas del hexágono y del triángulo ACE completos).

Los alumnos introducen en este episodio dos aportaciones clave para el desarrollo del proceso.

a) La comparación que Pere hace entre el lado del hexágono y el segmento A'C (Figura 8.4.4) es fundamental para el desarrollo posterior de la resolución, ya que cambia el rumbo de la ejecución, orientándola hacia una de tipo algebraico.

La identificación de la anterior relación provoca en Lluís una demanda de aclaración (intervención 61) solventada por Pere con una simple repetición de su intervención anterior (intercambio aclaratorio). A partir de ese momento, y hasta el final del episodio, se suceden intercambios del tipo validación-continuación dirigidos por Pere y que Lluís valida sin comprender; nos basamos para hacer esta afirmación en el hecho de que a partir de la intervención 70, Lluís insiste en que Pere le explique la relación que ha introducido en la intervención 60 (Figura 8.4.14).

b) Es importante resaltar cómo Pere, en la intervención 64, identifica, sin nombrarla, la base CE del triángulo ACE y la considera como dos alturas, las de los triángulos EDG y CDG. Pere calcula el área del triángulo ACE a partir de su base EC y su altura A'C, y la del hexágono a partir de la suma de sus 6 triángulos equiláteros, olvidándose del trapecio que habían considerado en la planificación.

La falta de control del proceso se pone de manifiesto por el hecho de que los alumnos hacen una puesta en práctica que no se ajusta a la planificación propuesta y abandonan sin discusión la ejecución geométrica que había propuesto Lluís al final del episodio anterior.

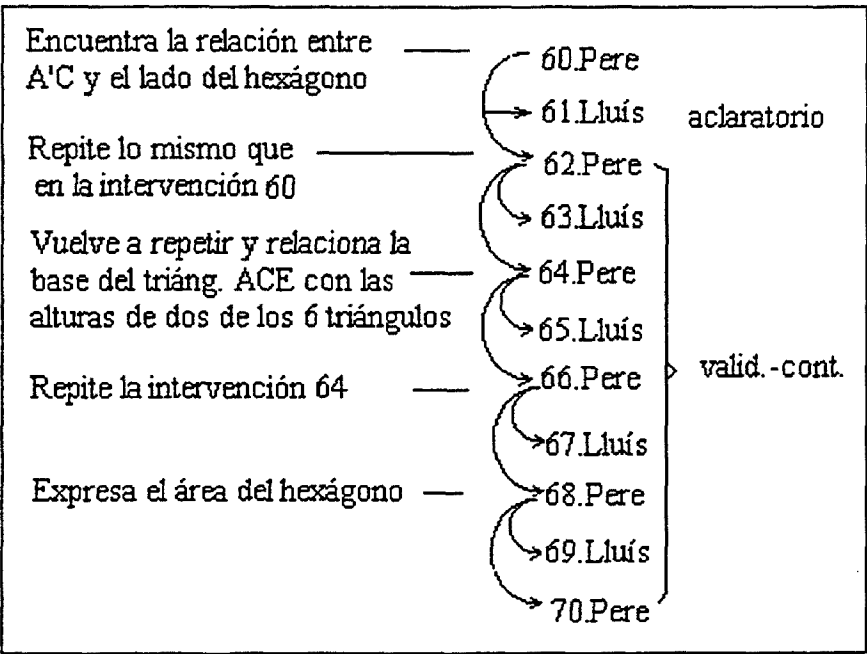


Figura 8.4.14

I) Episodio de evaluación local-2

El episodio comienza cuando Pere se percata de que las dos áreas le salen igual (intervención 70). Inicia, entonces, un proceso de revisión de las expresiones hasta que logra corregir el error (intervención 74). Mientras tanto, Lluís, que trabaja en paralelo, duda (intervención 71) y trata de comprender (intervenciones 73 y 75), sin éxito, la relación entre el segmento A'C y el lado del hexágono.

71. Lluís: *Aquest tres mitjos del costat no m'agrada, eh?*

Se observa una diferencia en la actuación de ambos alumnos durante las intervenciones 70 a 74, pues mientras Pere, en su actuación individual, progresa hasta corregir el error cometido previamente (Figura 8.4.14) —corrección que se consigue a base de no atender la petición de Lluís (intervención 71), o por lo menos de aplazarla hasta la intervención 75—, Lluís no consigue su objetivo, que es el de lograr entender la relación entre el segmento A'C y el lado del hexágono.

No hay en este episodio, a parte de la corrección del error, ninguna otra aportación nueva.

J) Episodio de evaluación local-3

Por fin la demanda de aclaración de Lluís es atendida por Pere.

75. Lluís: *Però una cosa, com has trobat els tres mitjos de c aquí?*

76. Pere: *Un [CG, Figura 8.4.4] i mig [GA']*.

Que Lluís vuelva a insistir ahora sobre esa expresión, interpretamos que puede ser debido a que no ha captado cuál es el lado “c” que figura en la relación (ya que Pere lo

introdujo —intervención 66— sin nombrarlo explícitamente), es decir, con qué lado se compara la altura del triángulo ACE, ni la finalidad de tal relación, como se pone de manifiesto en las intervenciones 79 y 81.

Las respuestas poco explícitas de Pere en esta parte del proceso producen en Lluís una confusión en la identificación de los triángulos a los que a se refieren. Así pues, mientras Pere se refiere al lado CG de uno de los 6 triángulos equiláteros —al que llama “el del centre”— como unidad de medida, Lluís se está refiriendo al triángulo ACE al que llama “el del mig”.

La revisión iniciada en la intervención 70, que tiene dos partes bien diferenciadas —una de ellas relacionada con la corrección de un error cometido por Pere y la otra con aclaraciones que tienen que ver con relaciones entre los elementos de las figuras—, acaba cuando Lluís, en su afán de guardar todo lo que considera interesante, escribe (primera parte de 89) dichas relaciones.

El diálogo que se produce entre ambos alumnos tiene, en este episodio, tres partes, como podemos observar en la Figura 8.4.15.

La primera —entre las intervenciones 75 y 78—, que se caracteriza por dos intercambios del tipo aclaratorio que tienen su origen en la intervención 66, a la que Lluís hace referencia cuando pregunta por los tres medios de c.

La segunda, caracterizada por las respuestas poco explicativas de Pere, sobre todo la de la intervención 78 —“El triangle de dintre”—, en la que no especifica el triángulo al que se refiere. Estas respuestas no sacan de dudas a Lluís, que no comprende la finalidad de la utilización del lado del hexágono. Además, las respuestas de Pere originan un intercambio de desacuerdo que acaba cuando Lluís (intervención 83) explica lo que Pere hace y ambos validan tal explicación. Este desacuerdo es debido más a una dificultad de comprensión de los elementos que utiliza Pere y su finalidad, que a una discrepancia real sobre tal utilización.

La tercera, a partir de la intervención 83, donde Lluís continúa preguntando sobre elementos nuevos del triángulo ACE, ahora sobre la base, a lo que Pere responde comparándola con la altura de uno de los 6 triángulos equiláteros que componen el hexágono.

Resumiendo:

- El episodio se inicia con una pregunta de Lluís, atendida por Pere cuando acaba de repasar las expresiones que había escrito anteriormente. Corresponde, pues, a Pere decidir el momento en que atiende las demandas de su interlocutor.
- El tipo de intercambios que hemos identificado nos permite afirmar que el papel principal que desempeña Lluís es el de preguntar dudas heredadas de episodios anteriores, mientras que el de Pere es responder a tales preguntas, al principio de una forma muy concisa y poco explicativa.
- Pere no concreta el triángulo al que se refiere en la intervención 78, eso da lugar a una confusión que origina un breve desacuerdo entre los interlocutores que acaba cuando el mismo Lluís interpreta lo que Pere está haciendo.
- El episodio termina cuando Lluís valida, valora y manifiesta explícitamente que entiende las respuestas de Pere a sus preguntas.

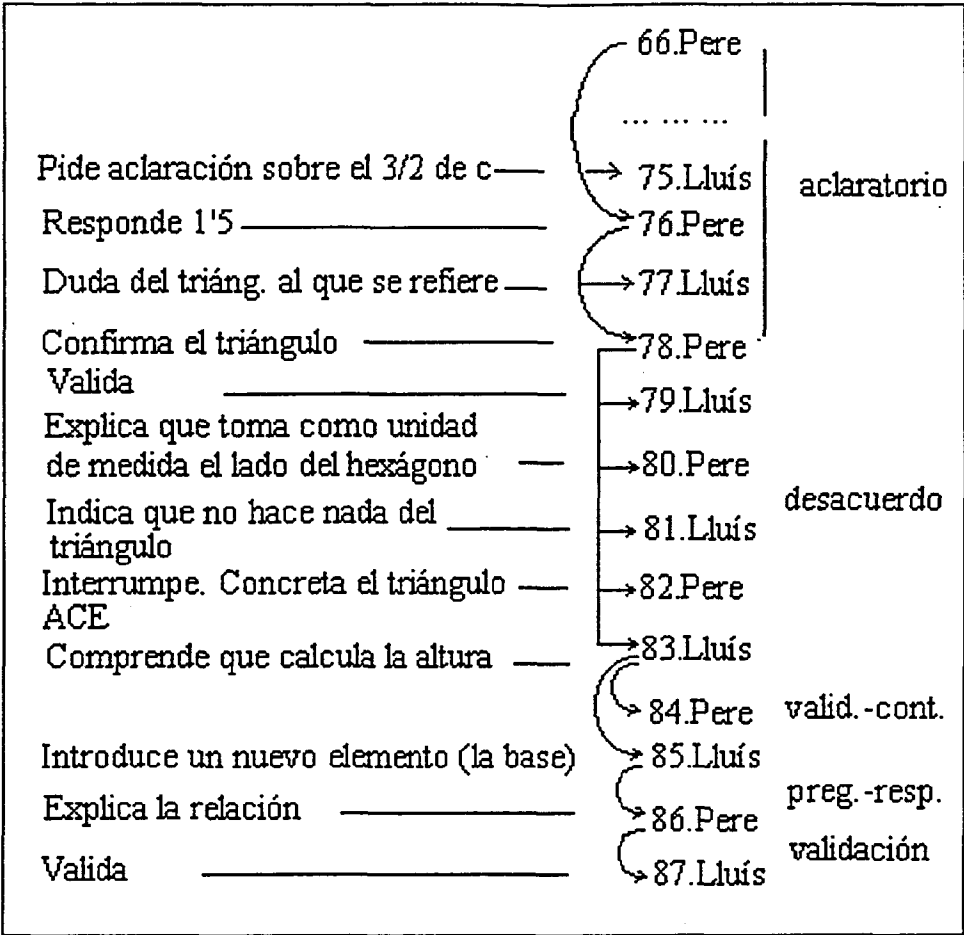


Figura 8.4.15

K) Ejecución

Simultáneamente y por separado, Pere reanuda la ejecución —intervención 88— y expresa por escrito el área del triángulo ACE y la del hexágono, ésta como suma de los 6 triángulos equiláteros, hace a continuación el cociente entre ellas, y obtiene, de esa forma, el resultado final. Pere da por resuelto el problema y adquiere una postura más relajada sobre su asiento.

La actuación de Lluís no es conformista, ya que cuando se percata de que Pere ha acabado (intervención 91), no se “apunta” al resultado obtenido por su compañero y da por acabada la resolución, sino que continúa la realización de los cálculos e insiste en la comprensión de todos los pasos hasta llegar él mismo al resultado final, negándose, incluso, a aceptar simplificaciones en los cálculos que no ve claras.

La “irregularidad” que supone el hecho de que Pere dé por acabada la resolución y Lluís continúe el proceso pone de manifiesto el desfase que se ha producido entre ambos alumnos durante algunos momentos del proceso de resolución.

Los intercambios que identificamos (Figura 8.4.16) son muy diversificados. Comienza el episodio en las intervenciones 88 y 89 con una continuación del discurso del episodio anterior por parte de ambos alumnos.

La intervención 88 que produce Pere es, claramente, una continuación de la 74, en la que ya había corregido un error —consistente en no haber dividido por 2 el producto de la base por la altura— al obtener el área del triángulo ACE (Figura 8.4.4). Esa conexión de la intervención 74 con la 88 está justificada porque durante las intervenciones intermedias los alumnos se dedican a repasar las relaciones, obtenidas anteriormente, entre los elementos de las figuras (triángulo y hexágono). Además, la intervención 74 tiene su continuación en la 88 porque Pere, que había obtenido las expresiones de las áreas del hexágono y el triángulo, las vuelve a escribir y efectúa la división entre ambas para obtener el resultado final.

La intervención 89' es el origen de un intercambio del tipo validación-continuación, que acaba cuando Lluís efectúa los cálculos de la división de las dos áreas (intervención 91'). En medio (intervención 91) Lluís hace una pregunta que queda sin respuesta.

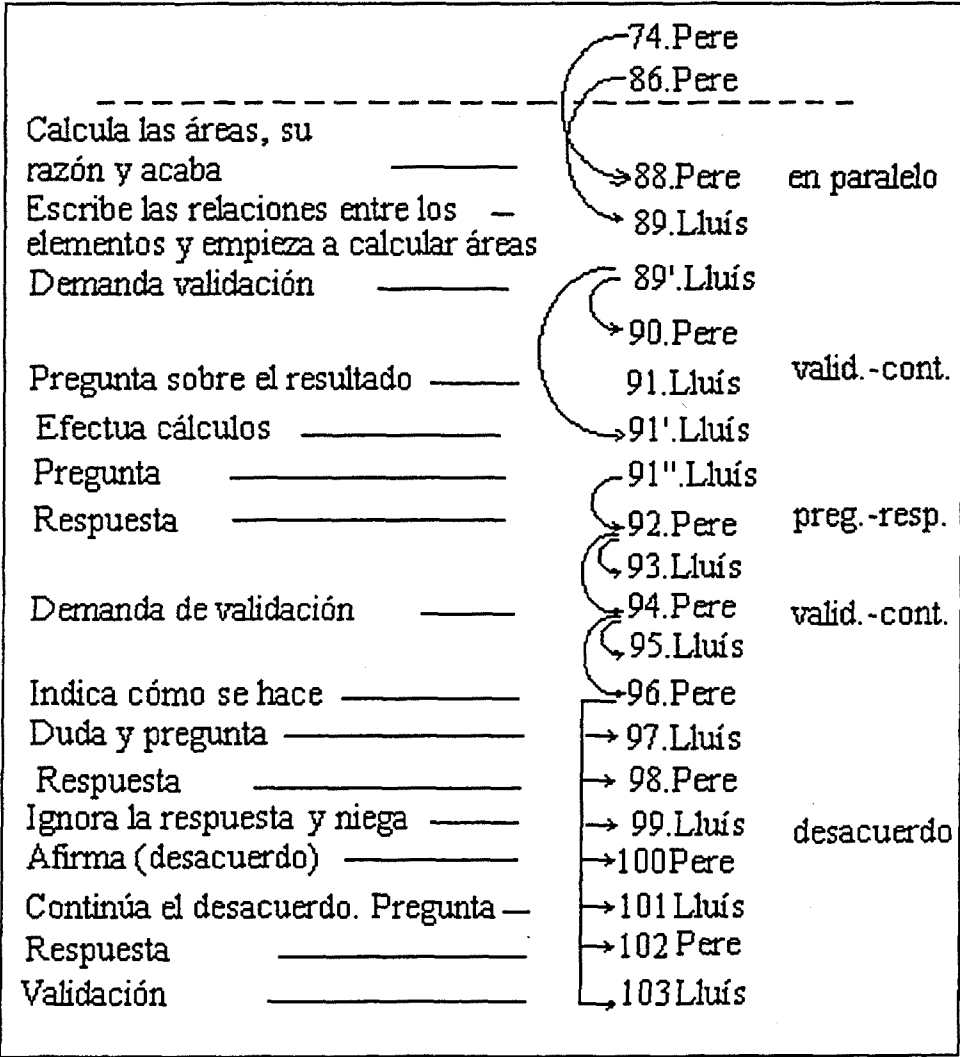


Figura 8.4.16

La respuesta que Pere da a la pregunta efectuada por Lluís en la intervención 91'' es una simple repetición de la relación “ $h=1.5c$ ” que origina un intercambio del tipo validación-

continuación, al que sigue otro de las mismas características. En ambos, las validaciones corresponden a Lluís y las continuaciones, que son meramente indicativas, a Pere.

El intercambio de desacuerdo está originado por el error producido por Lluís al sustituir h por $1'5$ en lugar de por $1'5c$. Interpretamos que la ausencia de la referencia “ c ” —lado del triángulo equilátero— ha sido un simple olvido si tenemos en cuenta que Lluís ya había expresado tal relación correctamente en la intervención 89.

Del análisis de este episodio podemos concluir que el papel comunicativo de cada alumno en este episodio está marcado, por un lado, por el desfase al que hemos aludido anteriormente, y, por otro, por la persistencia de Lluís en comprender todos pasos del desarrollo algebraico final. Así pues, mientras Lluís, en la primera parte, desempeña el papel de efectuar preguntas o demandas de validación, Pere se limita a responderlas en la mayoría de los casos. La parte final se caracteriza por el desacuerdo que se produce entre ambos como consecuencia de un olvido de Lluís en una de las expresiones de la altura del triángulo ACE, desacuerdo que queda resuelto al responder Pere a una pregunta efectuada por su compañero.

8.4.2.3. Características generales del proceso de resolución

a) Papeles comunicativos de los alumnos

La Tabla 8.4.1 nos da una idea general del comportamiento interlocutivo de los alumnos. En ella podemos observar cómo las acciones de Pere provocan las reacciones de Lluís en una proporción sensiblemente superior al caso contrario —38 de 52 por 26 de 55—, aunque muchas de esas reacciones sean de validación.

	NÚMERO DE INTERV.	PRODUCEN REACCIÓN EN SU COMPAÑERO	ACCIONES DIRECTAS QUE QUEDAN SIN RESPUESTA
INTERVENCIONES DE PERE	52	38 (16 son reacciones de validación)	1
INTERVENCIONES DE LLUÍS	55	26 (7 son reacciones de validación)	6 (4 son preguntas y 2 son afirmaciones seguidas de invitaciones a tomar la palabra: ¿no?, ¿y? ...)

Tabla 8.4.1

Las validaciones dan lugar a un número de intercambios de validación-continuación del tipo Pere-Lluís-Pere muy superior a las del tipo Lluís-Pere-Lluís —13 de las primeras por 4 de las segundas (Tabla 8.4.3)—. Eso, en líneas generales, significa que Lluís está bastante atento a las aportaciones de su compañero, atendiéndolas, considerándolas y fomentándolas con validaciones que incitan a la continuación del diálogo. Lo contrario de lo que ocurre con Pere.

Las afirmaciones anteriores sobre la atención de Lluís a lo que dice o hace Pere se justifican todavía más si observamos que sólo una acción directa (pregunta) de Pere no ha sido atendida por Lluís, en cambio, cuatro preguntas directas y dos invitaciones a tomar la palabra por parte de Lluís han sido obviadas por Pere. Todo esto nos puede dar una idea de la atención de Lluís hacia Pere y de la poca consideración de Pere hacia lo que comenta o pregunta Lluís.

La actitud de cierta desconsideración de Pere hacia Lluís se evidencia en diferentes momentos del proceso, como, por ejemplo, cuando Pere no atiende inmediatamente las demandas de Lluís en el episodio de evaluación local-2, o responde con cierta desgana en el episodio final, o no considera la ejecución geométrica que Lluís propone con insistencia en el episodio de análisis, o da unas explicaciones muy concisas y muy poco explicativas en el episodio de evaluación local-3, etc.

Por otra parte, en el protocolo que analizamos observamos una proporción considerable de intercambios que aportan alguna información nueva en el contexto global del proceso (Tablas 8.4.2 y 8.4.3) —17 (6 cooperativos y 11 progresivos de tres intercambios) por 41 (14 de dos intercambios y 27 de tres)—, aunque esa información nueva no siempre haya estado en la línea de la solución que han obtenido, es decir, no tenga por qué haber contribuido a acortar la resolución, pensamos que la generación de información nueva siempre es un elemento dinamizador del proceso de resolución.

	COOPERATIVO	VALIDACIÓN	PREGUNTA-RESPUESTA	TOTAL
Pere-Lluís	3 (3)*	2	1(0)	6(3)
Lluís-Pere	6(3)	1	1(0)	8(3)
TOTAL	9 (6)	3	2(0)	14(6)

* Entre paréntesis indicamos los intercambios que aportan información nueva en el contexto global del proceso de resolución.

Tabla 8.4.2. Intercambios de dos intervenciones

	VALIDACIÓN-CONTINUACIÓN		ACLARATORIO		INTERRUPCIÓN		TOTAL	
	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.
Lluís-Pere-Lluís	3(1)*	1	1(1)	0	0	0	4(2)	1
Pere-Lluís-Pere	8(5)	5	4(3)	4	1(1)	0	13(9)	9
TOTAL	11(6)	6	5(4)	4	1(1)	0	17(11)	10

* Entre paréntesis indicamos los intercambios que aportan información nueva en el contexto global del proceso de resolución.

Tabla 8.4.3. Intercambios de tres intervenciones.

Ahora bien, es significativa la diferencia entre ambos alumnos en cuanto al número de intercambios que originan, sobre todo de tres intervenciones. Esa diferencia y la disposición de los intercambios a lo largo del protocolo nos darán una idea más ajustada del papel comunicativo que desempeña cada alumno.

En diferentes partes del proceso de resolución hay tres agrupaciones en las que se combinan cinco o más intercambios aclaratorios con otros de validación-continuación de la forma Pere-Lluís-Pere, así como un par de agrupaciones de dos intercambios seguidos de la misma forma. Esto nos da una idea del tipo de diálogo que se produce, el cual se caracteriza por aportaciones de Pere acompañadas por validaciones y preguntas aclaratorias de Lluís, que contribuye de esa forma a la continuación del diálogo.

Por el contrario, los pocos intercambios dirigidos por Lluís están aislados y se producen de forma esporádica.

En cierta forma, las interacciones que se producen entre los alumnos a lo largo del proceso de resolución están condicionadas tanto por lo adelantado que va Pere respecto a su compañero, como por la persistencia de Lluís en comprender todos los pasos que se dan.

b) Esquema de la sucesión de episodios

En este proceso de resolución, los alumnos se inclinan finalmente por un enfoque algebraico que consta de tres partes: el cálculo del área del hexágono mediante la suma de las áreas de los seis triángulos equiláteros iguales que lo forman, expresadas en función de la base y altura de cada uno de ellos; la expresión de la fórmula del área del triángulo ACE en función de las mismas variables que en el caso anterior; y la obtención final de la razón entre ambas áreas.

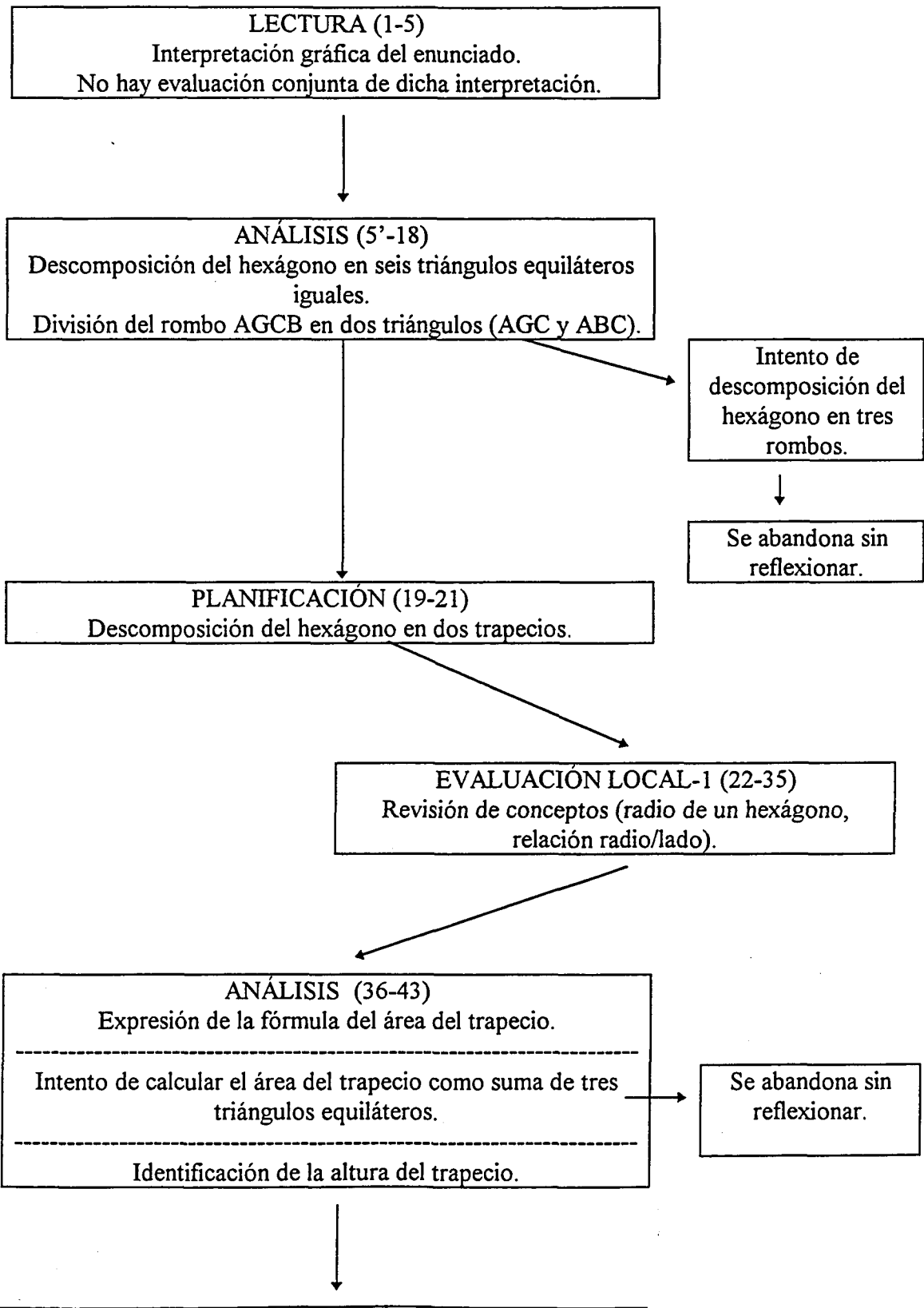
A pesar de esta ejecución algebraica, hay varias propuestas basadas en la descomposición del hexágono y la comparación de los triángulos que obtienen (véase el esquema de la sucesión de episodios al final de este apartado), las dos principales son las siguientes: en la intervención 18, Pere prácticamente soluciona el problema, ya que descompone el hexágono en tres rombos y cada uno de ellos en dos triángulos iguales; en las intervenciones 55 y 57, Lluís trata de comparar el área del triángulo AA'C con la del trapecio descomponiendo éste en un triángulo equilátero y en un rombo. Estas dos propuestas hubieran resuelto el problema inmediatamente.

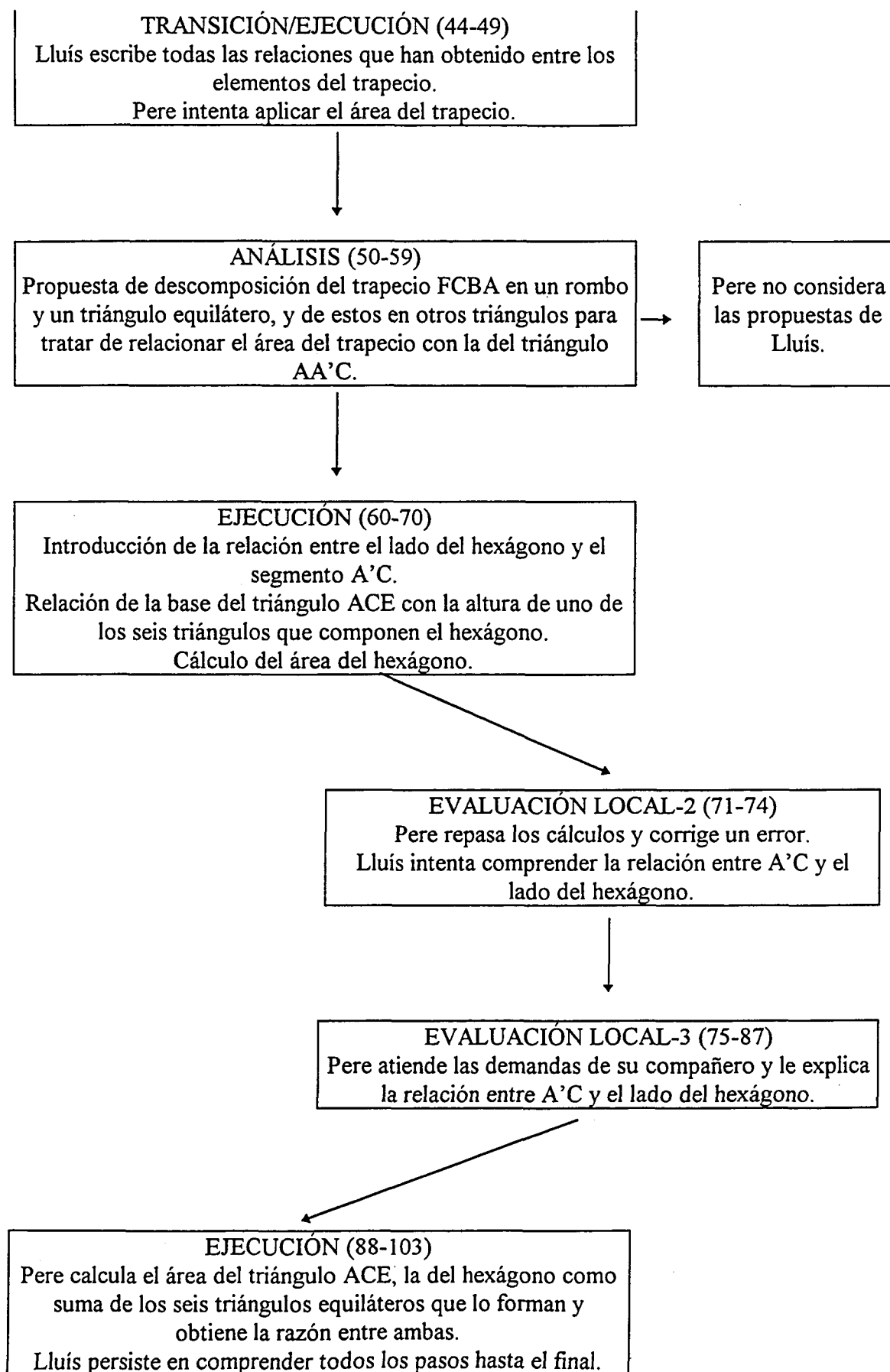
La falta de una gestión adecuada hace que estos intentos de enfocar la resolución del problema de forma geométrica sean abandonados sin ni siquiera merecer el más mínimo comentario por parte del alumno que los escucha. También, esa falta de gestión se pone de manifiesto en que la ejecución que los alumnos hacen no se corresponde con el plan que habían propuesto.

La ausencia de una verificación final es debida a la rapidez con la que Pere acaba la resolución (intervención 88) y a la insistencia posterior de Lluís en comprender todos los pasos que ha dado su compañero.

Otros aspectos a destacar de este proceso de resolución son las tres evaluaciones locales que se producen: en la primera, provocada por Lluís, los alumnos revisan determinados conceptos; en la segunda, Pere repasa los cálculos que ha efectuado y localiza el error que había cometido; en la tercera, provocada por las demandas de Lluís, Pere explica a su compañero una relación que ha encontrado entre los elementos de la figura.

ESQUEMA GRÁFICO DE LA SUCESIÓN DE EPISODIOS





8.4.3. Actuación de Pere y Lluís en la resolución del problema del triángulo

8.4.3.1. Transcripción del proceso de resolución

1. Lluís: [Lectura].

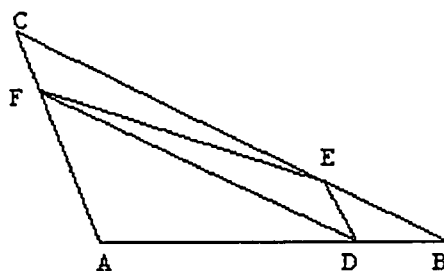


Figura 8.4.17

2. Pere: *A veure [vuelve a leer], o sigui, aquest [AD] és 3 vegades aquest [DB].*
3. Lluís: *Sí, [continúa leyendo], llavors AD són 3 vegades DB, això ja ho tenim.*
- 3'. Lluís: [Continúa leyendo].
4. Pere: *DBE i FEC.*
5. Lluís: *Diu que aquest costat DF és paral·lel al BC, el DF i el DE és paral·lel a l'AC. Quina relació hi ha entre les àrees dels triangles DBE i FEC [continúa leyendo], diu: relaciona aquest [DBE] i aquest d'aquí [FEC].*
6. Pere: *Què? [No ha atendido a lo que ha dicho Lluís].*
7. Lluís: *Diu: relaciona aquest i aquest, entre el petit i aquest, val.*
8. Pere: *Sí. La relació entre les àrees, a veure... <pausa(37)>*
9. Lluís: *Representa que si és paral·lela FD a CB, quan fas paral·leles així [indica FD y CB], representa que es mantenen les proporcions, o no? [señalando los segmentos BD y DA].*
10. Pere: *Sí, són triangles semblants.*
11. Lluís: *Llavors la línia que va de F a D continua sent això, 3 [indica AD], això 3 a 1 [indica DB]. Llavors el triangle aquest [DBE] té base 1 [DB], bueno, té base 1 respecte a l'altre.*
12. Pere: *Sí.*
13. Lluís: *Vale, i llavors la base de l'altre FE [se refiere al triángulo FEC] no fa 3 vegades el DB perquè com que no és...*
14. Pere: *No, perquè no és paral·lela a aquí [indica AD].*
15. Lluís: *Per això, perquè si fos així, ja estaria /*
16. Pere: *El que sí que sé és que són semblants [indica DBE y se refiere a ese triángulo y no indica ningún otro], si aquest [AD] és 3 vegades aquest [DB], aquest [CE] també ha de ser 3 vegades aquest [EB], sí?*
17. Lluís: *Sí, em sembla que sí.*
18. Pere: *I si aquest [AC] és paral·lel a aquest [DE], CE és igual a FD.*
19. Lluís: *Clar, aquests [CF y DE] també són paral·lels, veus?*
20. Pere: *O sigui, són iguals [se refiere a los lados opuestos], o sigui, és un paral·lelogram.*
21. Lluís: *Com dius?, com dius?*
22. Pere: *Sí, un paral·lelogram aquest d'aquí [indica el FDEC].*

23. Lluís: *Si el gires així* [gira el folio y lo pone al revés, con el lado BC como base horizontal], *forma un paral.lelogram.*
24. Pere: *Sí, sí.*
25. Lluís: *Val, si ens el girem així es veu molt millor.*
26. Pere: *O sigui, tenim això* [indica que CF y DE son iguales].
27. Lluís: *== El que sembla que és igual també és CF i DB, sembla, no sé.*
28. Pere: [Vuelve a poner el folio en su posición original]. *Si hagués alguna mida igual, no?, tenim que la base d'aquí* [FE], *no. A veure, això sí, mira l'alçada és la mateixa* [señala la altura de DBE sobre BE y la de FEC sobre EC].
29. Lluís: *Sí.*
30. Pere: *I la base, aquesta* [indica EB] *és 1, això* [EC] *és 3, no?*
31. Lluís: *Sí.*
32. Pere: *Tenim la mateixa..., la mateixa..., la mateixa altura* [indicando BE y EC].
33. Lluís: *La mateixa altura i 3 vegades..., i aquest, per exemple, si fos 1 i 3, aquest 1* [indica BE] *i aquest 3* [EC]. *Sí, i en què et bases per fer que l'altura és la mateixa? Vale, si agafes aquest punt* [F].
34. Pere: *== Són paral.leles* [indica FD y CB].
35. Lluís: *Ah!, és clar, hosti!, sí, sí, clar, són paral.leles, la mateixa distància* [indicando las alturas].
36. Pere: *La mateixa distància.*
37. Lluís: *Vale, doncs vale, fem això. Diu la relació.*
38. Pere: *== Això pel teorema de..., no sé, són triangles semblants* [no indica los triángulos].
39. Lluís: *Diguem que CFE i DBE són triangles semblants, llavors es mantenen les proporcions que ens donavem abans, perquè aquest i aquest* [ADF y DBE] *també ho són, ho veus?, la mateixa paral.lela* [AF y DE], *mateix costat recte* [indica AD y DB], *vale, i la mateixa paral.lela també* [FD y EB], *això vol dir que, com que els triangles que ens han donat les dades* [indica AFD y DEB] *són proporcionals, són semblants, i aquests dos* [FEC y DEB] *també es mantenen les proporcions que ens han dit, llavors 3 vegades la base* [CE], *3 vegades la base d'aquest...* [indica EB].
40. Pere: *Sí.*
41. Lluís: *L'altura tenen la mateixa, ja que el punt D i el F estan sobre la mateixa..., estan sobre la mateixa recta paral.lela al costat* [indica CB y FD].
42. Pere: *Sí.*
43. Lluís: *I la distància de F al costat* [CE] *és la mateixa* [señalando D y BE], *llavors l'altura és la mateixa i llavors les àrees són, respectivament, la primera, que és aquesta del gran* [FEC], *en el lloc on poses la base 3a, per exemple.*
44. Pere: *Sí, sí.* [Va asintiendo a todo lo que dice Lluís].
45. Lluís: *I l'alçada, poses també h. I aquí* [indica DBE], *doncs, poses a, a la base, i h a l'alçada i partides per 2 les dues àrees i llavors si les dividim es tatxen els dosos, es tatxen les h.*
46. Pere: *Es tatxa tota la fórmula menys el 3.*
47. Lluís: *Es tatxa tot menys 3. Llavors queda l'àrea del gran és 3 vegades l'àrea del petit.*
- 47'. Lluís: *Vale, l'apuntem una miqueta* =[escribe: "Els triangles AFD i EDB són semblants i els triangles FCE i DBE també, llavors aquests mantindran les dades inicials. L'alçada dels dos triangles DBE i FEC és la mateixa perquè F i D estan sobre la mateixa recta i CE també (i perquè són paral.leles totes dues). Per tot això es

cumpleix: $A_1 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{3a \cdot h}{2}$; $A_2 = \frac{b' \cdot h'}{2} = \frac{a \cdot h}{2}$; a = base del triangle DEB.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{3a \cdot h}{a \cdot h} \Rightarrow A_1 = 3A_2"] = \text{Ja està!}$$

48. Pere: =[Al mismo tiempo escribe: "Si $AD = DB$ i ABC i DBE són triangles semblants, llavors $CE = 3BE$. Com que $FD \parallel CB$ la distància entre FD i CB és la mateixa.

$$\text{Així, fent } a = \frac{bh}{2}, \text{ veiem que: } a_1 = \frac{BE \cdot h}{2}, a_2 = \frac{CE \cdot h}{2} = \frac{3BE \cdot h}{2}; \frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{BE \cdot h}{2}}{\frac{3BE \cdot h}{2}};$$

$$3a_1 = a_2"] =$$

[Tiempo total: 9m 23s].

8.4.3.2. Microanálisis del proceso de resolución

A) Episodio de lectura

En el episodio de lectura —intervenciones 1 a 8—, los alumnos van resaltando los aspectos que consideran más interesantes del enunciado, algunos de los cuales son: la relación entre AD y DB (intervención 3); el paralelismo de los segmentos FD y DE con los CE y FC , respectivamente; y el objetivo del problema (intervención 5). Entre las intervenciones 3' y 5, cada alumno lee el enunciado e ignora lo que dice su compañero —trabajan en paralelo—. Esta relación de ignorancia mutua acaba en la intervención 6 con una demanda de aclaración por parte de Pere.

La pausa que sigue a la intervención 8 es el origen de un cambio en la dirección del proceso de resolución. Los alumnos pasan de la comprensión del enunciado, basada en la lectura del mismo, a la búsqueda de relaciones entre los elementos de la figura.

El análisis de este episodio, por comparación con los episodios de lectura de otros procesos, nos sugiere dos preguntas: ¿por qué los alumnos no hacen una representación gráfica alternativa a la del enunciado?, y ¿es bueno o no que la hagan? Trataremos de dar respuesta a estas preguntas en el apartado 8.4.3.3, cuando hayamos analizado todos los episodios y tengamos una visión general del desarrollo del proceso de resolución, aunque la respuesta a la segunda de ellas posiblemente se tenga que dar en un contexto más amplio que el de una única resolución.

Resaltamos, a modo de resumen, los tres aspectos que caracterizan a este episodio: por un lado, la poca dificultad que tienen los alumnos para comprender de forma correcta el enunciado, como se pone de manifiesto tanto por la brevedad del episodio como por su repercusión positiva en los siguientes; por otro, la no realización de una representación gráfica alternativa a la del enunciado, lo que denota una cierta seguridad y confianza en su comprensión; y, por último, el trabajo en paralelo —centrado exclusivamente en la lectura individualizada del enunciado—, que acaba con la fijación del objetivo que pretenden conseguir.

B) Episodio de análisis

El episodio de análisis tiene su origen en la pausa que se produce en la intervención 8 y abarca hasta la 38.

En el análisis que sigue pretendemos caracterizar la conducta interlocutiva de los alumnos, para ello, tenemos en cuenta tanto las intervenciones cuyos contenidos suponen aportaciones novedosas al desarrollo del proceso de resolución, como la naturaleza de los intercambios comunicativos que siguen a tales aportaciones.

La primera introducción de una información diferente de las que aparecen en el enunciado la hace Lluís en la intervención 9. En ella propone el mantenimiento de las proporciones, basándose en el paralelismo de FD y CB. A esta idea, un poco ambigua porque no especifica cuáles son las proporciones que se mantienen, Pere responde de forma cooperativa asociando la proporción con la semejanza de triángulos. La continuación del diálogo se produce de forma cooperativa (Figura 8.4.18), con la excepción de un intercambio del tipo validación-continuación en el que Lluís considera el segmento FE como base del triángulo FEC. Esa consideración obstaculiza la comparación de las áreas, ya que FE es el único lado que no se puede relacionar de forma sencilla con ninguno de los lados del triángulo DBE.

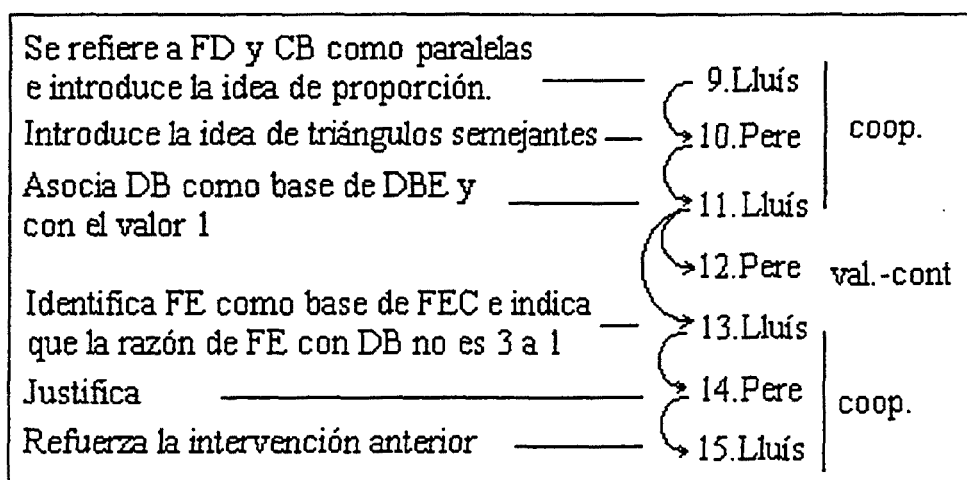


Figura 8.4.18

Por otra parte, la referencia que Lluís hace a la “base” del triángulo DBE (intervención 11) nos muestra que los alumnos están enfocando la resolución de forma algebraica, es decir, tratan de comparar las áreas de los triángulos mediante la comparación de sus fórmulas.

El contenido matemático de la intervención 16, en el que Pere identifica la relación entre los segmentos CE y EB, es clave en el proceso de resolución porque es el punto de partida de una serie de aportaciones posteriores de Pere, entre las que se encuentran: la condición de paralelogramo del polígono FDEC (intervención 20); el reconocimiento de la igualdad de las alturas de los triángulos DBE y FEC sobre los lados BE y EC, respectivamente, basándose en el paralelismo de los segmentos FD y BC (intervención 28); y el reconocimiento de EC como base del triángulo FEC (intervención 30).

Es evidente que el contenido matemático de las intervenciones de Pere contribuye de una forma directa al desarrollo del proceso de resolución, en el sentido de que reconoce relaciones entre los elementos de los triángulos que son decisivas tanto para establecer la dirección del proceso como para avanzar en ella. Por el contrario, las intervenciones de Lluís están más en la línea de propuestas o sugerencias que, en algunos casos —

intervenciones 13 y 27—, son rechazadas, y, en otros —intervención 23—, intentan facilitar la visualización de la figura. Esa visualización puede favorecer el proceso de resolución, a pesar de que, en este caso, no pase de ser una simple observación que se acaba en la intervención 28. La actuación de Lluís, aunque menos directa que la de Pere en cuanto a la introducción de información relevante, favorece la comunicación y facilita, sin duda, las aportaciones de su compañero.

Por otra parte, si nos fijamos en las Figura 8.4.19 y 8.4.20, observamos que las informaciones nuevas que aporta Pere —citadas en los párrafos anteriores— son generadoras de diálogos en los que predominan los intercambios comunicativos del tipo validación-continuación y en algunos casos aclaratorios. En estos intercambios, Lluís se limita a validar el contenido de las intervenciones de Pere o a pedir explicación sobre alguna de ellas, mientras que Pere asume el papel de continuar el diálogo, cosa que hace aportando elementos novedosos, sobre todo en las intervenciones que siguen al reconocimiento de la relación entre CE y EB (intervenciones 16 a 22).

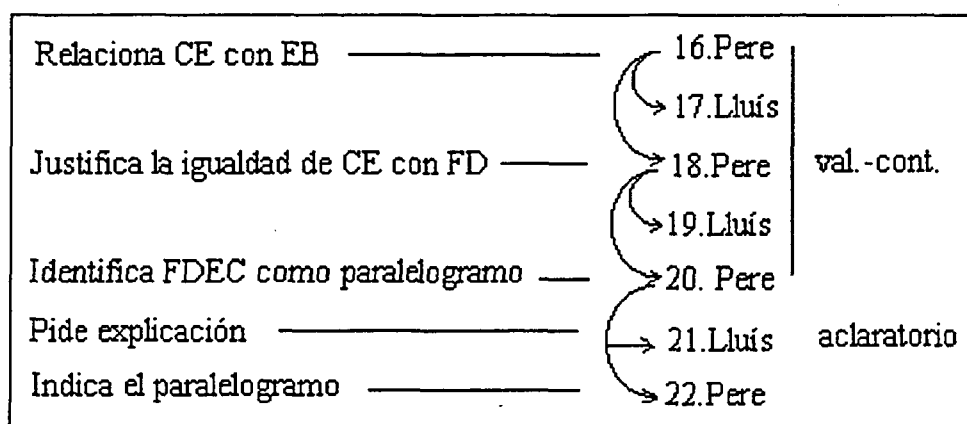


Figura 8.4.19

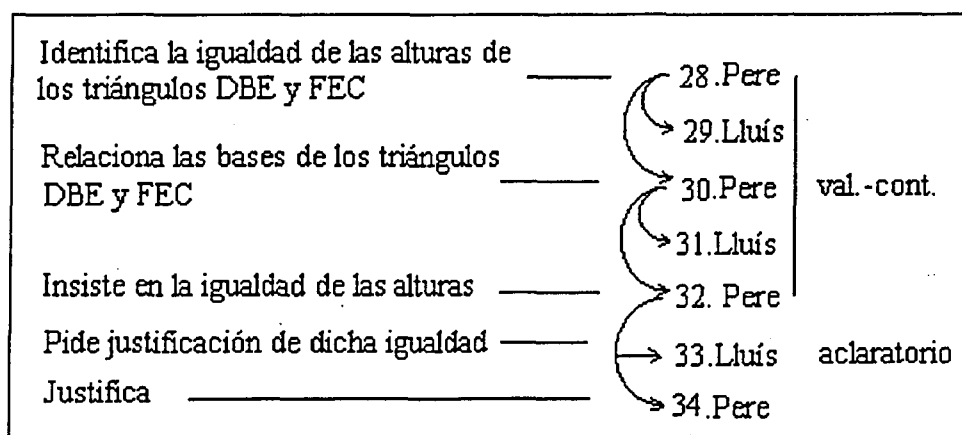


Figura 8.4.20

Resumiendo los comentarios anteriores, podemos decir que:

- En este episodio de análisis los alumnos se inclinan, desde el principio, por un enfoque algebraico en el que pretenden establecer relaciones entre los elementos lineales de la figura, con la finalidad de comparar las áreas de los triángulos mediante la aplicación de la fórmula.

- Los alumnos reproducen un tipo de interacción que se caracteriza por que las intervenciones en las que Lluís hace alguna aportación —9 y 13— van seguidas de breves diálogos cooperativos, mientras que las aportaciones de Pere son validadas por su compañero, que en algún momento pide aclaración sobre alguna de ellas, asumiendo Pere la responsabilidad de la continuación del diálogo. Esa continuación es progresiva en muchos momentos del proceso de resolución.

- Pere es el alumno que más contribuye al avance del proceso de resolución, ya que suyas son las aportaciones que relacionan las bases y las alturas de los triángulos que se comparan, que son decisivas en el desarrollo posterior del proceso. A pesar de ello, Lluís facilita la aparición de dichas aportaciones de dos formas diferentes: primero, introduciendo la idea de proporción; y, después, aportando sugerencias que, aunque en algunos casos son rechazadas, contribuyen a crear el clima adecuado en un episodio de estas características.

C) Episodio de planificación/ejecución

El episodio que hemos calificado como planificación/ejecución tiene su origen en la intervención 37, en la que Lluís valida las aportaciones que acaba de hacer Pere y sugiere la idea de poner en práctica el plan implícito que va unido a la identificación de las relaciones entre las alturas y las bases de los triángulos.

Es el propio Lluís, en su afán de comprobar si ha comprendido lo que Pere ha ido apuntando en las intervenciones anteriores, el que asume la responsabilidad de explicar detalladamente (intervenciones 39, 41 y 43), y con sus propias palabras, todo lo que han conseguido en el episodio de análisis. Dicha explicación, que va siendo validada de forma continuada por Pere en las intervenciones 40, 42 y 44, acaba con la explicitación y ejecución oral del plan implícito que ya intuíamos en el episodio de análisis.

La actitud de persistencia en la comprensión y de necesidad de clarificar las cosas es típica de Lluís, como hemos puesto de manifiesto en el apartado 7.4.

La interacción que se produce entre los alumnos en este episodio viene marcada por una sucesión inicial de intercambios del tipo validación-continuación dirigidos por Lluís. Esa sucesión de intercambios tiene su origen en la expresión oral que el alumno hace de los avances obtenidos en el episodio anterior, con la finalidad de mantener la dirección de proceso, no de cambiarla. El diálogo dirigido por Lluís acaba cuando los alumnos, de forma cooperativa, comparan y simplifican oralmente las expresiones de las fórmulas para obtener el resultado. Esta breve cooperación finaliza cuando ambos alumnos, por separado, empiezan a escribir la solución a la que han llegado.

Independientemente del tipo de interacción que se produce entre los alumnos, hay un aspecto en el que queremos incidir, se trata de que a lo largo de todo el proceso de resolución sólo Lluís concreta en dos ocasiones —curiosamente en la misma intervención (la 39)— los triángulos que considera semejantes: en una de ellas, los señala correctamente —AFD y DBE—; en la otra, señala como semejantes el CFE y el DBE. Nos llama la atención esta última asociación de triángulos semejantes porque, en la prueba inicial, Lluís

cometía el mismo error, es decir, asociaba como semejantes dos triángulos (Figura 8.4.21), de características parecidas al CFE y DBE.



Figura 8.4.21

8.4.3.3. Características generales del proceso de resolución

a) Papeles comunicativos de los alumnos

A la vista del reparto, bastante equilibrado, del número de intercambios de diferente naturaleza que protagonizan ambos alumnos, como podemos observar en las Tablas 8.4.4 y 8.4.5, nos preguntamos de qué forma cada alumno contribuye al desarrollo del proceso de resolución, o dicho de otra manera, cuál es el papel comunicativo que desempeña cada alumno.

	COOPERATIVO	VALIDACIÓN	PREGUNTA-RESPUESTA	TOTAL
Pere-Lluís	5(5)*	2	0	7(5)
Lluís-Pere	7(4)	1	0	8(4)
TOTAL	12(9)	3	0	15(9)

* Entre paréntesis indicamos los intercambios que aportan información nueva en el contexto global del proceso de resolución.

Tabla 8.4.4. Intercambios de dos intervenciones

	VALIDACIÓN-CONTINUACIÓN		INTERRUPCIÓN		ACLARATORIO		TOTAL	
	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.
Pere-Lluís-Pere	4(3)*	0	0	0	1(1)	1	5(4)	1
Lluís-Pere-Lluís	4(2)	2	0	0	0	1	4(2)	3
TOTAL	8(5)	2	0	0	1(1)	2	9(6)	4

* Entre paréntesis indicamos los intercambios que aportan información nueva en el contexto global del proceso de resolución.

Tabla 8.4.5. Intercambios de tres intervenciones

Puesto que no hay diferencia entre el número de intercambios que protagonizan cada uno de los alumnos, para responder a la pregunta que formulamos hemos de entrar a analizar los intercambios comunicativos desde el punto de vista del contenido matemático de las intervenciones que los componen. Para ello, nos remitimos al análisis que hacemos del episodio de análisis (apartado 8.4.3.2), en el que resaltamos la contribución directa que Pere realiza al proceso de resolución, pero no obviamos el importante papel que desempeña Lluís en el desarrollo del diálogo, introduciendo sugerencias que facilitan las aportaciones de su compañero. En cambio, en el episodio de planificación/ejecución, Lluís expresa con sus propias palabras los avances del episodio anterior, originando varios intercambios seguidos del tipo validación-continuación que desembocan en la expresión de la planificación.

b) Sucesión de episodios

El proceso de resolución es relativamente breve —9 minutos y 23 segundos— y bastante directo (véase el esquema gráfico al final de este apartado), en el sentido de que los alumnos no tienen dificultad para comprender el enunciado del problema y se centran rápidamente en la búsqueda de relaciones entre los elementos de los triángulos, lo que les lleva a inclinarse por un enfoque algebraico cuyo objetivo es la comparación de las fórmulas de las áreas de los triángulos. La explicitación final del plan va acompañada directamente de una ejecución oral.

Los puntos clave de esta resolución ya los hemos ido apuntando en los análisis anteriores, pero desde una visión general del proceso nos parece muy importante la referencia de Lluís a las proporciones de los lados de los triángulos. Esta referencia marca el inicio del episodio de análisis y de las aportaciones de Pere durante ese episodio.

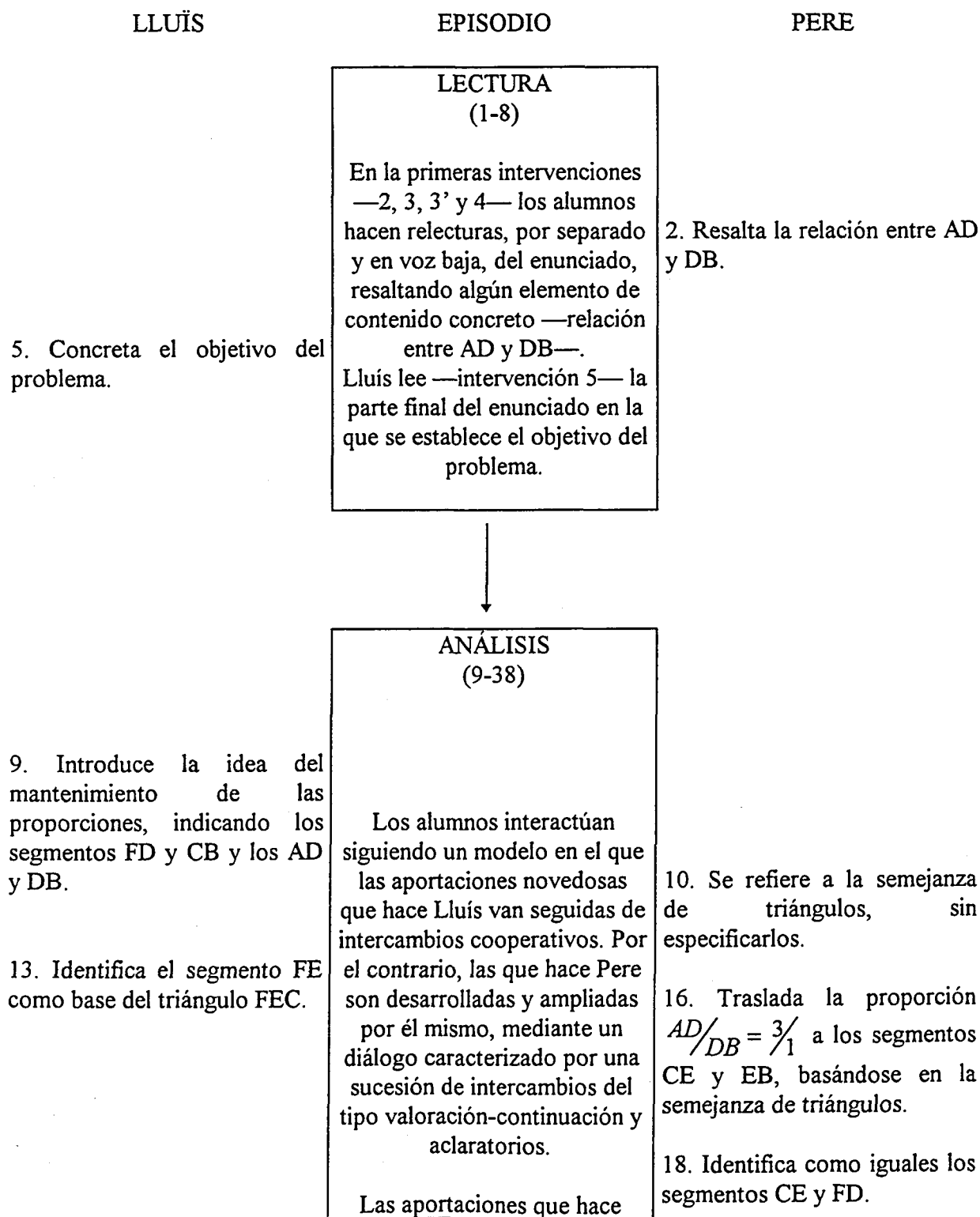
La separación entre los tres episodios que hemos identificado es clara si nos fijamos, por un lado, en la pausa de la intervención 8, que separa la referencia al objetivo del problema (intervenciones 7 y 8) de la introducción de informaciones diferentes de las que aparecen en el enunciado; y, por otro, en la intervención directiva de Lluís (37), en la que sugiere desarrollar las aportaciones que ha introducido Pere en las intervenciones anteriores.

Hay otro aspecto que nos llamó la atención cuando iniciábamos el análisis del episodio de lectura, y que comentamos ahora desde la perspectiva de una visión general del proceso desarrollado. Nos referimos al hecho concreto de que éste es el único proceso de resolución en el que los alumnos no realizan ninguna representación gráfica alternativa a la que incluimos en el enunciado. Ahora podemos justificar esa ausencia de gráficos basándonos en la rapidez de la comprensión del enunciado del problema —a la que hacíamos referencia en el análisis de dicho episodio—, y en la inmediata introducción de informaciones nuevas que sigue a dicha comprensión, lo que permite a los alumnos establecer relaciones entre los elementos de los triángulos. Así pues, en este caso, los alumnos no tienen la necesidad de profundizar en la comprensión ni de utilizar una representación gráfica propia como punto de partida para la búsqueda exploratoria de relaciones entre sus elementos, lo que se conseguiría a base de poder dibujar otros elementos nuevos en dicha representación.

De todas formas, pensamos que la realización de gráficos alternativos a los del enunciado y la representación en ellos de elementos nuevos pueden contribuir positivamente al desarrollo del proceso de resolución, siempre que los alumnos tengan dificultad en la

comprensión o en la búsqueda de conexiones entre los elementos de las figuras, porque pueden sugerirles relaciones que, de otra forma, posiblemente no observarían. La experiencia de los procesos de resolución de Anna y Rosa así nos lo confirman.

ESQUEMA GRÁFICO DE LA SUCESIÓN DE EPISODIOS



23. Gira el folio del enunciado para visualizar mejor el paralelogramo FDEC. 27. Sugiere la igualdad de CF y DB. 33. Pregunta el porqué de la igualdad de las alturas de los triángulos DBE y EEC sobre el segmento CB.	Pere contribuyen de una manera más decisiva al desarrollo del proceso. Las sugerencias de Lluís facilitan la introducción de las aportaciones que hace Pere.	20. Argumenta su intervención anterior introduciendo la idea de que FDEC es un paralelogramo. 28. Identifica como iguales las alturas de los triángulos DBE y FEC sobre los lados BE y EC, respectivamente, y argumenta esta igualdad basándose en el paralelismo de los segmentos FD y CB. 30. Considera los segmentos EB y EC como bases de los triángulos DBE y FEC.
--	--	--



PLANIFICACIÓN/ EJECUCIÓN (39-44) Lluís comienza el episodio haciendo una breve recopilación de los avances conseguidos hasta ese momento, bajo la supervisión de Pere que valida lo que dice su compañero. La planificación que ejecutan consiste en comparar las fórmulas de las áreas de los triángulos DBE y FEC, sabiendo la relación que hay entre sus elementos. Hacen, primero, una ejecución oral y, después, escriben lo que han dicho.		
39. Identifica como semejantes los triángulos CFE y DBE y razona la relación entre los lados CE y EB. 41 y 43. Vuelve a razonar la igualdad de las alturas 45 y 47. Aplica de forma oral las fórmulas de las áreas de los triángulos, estableciendo la relación entre sus elementos. 49. Obtiene la relación pedida.		48. Simplifica oralmente los elementos de las fórmulas que compara.

8.4.4. Actuación de Pere y Lluís en la resolución del problema del cuadrado

8.4.4.1. Transcripción del proceso de resolución

1. Pere: [Lectura].

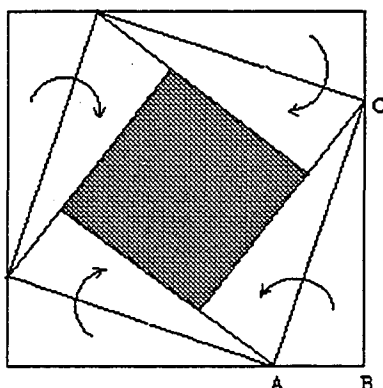


Figura 8.4.22

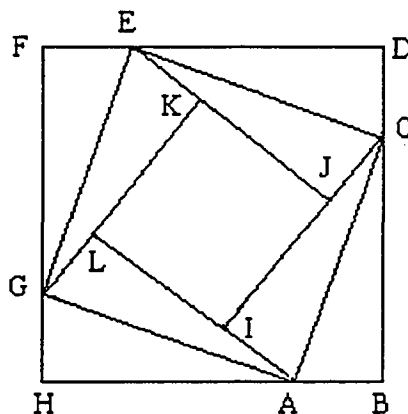


Figura 8.4.23

2. Lluís: [Comienza a leer]. *Dibuixem aquí. Tenim un quadrat. Un quadrat... Tenim un quadrat així* [sólo representa el cuadrado BDFH, Figura 8.4.24].
3. Pere: *Aquí seria com aquest* [representa el cuadrado BDFH y dentro el ACEG. Pone las letras A, B y C, Figura 8.4.25].

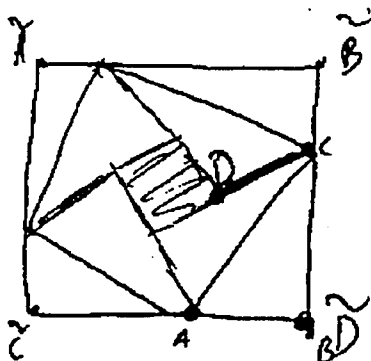


Figura 8.4.24

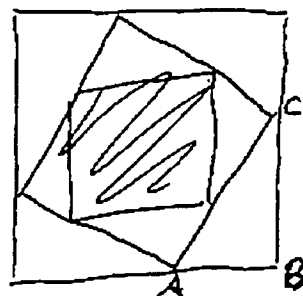


Figura 8.4.25

4. Lluís: *Sí, però espera't, a veure, tens dintre un altre, diu que el quadrat del contorn [BDFH, señala la figura del enunciado], aquest d'aquí és un quadrat i dintre n'hi ha un altre [ACEG]. Aquest que hi ha dintre, què diu? A veure... [lee]. Les quatre cantonades d'un quadrat, però d'aquest quadrat que fas dintre? [Indica el ACEG], veus? Les que doblegues són les del quadrat que hi ha dintre [ACEG].*
5. Pere: [No atiende a lo que dice Lluís. Lee en voz baja]. *A veure, vale, o sigui, representa que del ratllat [completa la Figura 8.4.25 y raya el cuadrado de dentro] els costats són CB menys BA [señala sobre la Figura 8.4.22].*
6. Lluís: *Com has dit? Com has dit?*

7. Pere: *Els costats són CB menys BA* [se refiere a la figura del enunciado], *o sigui, aquests dos són iguals* [se refiere a los triángulos ABC y ACE].
8. Lluís: *Quins? Aquests?*
9. Pere: *O sigui, com si això féssim...*
10. Lluís: *O sigui, aquest triangle i aquest són iguals* [indica ABC y ACE sobre la Figura 8.4.22].
11. Pere: *Sí, no?*
12. Lluís: *Sí, clar, perquè tu doblegues..., doblegant no et mous.*
13. Pere: *Vale! O sigui, tens una figura simètrica* [señala los triángulos ABC y ACI. Empieza a representar la Figura 8.4.26].

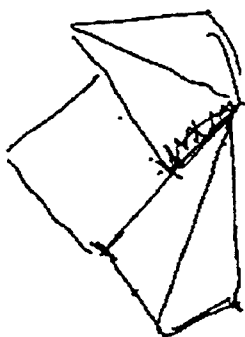


Figura 8.4.26

14. Lluís: *Sí, vale, sí.*
15. Pere: *Llavors aquí tens un altre* [se refiere al cuadrado IJKL que representa en la Figura 8.4.26] *i això és el costat del quadrat.*
16. Lluís: *Tots els costats, sí* [indican los lados del cuadrado rayado, IJKL].
17. Pere: *Llavors aquest...* [lado KJ], *aquest costat d'aquí...*
18. Lluís: *Sí, és un costat...* [IJKL].
19. Pere: *== És el costat aquest* [CB, señalando al mismo tiempo el segmento CI para significar su igualdad] *menys aquest* [DC, señalando al mismo tiempo el AB para significar la igualdad de ambos, Figura 8.4.26].
20. Lluís: *Hosti!, molt bé! Sí, sí, molt bé, molt bé, i això ja ho pots aplicar en tots, perquè en tots es forma la mateixa figura, veus?* [señalando las cuatro esquinas dobladas, Figura 8.4.23] /
21. Pere: *Busquem l'àrea d'aquí* [triángulo ABC] *i després...*
22. Lluís: *== Després multipliquem.*
23. Pere: *Fem les dues àrees* [señala el cuadrado IJKL] *i igualement* [señala el cuadrado BDFH]. *Sí?*
24. Lluís: *Sí, vale, però et diu la relació* [lee] *entre el quadrat ratllat...* [continúa leyendo].
25. Pere: *Ens falta buscar això* [indica AB y BC].
26. Lluís: *Vale! Però et diu això* [indica 1/4, 1/9 y 1/n] *que et condiciona. La raó entre el quadrat ratllat* [continúa leyendo] *i l'original, l'original es refereix al..., al que hem doblegat?, siguin 1/4. Bueno, primer busquem això que has dit, fent que l'AB és igual que aquest costat* [CJ].
27. Pere: *Què fem primer?* [Se refiere a los cuadrados BDFH y IJKL].
28. Lluís: *Sí, però... busquem l'àrea grossa primer, però tu aquí només saps..., no saps..., ah! AB és el mateix que...*
29. Pere: *== Si tens el costat aquest* [AB], *aquest* [AI] *també el tens.*
30. Lluís: *Sí, vale, però tu no saps quant valen, quant valen?*

31. Pere: *Però només ens demanen la raó. Una ha de ser quatre vegades l'altra* [se refiere a las áreas de los dos cuadrados].
32. Lluís: *Sí / vale, fem això, va!* [no muy convencido].
33. Pere: [Escribe: $AB = a$, $BC = b$].
34. Lluís: [Continúa representando la Figura 8.4.24, escribe las letras en los vértices].
35. Pere: [Continúa escribiendo: $(b + a)^2 = b^2 + 2ab + a^2$] *i l'altre* [espera a que Lluís <50s> acabe la Figura 8.4.24]
36. Lluís: *A veure, acabo això* [Figura 8.4.24], *tu has dit que des d'aquí fins aquí* [CD] *és el mateix que des d'aquí fins aquí* [AB].
37. Pere: *No*.
38. Lluís: *Sí, que des d'aquí fins aquí* [CD] *és el mateix que des d'aquí fins aquí* [AB].
39. Pere: *Ah!, sí, sí, és clar*.
40. Lluís: *Vale, bueno, és que estan..., jo poso un nom a aquest* [vértice I], *o no li posem un nom?*
41. Pere: *Jo l'hi he posat, mira*.
42. Lluís: *Vale, vale, molt bé* [se fija en lo que ha puesto Pere y escribe: $AB = DC$, $AB = a$, $BC = b$], *vale /*
43. Pere: *Fem això, fem l'àrea d'aquest* [cuadrado BFGM], *l'àrea d'aquest* [IJKL] *i després posem això, i apliquem que quatre vegades l'àrea d'aquest és igual a l'àrea d'aquest* [IJKL].
44. Lluís: *Vale, però, a veure, no ho he entès gaire això / quina àrea vols fer tu primer?*
45. Pere: *O sigui, buscar aquesta àrea, l'àrea del gros* [BDFH, lo señala sobre la Figura 8.4.22].
46. Lluís: *L'àrea del gros*.
47. Pere: *I després buscar l'àrea del petit* [IJKL, señalándolo].
48. Lluís: *El gros, a què et refereixes al de fora o a aquest que doblegues?* [ACEG].
49. Pere: *Al més gros* [BDFH].
50. Lluís: *Al més gros*.
51. Pere: *BC més AB* [para indicar el lado del cuadrado BDFH], *BC més AB*.
52. Lluís: *Vale, molt bé. Vale, vale, Fem-ho, és que no entenia* [escribe: "àrea del quadrat" y completa la nomenclatura de los vértices de la Figura 8.4.24].
- 52'. Lluís: *Però no entèn perquè et serveix l'àrea del gran*.
53. Pere: *Perquè diu que l'àrea del gran, ai!, l'àrea del petit, no, l'àrea gran és quatre vegades la del petit / això és ho que t'està dient*.
54. Lluís: *Ah!, l'original, es refereix al de fora* [BDFH].
55. Pere: *Sí*.
56. Lluís: *Vale, pensava que l'original es referia a aquest que tu doblegues* [ACEG], *bueno, si que es refereix, hosti és que..., vale, i a més com que les figures aquestes que surten es repeteixen tota l'estona...* [se refiere a los triángulos doblados], *tenen un costat fora, vull dir que també ens convé buscar..., doncs val, busquem!*
57. Pere: [Escribe: $(b - a)^2 = b^2 - 2ab + a^2$, cada uno por separado].
58. Lluís: [Escribe: " $A = C^2 = \tilde{C}\tilde{D}$. $\tilde{D}\tilde{B} = (\tilde{C}\tilde{D})^2$ "]. *És el costat al quadrat, ah no!*
- <50s> *Però és clar, vale és que..., ara ficaré...*
59. Pere: *Què has fet?*
60. Lluís: *He fet els costats de fora en lletres, ara faré $\tilde{C}\tilde{D}$ igual* [se refiere a la nomenclatura de los vértices que ha adoptado, Figura 8.4.24]

61. Pere: *És igual* [indica el segmento CD].
62. Lluís: *No, perquè jo he fet una cosa així* [indica el $\sim$], *aquest és normal* [D] *i aquest així* [indica $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$], *així CD, aquest segment* [indica el $\sim$] *perquè no sigui igual, és igual a BC més AB, ja està és aquest més aquest* [añade $(BC + AB)^2$ a la igualdad que había iniciado en la intervención 58. Indica el lado AB más el CB] *i llavors poso que això és igual a $(BC + AB)^2$, ja està, molt bé, aquesta, molt bé, aquesta és l'àrea, vale* /
63. Pere: *AB és a i BC és b* [espera].
64. Lluís: *Ah!, vale. Ja entèn* [mirando lo que ha escrito Pere, y escribe igual: $(a + b)^2 = b^2 + 2ab + a^2$]. *Aquí també apliques quadrats* [se refiere a la última igualdad], *vale, això ja ho sabem, vale, molt bé. Quan ja tenim l'àrea del gros...* [BDFH].
65. Pere: *Ara l'àrea del petit* [espera porque ya hace rato que ha desarrollado $(a+b)^2$], *restes* /
66. Lluís: *És que aquest 1/4 l'hem d'aplicar perquè si no, no sortirà.*
67. Pere: *O sigui, una vegada tenim això* [indica las expresiones de $(b + a)^2$ y $(b - a)^2$], *jo diria que 4 vegades aquest $[(b - a)^2]$ és aquest $[(b + a)^2]$, jo diria, no sé.*
68. Lluís: *I una cosa, aquest que fas de b menys a?*
69. Pere: *És l'àrea del mig.*
70. Lluís: *Vale* [escribe: $(b - a)^2 = b^2 - 2ab + a^2$]. Da la impresión de que no entiende].
71. Pere: [Escribe: $(b + a)^2 = 4(b - a)^2$] /
72. Lluís: *I, com has dit? A veure, i aquest costat que hi ha aquí* [DE], *és que l'has dit BC més AB?*
73. Pere: *Clar* [mira lo que acaba de escribir y espera, no hace nada].
74. Lluís: [Escribe: $A' = C^2 = (BC - AB)^2 = (b - a)^2 = b^2 - 2ab + a^2$] *vale, i ara apliquem això que has dit* [se refiere a la relación entre las áreas], *bueno, això d'1/4 és així, àrea entre àrea prima es 1/4* [escribe: $\frac{A}{A'} = \frac{1}{4}$].
75. Pere: [Escribe: $b^2 + 2ab + a^2 = 4b^2 - 8ab + 4a^2$].
76. Lluís: [Desarrolla el cociente: $\frac{b^2 + 2ab + a^2}{b^2 - 2ab + a^2} = \frac{1}{4}$].
77. Pere: [Sigue escribiendo sin atender lo que dice Lluís: $3b^2 - 10ab + 3a^2 = 0$. Cuando <1m 28s> termina espera a que acabe Lluís].
78. Lluís: *Vale* [mientras tanto Lluís escribe: $4(b^2 + 2ab + a^2) = (b^2 - 2ab + a^2)$], *vale.*
79. Pere: *Hem de buscar la raó, no?*
80. Lluís: *Sí.*
81. Pere: *Fem una cosa, posem, per exemple, que AB sigui 1 i substituïm aquí* [ecuación] *a veure què dona.*
82. Lluís: *Sí, però llavors si fas que AB sigui 1.*
83. Pere: *AB, el segment aquest* [lo indica en la Figura 8.4.26] *sigui 1 per veure quant ha de ser aquest [BC], sí?*
84. Lluís: *Quant ha de ser aquest, vale, sí, perquè llavors ens queda una sola incògnita d'un costat perquè a l'altra li donem un valor* [siguen escribiendo por separado].
85. Pere: [Escribe: $3b^2 - 10b + 3 = 0$ y resuelve la ecuación].

86. Lluís: [Continúa simplificando la ecuación: $4(b^2 + 2ab + a^2) = (b^2 - 2ab + a^2)$] *surt* <1m> *una equació de segons grau* [escribe: $3b^2 + 10ab + 3a^2 = 0$] *et surt aquí menys 10 i a mi em surt més 10* [fijándose en la ecuación que está resolviendo Pere].
87. Pere: [Está resolviendo la ecuación de 2º grado]. *On? O sigui, quan substitueixes és un menys, no?* [Indicando la ecuación: $3b^2 - 10b + 3$].
88. Lluís: *Jo encara no he substituït, no, aquí encara no has substituït* [señala, en el papel de Pere, la ecuación $3b^2 - 10ab + 3a^2 = 0$] *i et dóna menys i a mi em dóna més.*
89. Pere: *Aquí, b menys a al quadrat és menys.*
90. Lluís: *El b menys a al quadrat?, mira* [le señala su ecuación].
91. Pere: *Quan substitueixes és 4 per 2, 8, no?* [Repasa la ecuación].
92. Lluís: *En aquest* [indica su ecuación], *sí.*
93. Pere: *És al revés* [indicándole su error el poner 1/4 en lugar de 4].
94. Lluís: *Noooo.*
95. Pere: *Sí, perquè, obviament, el menys és l'àrea del petit* [se refiere al menos del denominador de la fracción $\frac{b^2 + 2ab + a^2}{b^2 - 2ab + a^2} = \frac{1}{4}$] /
96. Lluís: *Sí, vale.*
97. Pere: *Que és la que ha de ser 4 vegades l'altra.*
98. Lluís: *Nooo.*
99. Pere: *Sííí, perquè, obviament, el menys és la més petita.*
100. Lluís: *Com pot ser la d'aquest 4 vegades la del gran? Noooo.*
101. Pere: *Això* [cuadrado rayado, IJKL] *per 4 és igual a això* [cuadrado grande, BDFH].
102. Lluís: *Vale!*
103. Pere: *O sigui, has de multiplicar aquesta* [IJKL].
104. Lluís: *Compta 4 vegades l'àrea prima que és l'àrea aquesta / Hosti!, ho he fet al revés, vale, vale, sí, sí, ja està, ja està* [rectifica poniendo 4 donde antes había puesto 1/4 y cambiando el 4 de miembro en la igualdad $4(b^2 + 2ab + a^2) = (b^2 - 2ab + a^2)$], *vale, sí, sí, vale, ja està.*
- 104'. Lluís: [Continúa tratando de encontrar la ecuación de segundo grado].
105. Pere: [Acaba la resolución de la ecuación de segundo grado, obtiene la solución y escribe: " $b = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6} = 3$ "]
- <55s>
$$= \frac{1}{3} \text{ No pq } BC > AB$$
. Espera que acabe Lluís].
106. Lluís: *Vale, ha sortit igual* $3b^2 - 10ab + 3a^2 = 0$ [la compara con la de Pere], *molt bé, ara fem AB.*
107. Pere: *Que AB sigui 1* [no hace nada].
108. Lluís: *Vale, llavors et dóna dos possibles..., dos possibles...* [indicando las soluciones que ha obtenido Pere].
109. Pere: *Solucions* [espera].
110. Lluís: *Per a un costat* / [escribe: $a = 1$, $3b^2 - 10b + 3 = 0$]. *Fem a, 1.*
111. Pere: *Ah! No sé, jo he fet el tros petit* [se refiere a $AB = 1$] /
- 111'. Pere: *Fem la raó aquí* [indica la ecuación $(b^2 + 2ab + a^2) = 4(b^2 - 2ab + a^2)$ y escribe], *AB és igual a 1 i BC és igual a 3, AB entre BC és 1/3.*
- <50s>
112. Lluís: [Resuelve la ecuación de 2º grado que no había resuelto antes].

113.Pere: *És això, si BC fos més petit que AB llavors seria 1/3.*

114.Lluís: *Si BC fos més petit, però en aquest cas no ho és pas.*

115.Pere: *Per això, la solució no val* [se refiere a 1/3].

116.Lluís: *Llavors només és el 3. Vale!, molt bé.*

117.Pere: *Sí, sí.* [observa y espera].

<37s>

118.Lluís: [Acaba de resolver la ecuación].

119.Pere: *Anem per l'1/9. Demana la raó* /

120.Lluís: *Hauriem de fer el mateix, però aquí* [indica la relación entre las áreas] *en lloc d'1/4, 1/9 i ja està, fem el mateix?*

121.Pere: *Sí, sí, hem de substituir* [se refiere a poner 1/9 en lugar de 1/4].

121'.Pere:[Escribe: $(b + a)^2 = 9(b - a)^2$ y desarrolla obteniendo la ecuación: $8b^2 - 20ab + 8a^2 = 0$].

<1m 30s>

122.Lluís: [Escribe: $\frac{A'}{A} = \frac{1}{9}$; $9A' = A$; $b^2 + 2ab + a^2 = 9(b^2 - 2ab + a^2)$ y desarrolla].

123.Pere: *Fes-ho al revés, potser* [se está fijando en que a Lluís le sale $-8b^2 + 20ab - 8a^2 = 0$].

124.Lluís: *Sí, ara ho canvio de signe, és que m'he equivocat* [tacha algo y continúa escribiendo].

125.Pere: *Tornem a fer a, 1.*

126.Lluís: *Vale* [los dos obtienen la ecuación: $8b^2 - 20b + 8 = 0$, que resuelven por separado].

127.Pere: *Simplifiquem* [acaba, habiendo escrito: " $8b^2 - 20b + 8 = 0$; $2b^2 - 5b + 2 = 0$; $b = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = 2$

<1m 35s> $= \frac{1}{2}$ No". Mientras Lluís continúa resolviendo].

128.Lluís: *Dóna això* [escribe: 2 y $\frac{1}{2}$] *i tampoc pot ser veritat la d'1/2. Tampoc pot ser 1/2 per la raó que hem dit abans.*

129.Pere: [Asiente, ha obtenido el mismo resultado y escribe: $AB=1$, $BC=2$, $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$] *aquesta és la relació.*

130.Lluís: *Fem 1 partit per n.*

131.Pere: *Fem igual?*

132.Lluís: *Sí, però a l'hora de fer..., bueno, sí, hauriem de fer el mateix.*

133.Pere: *Hauria de ser n vegades* [se refiere a la relación entre las áreas].

134.Lluís: *S'ha de fer igual que els altres.*

135.Pere: [Escribe: $(b + a)^2 = n(b - a)^2$ y desarrolla, por su cuenta].

136.Lluís: [Escribe: $\frac{b^2 + 2ab + a^2}{b^2 - 2ab + a^2} = \frac{1}{n}$ y desarrolla]. *Ho he tornat a fer malament* [se da cuenta del error y cambia $1/n$ por $n/1$], *vale, sí, però ara tens la n.*

<1m 45s>

137.Pere: [Escribe la ecuación: $(n - 1)b^2 - (2n - 2)ab + (n - 1)a^2 = 0$]. *Jo diria que és així.*

138.Lluís: *Però, què has fet perquè doni n menys 1?*

139.Pere: *b quadrat i n per b al quadrat queda n menys 1, si restes.*

140.Lluís: *Ah!, vale.*

140'Lluís: [Continúa simplificando la expresión].

<1m 5s>

141.Pere: [Espera a que Lluís acabe]. *Fem a igual a 1* [escribe la ecuación que resulta].
Fem les arrels?

142.Lluís: *Però, aquí ho que podriem fer... A la a li hauriem de donar, com abans, 1, però el n aquest ens molesta, hem de fer que una incògnita no sigui incògnita i que la n cal que ho sigui perquè si no, com ens ho farem? Abans li donem valors, 1 a a perquè se 'ns tregui una incògnita, aquí també ho podem fer, però ara tenim la n.*

143.Pere: *En la n depèn del valor que posis, doncs serà un o un altre, s'ha de deixar la n com a incògnita.*

144.Lluís: *S'ha de deixar com a variable i va donant resultats.*

145.Pere: *Com a variable, sí.*

145'.Pere: *Fem les arrels* [empieza a resolver la ecuación:

$$(n-1)b^2 - 2(n-1)b + (n-1) = 0].$$

146.Lluís: *Vale!* [copia la ecuación que ha puesto Pere].

147.Pere: [Escribe la fórmula de la ecuación de 2º grado:

$$b = \frac{2n-2 \pm \sqrt{4n^2 - 8n + 4 - 4(n-1)^2}}{2(n-1)}].$$

<2m 25s>

148.Lluís: *No, però és menys aquest també* [indicando el 2n-2 de la ecuación de Pere], *vale, ja està, ja està.* [Mira la expresión que ha puesto Pere en la intervención 149].
Ah!, és clar [Y escribe la misma expresión], *dóna així, eh?*

149.Pere: *Això és el mateix, surt el mateix* [se refiere al discriminante y lo tacha, por separado] *això i això és el mateix / es simplifica.*

150.Lluís: [Mirando lo que ha hecho Pere]. *Ho has desenvolupat, la n menys 1 l'has fet al quadrat?, i l'has multiplicat ja?* [por 4], *i se't tatxa?*

150'.Lluís: [Acaba de resolver la ecuación]. *Sí, dóna igual, vale! Llavors, 2n menys 2 partit per 2(n-1), dóna el mateix. Vale.*

<30s>

151.Pere: [Después de estar un rato mirando la resolución que ha hecho de la ecuación].
Doncs dóna b igual a 1, o sigui, queda que b és igual a 1, no?

152.Lluís: *Sí / llavors AB és igual a 1* [lo escribe] *perquè l'hem agafat així i BC també és igual a 1 i llavors..., ah no!*

153.Pere: *A veure, per a qualsevol número és igual?*

154.Lluís: *És que és molt raro.*

155.Pere: *A veure, si fos el mateix* [se refiere a que AB=BC], *llavors representa que no hi ha àrea, no hi ha quadrat* [rayado], *mira, si és la meitat això es doblega cap al mig, no? I arriba al mig, si les quatre arriben al mig...*

156.Lluís: *Clar! Hosti! Però si ho hem fet com abans / És que abans tota l'estona hem anar donant al costat AB el valor d'1 i hem anat trobant..., hem anat buscant..., tot fent que... la fracció que ens donen que ha de ser, amb la condició de què...* [lee el enunciado].

<20s>

157.Pere: [No ha escuchado. Repasa la resolución en silencio]. *O sigui, com a molt AB és igual a BC.*

158.Lluís: *Però és estrany perquè tu quan fiques n li pots donar qualsevol valor, representa, i aquí dónes el valor de 9 i el valor de 4* [se refiere a los apartados a y b] *i mai et dóna 1* [indica la solució] *i quan poses n dóna 1, ah!, clar, Perquè*

n és el valor màxim que li pots donar, eh? Tu quan fas una..., quan fas una... seqüència, representa, sempre fas a per b, per c, per tal, per tal, per n menys 1 i per n, n és l'últim valor; és quan no hi ha àrea. És correcte.

159.Pere: *És clar, vale. O sigui, la solució seria això d'aquí* [indica la expresión:

$$b = \frac{2n - 2 \pm \sqrt{4n^2 - 8n + 4 - 4(n-1)^2}}{2(n-1)}, \text{ en la que ha tachado el discriminante].}$$

160.Lluís: *No, la solució és aquí, la que hem feta al final, això* [indica $b=1$].

161.Pere: *No seria així?* [Insiste].

162.Lluís: *Com? Així? I per què no acabes?*

163.Pere: *S'ha de substituir aquí per la n. Llavors depèn del valor que donis.*

164.Lluís: *= = És clar, perquè tu aquí..., però això també és correcte, eh?* [resolució de la ecuación].

165.Pere: *Però aquí trobes que... no ho deixes en funció de la variable* [se refiere a $b=1$].

166.Lluís: *Clar, perquè tu aquí no prens com a si la n fos zero* [indica la ecuación de segundo grado]. *La n pot ser zero també, entens?, sí, sí, aquí va millor perquè, clar, acabes aquí* [ecuación] *i després si substitueixes per qualsevol valor* [indica la ecuación] *torna a donar els casos d'abans* [sin comprobarlo], *vale, ja està.*

[Tiempo total: 36m 26s].

8.4.4.2. Análisis microscópico del proceso de resolución

A) Episodio de lectura

Este breve episodio de lectura acaba cuando Pere expresa el lado del cuadrado IJKL como diferencia de los segmentos CB y AB (intervención 5).

Se caracteriza por el trabajo en paralelo de los alumnos durante la representación parcial de la figura que hacen —Lluís sólo copia el cuadrado BDFH y Pere el BDFH y el ACEG—, y por la falta de atención de Pere a lo que dice su compañero en la intervención 4.

La intervención 5, con la que se inicia el episodio de análisis, interrumpe la comprensión de Lluís del enunciado del problema. Las deficiencias de Lluís sobre dicha comprensión —piensa que las esquinas que se doblan son las del cuadrado ACEG— y la poca profundización en todos los aspectos del enunciado han de influir en su actuación en los episodios siguientes.

B) Episodio de análisis

La lectura del enunciado que Pere hace en silencio en la intervención 5 es el origen de la información nueva que introduce —el lado del cuadrado rayado es CB menos AB—. Esta relación se convierte en el centro de atención de ambos alumnos durante este episodio, en el que se dedican exclusivamente a explicarla y a justificarla, y es clave para el desarrollo posterior del proceso de resolución, como veremos en el apartado 8.4.4.3.

Hay una diferencia clara en los papeles comunicativos que asumen cada uno de los alumnos en este episodio. Así, Pere va utilizando argumentos para justificar la relación que ha introducido en la intervención 5 (Figura 8.4.27) —recurre a la igualdad de los triángulos

ABC y ACE (intervención 7) y la justifica refiriéndose a su simetría (intervención 13); e identifica la igualdad de CB y CI y de DC y AB (intervención 19)—, mientras que Lluís trata de comprender la información que introduce su compañero de la siguiente forma: primero, le pide explicación sobre ella (intervenciones 6 y 8); después, repite los argumentos de Pere (intervención 10); y, por último, valida sus aportaciones (intervenciones 14, 18 y 20).

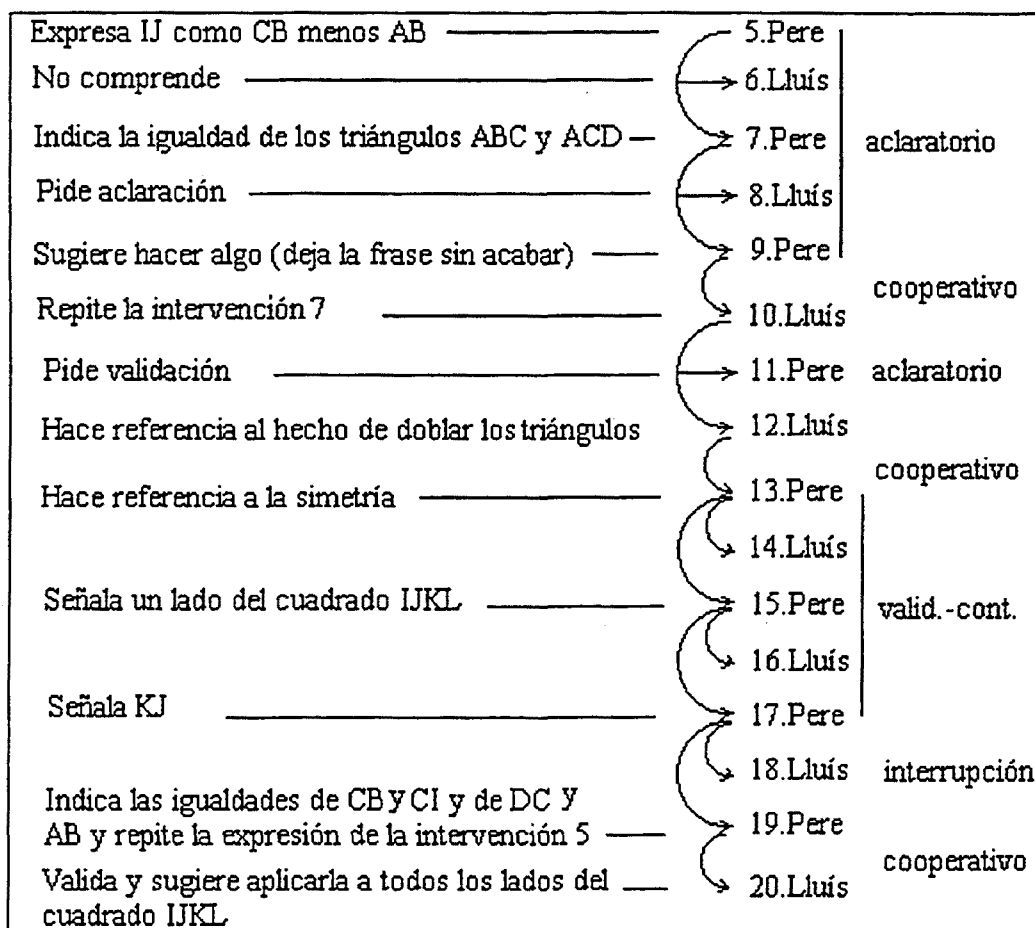


Figura 8.4.27

En definitiva, observamos que Lluís va a remolque de las aportaciones que hace Pere, tratando de comprenderlas y de forzar las justificaciones de su compañero.

C) Episodio de planificación

El episodio de planificación se inicia en la intervención 21 con la propuesta de Pere de calcular las áreas de los dos cuadrados e igualarlas (intervenciones 21 y 23). Pere no es muy explícito en esas dos intervenciones, ya que no especifica, como lo hace más tarde (intervención 43), lo que realmente se ha de igualar. El episodio lo damos por terminado cuando, en la intervención 57, ambos alumnos inician la ejecución.

En el episodio de planificación observamos un desfase en la actuación de cada uno de los alumnos. Así, mientras Pere propone el plan (intervenciones 21 y 23), de forma no muy explícita, e insiste en su ejecución, Lluís se encuentra perdido, ya que no sólo no comprende la propuesta que hace su compañero, manifestándolo en varias ocasiones (intervenciones 44, 48 y 52), sino que además evidencia que no ha comprendido ni el enunciado del problema (intervenciones 26, 54 y 56), ni el objetivo del mismo (intervención 30). No es difícil observar en la actuación de Lluís su falta de comprensión, puesto que a sus manifestaciones explícitas de las intervenciones 44 —“No ho he entès gaire això”— y 52 se unen sus continuas preguntas (intervenciones 26, 30, 40, 44 y 48) y sus frases inacabadas (intervención 28), que ponen de manifiesto las dudas que tiene.

El desfase que hemos observado en las actuaciones de los alumnos define dos conductas totalmente diferentes que se han de adaptar la una a la otra para poder continuar la resolución conjunta del problema.

Lo interesante de la actuación de Lluís es que el papel que desempeña en este episodio no es nada conformista, es decir, hemos identificado en él una persistencia manifiesta en comprender las aportaciones de su compañero. Esa persistencia en la comprensión pone en evidencia las deficiencias que Lluís arrastra desde el breve episodio de lectura.

Pere se adapta a esta situación parando la ejecución que ha empezado en las intervenciones 33 y 35, y continuando con su compañero un tipo de diálogo (intervenciones 41 a 53) que se caracteriza por las respuestas a las preguntas que le hace Lluís y por las explicaciones que da del plan que ha introducido.

Con respecto a la planificación, hemos de decir que:

- Ha surgido del episodio de análisis y, en particular, de la expresión del lado del cuadrado IJKL como diferencia de BC y AB.
- La interacción que se ha producido en el episodio ha contribuido a que Pere exprese con más detalle su propuesta de plan, pero no a que la modifique.
- No hay un acuerdo inicial en el establecimiento de la planificación debido a la falta de comprensión de Lluís. A pesar de ello, Lluís manifiesta en dos momentos concretos (intervenciones 26 y 32) su decisión de ejecutarlo, aunque en ninguno de ellos la ejecución se hace efectiva por su parte. Sólo al final del episodio parece mostrar su conformidad definitiva.

D) Episodio de ejecución-1 (del apartado a)

Este primer episodio de ejecución del apartado a se inicia en la intervención 57 y acaba en la 86.

En él diferenciamos tres intervalos de trabajo en paralelo (intervenciones 57 y 58, 74 a 78, y 85 y 86), interrumpidos en dos ocasiones por sucesiones de intercambios comunicativos de características similares (intervenciones 59 a 73 y 79 a 84).

Pere, que ya había expresado el área del cuadrado BDFH utilizando la identificación simbólica que hacía en la intervención 33 — $AB=a$ y $BC=b$ —, inicia el episodio expresando el área del cuadrado IJKL en función de “a” y “b”.

Al mismo tiempo, Lluís inicia la ejecución identificando los vértices del cuadrado BDFH y expresando su área.

El diálogo que se produce tras la explicación que da Lluís de la notación que ha introducido es una sucesión de intercambios comunicativos de los tipos validación-continuación y aclaratorios. Pere asume el papel de la continuación de dicho diálogo, y lo hace de forma no demasiado progresiva (intervenciones 65, 69, 71 y 73), mientras que Lluís valida las explicaciones de su compañero (intervenciones 74 y 70), pregunta sobre la forma en que éste expresa las áreas de los cuadrados pequeño y grande (intervenciones 68 y 72), y expresa su preocupación por la forma en que aplicaran los datos del problema (intervención 66). En definitiva, Lluís contribuye a relanzar el diálogo para tratar de comprender mejor lo que dice y hace su compañero.

Durante el trabajo en paralelo que sigue al diálogo descrito en el párrafo anterior (intervenciones 74 a 78), los alumnos hacen los cálculos algebraicos correspondientes al desarrollo de la proporción $\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} = \frac{1}{4}$. Hemos de destacar de esta actuación separada de los alumnos el error de Lluís al compensar el valor de las áreas (intervención 74). Ese error incidirá en el desarrollo posterior del proceso, como tendremos oportunidad de analizar en los episodios siguientes.

En el breve diálogo que sigue al trabajo en paralelo anterior, Pere vuelve a encabezar dos intercambios (intervenciones 79 a 83) de tres intervenciones. En el segundo de ellos, Pere opta por una forma de resolver la ecuación que plantea $-3b^2-10ab+3a^2=0$, asigna a “a” el valor 1 (intervención 81), es decir, utiliza el segmento AB como unidad de medida. Esta forma de proceder es clave tanto para la ejecución que los alumnos están realizando como para las siguientes. Recordemos que, en la resolución del problema 10 de la prueba inicial, Pere quedaba bloqueado en una situación similar a la que aquí se encuentra. La salida que ahora propone ha sido consecuencia de la reflexión individual que originó aquella situación.

Al final del episodio notamos un desfase en la realización de los cálculos que los alumnos van realizando, pues mientras Pere ha obtenido la ecuación $3b^2-10b+3=0$, Lluís está tratando de obtener la ecuación de segundo grado en función de “a” y “b”.

Los aspectos que más destacan en este episodio los podemos resumir de la siguiente forma:

- Hemos observado que cada uno de los alumnos asume un papel comunicativo diferente, independientemente del trabajo en paralelo. Pere asume la responsabilidad de continuar el diálogo aclarando las dudas de su compañero, mientras que éste valida y pregunta sobre las informaciones que introduce Pere con la finalidad de profundizar en su comprensión.

- La propuesta de Pere de hacer AB igual a 1 introduce un elemento novedoso con repercusiones positivas para el desarrollo de la ejecución.

- El error de Lluís en la compensación de las áreas es importante en sí mismo y por las incidencias que tendrá en el proceso de resolución (véase apartado 8.4.4.3).

E) Episodio de evaluación local

Esta evaluación local se sitúa en medio del episodio de ejecución del apartado α , después del trabajo en paralelo de las intervenciones 85 y 86. En ella, Pere está resolviendo ya la ecuación $3b^2-10b+3=0$, mientras Lluís está tratando de obtenerla.

La revisión de las expresiones algebraicas que los alumnos realizan en este episodio surge cuando Lluís hace un inciso en sus simplificaciones para comparar sus desarrollos con los de su compañero, en ese momento observa una diferencia en uno de los signos de las ecuaciones a las que ambos llegan.

En el diálogo posterior a dicha observación (intervenciones 87 a 93), los alumnos tratan de identificar el origen de tal diferencia, para ello, siguen un proceso de revisión hacia atrás de la siguiente manera: primero, Pere hace referencia a la ecuación $3b^2-10b+3=0$; después, Lluís repasa la ecuación $3b^2-10ab+3a^2=0$, en la que todavía no ha sustituido la "a" por 1; más tarde, Pere indica la expresión $(b-a)^2$; y, finalmente, Pere identifica el error de Lluís —multiplica por 4 el área más grande para obtener la más pequeña— en las expresiones algebraicas que éste había escrito. Esa identificación es el origen de un intercambio de desacuerdo (intervenciones 93 a 104), en el que podemos observar cómo Lluís persiste en el error de traducción algebraica de la comparación de dos cantidades desiguales.

En el diálogo que se produce durante el intercambio de desacuerdo, Pere explica la razón de la igualdad que él propone, mientras Lluís parece comprender que el área pequeña no puede ser cuatro veces la grande (intervención 100), pero traduce su idea erróneamente al lenguaje algebraico, es decir, si utilizamos la terminología de J. Clement (cf. G. Azarquié, 1991), Lluís parece comprender la comparación cualitativa y cuantitativamente, pero no conceptualmente —no escribe correctamente la ecuación—. Este intercambio parece que contribuye a la comprensión conceptual.

En la resolución del problema 10 de la prueba inicial, la traducción algebraica que Lluís hizo de la compensación de áreas fue correcta, por eso, no podemos afirmar que se le presente una oportunidad de aprendizaje en relación a dicha traducción algebraica. A pesar de ello, este tema será objeto de análisis en los episodios sucesivos y en el apartado 9.4.2, en el que identificaremos cómo evolucionan los conocimientos de Lluís.

En definitiva, estamos ante un episodio en el que los alumnos revisan el desarrollo de las expresiones algebraicas que han obtenido hasta ese momento, con la finalidad de encontrar la diferencia que Lluís ha detectado en las ecuaciones de segundo grado a las que ambos alumnos han llegado por separado.

F) Episodio de ejecución-2 (del apartado α)

Este episodio de ejecución es una continuación del anterior, que se había interrumpido para revisar los desarrollos algebraicos que habían llevado a los alumnos a dos resultados intermedios diferentes. Abarca desde la intervención 104' a la 118.

En esta ejecución observamos (Figura 8.4.28), como ya ocurriera en la ejecución anterior, tres intervalos de trabajo en paralelo (intervenciones 104' a 105, 111' a 112 y 117 a 118), interrumpidos por dos sucesiones de intercambios cooperativos (intervenciones 106 a 111 y 113 a 116).

La evolución del episodio está marcada por el desfase que hay entre ambos alumnos en la realización de los cálculos y desarrollos algebraicos. Así, mientras Pere rescata la ecuación $3b^2-10b+3=0$ del episodio anterior de ejecución y calcula, en su primera intervención de este episodio, los valores de AB y BC, Lluís todavía no ha obtenido dicha ecuación (intervenciones 104' y 106). En consecuencia, el diálogo que sigue se desarrolla desde dos perspectivas diferentes: la de Lluís, que, en cierta forma, hace una previsión de futuro —hará $a=1$ y obtendrá dos soluciones (intervenciones 106 y 108)—, y la de Pere, que contribuye cooperativamente a la construcción del diálogo, pero desde la perspectiva del que mira hacia atrás porque todos esos cálculos él ya los ha hecho (Figura 8.4.28).

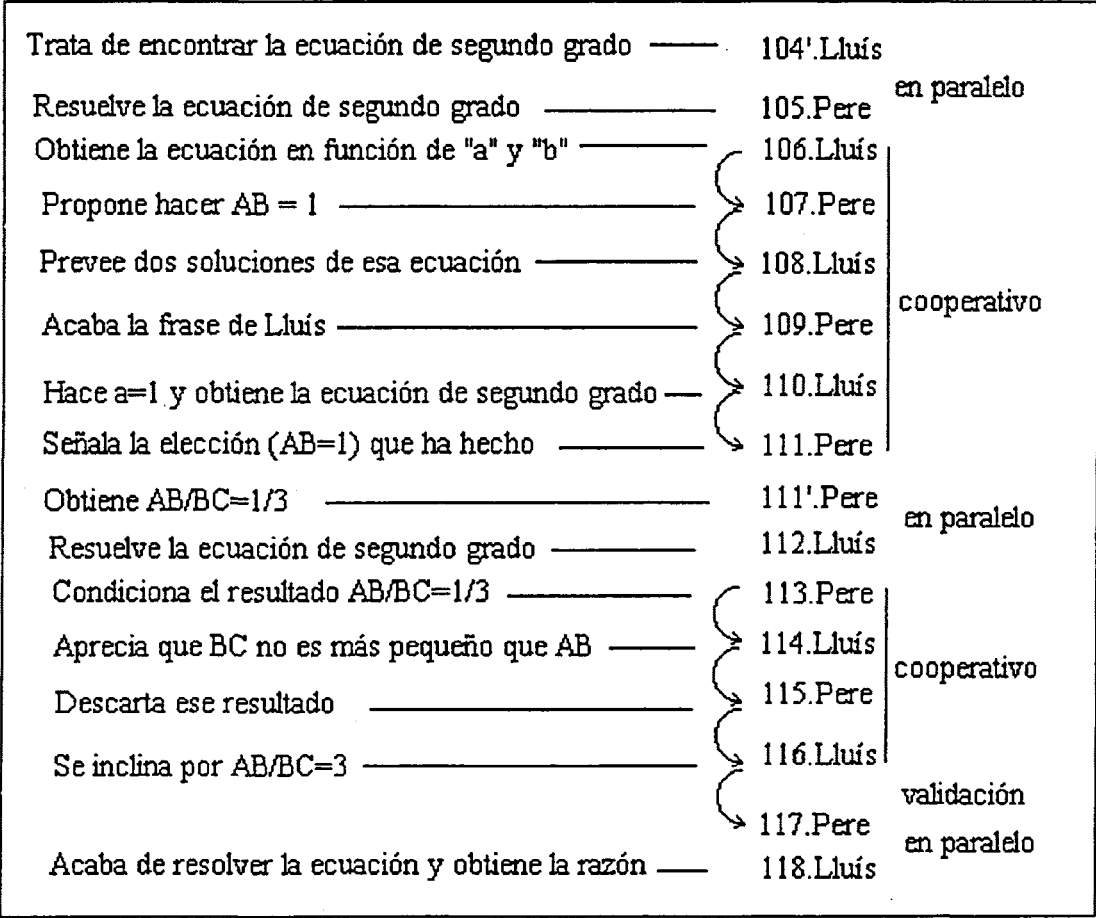


Figura 8.4.28

A pesar de que Pere lleva la ejecución muy avanzada, notamos en él una actitud de ayuda a su compañero. Esta ayuda se manifiesta haciendo incisos antes de realizar nuevos avances (intervenciones 105 y 107) y dialogando de forma cooperativa sobre las informaciones que él hace tiempo que ha utilizado (intervenciones 107, 109 y 111), aunque en algunos momentos (intervenciones 113 a 116) involucre a su compañero en comentarios sobre los resultados que va obteniendo. En cambio, Lluís realiza todos los desarrollos algebraicos hasta el final, e insiste en la comprensión de todos los pasos que da, no dejándose influenciar por la ejecución avanzada de su compañero.

G) Episodio de ejecución (del apartado *b*)

Los alumnos trasladan el planteamiento que han hecho para resolver el apartado *a* al caso en que la razón de las áreas sea $1/9$ (apartado *b*). No hacen ninguna reflexión inicial que no sea la simple acción de sustituir $1/4$ por $1/9$ (intervenciones 119 a 121) en la

$$\text{proporción } \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} = \frac{1}{4}.$$

El episodio se desarrolla casi en su totalidad en paralelo. Los cálculos algebraicos que los alumnos hacen sólo se interrumpen en algunos momentos concretos: como cuando Pere (intervención 123) le indica a Lluís que pase la expresión que ha obtenido al otro miembro para que le desaparezca el signo menos —“Fes-ho al revés”—; o cuando Pere, que va por delante en la ejecución, propone, como en el episodio anterior, dar a “*a*” el valor 1 (intervención 125); o cuando Lluís obtiene los valores de “*b*” y descarta uno de ellos (intervención 128), en este caso Pere continúa la ejecución hasta obtener la razón AB/BC.

H) Episodio de ejecución (del apartado *c*)

El episodio de ejecución correspondiente a la resolución del apartado *c* del problema empieza en la intervención 130 y acaba en la 152, con la obtención del valor del segmento BC.

En los párrafos siguientes analizamos cómo evoluciona el episodio, fijándonos en las acciones que más repercusión tienen en su desarrollo, como son: las intervenciones directivas de Pere; las preguntas y las reflexiones de Lluís; y el trabajo en paralelo que desarrollan ambos alumnos cuando simplifican y resuelven la ecuación que plantean.

En este episodio, los trabajos en paralelo van precedidos de breves diálogos cooperativos que se inician casi siempre con intervenciones directivas de Pere (intervenciones 131, 141 y 149), puesto que él lleva la iniciativa en la ejecución.

Tras la indicación de Lluís de iniciar la resolución del apartado *c*, Pere propone hacerlo igual que los apartados anteriores. Los dos intercambios cooperativos que siguen a esa propuesta son una simple repetición del inicio de la resolución del apartado *b*.

En el trabajo en paralelo de las intervenciones 135 a 137, Lluís vuelve a cometer el mismo error que en la ejecución del apartado *a* —recordemos que el error de compensación entre las áreas fue el motivo del intercambio de desacuerdo que se produjo entre las intervenciones 93 y 104—, aunque en este caso él mismo rectifica.

En la intervención 141, Pere hace dos propuestas: “Fem ‘*a*’ igual a 1”, y “Fem les arrels?”. Lluís no tiene en cuenta la segunda, siendo la primera de ellas la que origina el diálogo en el que ambos alumnos aclaran la naturaleza de *n* —inicialmente, Lluís no sabe si es una variable o una incógnita—.

La insistencia de Pere en el cálculo de las raíces de la ecuación de segundo grado (intervención 145’) da paso a un nuevo trabajo en paralelo (intervenciones 145’ a 149) en el que los alumnos tratan de resolverla. Durante este trabajo individual, Lluís siempre está pendiente de lo que hace su compañero y, en algún momento, hace referencia a alguna de las expresiones que éste escribe (intervención 146). Mientras tanto, Pere acaba de simplificar y de resolver la ecuación (intervención 149) y se sorprende ante el resultado que obtiene —“Surt el mateix”—. Las preguntas de Lluís (intervención 150) no son atendidas por su compañero, que repasa la resolución de la ecuación para ver si hay algún error. Al

final (intervención 151), antes del proceso de verificación, Pere parece aceptar el resultado de $b=1$.

En este episodio, las reflexiones que se producen durante y después de la resolución no provocan la rectificación del error que Pere comete al equivocarse en un signo (intervención 139). Hay un momento (intervención 150) en el que Lluís parece haberlo identificado, pero la validación inmediata de lo que ha puesto Pere y la falta de atención de éste, que ya ha iniciado la resolución de la ecuación, hace que no se considere la indicación de Lluís.

En definitiva, resaltamos de este episodio cuatro aspectos que nos parecen relevantes:

- El desfase que se produce entre ambos alumnos en la simplificación y resolución de la ecuación inicial que plantean. Ese desfase provoca que Pere sea el que, con sus intervenciones directivas, vaya adelantando los pasos que han de seguir.
- El inicio y el desarrollo posterior de la ejecución es similar al que los alumnos realizan en el episodio anterior —sustituir el 9 por la n y asignar al segmento AB el valor 1—, y las únicas diferencias que notamos son las relativas al efecto de la aparición de la variable n .
- Pere se muestra paciente en la resolución de este apartado, ya que siempre espera a que acabe su compañero, no realiza una resolución continuada de la ecuación, especifica en cada momento los pasos que va a dar, y provoca breves diálogos intermedios que facilitan la comprensión de Lluís.
- Las interrupciones del trabajo en paralelo para reflexionar cooperativamente sobre lo que se ha hecho y lo que se va a hacer es un modelo de interacción que facilita la comprensión y, en este caso, los desarrollos algebraicos, a pesar de que los alumnos no identifiquen el error que cometen.

1) Episodio de verificación

El episodio de verificación se origina como consecuencia de la desconfianza de Pere en el resultado que ha obtenido — b igual a 1—, ya que éste no depende de n . Esa desconfianza se pone de manifiesto cuando Pere repasa la resolución de la ecuación de segundo grado en la intervención 151. A pesar de las dudas de Pere en las intervenciones anteriores, damos por iniciada la verificación cuando este alumno se sigue sorprendiendo (intervención 153) de que b sea independiente de n —“Per a qualsevol número és igual?”—.

En este episodio observamos dos tipos de verificación: la comprobación del resultado que Pere hace en la intervención 155; y el repaso de la solución que los alumnos han obtenido. Un repaso que es muy superficial, por parte de Lluís, y más centrado en los cálculos efectuados, por parte de Pere.

En el primer caso, Pere utiliza como referente la figura del enunciado para comprobar que, con el resultado que les ha salido — $a=1$ y $b=1$ —, no hay cuadrado central porque “les quatre cantonades arriben al mig” (intervención 155).

En el segundo caso, Lluís indica, de forma muy acertada, la no coincidencia del resultado que han obtenido en el apartado c con el que se obtiene al particularizarlo a los casos de los apartados a y b (intervención 158). Pere, por su parte (intervención 159), centra especialmente su atención en la resolución de la ecuación de segundo grado que

obtiene, por ello, no localiza el error que había cometido en uno de los signos de dicha ecuación.

El final del episodio, que coincide con el del proceso de resolución, es bastante desconcertante, en primer lugar, por la interpretación que Lluís hace del significado de n , asociándolo al término más alto de una sucesión y como consecuencia, según él, “a quan no hi ha àrea” (intervención 158); y, en segundo lugar, por el desacuerdo final en el que Pere pretende dar por resultado la expresión $b = \frac{2n-2}{2(n-1)}$, sin simplificar, para que, de esa forma, b dependa de n .

Posiblemente, como ha ocurrido en otras ocasiones, el cansancio de los alumnos, como consecuencia del largo proceso de resolución —más de 36 minutos—, haya sido la causa principal de que den por bueno el resultado y por terminado el proceso sin profundizar más en la búsqueda de las razones por las que ese resultado final no se ajusta a las comprobaciones que han hecho.

8.4.4.3. Características generales del proceso de resolución

a) Papeles comunicativos de los alumnos

Si miramos el proceso de resolución en su totalidad, observamos bastante igualdad, por parte de cada alumno, en la continuación de los diálogos mediante intercambios de dos intervenciones (Tabla 8.4.6), aunque en ningún momento hay más de seis o siete intercambios seguidos de esa naturaleza. A pesar de ello, notamos en Lluís una mayor tendencia a dar por terminados los diálogos haciendo validaciones y valoraciones finales de los contenidos de las intervenciones anteriores. Eso ocurre en las intervenciones 32, 84, 126 y 140, entre otras.

	COOPERATIVO	VALIDACIÓN	PREGUNTA-RESPUESTA	TOTAL
Pere-Lluís	21(9)*	6	2(2)	29(11)
Lluís-Pere	21(11)	2	2(0)	25(11)
TOTAL	42 (20)	8	4(2)	54(22)

* Entre paréntesis indicamos los intercambios que aportan información nueva en el contexto global del proceso de resolución.

Tabla 8.4.6. Intercambios de dos intervenciones

Si nos fijamos en el número de intercambios de tres intervenciones (Tabla 8.4.7), observamos una diferencia clara en la asunción de papeles comunicativos por parte de cada alumno.

La actuación de Pere se caracteriza por la introducción de informaciones nuevas —todas las aportaciones clave en el desarrollo del proceso de resolución las introduce él (véase el análisis de la sucesión de episodios)—. Si a esto unimos la diferencia entre el número de intercambios del tipo Pere-Lluís-Pere, respecto a los encabezados por Lluís,

podemos afirmar que las aportaciones de Pere generan validaciones y demandas de aclaración de su compañero. Las continuaciones de los intercambios, como se observa en la Tabla 8.4.7, no suelen ser progresivas, ya que Pere tiende a repetir argumentos y explicaciones de intervenciones anteriores.

Por el contrario, Lluís trata de comprender la información que introduce Pere, pidiéndole aclaración sobre ella y repitiendo los argumentos o validando las aportaciones de su compañero.

	VALIDACIÓN-CONTINUACIÓN		INTERRUPCIÓN		ACLARATORIO		TOTAL	
	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.
Pere-Lluís-Pere	7(3)*	1	1(1)	0	7(3)	3	19(7)	
Lluís-Pere-Lluís	1(0)	0	0	0	3(2)	0	4(2)	
TOTAL	8(3)	1	1(1)	0	10(5)	3	23(9)	

* Entre paréntesis indicamos los intercambios que aportan información nueva en el contexto global del proceso de resolución.

Tabla 8.4.7. Intercambios de tres intervenciones

Como en el caso de la sucesión de intercambios de dos intervenciones, no hay aquí tampoco una sucesión continuada de intercambios de los tipos aclaratorio y validación-continuación encabezados por Pere, aunque sí hemos identificado agrupaciones frecuentes de tres intercambios de esa naturaleza.

Además de la diferencia entre el número de preguntas y demandas de aclaración efectuadas por cada uno de los alumnos —12 de Lluís, por 5 de Pere, en total—, observamos que la mayoría de las realizadas por Pere no están relacionadas con los contenidos de las intervenciones de su compañero, sino con la selección de opciones que se presentan a lo largo del proceso de resolución —intervención 27: “Què fem primer?”; intervención 131: “Fem igual?”, etc.—.

Posiblemente el desfase que se produce entre ambos alumnos en el desarrollo del proceso de resolución, como analizamos en el microanálisis, sea lo que condiciona la distribución de papeles comunicativos que hemos resaltado en los párrafos anteriores.

Hemos notado también una alternancia de sucesiones de intercambios comunicativos con intervalos de trabajo en paralelo en los episodios de ejecución. Esa alternancia ha permitido a los alumnos contrastar resultados intermedios y ha contribuido positivamente al desarrollo del proceso.

b) Sucesión de episodios

El enfoque que los alumnos ejecutan tiene su origen en la intervención 5. En ella, Pere expresa el lado del cuadrado IJKL en función de AB y BC. Esa intervención define una forma de actuar, por lo que al camino que ha de seguir la resolución se refiere, que consiste

en expresar las áreas de ambos cuadrados —IJKL y BDFH— en función de los segmentos AB y BC, y en plantear una ecuación a partir de la relación que hay entre ellas.

Los alumnos abordan la resolución siguiendo el orden en que se muestran los apartados en el enunciado, es decir, no hay una resolución general del problema para obtener después los resultados concretos de los apartados a y b .

Independientemente de la relación entre el lado IJ y los segmentos AB y BC a la que nos hemos referido en los párrafos anteriores, hay en este proceso de resolución puntos clave relacionados con aportaciones realizadas siempre por Pere. Dichas aportaciones —identificación simbólica de AB y BC, expresión de la relación entre las áreas de los cuadrados, y asignación del valor 1 al segmento “a”— tienen una incidencia positiva en el proceso de resolución.

Otros puntos clave relacionados con la gestión no siempre repercuten positivamente en el desarrollo del proceso. Nos referimos en concreto a tres momentos que consideramos importantes:

- La comparación que Lluís hace de los desarrollos algebraicos que van obteniendo (intervención 86), lo cual origina una revisión local y la detección del error que él mismo había cometido.

- La falta de confianza de Pere en el resultado final del apartado c (intervención 153), lo que provoca su comprobación y la verificación de la solución, aunque con resultados negativos.

- La existencia de una planificación (intervención 21) que tiene su origen en el episodio de análisis. La insistencia de Lluís en comprender el plan que propone Pere obliga a éste a expresarlo mejor, pero no a modificarlo.

Además, en este proceso de resolución observamos una diferencia considerable en cuanto a la introducción de información por parte de cada uno de los alumnos. Pere hace todas las aportaciones que hemos considerado clave, mientras que Lluís ha ido un poco a remolque a lo largo de todo el proceso. Esa actuación de Lluís se pone de manifiesto desde la falta de comprensión del enunciado, en el episodio de lectura, y se hace más evidente en los episodios de ejecución finales (véase en el esquema gráfico de la sucesión de episodios al final de este apartado).

No podemos acabar estos comentarios sin referirnos a cómo evolucionan las ideas de Lluís sobre la compensación de las áreas. En el episodio de evaluación local, el desacuerdo entre ambos alumnos provoca la rectificación de Lluís sobre la traducción algebraica de cantidades desiguales. En el episodios de ejecución del apartado c , Lluís vuelve a cometer el mismo error, pero ahora él rectifica sin la ayuda de Pere. Por tanto, da la impresión de que, en estas circunstancias, el error cometido por Lluís fue un despiste o una falta de control en un momento determinado. Esta impresión no será confirmada cuando analicemos los resultados de la prueba final.

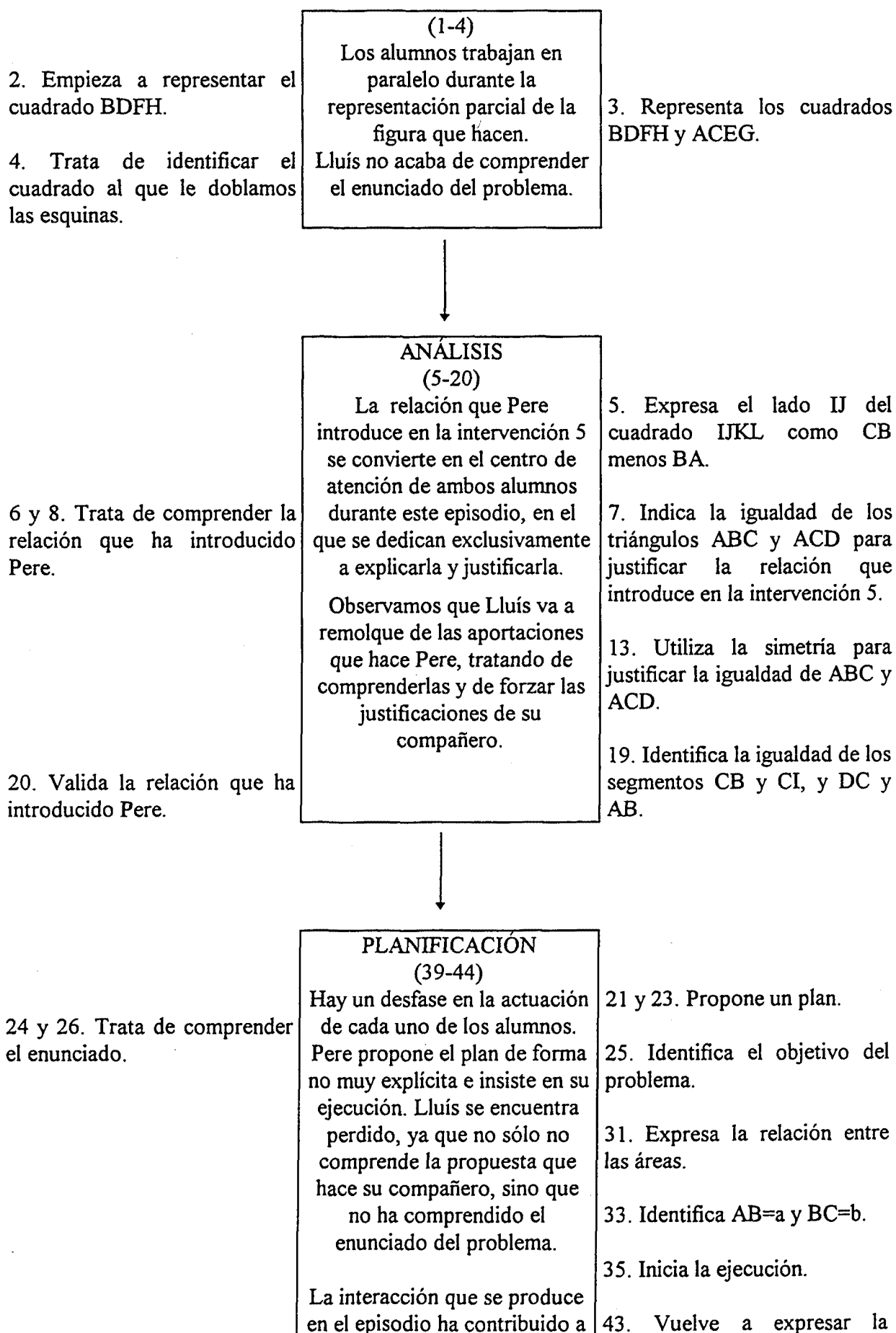
ESQUEMA GRÁFICO DE LA SUCESIÓN DE EPISODIOS

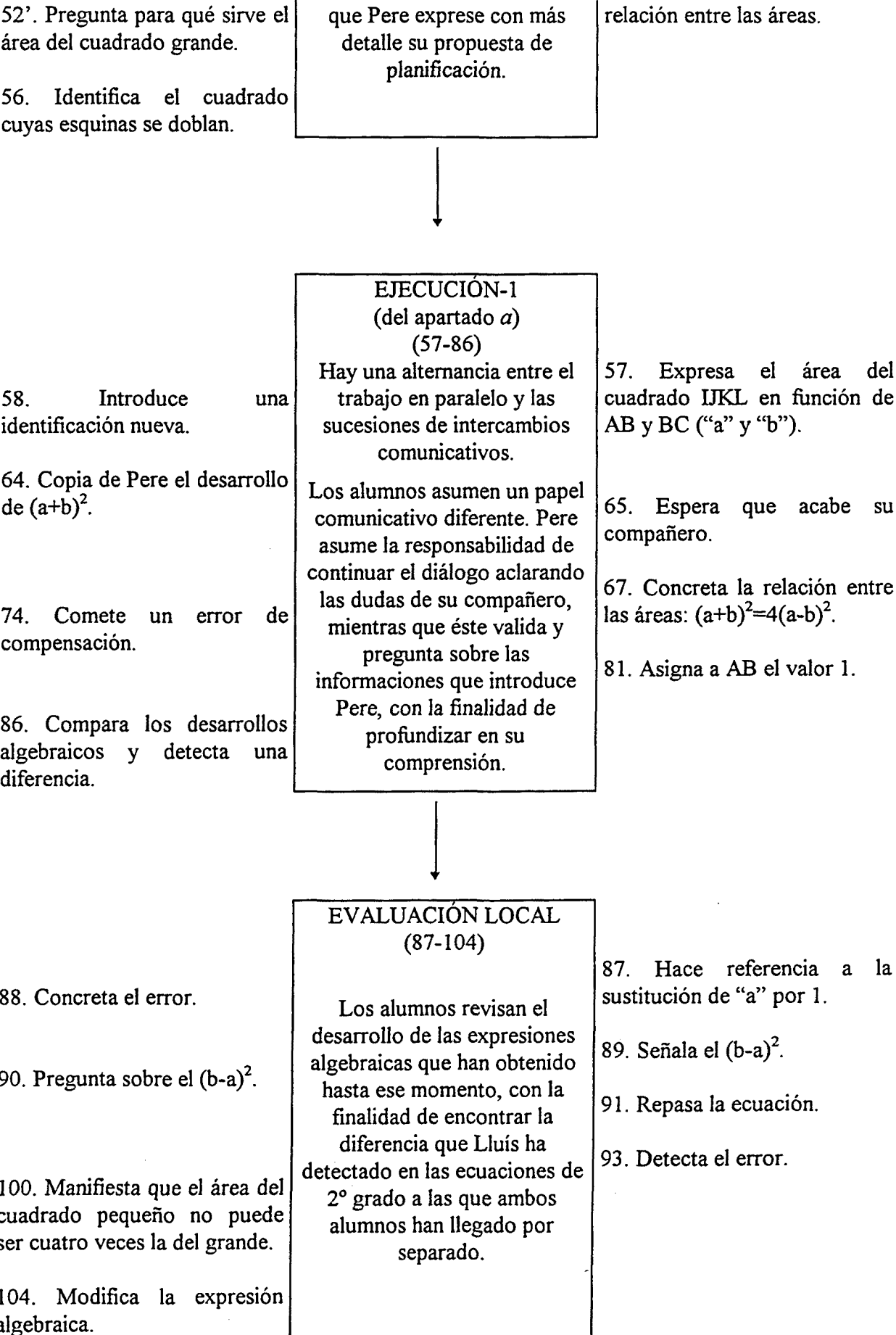
LLUÍS

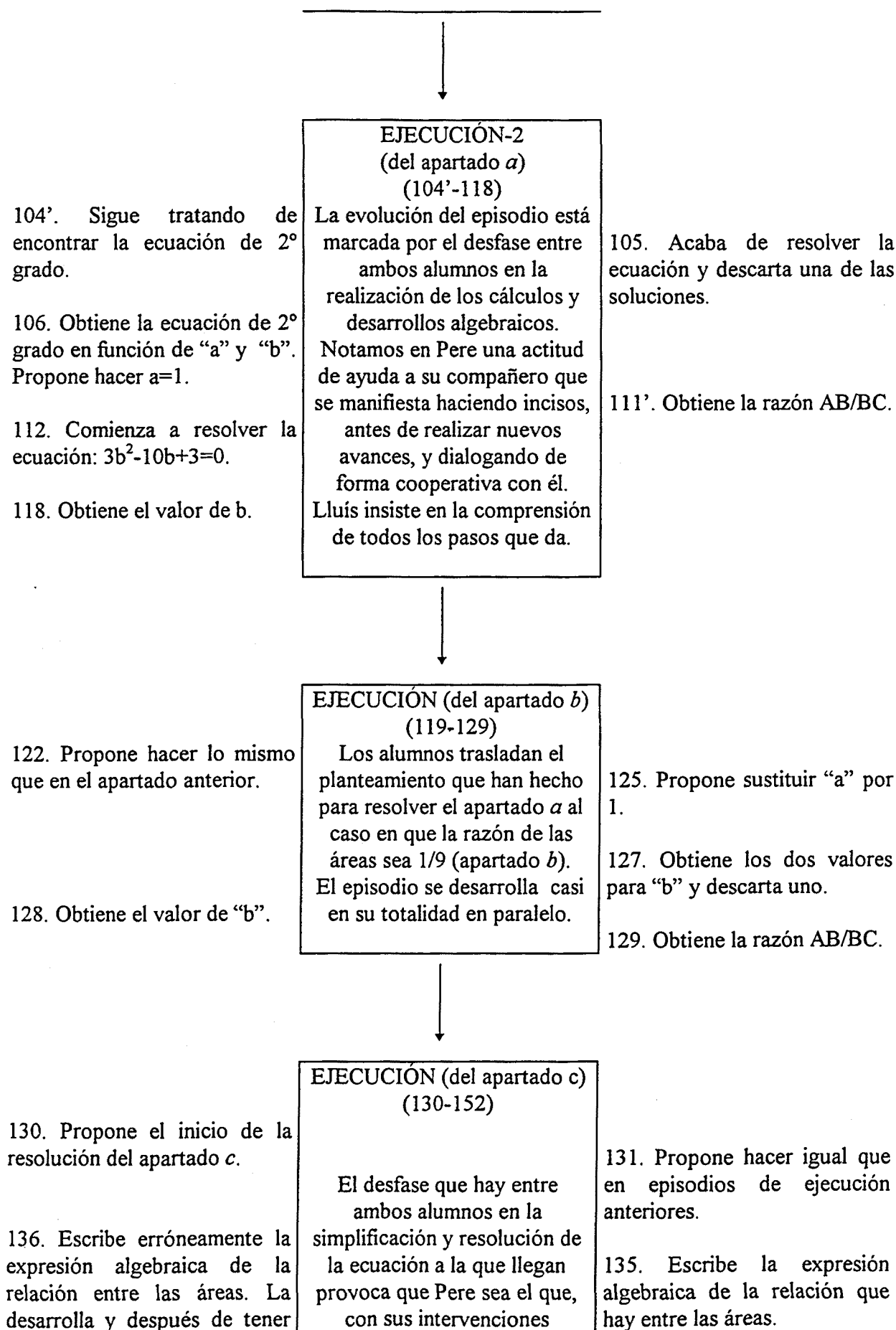
EPISODIO

PERE

LECTURA







avanzados los cálculos vuelve atrás y rectifica.	directivas, vaya adelantando los pasos que han de seguir.	137. Obtiene la ecuación de 2º grado en función de “a” y “b”.
140. Continúa simplificando expresiones algebraicas.	Los trabajos en paralelo se alternan con diálogos breves, mayoritariamente cooperativos.	141. Propone hacer a=1.
146. Copia la ecuación.		145’ y 147. Resuelve la ecuación.
		149. Obtiene el valor de “b”.



VERIFICACIÓN (153-166)		
156. Indica que lo han hecho igual que en episodios anteriores.	El episodio de verificación se origina como consecuencia de la desconfianza de Pere en el resultado que ha obtenido. En este episodio observamos dos tipos de verificación: la comprobación del resultado y el repaso de la solución que obtienen.	153. Pregunta si “b” es independiente de “n”.
158. Hace referencia a los casos particulares n=4 y n=9. Interpreta el significado de n.		155. Comprueba el resultado.
160, 162 y 164. Se manifiesta por expresar el resultado de la forma: b=1.		157. Repasa la fórmula de la ecuación de 2º grado.
		159, 161 y 163. Se inclina por dejar el resultado de b sin simplificar: $b=(2n-2)/2(n-1)$.

8.5. Comentarios generales sobre los procesos de resolución

En los procesos de resolución que hemos analizado, observamos una amplia diversificación en las formas de actuar de los alumnos, no sólo de unas parejas con respecto a otras, sino de una misma pareja en la resolución de diferentes problemas. A pesar de ello, en los párrafos siguientes identificamos y resumimos de forma muy breve los rasgos generales de los comportamientos de los alumnos.

En las resoluciones que protagonizan Rosa y Anna se impone la tendencia de Rosa a enfocar los problemas de forma geométrica, trazando rectas paralelas a los lados para descomponer las figuras y buscando relaciones entre los segmentos y triángulos que salen.

Rosa asume con mayor frecuencia la responsabilidad de la continuidad del diálogo con intervenciones que, generalmente, introducen informaciones nuevas. Por el contrario, Anna agota enseguida la reflexión sobre las ideas que aporta, pero estimula, con validaciones y preguntas, el progreso de las intervenciones de su compañera.

Las resoluciones de Laia y Jaume se caracterizan por un mayor protagonismo de Laia, que, con sus intervenciones directivas, provoca frecuentes cambios en la orientación de los procesos de resolución, lo que hace que no profundicen en el análisis de las informaciones que introducen. Esta tendencia se cambia en algunos episodios de la resolución del problema del cuadrado.

Hemos notado en Laia una inclinación a utilizar argumentos visuales y manuales (mide con el bolígrafo o con los dedos) para justificar las relaciones que introduce, en cambio, en Jaume observamos una mayor sensibilidad en la utilización de justificaciones más rigurosas desde el punto de vista matemático.

La única forma que Laia y Jaume tienen de enfocar los problemas que comparan áreas es la de buscar relaciones entre los elementos de las figuras para aplicar las fórmulas de las áreas correspondientes.

Los procesos de resolución de Pere y Lluís están condicionados por la persistencia de Lluís en comprender todos los pasos que se dan y por el adelanto de Pere respecto a su compañero en muchas fases de dichos procesos.

En general, las aportaciones de Lluís van seguidas de diálogos cooperativos, mientras que las de Pere son validadas por su compañero. Pere asume la responsabilidad de la continuación del diálogo aclarando las dudas de Lluís, mientras que éste valida las informaciones que introduce Pere y pregunta sobre ellas para tratar de profundizar en su comprensión.

Pere y Lluís se inclinan siempre por la aplicación de las fórmulas para comparar las áreas de las figuras, a pesar de que en la resolución del problema del hexágono proponen enfoques geométricos que son abandonados rápidamente.

