

**L'ESTUDI DE LES FUNCIONS UTILITZANT EL FULL  
DE CÀLCUL COM A EINA DE TREBALL:  
ANÀLISI D'UN PROCÈS CONSTRUCTIU BASAT EN  
LA MANIPULACIÓ I LA VISUALITZACIÓ.**

**Tesi Doctoral**  
**María José Segura Lores**

**Juliol, 2001**

**L'ESTUDI DE LES FUNCIONS UTILITZANT EL FULL  
DE CÀLCUL COM A EINA DE TREBALL:  
ANÀLISI D'UN PROCÈS CONSTRUCTIU BASAT EN  
LA MANIPULACIÓ I LA VISUALITZACIÓ.**

Memòria presentada per a optar al  
grau de doctor en Didàctica de la  
Matemàtica i de les Ciències  
Experimentals per la Universitat  
Autònoma de Barcelona, per

María José Segura Lores

Vist i plau

El director

Dr. José Manuel Yábar  
Madinabeitia

Professor Titular d'Universitat

Departament de Didàctica de la  
Matemàtica i de les Ciències  
Experimentals

Universitat Autònoma de  
Barcelona

Barcelona, 6 de Juliol de 2001

# Agraïments

Vull manifestar el meu agraïment a totes les persones que m'han recolzat, d'una manera o altra, en aquests darrers anys. En primer lloc, haig d'agrair molt especialment al Dr. José Manuel Yábar que accedís a les meves peticions i acceptés ser el director de la tesi amb tot allò que implica de dedicació i esforç.

També he d'agrair la inestimable ajuda del Dr. Josep Maria Fortuny, del Dr. Jordi Deulofeu i del Dr. Joaquim Giménez pels seus suggeriments i revisions d'algunes parts de la memòria. Agrair especialment a la Dra. Maria Teresa Anguera i a la Dra. Carmen Armengol per les seves apreciacions i directrius de treball.

El meu agraïment també a tots els companys i companyes de l'IES Badia del Vallès que m'han ajudat a seguir endavant encara que alguns d'ells/es ara es troben en altres centres. De manera molt especial vull agrair a la Lluïsa i a la Carmen, per compartir gran part de la tasca docent i que han contribuït a què aquesta memòria sigui una realitat. Al Sergi i a la Gemma, per la seva paciència en revisar, full a full, el català. Al Jordi, la seva decidida intervenció perquè els problemes tècnics no siguin considerats com a tals. I els amics, amigues i alumnes que s'han interessat per la tesi i m'han animat a continuar.

A tota la meva família, que m'han mostrat el seu recolzament dia rera dia a més de vuit-cents quilòmetres. A l'Asunción i al Fèlix, per permetre'm treballar tenint cura de la meva filla i donar-me ànims.

Finalment, i de manera molt especial, vull agrair-li a l'Esteban per saber escoltar-me i entendre les meves inquietuds. Haig d'agrair-li les infinites hores compartides sobretot, les estones passades davant de l'ordinador i els moments més importants.

*Al meu marit, Esteban i  
a la meva filla, Ana Berta*

# Índex

<b>INTRODUCCIÓ</b>	<b>1</b>
<b>CAPÍTOL 1</b>	<b>7</b>
<b>PLANTEJAMENT DE LA RECERCA</b>	<b>7</b>
1.1 INTRODUCCIÓ	7
1.2 FORMULACIÓ DELS OBJECTIUS	12
1.3 FASES DEL DISSENY DE LA RECERCA	13
<b>CAPÍTOL 2</b>	<b>17</b>
<b>FONAMENTS I MARC DE LA RECERCA</b>	<b>17</b>
2.1 LES FUNCIONS COM A CONTINGUT	17
2.1.1 ANÀLISI DE LES TASQUES I LA SEVA REPRESENTACIÓ	18
2.1.2 ANÀLISI DE L'APRENENTATGE I DESENVOLUPAMENT DEL CONCEPTE DE FUNCIÓ I GRÀFIC.	23
2.1.3 ANÀLISI DE L'ENSENYAMENT DE FUNCIONS I GRÀFICS.	26
2.2 MARC CURRICULAR	29
2.2.1 UNA ETAPA DE L'ADOLESCENT	30
2.2.2 UNA CONCEPCIÓ CONSTRUCTIVISTA DE L'APRENENTATGE	31
2.2.3 PRIMER NIVELL DE CONCRECIÓ	33
2.2.3.1 4t d'Educació Secundària Obligatoria	34
2.2.3.1.1 Objectius generals	34
2.2.3.1.2 Desenvolupaments dels continguts	34
2.2.3.1.3 Objectius terminals	36
2.2.3.1.4 Orientacions didàctiques	37
2.2.3.2 Batxillerat d'Humanitats i Ciències Socials	37
2.2.3.2.1 Objectius generals	38
2.2.3.2.2 Desenvolupaments dels continguts	38
2.2.3.2.3 Objectius terminals	39
2.2.3.2.4 Orientacions didàctiques	40
2.3 MARC TECNOLÒGIC	42
2.3.1 PRESENTACIÓ DEL FULL DE CÀLCUL	43
2.3.2 RECERQUES AMB EL FULL DE CÀLCUL COM EINA DIDÀCTICA EN UN MODEL MATEMÀTIC	45
2.3.3 ALTRES SOFTWARE	50
2.4 SÍNTESI DEL MARC TEÒRIC	52
2.4.1 LES FUNCIONS COM A CONTINGUT	52
2.4.1.1 Anàlisi de les tasques i la seva representació	52
2.4.1.2 Anàlisi de l'aprenentatge i desenvolupament del concepte de funció i gràfic	53
2.4.1.3 Anàlisi de l'ensenyament de funcions i gràfics	53
2.4.2 EL MARC CURRICULAR	54
2.4.3 EL MARC TECNOLÒGIC	54

---

**CAPÍTOL 3** **57**

---

**ELABORACIÓ DE LA UNITAT DIDÀCTICA** **57**

<b>3.1</b>	<b>DISSENY DE LA UNITAT DIDÀCTICA</b>	<b>57</b>
<b>3.2</b>	<b>OBJECTIUS GENERALS</b>	<b>59</b>
<b>3.3</b>	<b>CONTINGUTS, OBJECTIUS I ACTIVITATS D'ENSENYAMENT-APRENENTATGE</b>	<b>60</b>
	Activitat 0. Lleis aritmètiques	60
	Activitat 1. Treball Excel	61
	Activitat 2. Resolució de problemes	63
	Activitat 3. Estudi de rectes	65
	Activitat 4. Estudi de paràboles	68

---

**CAPÍTOL 4** **75**

---

**DISSENY DE LA METODOLOGIA DE RECERCA** **75**

<b>4.1</b>	<b>ANÀLISI DEL PROCÉS I DE LES DIFICULTATS</b>	<b>75</b>
<b>4.2</b>	<b>CONTEXT D'ACTUACIÓ</b>	<b>77</b>
<b>4.3</b>	<b>INSTRUMENTS DE RECOLLIDA DE DADES</b>	<b>77</b>
<b>4.4</b>	<b>TÈCNiques PER A L'ORGANITZACIÓ I ANÀLISI DE DADES</b>	<b>79</b>
<b>4.5</b>	<b>METODOLOGIA DE TREBALL</b>	<b>80</b>

---

**CAPÍTOL 5** **85**

---

**DESENVOLUPAMENT DE LA INNOVACIÓ DIDÀCTICA** **85**

<b>5.1</b>	<b>DETERMINACIÓ DE LA MOSTRA</b>	<b>85</b>
<b>5.2</b>	<b>ASPECTES ORGANITZATIUS</b>	<b>86</b>
<b>5.3</b>	<b>FASES DE L'ESTUDI EMPÍRIC</b>	<b>87</b>
<b>5.4</b>	<b>RECOLLIDA I ORGANITZACIÓ DE DADES</b>	<b>93</b>

---

**CAPÍTOL 6** **96**

---

**ANÀLISI DE DADES** **96**

<b>6.1</b>	<b>CATEGORITZACIÓ DE DIFICULTATS I ERRORS.</b>	<b>97</b>
6.1.1	DIFICULTATS I ERRORS PRESENTADES A 4T D'ESO	97
6.1.1.1	Dificultats al full de càlcul	97
6.1.1.2	Dificultats i errors a l'estudi de funcions	101
6.1.1.2.1	Dificultats generals	101
6.1.1.2.2	Errors en les Funcions Afins	105
6.1.1.2.3	Errors en les Funcions Quadràtiques	106
6.1.2	DIFICULTATS I ERRORS PRESENTADES AL BATXILLERAT HUMANÍSTIC	107
6.1.2.1	Dificultats al full de càlcul	107

6.1.2.2	Dificultats i errors a l'estudi de funcions	109
6.1.2.2.1	Dificultats generals	109
6.1.2.2.2	Errors en la Funció Polinòmica	109
6.1.2.2.3	Errors en la Funció Racional	110
6.1.3	SUMARI DE LA CATEGORITZACIÓ	111
<b>6.2</b>	<b>4T D'ESO</b>	<b>114</b>
6.2.1	QUADERN DE CAMP AMB EL SUPORT DE L'ENREGISTRAMENT EN DISQUET	114
6.2.2	VÍDEO	134
6.2.3	QÜESTIONS DEL DOSSIER D'ALUMNES.	135
6.2.4	QÜESTIONARI.	156
6.2.5	ENTREVISTES.	179
<b>6.3</b>	<b>SEGUIMENT DE DUES ALUMNES A L'ESTUDI PILOT DEL BATXILLERAT HUMANÍSTIC.</b>	<b>114</b>
6.3.1	QUADERN DE CAMP AMB EL SUPORT DE L'ENREGISTRAMENT EN DISQUET	190
6.3.2	VÍDEO	194
6.3.3	QÜESTIONS DEL DOSSIER D'ALUMNES.	195
6.3.4	ENTREVISTES.	216

---

## **CAPÍTOL 7** **221**

### **APORTACIONS DE L'ANÀLISI DE DADES** **221**

---

<b>7.1</b>	<b>4T D'ESO</b>	<b>222</b>
7.1.1	CONTINGUTS DE FUNCIONS	223
7.1.1.1	Dificultats	223
7.1.1.2	Errors	225
7.1.1.3	Comentaris generals	229
7.1.2	EL FULL DE CÀLCUL	229
7.1.2.1	Dificultats	230
7.1.2.2	Comentaris generals	234
7.1.3	LA UNITAT DIDÀCTICA	237
7.1.3.1	Evolució de la unitat didàctica	237
7.1.3.1.1	Desenvolupament de les activitats per a 4t d'ESO	237
7.1.3.2	Nova unitat didàctica	244
7.1.3.3	Comentaris generals	246
7.1.4	LA METODOLOGIA DE TREBALL	246
7.1.5	L'ACTITUD DE L'ALUMNAT	248
<b>7.2</b>	<b>BATXILLERAT HUMANÍSTIC</b>	<b>249</b>
7.2.1	CONTINGUTS DE FUNCIONS	250
7.2.1.1	Dificultats	250
7.2.1.2	Errors	251
7.2.1.3	Comentaris generals	252
7.2.2	EL FULL DE CÀLCUL	253
7.2.3	LA UNITAT DIDÀCTICA	254
7.2.4	LA METODOLOGIA DE TREBALL	254
7.2.5	L'ACTITUD DE LES ALUMNES DE SEGUIMENT	255

---

## **CAPÍTOL 8** **257**

### **CONCLUSIONS** **257**

---

<b>8.1</b>	<b>RESULTATS RESPECTE AL PERFIL D'APRENENTATGE</b>	<b>257</b>
------------	--	------------

8.1.1	LES DIFICULTATS	258
8.1.2	ELS ERRORS	259
<b>8.2</b>	<b>RESULTATS QUANT A LA INNOVACIÓ DIDÀCTICA</b>	<b>260</b>
8.2.1	SOBRE EL DISSENY DE LA UNITAT DIDÀCTICA	260
8.2.2	SOBRE L'APRENTATGE I DESENVOLUPAMENT A L'ESTUDI DE FUNCIONS AFINS I QUADRÀTIQUES	261
8.2.3	SOBRE L'ENSENYAMENT DE FUNCIONS I GRÀFICS	262
8.2.4	SOBRE EL FULL DE CÀLCUL COM A EINA DIDÀCTICA	262
8.2.5	L'ACTITUD DE L'ALUMNAT	263
8.2.6	LES APORTACIONS AL SISTEMA EDUCATIU	263
<b>8.3</b>	<b>LIMITACIONS DEL FULL DE CÀLCUL EN AQUEST ESTUDI</b>	<b>264</b>
<b>8.4</b>	<b>FUTURES LÍNIES DE RECERCA</b>	<b>264</b>

---

**REFERÈNCIES** **267**

---

**BIBLIOGRÀFIQUES** **267**

---

**ANNEXOS** **275**

<b>ANNEX I</b>	<b>PRIMERA UNITAT DIDÀCTICA A 4T D'ESO</b>	<b>265</b>
<b>ANNEX II</b>	<b>UNITAT DIDÀCTICA A BATXILLERAT HUMANÍSTIC</b>	<b>297</b>
<b>ANNEX III</b>	<b>NOVA UNITAT DIDÀCTICA A 4T D'ESO</b>	<b>337</b>
<b>ANNEX IV</b>	<b>QÜESTIONARI A 4T D'ESO</b>	<b>379</b>
<b>ANNEX V</b>	<b>GUIÓ DE LES ENTREVISTES A 4T D'ESO</b>	<b>385</b>
<b>ANNEX VI</b>	<b>GUIÓ DE L'ENTREVISTA A BATXILLERAT HUMANÍSTIC</b>	<b>393</b>
<b>ANNEX VII</b>	<b>TRANSCRIPCIÓ D'UNA SESSIÓ DE VÍDEO A 4T D'ESO</b>	<b>397</b>
<b>ANNEX VIII</b>	<b>FULL PROGRAMAT "FUNCIONS AFINS I QUADRÀTIQUES" A 4T D'ESO</b>	<b>403</b>



# Introducció

---

L'ensenyament de les matemàtiques sempre ha estat un tema d'estudi i investigació. La irrupció en la nostra vida de les eines informàtiques ha estat possiblement un nou àmbit amb unes perspectives interessants que poden oferir-nos una nova oportunitat d'estimular el procés d'aprenentatge dels alumnes, d'ésser una ajuda per aconseguir un ensenyament de més qualitat. Però, com hem de dissenyar les unitats didàctiques?, com hem d'organitzar i desenvolupar el procés d'aprenentatge?, quin paper ha de jugar l'alumne/a? i el/la professor/a?, dintre de quin marc metodològic hem de fer servir l'ordinador?, quina funció ha de tenir i quines condicions s'han de complir? ...

Aquests van ésser els primers interrogants que ens vam motivar a iniciar la nostra tasca de recerca.

Les matemàtiques són una disciplina bàsica en qualsevol desenvolupament tècnic i és molt gran la influència que rep des de la tecnologia. Són molts els camps de la matemàtica que vénen rebent, en les últimes dècades, importants aportacions de les noves tecnologies. El vídeo, l'ordinador, les calculadores, els sistemes multimèdia, etc., poden ser exemples d'eines tecnològiques novedoses susceptibles d'aplicació en l'ensenyament de les matemàtiques.

Com cita Rivière (1998, p.53): *El currículum és sempre producte del moment en què s'elabora, de les tendències de l'època en relació amb l'aprenentatge i amb l'ensenyament, de les condicions en què s'imparteixen, dels alumnes als que va dirigit i, sobre tot, de les demandes socials sobre el que han d'aprendre els escolars.* Així, la societat juga un paper molt important. Ara per ara, l'escola es troba immersa en una societat on s'han produït i es produeixen gran canvis que han de ser contemplats en l'ensenyament de les matemàtiques. Especialment en una etapa obligatòria, el currículum ha de respondre a les necessitats socials. Entre les moltes possibles mostres d'aquestes noves condicions que exigeixen resposta de l'educació matemàtica trobem les que deriven del pes creixent que a la societat té tot el relacionat amb les noves tecnologies.

Si bé la presència dels nous mitjans de càlcul, organització i transmissió de la informació té una influència notable en tot l'ensenyament, la seva interacció amb les matemàtiques és especialment notable. Això, ens obliga com a mínim a replantejar el paper i el pes que s'assigna als diferents procediments de càlcul, numèric o simbòlic; i porta també a modificar la manera amb què hem d'enfrontar-nos al seu ensenyament.

La forma d'ensenyament que volem aconseguir en aquesta tesi, no només ha de contemplar la presentació dels conceptes i resultats amb les corresponents tècniques de càlcul, sinó també un entrenament de la intuïció, que permeti a l'alumne descobrir propietats i característiques dels objectius d'estudi a partir d'anàlisis de diverses situacions. Això, en general, ha de requerir realitzar molts càlculs per poder intuir resultats generals a partir d'observacions particulars i posteriorment una bona capacitat de raonament per contrastar la certesa de les intuïcions.

Un dels propòsits d'aquest treball és incidir més en els objectius de les matemàtiques amb el suport dels recursos informàtics, millorar l'actitud dels estudiants cap a les matemàtiques i millorar el seu rendiment.

Basant-nos en les idees recollides per Yábar (1995, p. 33-37):

- ❖ *La utilització de la computadora a l'ensenyament ha d'estar emmarcada en una metodologia que es basa en un model constructivista d'accés al coneixement. En un model constructivista, l'alumne, a partir dels seus descobriments, descobriments guiats per una ajuda pedagògica, construeix els seus coneixements i els signfica; els interioritza. (...)*
- ❖ *La computadora ha d'ésser un recurs tecnològic més en el context natural de l'alumne, la classe, i com a tal s'introdueix com a centre del procés d'aprenentatge. (...)*
- ❖ *El software de la computadora de l'aula ha de poder respondre a les necessitats que ens planteja l'enfocament metodològic constructivista.*

Per portar a terme aquest model constructivista depenem dels recursos tecnològics que trobem als centres docents, tant en quantitat com en qualitat. Els centres de secundària cada vegada es troben millor dotats i això ens permet que l'ordinador sigui un recurs més en el procés d'aprenentatge a l'aula. Per fer ús d'aquesta eina hem d'escollir un software eficient, és a dir, amb criteris d'accessibilitat, facilitat d'ús, flexibilitat, versatilitat i interactivitat amb l'alumne. Així doncs, hem de fer servir un material didàctic que ens faciliti el desenvolupament d'aquest model d'aprenentatge amb les eines informàtiques més adients.

El nostre principal objectiu no són les eines en si mateixes sinó, les seves possibilitats en la tasca docent, com pot ser en un entorn matemàtic. Per aquesta raó pretenem arribar a presentar el full de càlcul com a eina útil per a la manipulació i visualització matemàtica.

En aquest sentit i dintre d'aquest context, entenem per manipulació el procés de construcció numèric i simbòlic amb suport informàtic pel qual es genera una sèrie d'expressions algèbriques, taules i gràfics i, tenir la possibilitat de modificar, canviar, rectificar..., per a l'aprenentatge i el descobriment matemàtic. I per visualització entenem el procés de formació d'imatges, que poden ser mentals (sense suport material) o materials (amb suport tecnològic), i la utilització de dites imatges per a l'aprenentatge i el descobriment matemàtic. Concretament, com a processos de reconstrucció de conceptes.

En el desenvolupament de la tasca docent considerem un factor important el procés d'aprenentatge dels alumnes. Com a conseqüència, hem de procurar contemplar els següents punts:

- Tenir en compte el nivell de desenvolupament operatori de l'alumnat i els coneixements previs pertinents. Orientar-lo perquè es responsabilitzi del seu propi aprenentatge; ha de saber que l'aprenentatge és també una activitat planificable i estratègica de la persona que la realitza, i que és possible aprendre a aprendre, és a dir, ha d'haver-hi una responsabilitat de l'alumnat en el seu procés d'aprenentatge.
- Afavorir un bon clima de treball perquè estiguin prou motivats per assolir el nou aprenentatge, per integrar el nous continguts en els seus esquemes de pensament i acció, i això s'assoleix si el marc de relacions interpersonals on es dona l'aprenentatge afavoreix la confiança mútua, l'acceptació i el respecte. No oblidem que els processos de reconstrucció de coneixements requereixen un entorn interactiu i, des d'aquest punt de vista, és important aprofitar la potencialitat investigadora del treball individual o per parelles.

Els nois i les noies estaran més motivats en la mesura que prenguin consciència de les seves habilitats i els seus punts de vista; que sentin la necessitat d'ampliar o rectificar les seves concepcions; que descobreixin que la nova situació cognitiva que se'ls ofereix és quelcom estimulants i desitjable, i que, per tant, allò que se'ls demana no està mancat de sentit.

- Dissenyar un model de classe que s'adeqüi a la diversitat d'alumnes que hi ha a l'aula, als seus processos i ritmes d'aprenentatges.

Tota aquesta inquietud és la que va motivar-nos a desenvolupar aquesta tasca de recerca. Aquest treball, inscrit dins de l'àrea de Didàctica de les Matemàtiques, tracta en primer lloc, d'elaborar una unitat didàctica per a l'estudi de funcions afins i quadràtiques a 4t d'ESO utilitzant l'ordinador com a eina de treball, en concret el full de càlcul, emmarcada en un model constructiu basat en la manipulació i visualització. En segon lloc, implementació de la innovació didàctica. I en tercer lloc, analitzar el procés d'aprenentatge per treure conclusions. Aquest treball s'ha continuat a nivell de Batxillerat Humanístic amb l'elaboració d'una unitat didàctica per estudiar les funcions exponencial, logarítmiques, polinòmiques i racionals, aquestes dues últimes utilitzant les derivades i, amb l'implementació d'aquesta unitat. Encara que en el treball de recerca es fa una explicació del procés d'aprenentatge, aquesta part només dona pas a indicis ja que la part empírica s'ha fet amb un grup classe i amb el seguiment de dues alumnes que van formar part de l'estudi pilot de 4t d'ESO.

Aquesta recerca és un repte dintre del meu àmbit professional. Des del 87 que vaig ésser llicenciada per la Facultat de Granada en Ciències Exactes exerceixo de manera exclusiva com a professora de Matemàtiques a Secundària. Actualment, imparteixo classe a l'IES Badia del Vallès com a numerària des del 90. I amb la meua preocupació per millorar la comprensió dels conceptes i tècniques involucrades en l'aprenentatge de l'alumnat vaig realitzar els cursos del Doctorat en Didàctica de les Matemàtiques, on en el treball de recerca "Saps el que fa la teua calculadora?" (1996) vaig mostrar interès per l'ús de noves tecnologies.

El primer contacte amb el tema objecte d'aquesta recerca va ser abans de la implantació de la Reforma Educativa al meu institut durant el període del 91 al 93. En un principi vaig fer servir els programes del PIE per estudiar i representar funcions afins i quadràtiques amb l'ordinador per als alumnes de 2n de FPI de l'especialitat administrativa. Després, amb els de 3r de FPII per representar qualsevol funció. Posteriorment, amb el nou batxillerat, també vaig fer servir aquests programes.

Iniciem aquesta investigació perquè és un camp que a la nostra societat no està massa aplicat a l'entorn docent i la meua experiència com a ensenyant, als nivells educatius d'ESO i Batxillerat, em fa pensar que si apliquem un model de construcció en un entorn agradable s'afavoreix l'assoliment de l'aprenentatge de l'alumnat.

En resum, pretenem dissenyar un material que formi part del currículum d'un alumne de secundària (com són les funcions) utilitzant un full de càlcul, estructurar i organitzar la classe que dóna lloc a les tasques d'aprenentatge per analitzar posteriorment aquest procés d'aprenentatge.

A continuació, presentem els capítols desenvolupats en l'elaboració d'aquesta tesi.

Al primer capítol, s'exposa el tema d'investigació i el per què. Es fa referència al contingut de funcions i al full de càlcul. Es concreta quins són els objectius marcats en aquesta recerca i es defineix les seves fases (elaboració, implementació i conclusiva).

El segon capítol se centra en fonamentar els tres eixos principals d'aquest treball. En primer lloc, les funcions com a contingut, ressaltant la complexitat del concepte de funció i tot allò que l'envolta. En segon lloc, el marc curricular on al principi es presenta a qui va dirigit, a continuació quin és el model pedagògic, concretament el marc teòric parteix d'una concepció constructivista de l'aprenentatge amb el suport del Departament d'Ensenyament, i per acabar s'indica el primer nivell de concreció. I en tercer lloc, el marc tecnològic on es presenta el full de càlcul, recerques vinculades al full de càlcul i al tema de funcions i per últim altres softwares.

Al tercer capítol, es presenta el disseny de la unitat didàctica elaborada per a la investigació al nivell educatiu de 4t d'ESO. S'especifica els objectius generals i per a cada activitat els conceptes i procediments a partir dels objectius que s'ha d'assolir i les activitats d'ensenyament-aprenentatge amb un retall de la qüestió proposada.

Al quart capítol, s'exposa la metodologia del disseny de la recerca. Es presenta l'anàlisi del procés d'investigació i les dificultats a tenir en compte, el context d'actuació, se determina els instruments de recollida i les tècniques per a l'organització i l'anàlisi de dades. I per últim, tenim la metodologia de treball.

El cinquè capítol, correspon als elements que configuren el desenvolupament de la innovació didàctica, tant per al 4t d'ESO com per l'estudi iniciat al Batxillerat Humanístic. En primer lloc, determinem la mostra i els aspectes organitzatius per passar a desenvolupar cada fase de l'estudi empíric. Per últim, especifiquem per a cada fase com s'ha portat a terme la recollida i organització de dades.

Al sisè capítol, s'analitza exhaustivament cada instrument de recollida de dades fet servir a 4t d'ESO i, tal com ja s'ha indicat per al Batxillerat Humanístic només presentem el seguiment de dues alumnes que van formar part de l'estudi pilot a 4t d'ESO. Al final, s'inclou la categorització que s'ha derivat d'aquesta anàlisi.

El setè capítol, recull les aportacions de l'anàlisi de dades a 4t d'ESO i el que intuïm per al Batxillerat Humanístic. Aquestes aportacions es presenten en cinc blocs: funcions, full de càlcul, unitat didàctica, metodologia de treball i actitud de l'alumnat.

Finalment, el capítol vuitè correspon a les conclusions de l'estudi obtingudes. Aquestes conclusions fan referència a dos tipus de resultats. En primer lloc, respecte al perfil d'aprenentatge de l'alumnat, determinem la influència del full de càlcul en l'estudi de les funcions afins i quadràtiques i concretem les dificultats i els errors desenvolupats que ens han servit per millorar la unitat didàctica. I en segon lloc, quant a la innovació didàctica sobre el disseny de la unitat didàctica, sobre l'ensenyament-aprenentatge, respecte a l'ús del full de càlcul i l'actitud de l'alumnat. Hem afegit les limitacions del full de càlcul en aquest estudi i la presentació de futures línies de recerca.

La tesi inclou també la bibliografia consultada i es completa amb els annexos que per ordre d'aparició a l'índex corresponen a: les unitats didàctiques elaborades per a 4t d'ESO (Annex I) i per al Batxillerat Humanístic (Annex II), la nova unitat didàctica per a 4t d'ESO (Annex III), qüestionari de 4t d'ESO (Annex IV), guió de les entrevistes de 4t d'ESO (Annex V) i del Batxillerat Humanístic (Annex VI), la transcripció d'una sessió de vídeo a 4t d'ESO (Annex VII) i per últim, un full programat "Funcions afins i quadràtiques" a 4t d'ESO (Annex VIII).

# Capítol 1

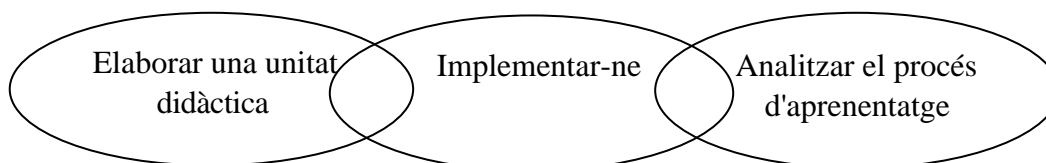
## Plantejament de la Recerca

---

Tenint present les pretensions d'aquesta recerca, exposades a la introducció, en aquest capítol es plantegen en primer lloc les tres línies de treballs a seguir: elaborar una unitat didàctica, implementar-ne i analitzar el procés d'aprenentatge. En segon lloc, es formulen els objectius de la recerca com a treball d'innovació i com a recerca, partint de les tres línies de treballs plantejades. I per últim, es presenten les fases del disseny de la recerca, la fase d'elaboració, la fase empírica i la fase conclusiva, partint dels objectius que volem assolir.

### 1.1 Introducció

En aquesta recerca, titulada "L'estudi de les funcions utilitzant el full de càlcul com a eina de treball. Anàlisi d'un procés constructiu basat en la manipulació i la visualització", es plantegen tres línies de treballs concatenades:



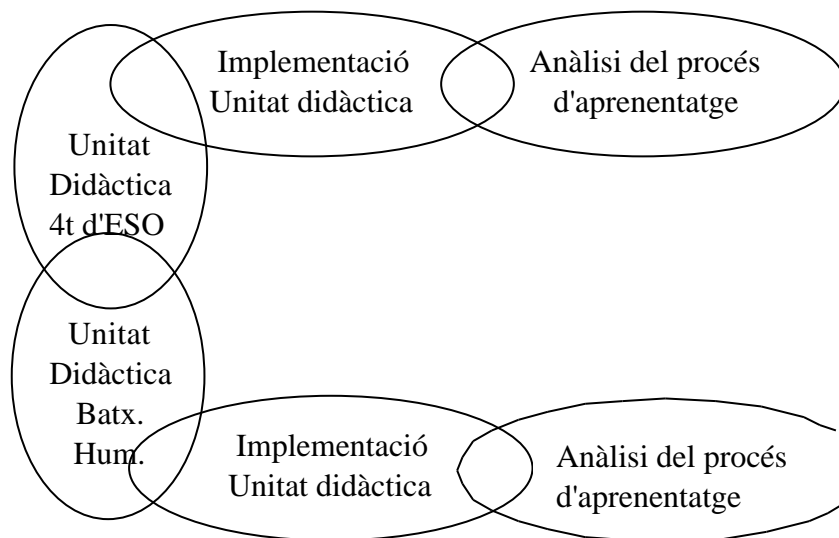
La primera, com hem pogut llegir, és elaborar una unitat didàctica per estudiar les funcions fent ús del full de càlcul a 4t d'ESO i una altra al Batxillerat d'Humanitats i Ciències Socials. Entenem per estudiar les funcions a 4t d'ESO identificar el comportament del gràfic d'una recta i d'una paràbola segons les variacions dels seus paràmetres i, reconèixer les seves característiques (punts de tall, creixement, pendent, ordenada a l'origen, simetria, vèrtex, orientació de les branques, dibuix) a través de diferents situacions algebraiques que generen funcions afins i quadràtiques. Entenem per estudiar les funcions al Batxillerat Humanístic trobar i reconèixer les característiques

(domini, discontinuïtat, simetria, punts de tall amb els eixos de coordenades, asímptotes, màxims i mínims relatius, creixement, concavitat i dibuix) de les funcions i gràfiques a partir de l'expressió algebraica de la funció. S'estudien les funcions exponencials, logarítmiques, polinòmiques i racionals, utilitzant derivades en aquestes dues últimes.

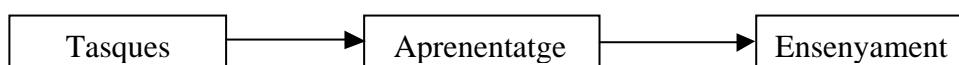
La segona línia de treball és implementar de manera seqüencial les dues unitats didàctiques, és a dir, una vegada impartida la unitat didàctica a 4t d'ESO, al curs següent iniciem la del Batxillerat. El desenvolupament de la innovació didàctica queda emmarcat per una metodologia de treball basada en un model constructivista. Hem de considerar tots els aspectes implicats: gestió de l'aula, temporització, recursos informàtics i coordinació amb les classes impartides a l'aula normal.

I en tercer lloc, és analitzar el procés d'aprenentatge de l'alumnat tenint en consideració els aspectes més rellevants com són els continguts treballats del tema de les funcions, la utilització del full de càlcul, la metodologia de treball emprada, el disseny de la unitat didàctica i l'actitud de l'alumnat. Per delimitar les dimensions d'aquesta recerca s'analitza en detall el procés d'aprenentatge dels alumnes de 4t d'ESO, i pel Batxillerat Humanístic només es presenta el seguiment de dues alumnes, que formen part de la mostra a 4t d'ESO, amb la intenció d'aportar una sèrie de "intuïcions" i deixar una porta oberta a posteriors investigacions.

Si considerem l'estructura bàsica del plantejament d'aquesta recerca per a cada nivell acadèmic pot ésser visualitzada amb una cadena, que deixa l'últim anella de l'anàlisi del Batxillerat sense tancar per indicar que és un inici i cal continuar investigant.



Per organitzar l'estructura del plantejament exposat anteriorment ens centrem en el "review" sobre les funcions i els gràfics realitzada per Leinhardt, Zaslavsky i Stein (1990). Presenten l'anàlisi sota tres perspectives de treball diferents:



En primer lloc, analitzen les tasques sobre la interpretació i construcció associades amb les funcions i algunes de les seves representacions: algebraiques, taules i gràfiques.

En segon lloc, analitzen la naturalesa de l'aprenentatge en terme d'intuïcions i concepcions errònies. I en tercer lloc, analitzen què han d'ensenyar a l'aula a través de seqüències, explicacions i exemples. En el capítol següent estudiarem amb profunditat les tres perspectives de treball analitzades per Leinhardt, Zaslavsky i Stein (1990).

Si considerem l'evolució i el desenvolupament dels plantejaments didàctics a l'educació matemàtica, durant els últims 30 anys, analitzats per Armendáriz M:V, Azcárate C. i Deulofeu (1993, pp.78-99), aquesta evolució es va iniciar a partir dels anys 60 a EEUU i àmbit europeu en general, malgrat que a Espanya hem de remetre'ns a la reforma que proposa la llei de 1970, que va marcar l'inici d'una renovació curricular i va començar a tenir entitat el canvi a l'ensenyament de les matemàtiques. Partint d'aquesta renovació didàctica, ens trobem que fins fa poc les investigacions desenvolupades sobre el tema de funcions utilitzant el full de càlcul estan localitzades a Gran Bretanya i a EEUU. Ara podem dir que en molts aspectes tecnològics estem quasi a la mateixa altura. Així que, lligant aquests dos marcs, curricular i tecnològic, ens plantejem aquesta recerca en un context molt diferent a nivell social i cultural. Pel que fa als avenços tecnològics fa molt poc de temps que els nostres centres docents estan dotats d'ordinadors suficients per poder impartir la matèria amb el grup classe a l'aula d'informàtica.

Entre les característiques d'aquesta recerca, en destaquem dues. En primer lloc, l'estudi empíric es fa sobre una mostra molt concreta, alumnes d'un mateix centre, tractant de veure com es desenvolupa l'estudi en tots els grups classe d'un mateix nivell, on ens trobem tot tipus d'alumnat i amb la particularitat que part dels alumnes de l'estudi pilot al Batxillerat Humanístic van formar part dels grups de l'estudi pilot a l'ESO. I en segon lloc, la tasca docent i la investigadora és desenvolupada per la mateixa persona.

El motiu per aplicar el full de càlcul en el nostre ensenyament, no és tant pel gust per la tecnologia com pel desig d'aconseguir donar una formació matemàtica cada vegada millor, més adient a les necessitats dels nostres dies i més atractiva, tant per als alumnes com per als professors. En el llibre de Garcia, Martínez i Miñano (1995, p. 15-16) podem llegir:

*"Les noves eines amb què contem a l'actualitat, i les que aniran apareixent, poden ser un mitjà per aconseguir un ensenyament de més qualitat. El més important és assimilar que cada vegada són majors les capacitats de les màquines en relació amb el treball matemàtic i que és necessari un canvi d'enfocament a l'ensenyament per poder garantir la permanència dels avantatges que la formació matemàtica aporta a la ment humana. Es tracta que la tecnologia no obstaculitzi el desenvolupament de capacitats de raonament, abstracció, etc. sinó que l'afavoreixi."*

A la pràctica, es correspon que l'alumne tingui una sèrie d'activitats que ha d'anar fent en l'ordre presentat i així, de mica en mica, anirà estudiant les funcions proposades basant-se en la manipulació i la visualització i traient-ne conclusions i generalitzacions. L'ordinador amb el full de càlcul és l'eina de treball que té l'alumne per expressar les funcions en diferents llenguatges; algebraic, taula de valors i gràfica.



Un full de càlcul és un programa que permet realitzar un tractament automàtic, sistemàtic i interactiu de dades numèriques organitzades de manera tabular. Es presenta com un full quadrícula, format per línies i columnes fàcilment identificables.

Fent referència a l'obra de Garcia, Martínez i Miñano (1995) els seus autors consideren que la introducció del full de càlcul a l'ensenyament es pot concebre des d'una doble perspectiva:

- Des d'un punt de vista d'alfabetització informàtica, té un gran interès pel seu gran ús en àmbits comercials, de gestió i de tractament de la informació en general.
- Des d'un punt de vista més enfocat cap a l'ensenyament matemàtic, el seu potencial de càlcul i la seva forma d'organitzar la informació pot ser de gran ajuda per assolir els objectius docents en matemàtiques.

La informàtica, i en concret el full de càlcul, pot aportar a l'ensenyament alguns aspectes metodològics. És a dir, pot afavorir l'experimentació, el descobriment de resultats i, a la fi, un aprenentatge més actiu per part de l'alumnat. A més, la seva potència de càlcul i de representació gràfica pot permetre fer més èmfasi en les idees, els processos i la metodologia de resolució de problemes: plantejament de conjetures i verificació de les mateixes, cerca de models, estimació de resultats i verificació del mateixos, interpretació de solucions, etc.

Tot això s'ha de combinar amb una gran facilitat d'ús i una presentació de resultats que sigui molt familiar a l'alumne, ja que pot ser molt similar a la que s'elabori usant llapis i paper. I tenint present el fet d'utilitzar el menor nombre d'eines distintes possibles, per evitar la dispersió de l'atenció de l'alumne en l'aprenentatge d'aquestes.

La visualització dels conceptes, en aquest cas de la representació de les funcions ha de promoure un estudi més intuïtiu, d'aproximació, que inviti més a l'exploració d'aquests conceptes i donar més èmfasi a les representacions gràfiques.

Piaget ens explica com aprèn el nen, però no especifica la manera en què ha d'ésser instruït. El complex i ric món de Piaget, estudiat pel professor britànic Richmond (1981), recull que tota situació d'aprenentatge implica una assimilació. L'assimilació és l'aplicació de l'experiència passada a l'experiència present. És feina del professor facilitar l'adaptació i assimilació al nen, al llarg del desenvolupament del curs. Tenint en compte que cada situació d'aprenentatge és la base d'un altre futur aprenentatge. El professor ha d'estudiar amb cura qualsevol situació educativa donada, perquè no només és important l'adaptació immediata, sinó també la seva relació amb futurs desenvolupaments.

En aquest sentit, el professor és l'organitzador de situacions d'aprenentatge en què es pot acomodar l'antiga experiència a la nova, i aquestes situacions d'aprenentatge tenen un aspecte progressiu. Les accions mentals es creen mitjançant la manipulació d'objectes, i es sostenen i desenvolupen mitjançant una continuació de tal concepte. Però, a l'escola secundària a l'acció física ha de seguir la manipulació simbòlica.

Concretament en el treball que plantegem, la generalització dels conceptes a partir d'una experimentació en situacions repetides pot ajudar a construir raonaments

simbòlics, a interpretar i utilitzar gràfiques d'una manera més acurada, a matematitzar una situació i arribar a un grau elevat d'abstracció.

## 1.2 Formulació dels objectius

La formulació específica dels objectius de la recerca neixen a partir de les tres línies de treball plantejades a l'inici de aquest capítol. Presentem des de dues perspectives diferents els objectius marcats. La primera com a treball d'innovació i la segona com a recerca.

### ➤ Com a treball d'innovació

1. Dissenyar i construir una seqüència d'aprenentatge sobre les funcions.
2. Implementar la unitat didàctica elaborada.

### ➤ Com a recerca

3. Analitzar el procés d'aprenentatge dels alumnes en relació als continguts treballats en el tema de funcions, l'eina informàtica (full de càlcul), la metodologia emprada, la unitat didàctica elaborada i l'actitud de l'alumnat.
4. Millorar la unitat didàctica elaborada per a la investigació i que constitueix part del currículum de l'aprenentatge.

Aquests quatre objectius generals es concreten en els següents objectius específics:

- Revisar, en procés constructiu, la unitat didàctica dissenyada per a la investigació i elaborar una nova proposta, partint de:
  - L'anàlisi i la classificació de les dificultats i/o els errors comesos pels alumnes en relació a l'estudi de les funcions, en concret atenent a les seves característiques, intentant determinar els motius que els provoquen.
  - L'anàlisi i la classificació de les dificultats i/o els errors comesos pels alumnes en l'ús del full de càlcul per estudiar les funcions, intentant determinar els motius que els provoquen.
- Valorar com influencia, en el procés d'aprenentatge de l'alumnat, el full de càlcul.
- Revisar la metodologia de treball emprada en l'estudi de funcions utilitzant el full de càlcul sota un procés constructiu enfocat en la manipulació i la visualització.
- Concretar les actituds de l'alumnat dintre del seu procés d'aprenentatge.

Aquests objectius ens plantegen la formulació d'una sèrie d'interrogants:

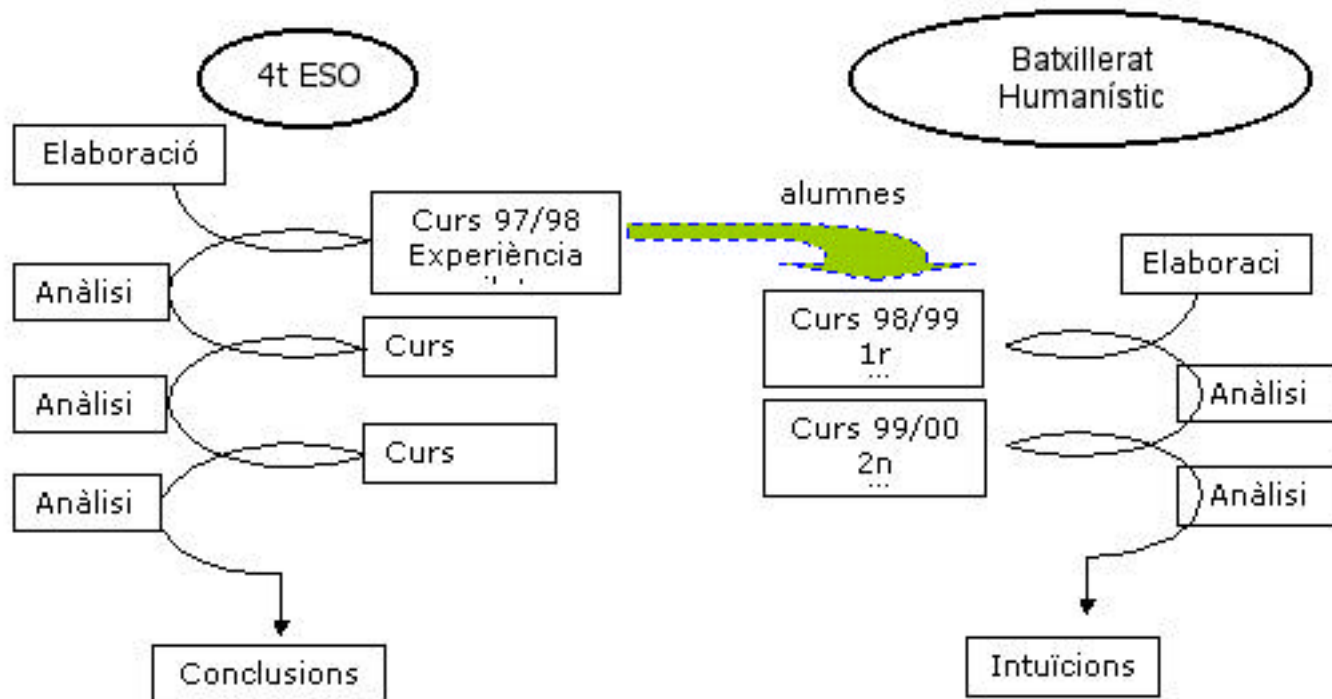
- a) El full de càlcul és una bona eina per potenciar l'aprenentatge per descobriment i permetre un procés manipulatiu i visualitzador?

- b) La manipulació i la visualització per l'estudi de funcions són passos que afavoreixen descobrir propietats i característiques de les funcions en estudi a partir d'anàlisis de diverses situacions?
- c) Podem fer servir els diferents models de representació d'una funció afí i quadràtica (descripció verbal, taula de valors, expressió algèbrica i gràfic) amb el full de càlcul?
- d) El raonament visual ens permet descriure i justificar el comportament de les funcions en estudi segons els seus paràmetres?
- e) Aquest software serveix per emfatitzar en la generalització i l'abstracció?
- f) El full de càlcul permet un treball autònom de l'estudiant adequat al seu ritme de treball?
- g) Quins resultats podem aconseguir respecte al perfil d'aprenentatge?
- h) Podem afavorir un bon clima de treball perquè estiguin prou motivats per assolir el nou aprenentatge i, així, millorar l'actitud dels estudiants cap a les matemàtiques?
- i) Quines aportacions podem fer al sistema educatiu?
- j) Quines són les limitacions de l'eina didàctica en aquest estudi?

### **1.3 Fases del disseny de la recerca**

Partint dels objectius que volem assolir, les fases del disseny de la nostra recerca es poden diferenciar en tres; en primer lloc la *fase d'elaboració* d'un material didàctic; en segon lloc, la *fase empírica*; i per últim, la *fase conclusiva* on, en acabar cada curs de cada nivell experimentat, s'analitza tota la informació recollida durant el procés realitzat i per finalitzar es trenen les conclusions.

El gràfic que trobem a la pàgina següent ens il·lustra quan i on han anat apareixent cadascuna d'aquestes fases. Intentem, a partir del gràfic, descriure el disseny de la nostra recerca. La primera fase, *fase d'elaboració* de la unitat didàctica va iniciar-se a 4t d'ESO per ser implementada, *fase empírica*, com estudi pilot durant el curs 97/98. Mentrestant, al llarg d'aquest curs es va elaborar la unitat didàctica pel Batxillerat Humanístic. Una vegada acabat el procés d'aprenentatge d'aquest curs a 4t d'ESO, es va analitzar i aportar uns primers resultats, *fase conclusiva* que, inclou la revisió de la unitat didàctica i de tot el procés i el reinici de la fase d'implementació i així, fins tres vegades per treure finalment unes conclusions. Pel que fa al Batxillerat Humanístic, la fase empírica correspon a dos estudis pilot, un a primer i l'altre a segon, amb la particularitat que part de la mostra dels alumnes de l'estudi pilot de 4t d'ESO formen part de la mostra de 1r i alguns també de 2n. Com només iniciem la investigació al Batxillerat Humanístic la fase conclusiva es queda en *fase intuïtiva*.



# Capítol 2

## Fonaments i marc de la recerca

---

Abans d'exposar la primera fase de la nostra recerca, *fase d'elaboració*, és a dir, dissenyar i construir una seqüència d'aprenentatge sobre les funcions utilitzant el full de càlcul, hem d'explorar en quines situacions ens trobem abans de partir, la qual cosa ens porta a emmarcar aquesta recerca des de tres àmbits diferents: les funcions com a contingut, el marc curricular i el marc tecnològic. Al final del capítol, recollirem a mena de sumari, el marc teòric d'aquesta recerca.

### 2.1 *Les funcions com a contingut*

Les funcions han estat un punt de mira per a la millora de l'ensenyament i de l'aprenentatge de les matemàtiques, de fet és un dels nuclis temàtics importants que es presenta en el disseny curricular d'un/a alumne/a de l'ESO i del Batxillerat i han estat un tema d'estudi i investigació. Partint de les tres línies de treball plantejades en el capítol anterior, ens centrem en el "review" sobre les funcions i els gràfics realitzat per Leinhardt, Zaslavsky i Stein (1990) per explicitar el nostre marc teòric i, a més, farem referència a altres investigacions relacionades amb el nostre estudi. La presentació d'aquest treball, inclou no només els aspectes relacionats amb l'aprenentatge sinó també els de l'ensenyament (instrucció), a partir de l'anàlisi de tasques. La literatura sobre les funcions i les gràfiques pot ésser considerada des de qualsevol de les tres perspectives:

- Anàlisi de les tasques i la seva representació.
- Anàlisi de l'aprenentatge i desenvolupament del concepte de funció i gràfic.

- Anàlisi de l'ensenyament de funcions i gràfics.

### 2.1.1 Anàlisi de les tasques i la seva representació

Leinhardt, Zaslavsky i Stein (1990) consideren que la complexitat del concepte de funció i la encara insuficient determinació del domini que abasta el concepte (com també l'evolució de les concepcions dels alumnes), requereix analitzar el conjunt de tasques (tant les proposades en les recerques com aquelles que constitueixen un currículum per a l'aprenentatge) sota diferents punts de vista; en concret, consideren que cal fer-ho des de quatre, que anomenen acció, situació, variable i "*focus*". Cal destacar la precisió amb què es troben definits els termes emprats.

#### ▪ Acció

Consideren que les accions que han de realitzar els estudiants relatives a l'aprenentatge de les funcions poden tenir lloc en el marc gràfic, algebraic o de la situació i moure's d'un marc a un altre, i la majoria d'elles es poden classificar en dues grans categories: interpretació i construcció (no mútuament excloent). Analitzen els treballs de recerca relacionats amb les que, segons aquests autors, són les tasques principals: predicció, classificació, traducció i "*scaling*" (determinació d'escala i graduació d'eixos).

- **Interpretació:** És l'acció a través de la qual l'estudiant dona sentit o obté significat a partir d'un gràfic, una equació o una situació funcional; pot ésser local o global, qualitativa o quantitativa. En la interpretació d'un gràfic, el tipus d'interpretació demanada a l'estudiant depèn del que el gràfic representa; en funció d'això, el significat obtingut per la interpretació pot quedar dins de l'espai del gràfic o pot traslladar-se a un altre espai (per exemple, el de la situació o l'algebraic).
- **Construcció:** És l'acció per la qual es genera alguna cosa nova. També pot ésser local o global (per exemple, es pot demanar marcar un número de punts en uns eixos de coordenades o completar un gràfic donat un cert número dels seus punts), quantitativa o qualitativa (per exemple, es pot demanar determinar  $m$  i  $b$  de  $y = mx + b$  donats dos punts o dibuixar el gràfic que representi una situació), i pot cenyir-se a un únic espai o passar d'un espai a un altre. Tanmateix, mentre la interpretació es mou dins d'unes dades donades, la construcció requereix generar alguna cosa no donada. D'altra banda, així com la interpretació no requereix cap construcció, el recíproc no és cert, ja que la construcció sovint es recolza en algun tipus d'interpretació.

Passem ara a veure les quatre tasques principals atenent a l'acció:

- **Predicció:** És l'acció de conjecturar la localització de punts (no explícitament representats) a partir d'una part del gràfic, o bé quina seria la forma del gràfic. Algunes estan relacionades amb l'estimació i altres amb la detecció de models. Són tasques de construcció que també poden implicar interpretació. Una

característica de moltes tasques de predicció és que no tenen una única solució, encara que algunes siguin millors que d'altres.

- **Classificació:** Es refereix a l'acció que inclou algun d'aquests aspectes: a) decidir si una relació és una funció, b) identificar una funció entre diverses relacions, c) identificar un tipus de funció entre altres funcions. En general, corresponen a aproximacions formals del concepte de funció, és a dir, la classificació depèn de la definició formal de funció que hagi estat ensenyat a l'estudiant i dels esquemes conceptuals (concepte imatge) que aquest hagi desenvolupat. És per això que les tasques de classificació s'utilitzen sovint per estudiar els esquemes conceptuals dels estudiants.
- **Traducció:** Es refereix a l'acció que inclou algun d'aquests aspectes: a) reconèixer la mateixa funció en diferents formes de representació, b) donada una transformació d'una funció en una certa representació, identificar la transformació corresponent en una altra representació, c) construir una representació d'una funció a partir d'una altra. La majoria dels estudis que inclouen tasques de traducció se centren en les connexions entre les representacions gràfiques i algebraiques de les funcions.
- **"Scaling":** És l'acció d'interpretar o de construir un eix graduat. L'ús de les noves tecnologies possibilita variar l'escala amb facilitat. L'estudiant pot dibuixar a la pantalla d'una calculadora o d'un ordinador diferents gràfics depenent de l'escala utilitzada.

En resum, tenim que les tasques de predicció són essencialment accions de construcció mentre que les tasques de classificació ho són d'interpretació. I les tasques de traducció i "*scaling*" tant poden ésser accions de construcció com d'interpretació.

#### ▪ Situació

Recullen dos aspectes: l'entorn ("*setting*") on es desenvolupa la tasca i el context del problema.

- **L'entorn:** Aquest entorn pot ser en una lliçó de matemàtiques, en una classe de Ciències Socials, en una activitat al laboratori, etc. La majoria dels estudis dedicats a les funcions i als gràfics analitzen el tema des de l'òptica de les Matemàtiques, mentre aquest es treballa a l'escola en diferents entorns.
- **Context:** Els estudis que inclouen tasques contextualitzades sovint consideren que els estudiants es mouen millor en situacions familiars (situacions de què tenen experiència o bé en les que són capaços de relacionar de manera significativa) que en situacions abstractes. Però, els contextos familiars poden influir positivament i negativament, no sempre suposen un suport al procés d'aprenentatge (per exemple, a un gràfic on la funció és la distància d'un cotxe que segueix una trajectòria es pot interpretar la corba del gràfic com la trajectòria que segueix).



### ▪ Variables

La variable és un dels conceptes bàsics relacionats amb el de funció. Hi ha diversos significats i aspectes d'aquest terme. Primer, emfatitza la variable com a eina per generalitzar o per descriure models; aquest significat és considerat una interpretació estàtica del concepte de variable i s'utilitza sovint en l'estudi de l'aprenentatge del llenguatge algebraic. I segon, emfatitza la variabilitat i canvi simultani d'una variable en comparació amb una altra (i s'associa més amb el gràfic), pretenent donar una visió més dinàmica

### ▪ "Focus"

Es refereix a la localització de l'atenció en una determinada tasca. El "*focus*" s'ocupa de qüestions d'atenció i visualització. Donada la varietat d'aspectes en què podem centrar l'atenció, és un aspecte important. Les quatre tasques estudiades anteriorment poden ser associades amb diferents localitzacions del focus: la predicció requereix el focus sobre la part visible o donada de la funció o gràfic respecte del qual es demana el que no hi és, la classificació requereix el focus sobre l'equació o gràfic com un tot respecte d'un criteri conegut (definició), la traducció localitza el focus des d'una característica particular d'una funció en una representació a la mateixa característica en una altra representació, i "*scaling*", que està connectada directament amb els eixos, requereix que el focus sigui captat enterament pel sistema de coordenades.

Una vegada definits els termes emprats en el conjunt de tasques i la seva representació, passem a incloure algunes de les investigacions que hem considerat de gran interès en aquest estudi.

A la dificultat de definir el concepte de definició hi hem d'afegir la complexitat del seu simbolisme i representació. Deulofeu (1993a), a la seva tesi doctoral, recull una rellevant afirmació al respecte d'aquesta complexitat que podem trobar al primer dels estudis sobre funcions de Dreyfus- Eisenberg (1982). Aquesta afirmació assenyala que les dificultats en l'aprenentatge del concepte de funció vénen donades fonamentalment per les tres raons següents:

1. Una funció no és un concepte clarament individual sinó que, íntimament lligat a aquest, trobem un ampli conjunt de subconceptes o conceptes funcionals molts dels quals són necessaris per a la seva determinació com, per exemple, variable, domini, imatge, antiimatge.
2. El concepte de funció posa en relació diferents camps de les matemàtiques (per exemple, geometria i àlgebra) aparentment separats. Aquestes relacions formen part del procés d'abstracció que cal realitzar en l'aproximació al concepte de funció.
3. Una funció pot representar-se en un nombre ampli de llenguatges diferents (descripció verbal, taula, gràfic, fórmula, diagrama de fletxes).

Aquesta última dificultat evidencia que el llenguatge juga un paper molt important en l'aprenentatge de les funcions. Podem considerar que l'adquisició d'un concepte depèn en gran part de la capacitat per reconèixer i interpretar una representació del mateix. En el cas concret del concepte de funció, un dels primers en destacar aquest aspecte fonamental va ser Janvier (1978), en la seva Tesi Doctoral sobre interpretació de gràfics cartesianes que representen situacions concretes. Per abordar el problema de la representació ens hem basat en el treball realitzat al respecte per Deulofeu (1993a) a la seva Tesi, on recull els resultats de Janvier (1978) i també els d'altres estudis posteriors on Janvier continua tractant aquest problema de la representació.

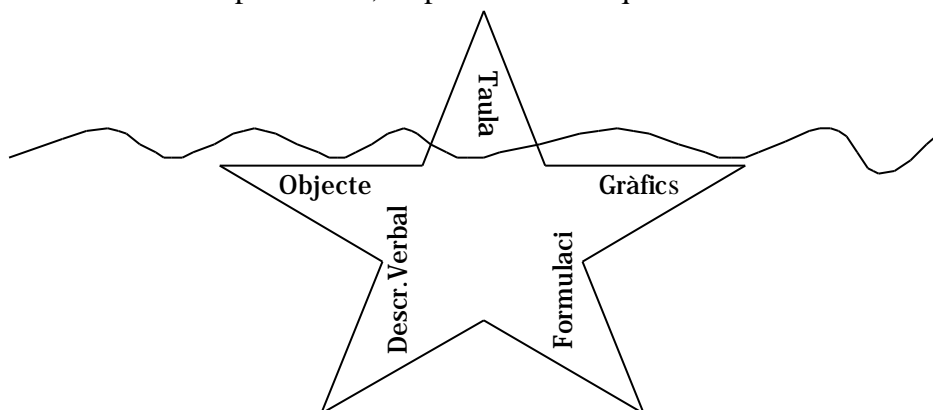
El terme "representació" presenta moltes dificultats de definició, que depenen en gran part del nivell de generalització que es vulgui donar al significat d'aquesta paraula. Si ens centrem en el camp de les funcions, podem trobar tres accepcions diferents de la paraula "representació". Deulofeu (1993a) al primer capítol de la seva tesi doctoral explica que una primera accepció, la més restrictiva i comuna en els textos sobre l'ensenyament de funcions, és la que redueix el seu ús a l'expressió gràfica de la funció i que segurament és deguda al caràcter pictòric d'aquest llenguatge; així, s'utilitza la frase "representar una funció" entenent que es tracta de construir el seu gràfic i quan es tracta d'altres formes d'expressar una funció s'utilitzen termes més genèrics com trobar o determinar. Però si es considera que la paraula representar no ha de tenir necessàriament connotacions pictòriques i que el gràfic cartesià és una més de les diverses formes d'expressar una funció, aleshores el terme representar serà igualment aplicable a qualsevol altra forma d'expressar una funció, amb la qual cosa obtenim una segona accepció d'aquesta paraula; representar una funció vol dir expressar-la en un llenguatge determinat (escrit o oral). Anant més enllà, si considerem el terme representació des d'un punt de vista cognitiu, trobem una tercera accepció, ja que aleshores el seu significat no es redueix a les formes escrites o orals d'expressió d'un concepte sinó que inclou les imatges mentals d'aquest concepte, imatges que en bona part depenen dels llenguatges de representació escrits.

Janvier (1987) explica que una representació es pot considerar una combinació de tres components: símbols (escrits), objectes reals i imatges mentals. Afegeix que les característiques del llenguatge verbal són igualment essencials perquè constitueixen els lligams entre aquests components i que, en alguns casos, pot trobar representacions que no continguin l'element "objecte real". Paral·lelament considera que la comprensió d'un concepte és un procés acumulatiu molt complex, basat principalment en la capacitat de treballar amb un conjunt de representacions cada vegada més riques i relacionat amb la construcció d'un sistema ramificat de conceptes.

En el mateix article, Janvier tracta d'exemplificar la complexitat dels termes representació i comprensió a partir de l'anàlisi del concepte de funció. Seguint Freudenthal (1983) considera que el concepte de funció és extensiu a un conjunt tan divers de nocions, com són les de variable, transformació, successió, permutació o isomorfisme que malgrat sigui possible definir-les dins d'una mateixa estructura conceptual (la funció), aquestes nocions romandran substancialment diferents en el sentit que ho són les formes de raonament corresponents a cadascuna d'elles. Freudenthal s'hi refereix en termes de fenomenologia, i Janvier utilitza l'expressió domini semàntic. Així,

una funció es pot considerar dins del domini semàntic de la variable. Llavors les imatges mentals i descripcions verbals estan bàsicament connectades amb la primitiva noció de variació i posen l'èmfasi en la capacitat de caracteritzar aquesta variació, mentre el paper del domini és oblidat i considerat implícitament com ordenat i, sovint, dens. En aquest cas els gràfics cartesianes són la forma de representació més natural i la història sembla mostrar que l'ús de la corba és un requisit per a la construcció d'aquest domini semàntic. D'altra banda, si considerem la funció com a transformació, les imatges mentals de la representació d'aquest domini semàntic han d'incloure necessàriament el conjunt de sortida i d'arribada (domini i recorregut) al mateix temps. La idea d'invariant també sembla estar lligada a aquest domini semàntic.

Tenint en compte les consideracions anteriors, Janvier revisa els termes representació i traducció, i introdueix el terme *esquematització*, per anomenar el que fins ara en deia representació. Considera ara el significat més general de representació: tot el concepte global, que es pot expressar en diferents llenguatges. La representació és com un iceberg de forma estrellada del qual només en podem veure una part. Una traducció consisteix en anar d'una part a altra, en passar d'una esquematització a una altra.



Finalment, assenyala que aquesta nova visió permet insistir en el caràcter inseparable del conjunt d'esquematitzacions d'una mateixa representació. Així, dona un model per tractar diferents errors detectats en el treball dins d'un mateix domini semàntic, errors (que anomena contaminacions) consistents principalment en la transferència de les característiques d'una esquematització a una altra.

De l'estudi de Giménez (1994) en el treball sobre el paper dels intervals quan les funcions són introduïdes recollim que: a) les funcions són considerades com gràfics i, més tard com una relació, però els estudiants necessiten la fórmula per concretar un punt, per explicitar-lo, b) hi ha una visió bàsicament geomètrica de dependència i no precisa el lligant amb una comprensió operativa, "Context proper" l'activitat de futbol actua com distraient en les interpretacions, c) la comprensió operativa discreta actua com un obstacle per a una interpretació global dels gràfics si no està relacionat a una interpretació visual, d) una gran quantitat de visió discreta apareix en tasques anàlogues de funcions, els intervals són utilitzats per interpretacions funcionals senzilles d'increments, però això no sembla necessari quan parlem de la variabilitat, fins i tot comparant tasques, e) interpretant i usant situacions reals figurativament, es pot donar

una intuïció adequada per millorar la comprensió de dependència si introduïm la comparació de tasques.

A partir de la present anàlisi de tasques, donem pas als aspectes relacionats amb l'aprenentatge.

### **2.1.2 Anàlisi de l'aprenentatge i desenvolupament del concepte de funció i gràfic.**

Segons Leinhardt, Zaslavsky i Stein (1990) hi ha dos aspectes principals a tenir en compte en l'aprenentatge d'un estudiant. Aquests són les intuïcions i les preconcepcions o concepcions errònies ("*misconceptions*") i dificultats.

#### **▪ Intuïcions**

Són les característiques del coneixement de l'estudiant que deriven de l'experiència diària, encara que en estudiants avançats poden barrejar-se amb comprensions més complexes del coneixement formal. Les intuïcions són en si mateixes evidents i són l'expressió d'un sistema de creences bastant cohesionat. Però, aquesta definició d'intuïció no és única, el nom d'intuïció és donat a diferents significats pels diferents autors, no hi ha un isomorfisme sobre la definició d'intuïció a la literatura. La majoria de treballs relatius a les intuïcions dels estudiants en l'aprenentatge de funcions i gràfics es focalitzen més sobre les funcions que no pas sobre els gràfics. Hi ha dos formes principals de definir les funcions; una d'elles, com covariació entre dues variables, que correspon a una definició considerada clàssica; i l'altra, com a correspondència entre dos conjunts, considerada una definició moderna.

#### **▪ Preconcepcions**

Les preconcepcions o concepcions errònies són característiques incorrectes del coneixement de l'estudiant, que són repetitives i explícites. A les ciències s'originen sovint per interpretacions i observacions de successos de la vida real, però en el cas de les funcions i els gràfics estan lligades molt sovint a les primeres formes d'ensenyament. Els autors discuteixen les preconcepcions sota els següents títols: Què és i què no és una funció, correspondència, linealitat, gràfics continus enfront discrets, representacions de funcions, lectura i interpretació, concepte de variable i notació.

- **Què és i què no és una funció:** Diferents estudis suggereixen que els estudiants tenen sovint idees incorrectes sobre quins gràfics corresponen a gràfics de funcions o no. Això, es reflexa majoritàriament a les tasques de classificació amb la definició moderna de funció, i mostra la visió tan restringida que tenen els estudiants sobre les formes que poden tenir els gràfics de funcions. També és cert que la definició moderna de funció inclou com a funcions moltes correspondències que no eren reconegudes com a tal amb la definició antiga, i per tant el fet que els estudiants siguin propensos a excloure tal funcions potser fa pensar més en un concepte erroni (*misconceptions*) que no pas en una preconcepció. Però en altres casos, els estudiants manifesten idees incorrectes

que no són necessàriament relatives a la definició antiga, per exemple rebutgen les funcions constants i també les correspondències varis a un com a legítimes.

- **Correspondència:** Essencialment, els estudiants tenen dos tipus de dificultats per reconèixer quines correspondències són funcions i quines no; creuen que les funcions deuen expressar correspondències un a un, confonen les correspondències varis a un amb les correspondències un a varis.
- **Linealitat:** Diversos estudis han observat les tendències a la linealitat que tenen els estudiants en diferents tipus de tasques; tenen tendència a definir una funció com una relació en la qual el seu gràfic és un dibuix lineal. Quan se'ls demana generar exemples de gràfics de funcions que passen per dos punts donats, els estudiants produeixen majoritàriament gràfics lineals; a les tasques de traducció de gràfic a equació molts estudiants fan servir només dos punts del gràfic per trobar l'equació, encara que es tracti d'una paràbola; a les tasques d'interpolació de dades experimentals, els estudiants tendeixen a unir els punts per una línia recta. Aquesta tendència a la linealitat s'ha intentat justificar de varies formes, per exemple com a conseqüència de la popular activitat en preescolar d'unir punts, o simplement perquè les funcions lineals són normalment la primera família de funcions que s'explica als estudiants.
- **Gràfics continus enfront discrets:** La literatura conté nombrosos exemples d'errors d'estudiants representant o interpretant dades contínues de manera discreta, i representant o interpretant dades discretes de manera contínua. De vegades, sobretot a les primeres classes sobre funcions que rep un estudiant, a aquest se li mostren exemples que posteriorment el poden portar a confusió: gràfics on els punts estan units quan és inadequat fer-ho, o bé gràfics continus amb uns quants punts molt marcats sobre els quals es para l'atenció especialment. Per tant, a la dificultat intrínseca que comporta decidir si un gràfic ha de ser representat de manera contínua o discreta, de vegades s'afegeixen exemples inadequats que porten a confusió.
- **Representació de funcions:** Hi ha diversos models de representar una relació funcional: taules, equacions, gràfics i descripcions verbals. Janvier (1987) ha treballat els processos psicològics que envolten el pas d'una forma de representació a una altra i els ha denominat processos de traducció; per a ell, aquests processos de traducció tenen direccionalitat, no intervien els mateixos processos psicològics en una traducció de gràfic a equació que en una traducció d'equació a gràfic. També Schoenfeld i altres, citats en el "review", han treballat, en el context de les funcions lineals, la relació entre els gràfics i les equacions  $y = mx + b$  depenent dels paràmetres; el seu estudi va revelar varies preconcepcions, com per exemple que el coneixement que tenien els estudiants sobre el pendent era molt fràgil.
- **Lectura i interpretació:** Consideren les dificultats relatives a la lectura i interpretació de gràfics que representen situacions reals. Els estudiants solen restringir la seva atenció a un sol punt o grups de punts del gràfic en contraposició a les característiques més globals del gràfic, com la forma general,

els intervals de creixement o decreixement,.... La literatura conté exemples de multitud de dificultats que tenen els alumnes per atendre a les característiques generals del gràfic i no a les seves parts. Podem agrupar aquestes dificultats sota tres característiques: la confusió interval/punt (posen l'atenció en un sol punt quan el més apropiat és fer-ho en un interval), la confusió pendent/alçada (es fonamenta en tasques d'interpretació i construcció) i per últim, les interpretacions icòniques (interpreten un gràfic d'una situació com un dibuix literal de la situació).

- **Concepte de variable:** Es pot dir que la comprensió del concepte de variable és un prerrequisit per a la comprensió del concepte de funció, particularment quan les funcions són definides com relacions entre una variable independent i una dependent. D'altra banda, la comprensió del concepte de variable pot dependre també del coneixement sobre les funcions, les lletres a les equacions poden suposar "*objectes únics*" i quan es canvia de lletra es canvia d'objecte. Només treballant amb variables en una relació funcional dels estudiants poden adonar-se del conjunt de nombres ocultats sota elles. De vegades, els estudiants poden manipular lletres a les equacions sense haver comprès el concepte de variable.
- **Notació:** Tracten les dificultats que tenen els estudiants amb els únics sistemes de notació simbòlica utilitzats per representar funcions, el gràfic i l'algebraic. Citarem algunes de les dificultats recollides. Els alumnes tenen problemes per establir els eixos de coordenades, de vegades consideren correcte construir ambdues parts dels eixos positius o negatius, o utilitzar diferents escales a la part positiva i negativa d'un mateix eix. Els alumnes també tenen problemes per distingir quines parts del gràfic són intrínseques d'ell i quines depenen del sistema de coordenades, com per exemple la inclinació i la forma d'un gràfic, i haurien de conèixer l'efecte que produeix un canvi d'escala sobre l'aspecte del gràfic.

Per al nostre estudi, en què volem analitzar el procés d'aprenentatge sota un model constructiu basat en la manipulació i la visualització, el raonament visual és un dels aspectes significatius del treball.

El raonament visual juga segons Dreyfus (1991) un paper molt més important en el treball de les matemàtiques d'avui del que generalment és conegut. En increment, els arguments de forma visual també arriben a ser acceptats com a demostracions. Els estudis cognitius, malgrat els perills associats amb la visualització, apunten l'enorme potencial visual per a l'aprenentatge significatiu. Entorns d'aprenentatge computaritzats obren camí a usar aquest potencial. Argumenta que la categoria (estatus) de la visualització en educació matemàtica podria ser catalogada des d'un aprenentatge útil unit a una eina completament reorganitzada per raonar i demostrar matemàticament.

La visualització és generalment considerada útil donant suport a la intuïció i formació de conceptes en un aprenentatge matemàtic. Bishop (1989) emfatitza les representacions visuals en tots els aspectes de la classe de matemàtiques. Dreyfus (1991) presenta dues qualificacions al respecte; una relativa a les dificultats amb la visualització, i l'altra a les categories (estatus) d'acord a la visualització en l'educació matemàtica, el seu valor epistemològic. Entorn de les dificultats amb la visualització cita el que anomena Fischbein (1987) "estructura conceptual intermèdia": diagrames i figures contenen

informació matemàtica rellevant d'una forma que és determinada per certs papers i convencions, els quals són freqüentment específics per a un particular tipus de diagrama. Aquests no són accessibles als estudiants que no han tingut l'oportunitat de familiaritzar-se amb aquests papers i convencions. Per a la segona qualificació cita: malgrat la predilecció de càlculs del professor pels diagrames, el nostre raonament indica que els estudiants rebutgen l'ús de la geometria i les estratègies espacials per resoldre càlculs dels problemes. Un aspecte significatiu de l'evidència sobre l'estatus de l'argumentació visual és constituït per les diverses classificacions de demostració que tenen establertes els educadors matemàtics.

### 2.1.3 Anàlisi de l'ensenyament de funcions i gràfics.

La conceptualització de l'ensenyament de Leinhardt, Zaslavsky, & Stein (1990) no només inclou aspectes de les tasques sobre funcions i gràfics i l'aprenentatge dels estudiants sinó que inclou alguns addicionals. Manifesten que la majoria dels articles trobats tenen una secció obligatòria, normalment al final, anomenada "*implicacions per a l'ensenyament*" però, pocs d'ells presenten una recerca directa sobre l'estudi d'aquests tèmics de l'ensenyament de funcions i gràfics. Donen a conèixer que l'ensenyament va més enllà de la facilitació de l'aprenentatge a l'estudiant, inclou una selecció i transformació del propi coneixement del professor sobre els gràfics, la construcció de gràfics, les funcions, i altres idees matemàtiques que suporten el sistema de coneixement del tema. El contingut del coneixement del professor sobre el tema li dóna la confiança i capacitat per fer interconnexions, construir analogies, crear exemples, fer reflexions intel·lectuals, i apuntar cap a futures utilitzacions o relacions. Les limitacions en el contingut del coneixement del tema poden reduir la flexibilitat i creativitat del professor, i crear un tipus d'autoritarisme envers del tema i l'estudiant que limitarà molt l'exploració d'idees. Els professors han d'ésser conscients d'aspectes com els conflictes existents amb els valors absoluts i els signes (que són visibles en els gràfics), o que construir un gràfic lineal és més fàcil punt a punt que a partir d'un punt i el pendent, per posar alguns exemples. A continuació, passem a tractar els quatre punts que consideren en l'anàlisi de l'ensenyament de funcions i gràfics: el punt de partida, la seqüenciació, les explicacions i els exemples.

#### ▪ El punt de partida.

Fins a cert punt, tots els punts de partida per començar el tema de funcions i gràfics tenen les seves limitacions. Es considera que un estudiant està preparat per començar el tema si ha tingut alguna educació matemàtica i experiència amb ambdues respectivament, pictòrica i algebraica, de quantitats. El punt de partida per començar no és obvi, es poden considerar tres tendències: descobrir la regla, generar les dades i traçar, i interpretar gràfics qualitius de situacions. Passem a descriure amb més detall cadascuna d'elles.

- **Descobrir la regla:** Por ser interessant començar des d'aquesta perspectiva en què no es dóna cap instrucció sobre les convencions a seguir. Des del punt de vista del professor, és bastant fàcil construir exemples a través de jocs o

endevinalles. El professor simplement ha de construir una regla i no compartir-la amb el públic, llavors juga amb els alumnes donant-los valors i fent-los trobar el segon valor o el valor de sortida; ambdós valors són guardats de forma sistemàtica, normalment en una taula. Sota aquesta tendència, el concepte de funció és desenvolupat independentment del concepte de gràfic (serà relacionat més tard).

- **Generar dades i traçar:** Les instruccions que es basen en la generació de dades des de la realitat (pes i alçada,...) tendeixen a combinar alguns aspectes de la tendència anterior amb aspectes de l'aprenentatge de convencions gràfiques. L'activitat consisteix en recollir dades en un context real, organitzar-les d'alguna manera i construir un gràfic. La tasca del professor per escollir un problema adequat suposa una càrrega major que en el cas de descobrir la regla, ja que en aquest cas intervenen també les escales, les unitats, la selecció d'eixos, i la interpretació de línies en termes funcionals. Un avantatge d'aquest punt de partida és que lliga molt bé amb altres àrees del currículum, ciències socials i experimentals especialment, que contenen treballs gràfics però no treballen amb funcions.
- **Interpretar gràfics qualitius de situacions:** Aquesta és la tendència més inusual de totes tres encara que en els darrers anys han aparegut algunes propostes concretes. Les indicacions que el professor ha de donar als estudiants per interpretar gràfics qualitius estan molt restringides per les convencions notacionals, encara que no apareguin nombres o escales. Per exemple, l'observació d'un gràfic qualitatiu de temps i creixement requereix algun coneixement sobre les convencions de direccionalitat en sistema cartesià. L'ús de gràfics qualitius sembla una opció fascinant que encara no ha estat explorada.

#### ▪ La seqüenciació

La seqüenciació en la instrucció sobre gràfics i funcions està clarament connectada amb l'opció escollida per introduir-los. En general, coincideixen que cal partir del menys formal, menys abstracte, més global i intuïtiu, cap a un sistema notacionalment més rigorós. A continuació, mostrem alguns dels exemples de seqüenciacions comentats en el "review". Davis (1982), citat pels autors, emfatitza el pas de les correspondències un a un de regles simples a les correspondències on s'incrementa la complexitat de les regles, incloent aquelles on la regla es pot donar de diferents formes. Bergeron i Herscovics (1982), citats en el "review" parteixen de punts de vista intuïtius, avançant cap a experiències quantificades, i finalment aborden les formes abstractes i formals; ells tendeixen a emfatitzar el pas de les representacions gràfiques a les representacions algebraiques. Recullen els treballs de Janvier (1982) i Swan (1982) on han elaborat un complet conjunt d'experiències que es mouen des de les tasques de reconeixement i interpretació qualitativa fins a les tasques de construcció quantitativa; la seqüenciació que proposen va des de la tabulació de dades, passant per la representació ("*plotting*") i lectura de valors, fins al traçat de les formes dels gràfics observant quines funcions són de la mateixa família; en aquest cas l'èmfasi es posa en la transformació de dades reals específiques a partir del reconeixement d'una funció en un dibuix. Aquest enfocament té



varis avantatges: el primer és que l'experiència gràfica es converteix en una tasca per representar dades reals i per tant és una tasca real, el segon consisteix que mentre es capta l'interès de l'estudiant i es fan exemples concrets, es té també un pla sistemàtic dirigit a incrementar cíclicament la complexitat. Krabbendam (1982) i Davis (1982), també citats, suggereixen que els estudiants haurien de tenir contacte amb problemes qualitativament difícils abans d'enfrontar-se amb els abstractament o quantitativament difícils.

### ▪ Les explicacions

En general, les explicacions són una part de la lliçó, i inclouen aspectes com els exemples i els diferents tipus de representacions. En un sentit específic, les explicacions poden ser considerades com allò que vol millorar el significat en matemàtiques; aclareixen construccions matemàtiques i subratllen interrelacions lògiques. En un sentit més ampli, es poden considerar quines són les característiques que han de tenir les bones explicacions, i es pot distingir entre explicacions que es basen purament en la disciplina, explicacions personals i interiors, i explicacions dirigides a instruir. Manifesten que els professors experts tendeixen a incloure elements específics en les seves explicacions, inclouen representacions seleccionades i explicacions verbals ben desenvolupades, els problemes i els principis utilitzats en la seva resolució estan clarament marcats, els errors són investigats deliberadament, i sovint es presenten algunes demostracions. En general, els investigadors estan d'acord que les explicacions sobre gràfics i funcions s'han de basar en el coneixement dels estudiants, i posar l'èmfasi en les confusions en el llenguatge i en el significat de les escales i les variables; per exemple, paraules com *línia* i *punt* tenen particulars significats en el llenguatge natural i en el matemàtic.

### ▪ Els exemples

La selecció d'exemples és l'art de l'ensenyament de les matemàtiques. Ajudar als professors a identificar i construir exemples per les seves explicacions és una clara àrea d'investigació que es manté oberta. Zaslavsky (1989), citat en el "*review*", posa en evidència el poder que tenen els exemples presentats en els textos i que són transmesos als estudiants; en el seu estudi mostra que tant les concepcions correctes com les errònies presentades en un exemple són recordades pels alumnes, i per altra part constata el fet que tots els estudiants recorden els exemples.

Per a la nostra investigació, on volem emfasitzar la generalització i l'abstracció, les reflexions fetes per Presmeg (1999) sobre algunes de les possibilitats i paranys del pensament basat en imatges en matemàtiques poden ser de gran ajuda al professor/a. Destaca que:

*Com a possibilitats del pensament en imatges;*

- Les imatges vives o intenses, de qualsevol tipus, tenen avantatges mnemotècniques.
- La imatgeria concreta és efectiva en alternança amb models visuals com l'anàlisi lògica, o un ús no visual fàcil de les fórmules.
- La imatgeria dinàmica és potencialment efectiva.

- La imatgeria al servei d'una funció abstracta és potencialment efectiva.

*Com a paranys en potència;*

- La concretesa d'una única imatge o diagrama pot anar associada en el pensament a detalls irrellevants
- La imatge d'una figura estàndard pot induir a la inflexibilitat del pensament que no permet de reconèixer un concepte en un diagrama no estàndard.
- Una imatge incontrolable pot ser persistent, evitant que el pensament s'obri a camins més profitosos.
- Les imatges no associades amb un procés rigorós de pensament analític poden ser de poca utilitat, especialment si són imatges vagues.

Presmeg (1999) ens suggereix de quina manera podem ajudar els alumnes a aprofitar les possibilitats i evitar-ne els paranys. Dels aspectes que poden facilitar el pensament visual a l'aula farem referència només als que són d'interès per als meus estudis:

- L'ambient de grup és controlat, però relaxat i sense pressa.
- El professor demana als alumnes que construeixin imatges o que pensin en dibuixos.
- Es fan servir materials manipulatius i models concrets.
- Fem servir els colors.
- El mètode del professor no ha de ser rígid; el professor reclama la intuïció dels alumnes, fa servir mètodes per a la recerca de pautes i models.
- Endarrerix la utilització del simbolisme.
- Crea conflicte cognitiu deliberadament
- Mostra i accepta mètodes alternatius.

Segons un dels seus resultats (Presmeg, 1999), va ser més efectiu el grup de professors que varen utilitzar alguns dels aspectes que cita, però que varen emfatitzar la generalització i l'abstracció. Així que, aprofitant les seves reflexions, és important que com a docents fomentem la utilització de mètodes visuals, però cal que siguem conscients dels paranys de la generalització en l'ús de la imatgeria, i ajudem els estudiants a evitar els paranys.

S'entén per imatgeria el conjunt d'imatges mentals, no només de diverses modalitats com visuals, auditives, tàctils i cinètiques, sinó també de varis tipus dintre de cada modalitat.

## **2.2 Marc curricular**

Recordem que aquesta investigació queda emmarcada dintre de tres àmbits diferents. Acabem d'exposar el marc teòric de les funcions com a contingut, i ara passem a concretar el marc curricular. Per això, el desenvoluparem des de tres punts de vista. Considerem, primer, a qui va dirigit (l'adolescent); segon, amb quin model metodològic

treballem (una concepció constructivista de l'aprenentatge); i tercer, les directrius sobre què ensenyar i amb quins objectius (primer nivell de concreció).

### **2.2.1 Una etapa de l'adolescent**

Som conscients de la complexitat del món de l'adolescent, però pensem que dintre d'aquesta recerca de didàctica d'implicació molt directa amb l'alumnat de secundària, no podem deixar de fer-ne referència, encara que només sigui de passada.

Hem de tenir molt present, per realitzar la tasca docent, que es treballa amb adolescents, els quals estan passant per una edat molt difícil on les seves vides es troben plenes de canvis. Aquests canvis no només són físics i fisiològics, pels quals tots han de passar, sinó que a més s'evidencia en les diferents formes d'ésser i en els canvis psicològics. Se'ls obre un món per explorar.

A continuació, donarem unes pinzellades per veure de quina manera estan implicats adolescents i docent.

Respecte a les diferents formes d'ésser dels adolescents, segons els estudis presentats en el llibre de Corbella i Valls (1989) si es segueix un procés de maduració normal, es manté l'estabilitat emocional i la consistència dels seus criteris, i estableix relacions afectives adients. En canvi, si durant aquest procés els costa madurar, tenen un major nivell d'ansietat o depressió, o la necessitat d'enfrontar-se als adults a través d'uns comportaments socials inacceptables. Aquests processos de maduració s'evidencien en el grau d'acceptació de les normes de convivència i en les pautes adoptades de comportament dintre de l'aula i a la resta del centre docent.

Els canvis psicològics, com recullen Corbella i Valls (1989), són paral·lels als canvis qualitius dels estudis, malgrat que no sempre es realitzen de forma simultània. Aquests canvis incideixen en l'aprenentatge escolar; per exemple, resulta més difícil la motivació, ja no és suficient presentar alguna cosa atractiva perquè l'adolescent s'il·lusioni, perquè comença a saber per sí mateix el que li agrada i el que li desagrada o el deixa indiferent. Al professor/a, li resulta difícil preparar les seves classes de forma que siguin atractives per a uns alumnes que no senten interès per l'assignatura que imparteix. En aquesta etapa no és suficient amb dominar la matèria sinó que s'ha de saber contagiar interès i entusiasme, s'ha d'explicar de forma atractiva i apassionada.

Tot això s'ha de conjugar amb els factors que formen part de la seva educació, com pot ésser en la relació menys personalitzada i protectora. S'espera que l'alumne actuï més com a adult que com tal, ha de començar a responsabilitzar-se de l'adquisició dels coneixements i un mínim d'atenció a classe; ara ha de responsabilitzar-se de realitzar treballs fora del horari escolar. Pares i professors, conjuntament, han de preocupar-se que aprengui a responsabilitzar-se del seu rendiment.

A més, hem de comptar que el món de l'adolescent s'amplia considerablement, la qual cosa facilita la dispersió o falta de concentració, bastant característica de l'etapa secundària obligatòria. Els amics adquireixen gran rellevància i les afeccions es viuen de

forma apassionada, ambdues tenen gran influència a l'hora de dispersar l'atenció de l'alumne i dificulten que se centri en el que està realitzant.

Tenint en consideració el món complex amb el qual treballem, hem d'escollir, a nivell curricular, uns continguts que s'adeqüin a les seves capacitats i habilitats. L'entrada a l'adolescència suposa el desenvolupament de les facultats i capacitats intel·lectuals que permeten realitzar l'abstracció. La capacitat de distingir el bàsic de l'accessori, o sigui, aprendre a estudiar permetent a l'adolescent realitzar grans avanços intel·lectuals i d'aprenentatge. Hem d'aplicar una metodologia de treball que pugui conjugar les nostres pretensions.

### 2.2.2 Una concepció constructivista de l'aprenentatge

El marc teòric parteix d'una **concepció constructivista** de l'aprenentatge, amb el suport del Departament d'Ensenyament, com es mostra en el currículum de l'Educació Secundària Obligatòria en l'àrea de matemàtiques. Així, podem utilitzar com a definició d'aquesta concepció l'escrit del Departament d'Ensenyament (1993, p. 10-11):

*El marc curricular per a l'ensenyament obligatori recolza en una concepció constructivista de l'aprenentatge escolar i de l'actuació educativa del professorat. Aquesta concepció recull part de les aportacions més actuals de la psicologia i de l'epistemologia en el terreny de la construcció del coneixement, i les projecta sobre l'educació escolar.*

*Es subratlla la importància dels conceptes i de les relacions entre conceptes en la construcció del coneixement, i del paper decisiu que juga el llenguatge per codificar, donar forma i adquirir significats.*

*Des d'aquesta perspectiva, el coneixement i la producció de coneixements és interpretat com una xarxa de conceptes i proposicions que s'elaboren i es modifiquen constantment. La ruptura i substitució d'uns conceptes i representacions per uns altres, el que s'anomena "conflicte cognoscitiu", és a la base del desenvolupament tant del coneixement científic col·lectiu com del coneixement racional individual.*

*A gran trets, una concepció constructivista de l'aprenentatge considera que tot coneixement és construït per la persona quan interacciona amb el medi i tracta de comprendre'l. Des d'aquest punt de vista, l'aprenentatge no es produeix per la interiorització de significats externs que ja ens vénen donats, sinó per la construcció de representacions o models mentals propis: el significat és construït per la persona quan actua sobre l'objecte.*

*Aquesta construcció de significats implica un canvi, un passar d'un estat inicial a un estat cognoscitiu diferent. Els nous coneixements assolits configuren una nova xarxa de relacions conceptuals i proposicionals, i col·loquen la persona en una nova situació des de la qual continua el seu desenvolupament. La concepció constructivista mostra, doncs, la mútua determinació entre els processos de desenvolupament i aprenentatge: ni el nivell de desenvolupament cognoscitiu és independent dels aprenentatges assolits, ni és*

*possible integrar un nou contingut si les condicions prèvies a l'activitat d'aprenentatge no són les adients.*

*¿Quin hauria de ser el vincle entre les teories constructivistes de l'aprenentatge i la pràctica educativa?*

*En primer lloc cal tenir present que el constructivisme no pretén ser una teoria més, sinó una visió de conjunt capaç d'aglutinar diverses teories que comparteixen postulats comuns, fonamentalment el que subratlla la importància de l'activitat constructiva de l'alumnat en la realització d'aprenentatges escolars. Aquest esquema integrador és a la base del model curricular elaborat pel Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya que, a més de proporcionar al professorat un conjunt de referències psicoeducatives, vol ser un instrument per a la reflexió i l'acció educativa.*

*El model de pràctica educativa basat en el constructivisme inclou la diversitat d'estratègies i mètodes d'ensenyament-aprenentatge i demana un punt de consens: acceptar que l'objecte fonamental de l'aprenentatge escolar és la construcció del coneixement en l'alumnat. Això comporta:*

- a) Que l'alumnat és el responsable últim del seu procés d'aprenentatge.*
- b) Que l'activitat mental constructiva de cada noi i de cada noia s'aplica sobre camps d'experiència -sobre continguts- ja elaborats a nivell social. Es tracta, doncs, d'una reconstrucció del coneixement.*

*Que la tasca del professorat ha d'orientar-se a estimular l'activitat constructiva de l'alumnat, tot facilitant-li els recursos perquè pugui establir lligams entre les seves estructures conceptuals i el saber col·lectiu culturalment organitzat.*

Com afirma Vergnaud (1990), la majoria dels psicòlegs interessats per la Didàctica de la Matemàtica són, en algun sentit, constructivistes, pensant que les competències i concepcions són construïdes pels propis estudiants. Segons Kilpatrick (1987), el punt de vista constructivista implica dos principis:

1. El coneixement és construït activament pel subjecte que coneix, no és rebut passivament de l'entorn.
2. Arribar a conèixer és un procés adaptatiu que organitza el propi món experimental; no es descobreix un món independent, preexistent, estrany a la ment del subjecte.

La solució epistemològica, afirma Vergnaud (1990), és un principi bastant senzill: la construcció del coneixement consisteix en la creació progressiva de representacions mentals, implícites o explícites, que són homomòrfiques a la realitat en alguns aspectes però no ho són en altres.

L'alumne/a ha passat d'ésser subjecte passiu a ser actor en el procés de l'ensenyament i la missió del professorat no és ja simplement ensenyar, sinó ensenyar a aprendre. I d'aquesta manera, convertir la classe en quelcom veritablement actiu per part dels alumnes, que aconsegueixi apassionar-los.

No pensem que aquesta direcció de la pedagogia activa és quelcom absolutament nou: ja Sócrates, mitjançant el diàleg, feia que els seus alumnes descobrissin la veritat per si mateixos.

Es veu la necessitat d'una didàctica, no només activa, sinó heurística, en el sentit de procurar que l'alumne/a elabori per si mateix els conceptes i coneixements que hagi d'adquirir, mitjançant situacions (creades abans pel professor/a). El/la professor/a exerceix un paper molt important en el procés de construcció de l'alumne/a de l'ús estratègic de procediments de resolució de problemes. Aquest, mitjançant el disseny de diferents ajudes pedagògiques, orienta i facilita l'activitat constructora de l'alumne (Coll, 1991). En la seqüència d'ensenyament-aprenentatge aquesta ajuda es materialitza en la realització de tres funcions principalment, segons Pifarre (1995): El professor és un facilitador de l'aprenentatge dels alumnes, és un model de pensament i és un facilitador d'espais de discussió i de reflexió sobre el procés de resolució de problemes.

No només l'esperit d'investigació i de conquerir pot ser capaç d'assegurar la fermesa de l'adquirit. I com afegeix Adam (1965), no es persegueix una didàctica molt fàcil sinó al contrari, una seguretat de coneixements basats en l'esforç, estimulant aquest coneixement, a la vegada que es gradua i dosifica. No es tracta d'eludir aquest esforç, sinó d'aconseguir que sigui desitjat.

S'ha definit l'aprenentatge com el procés en què es modifica una activitat per reacció davant una situació donada. L'important no és el que professor faci a l'aula, sinó el que facin els alumnes. El que senten o pensen com a reacció als estímuls que els proposem. D'aquí la importància de la **motivació**. Però, per poder motivar l'alumne/a eficaçment és necessari conèixer el procés d'aprenentatge.

### 2.2.3 Primer nivell de concreció

Aquesta recerca a nivell curricular, es considera emmarcada dins del "Currículum de l'Àrea de Matemàtiques" del Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya (ESO 1993, Batx. 1997) en l'Etapa d'Educació Secundària Obligatòria i Postobligatòria, amb nois i noies dels nivells de 4t d'ESO i del Batxillerat d'Humanitats i Ciències Socials A continuació, veurem quina és la rellevància del concepte de funció i del procés d'aprenentatge constructiu basat en la manipulació i la visualització.

El disseny curricular de l'Àrea de Matemàtiques elaborat pel Departament d'Ensenyament, com a la resta d'àrees, s'estructura en 3 nivells de concreció. El primer nivell de concreció dóna les directrius generals sobre què ensenyar i amb quins objectius, el segon nivell de concreció és el desenvolupament i organització dels continguts enunciats al primer nivell de concreció en unitats ordenades temporalment al llarg de l'etapa i, per acabar, el tercer nivell de concreció és la concreció a l'aula de l'organització modular realitzada al segon nivell, és a dir, la programació en crèdits elaborada pel professorat.

Per tant, nosaltres ens fixarem només en l'anomenat Primer Nivell de Concreció que és en realitat el que el Departament d'Ensenyament exigeix complir als Centres d'Educació Secundària a Catalunya, ja que el segon i tercer nivell queden a mans del criteri del professorat.

Com a referència bibliogràfica per a l'alumnat fem servir com a llibre de text per a 4t d'ESO "Matemàtiques ESO 3 2n cicle" de l'editorial Edebé i per al Batxillerat "Matemàtiques aplicades a les Ciències Socials" (crèdits 1,2,3 per primer i crèdits 4,5,6 per segon) de l'editorial McGraw-Hill.

### **2.2.3.1 4t d'Educació Secundària Obligatòria**

El primer nivell de concreció es desenvolupa a partir d'uns objectius generals, uns continguts, uns objectius terminals i unes orientacions didàctiques referents a l'àrea. A continuació, analitzarem quines aportacions fa cadascun d'aquests apartats sobre el concepte de funció i del procés d'aprenentatge constructiu basat en la manipulació i la visualització.

#### 2.2.3.1.1 Objectius generals

Com indica el seu nom, pel seu caràcter genèric, podem treure poca informació específica dels nous objectius generals que ha d'haver assolit un alumne en finalitzar l'etapa. Per a aquest treball queden recollits en els objectius 6, 8 i 9:

6. Emprar, quan convingui, diferents llenguatges matemàtics (algebraic, estadístic, geomètric, gràfic, etc.) per tal que les seves possibilitats expressives i de raonament millorin en rigor i precisió.

8. Analitzar un conjunt de dades i trobar-hi possibles relacions, fent ús de models matemàtics elements (estadístics, funcionals, algebraics, etc.)

9. Emprar amb soltesa i familiaritat els mitjans tecnològics (calculadores i ordinadors) que facilitin les tasques de càlcul i de representació.

#### 2.2.3.1.2 Desenvolupaments dels continguts

Els *continguts* a treballar a l'ESO són presentats en tres nuclis que corresponen als procediments, fets, conceptes i sistemes conceptuals, i valors, normes i actituds. Els *procediments* s'han classificat en quatre grups tenint en compte els tipus de tècniques i habilitats a què fan referència principalment, i també considerant amb quin tipus de coneixements matemàtics estan més relacionats. Els continguts conceptuals s'han organitzat en cinc apartats, seguint com a criteri classificador el més reconegut tradicionalment a la matemàtica. Per últim, els continguts de *valors*, *normes* i *actituds* giren entorn dels eixos següents:

- a) Les actituds que es volen fomentar davant de la resolució de situacions problemàtiques i davant de la informació que és contrastable matemàticament, que inclouen el respecte envers el treball dels altres i la confiança en les pròpies capacitats.

- b) Les actituds i hàbits d'organització, ordre, precisió i claredat en el raonament i en l'elaboració i presentació de tot tipus de material.
- c) Les actituds envers l'ús de mitjans tecnològics i envers la necessitat, en matemàtiques, de realitzar tasques d'exercitació sistemàtica.

S'ha de posar un especial èmfasi en els actituds que tendeixen a evitar situacions de bloqueig que, amb massa freqüència, impossibiliten qualsevol èxit en l'aprenentatge de la matemàtica. Així doncs, cal potenciar la confiança dels alumnes i les alumnes en les seves pròpies capacitats matemàtiques i no forçar-los a realitzar uns aprenentatges que, pel seu grau d'abstracció o complexitat formal, estan fora del seu abast.

El nostre interès se centra en els tres tipus de continguts procedimental, conceptual i actitudinal, ja que els tres formen part de tot el procés d'ensenyament-aprenentatge de les Matemàtiques. A continuació, s'exposen els continguts en els quals emmarcar el nostre treball.

#### **2.2.3.1.2.1 Procediments**

##### *1. Llenguatges i processos*

1.1. Ús de diferents llenguatges matemàtics . Traducció.

1.4. Resolució de problemes.

##### *2. Tècniques per a la mesura i el càlcul.*

2.3. Càlcul exacte i aproximat amb nombres: mentalment i per escrit, amb calculadora o amb ordinador.

##### *4. Representació i anàlisi de la informació*

4.2. Representació gràfica de fenòmens en coordenades cartesianes.

4.4. Elaboració de fórmules que relacionin variables.

4.5. Anàlisi de dependències funcionals.

#### **2.2.3.1.2.2 Fets, conceptes i sistemes conceptuals**

##### *3. La dependència entre variables.*

3.1. Coordenades cartesianes. Característiques generals de les gràfiques

3.2. Funcions: dependència i conceptes associats.

3.3. Funció de proporcionalitat directa.

3.4. Funció afí.



### 3.6. Funció quadràtica.

#### 2.2.3.1.2.3 *Valors, normes i actituds*

1. *Interrogació i investigació davant de situacions i problemes contrastables matemàticament.*

1.3. Confiança raonada en la capacitat pròpia per afrontar situacions problemàtiques que exigeixen l'aplicació de coneixements matemàtics.

3. *Valoració de les eines matemàtiques.*

3.2. Ús habitual i equilibrat dels mitjans tecnològics que poden ser útils en matemàtiques.

#### 2.2.3.1.3 Objectius terminals

Els objectius terminals de l'Àrea de Matemàtiques estableixen de quina manera, i fins a quin grau, cal treballar els diferents tipus de continguts. Els catorze primers objectius terminals amb continguts de caràcter general, com ara els que fan referència a les actituds i als procediments de més àmplia aplicació. Els restants determinen els continguts més específicament relacionats amb aspectes concrets del coneixement matemàtic, ja siguin de tipus conceptual o procedimental. Majoritàriament, tenen un caràcter força procedimental com a expressió de la prioritització d'aquest tipus de contingut per sobre dels conceptuals, atesa la seva major funcionalitat.

Dels 51 objectius terminals del currículum d'ESO hem trobat els nou següents:

2. Trobar relacions entre les dades obtingudes o donades, reconèixer-hi els conceptes i les relacions matemàtiques que continguin i saber-los expressar mitjançant el llenguatge natural, expressions algèbriques, figures o gràfics.
9. Mostrar una disposició a interrogar-se davant de situacions que es plantegin: formular hipòtesis, buscar exemples o contraexemples i fer comprovacions experimentals que estiguin a l'abast.
20. Aplicar algorismes de càlcul amb calculadores o implementats en fulls de càlcul informatitzats per trobar els resultats d'expressions aritmètiques, construir taules funcionals o explorar pautes i regularitats numèriques.
38. Representar en un sistema de coordenades cartesianes fenòmens en què hi hagi una dependència afí, lineal, quadràtica o de proporcionalitat inversa, a partir de parells de valors donats o obtinguts de manera empírica o amb la utilització de l'expressió funcional.
39. Emprar programes d'ordinador per a la representació cartèsiana de gràfics analitzant-ne les característiques per mitjà de desplaçaments, canvis d'escala o comparació de diferents gràfics relacionats.

41. Descobrir l'existència de relacions entre parells de valors corresponents a dues magnituds en situacions concretes i saber-la expressar en els casos de proporcionalitat directa i inversa, dependència afí i quadràtica, fent ús correcte dels conceptes i termes adequats.
42. Reconèixer, per les seves equacions i gràfics, les funcions de proporcionalitat directa o inversa, dependència afí i quadràtica.
43. Llegir i interpretar gràfics funcionals fent ús intuïtiu de les nocions de continuïtat, creixement, valors extrems, periodicitat i tendència.
44. Aïllar una variable en funció d'una altra en situacions de dependència afí.

#### 2.2.3.1.4 Orientacions didàctiques

Les orientacions didàctiques per a l'ensenyament- aprenentatge contenen aspectes de caràcter més general, on s'aborden qüestions que s'han de tenir presents en qualsevol experiència educativa (la conveniència que els aprenentatges es facin de manera significativa i siguin funcionals, la motivació de l'alumnat i la seva diversitat, els criteris per a l'elaboració de segons i tercers nivells de concreció, entre d'altres) però des de la perspectiva particular de l'Àrea de Matemàtiques. Aquestes orientacions didàctiques donades pel Departament d'Ensenyament al primer nivell de concreció del Disseny Curricular ens han servit com a guia, sobretot en la revisió de la unitat didàctica elaborada per a la investigació i l'elaboració d'unes noves propostes.

Hem considerat, en la concreció d'aquest objectiu del nostre estudi, orientacions didàctiques tal com: tenir en compte els coneixements previs que té l'alumne/a, aconseguir que els alumnes i les alumnes tinguin una visió oberta i dinàmica de la matemàtica; cal que siguin ells mateixos els que vagin descobrint, fins a un cert punt, la matemàtica. El paper del professor o de la professora en aquesta tasca és important, caldrà que assessori i orienti tot aquest procés de la motivació dels alumnes, seleccionant aquelles activitats d'aprenentatge que puguin resultar més engrescadores i motivadores. Per exemple, afavorir les activitats de caràcter experimental i manipulatiu; tractament de la diversitat, on el treball diari contribueix al progrés de tots els alumnes a partir d'una pràctica pedagògica que s'adeqüi a aquesta diversitat; per al desenvolupament dels continguts cal seguir un itinerari que vagi d'allò que és més fàcil a allò que és més difícil, del que és més simple al que és més complex i situar primer els aprenentatges que es puguin construir amb més facilitat a partir de l'experimentació. Els fulls de càlcul informàtics poden ser una eina força útil que facilita la possibilitat d'investigació autònoma del mateix alumnat i permet la realització de certs càlculs. En la representació de funcions, el professorat haurà d'anar donant pautes per a fer-ne una correcta representació, en un procés en què caldrà augmentar de manera escalonada el grau d'exigència, ....

#### 2.2.3.2 *Batxillerat d'Humanitats i Ciències Socials*

A l'assignatura de matemàtiques a la modalitat d'Humanitats i Ciències socials, l'igual que a l'ESO, el primer nivell de concreció dona les directrius generals sobre què ensenyar

i amb quins objectius, i també les referències per a l'elaboració de la resta del Disseny curricular de l'àrea. A continuació, només ens centrarem en els que són d'interès per a aquest treball.

#### 2.2.3.2.1 Objectius generals

El marc en què es desenvolupa aquesta assignatura, està més condicionat per les característiques pròpies de la matèria i de l'etapa que a la modalitat concreta a la qual és adscrita. Així, el plantejament inicial, fins i tot els objectius generals d'aquesta matèria, no sembla justificat que siguin diferents dels que corresponen a la matemàtica a la modalitat d'Humanitats i Ciències Socials. L'alumne, en acabar tot el procés, ha de ser capaç de:

4. Comprendre que el treball en l'àmbit de la matemàtica es basa en millores successives dels continguts ja treballats, ampliant el seu àmbit d'aplicació o la seva potència, i entendre que aquest fet no menysvalora els aprenentatges intermedis d'aquest procés en espiral.

5. Entendre que l'aprenentatge en aquesta matèria es basa en el propi treball i que els materials elaborats per ell mateix són un suport indispensable per a la consolidació dels aprenentatges presents i per al normal desenvolupament de les activitats futures.

9. Habituar-se a la discussió prèvia en la resolució de problemes i a la comprovació i interpretació de les solucions obtingudes en el context propi del problema.

#### 2.2.3.2.2 Desenvolupaments dels continguts

Els *continguts* a treballar al Batxillerat a matemàtiques aplicades a les Ciències Socials també són presentats en tres nuclis que corresponen als procediments, fets, conceptes i sistemes conceptuals, i valors, normes i actituds. A continuació, s'exposen els continguts en què emmarcar el nostre treball.

##### 2.2.3.2.2.1 *Procediments*

#### 5. *Reconeixement, descripció, estudi i representació gràfica de funcions reals*

- 5.1. Reconeixement de funcions en situacions pràctiques. Identificació dels elements que defineixen una funció real des d'una òptica global: domini, recorregut, fórmula, gràfic i taula de valors.
- 5.2. Estudi del signe, continuïtat, monotonia d'una funció en un punt i estudi del seu comportament a l'infinit. Càlcul dels punts de tall amb els eixos de la gràfica d'una funció.
- 5.3. Aplicació de la derivada d'una funció al seu estudi local: creixement, decreixement i extrems absoluts i relatius.
- 5.4. Càlcul de l'equació de la recta tangent a la gràfica d'una funció en un punt.

- 5.5. Estudi global i local de les funcions reals, utilitzant eines informàtiques si s'escau.

#### 2.2.3.2.2.2 *Fets, conceptes i sistemes conceptuals*

##### 6. *Funció real.*

- 6.1. L'estudi global d'una funció: domini, recorregut, fórmula, taula i gràfic d'una funció real.
- 6.3. Les funcions polinòmiques, racionals, exponencials i logarítmiques:
- 6.4. L'estudi local d'una funció: funció contínua, funció creixent, funció decreixent, asímptota horitzontal, obliqua i vertical d'una funció.
- 6.5. Punts de tall amb els eixos de la gràfica d'una funció, punt de discontinuïtat, extrem absolut i extrem relatiu d'una funció.
- 6.6. La derivada d'una funció en un punt. La funció derivada.

#### 2.2.3.2.2.3 *Valors, normes i actituds*

4. Observació de les normes de precisió i sistemàtica que regulen els procediments de representació gràfica en les seves diverses formes i respecte als aspectes formals de representació i interpretació de gràfics.
5. Constància i sistemàtica en els processos d'inducció plantejats, disposició als processos d'abstracció i confiança en l'assoliment dels continguts que se'n deriven.
6. Participació en els processos que impliquen treball col·lectiu, disposició a la col·laboració i valoració dels resultats que se'n deriven.
7. Actitud positiva i crítica davant les correccions, disposició a l'autocorrecció, autoexigència davant la consolidació dels continguts treballats i exigència del suport necessari per aconseguir-la.
9. Observació de les normes que regulen el treball plantejat, tant pel que fa al treball personal com al treball en grup, ja sigui dins d'horari escolar com fora.

#### 2.2.3.2.3 Objectius terminals

Dels 39 objectius terminals del currículum de batxillerat a la modalitat d'Humanitats i Ciències Socials recollim:

5. Emprar els diversos tipus d'interval·ls per expressar conjunts numèrics que apareguin en la resolució de problemes, ja sigui amb desigualtats, directament o emprant la unió, la intersecció o el complementari d'interval·ls.

10. Entendre i aplicar amb soltesa els conceptes relacionats amb les funcions i determinar el corresponent domini i recorregut.
12. Interpretar i reconèixer a la pràctica el concepte de funció contínua en un punt. Reconèixer i calcular els tipus de discontinuïtat més usuals i calcular asímptotes verticals. Justificar de manera intuïtiva i aplicar algun procediment de càlcul aproximat d'arrels de funcions.
13. Interpretar i reconèixer a la pràctica el concepte de funció creixent i funció decreixent en un punt. Calcular el creixement o decreixement d'una funció en un punt, els intervals de creixement o decreixement, i interpretar i establir l'existència d'extrems absoluts i relatius d'una funció.
14. Interpretar el concepte d'asímtota obliqua i horitzontal i calcular-les per les funcions elementals i les funcions compostes senzilles.
15. Comprendre el concepte i calcular la derivada d'una funció en un punt. Relacionar-la amb la tangent a la corba en el punt corresponent i emprar-la per al càlcul de rectes tangents a corbes en punts determinats.
16. Comprendre el concepte i calcular funcions derivades. Calcular les derivades successives d'una funció i relacionar el seu signe en un punt amb el creixement, decreixement i existència d'extrem relatiu de la funció en aquest punt.
17. Generar el gràfic d'una funció a partir de l'estudi analític del domini, continuïtat, arrels, asímptotes, derivabilitat i extrems relatius de la funció.
19. Reconèixer i aplicar a situacions pràctiques les funcions polinòmiques i racionals. Tenir soltesa amb el càlculs amb polinomis i fraccions algebraïques elementals i aplicar tots els procediments d'estudi de les funcions als models polinòmic i racional.
20. Reconèixer i aplicar les funcions exponencials i logarítmiques a l'estudi de fenòmens de temàtica social o econòmica. Interpretar la funció logarítmica com la funció recíproca de la funció exponencial, deduir-ne les propietats corresponents, conèixer el seu comportament respecte a les operacions i aplicar tots els procediments d'estudi global de les funcions a les funcions exponencials i logarítmiques.
38. Tenir cura de la qualitat i completesa dels treballs realitzats, disposar-se a l'autocorrecció de manera crítica i exigir l'ajut necessari per a fer-ho.

#### 2.2.3.2.4 Orientacions didàctiques

L'assignatura de matemàtiques a la modalitat d'Humanitats i Ciències Socials ha de completar la formació secundària en aquesta àrea. Cal recordar, però, que la formació que rebin els alumnes ha de ser perfectament compatible tant amb una opció futura per a un cicle formatiu de nivell 3 com amb una opció universitària. Per això, a l'hora de concretar

les programacions de l'assignatura a nivell de centre i de curs s'ha de tenir molt present tot allò que sigui necessari i comú a les dues possibles opcions de futur dels alumnes (els objectius terminals en són una guia) i deixar per a ofertes opcionals dins el batxillerat o per al futur aquells continguts concrets que poden ser més específics. En el desenvolupament de tot el procés caldrà preveure una adaptació progressiva de l'alumnat al nou ambient i ritme de treball sobretot en els que la pressió psicològica de les PAAU genera sobre els alumnes amb opció universitària. De cara al disseny i realització de l'activitat docent cal ressaltar l'aportació d'algunes orientacions en la selecció i seqüenciació del continguts i el disseny de les unitats didàctiques. Pel bloc de continguts referents a l'estudi de funcions, cal tenir present els que s'han introduït a l'ESO sobre la dependència funcional. En el primer nivell es contemplen un seguit de models funcionals que s'hauran d'estudiar simultàniament als conceptes i procediments propis de les funcions en general. Un cop plantejat l'estudi global de les funcions polinòmiques serà bo presentar i identificar les arrels, els extrems relatius, ... amb el suport informàtic. Pel que fa al model exponencial i logarítmic, d'interès especial en aquesta versió de l'assignatura per a la modalitat de Ciències Socials, proposa un estudi d'aquests models basat en l'ús de procediments informàtics. L'ordinador serà una eina indispensable per a un desenvolupament assequible i interactiu, el seu ús ens permetrà una manipulació ràpida i interactiva de les funcions compostes i dels efectes sobre els gràfics de determinades transformacions senzilles de la variable independent.

La proposta d'activitats basades en la representació gràfica de funcions a partir de l'anàlisi del seu comportament local i global és un dels exercicis d'anàlisi-síntesi més complets que es pot proposar. Aquestes activitats de síntesi, acostumen a fer evidents diferències notables en l'assoliment dels continguts d'aquests bloc, ja que la difícil contextualització d'aquestes activitats i la seva dificultat intrínseca generaran nivells d'aprenentatge diversos entre els alumnes. Cal tenir-ho present per a fer propostes de complexitat diversa. En aquest punt seria interessant acostumar l'alumne a contrastar el seu treball amb el que es pot obtenir a partir de l'ordinador o de calculadores gràfiques.

A l'hora de dissenyar una unitat didàctica s'hauria de tenir cura de diverses qüestions. Una seria la durada; sembla aconsellable al voltant de les 10 a 12 hores. L'altre aspecte a tenir en compte és l'estructura, el procés d'aplicació; la pròpia experiència fa evident que s'hi desenvolupen diverses fases que responen a finalitats diferents. Aquestes fases són.

- a) **Fase inicial**, en què es dissenyen activitats per tal de detectar els coneixements previs dels alumnes referits als continguts a treballar en la unitat i, també, es dissenyen activitats per tal de presentar als alumnes els objectius de la unitat que s'està iniciant.
- b) **Fase de desenvolupament**, en què les activitats que s'hi proposen estan orientades a facilitar a l'alumnat l'aproximació i l'aprofundiment als continguts al voltant dels quals s'ha generat la unitat didàctica.
- c) **Fase de síntesi**, en què es proposen activitats a partir de les quals l'alumne sintetitza l'aprenentatge fet, l'incorpora com a propi i l'aplica a situacions noves i més globals.

També cal precisar la forma en què s'organitzarà l'alumnat a l'aula. Per un costat, ja s'ha dit repetidament que qui aprèn és l'alumne, ningú ho pot fer per ell. Aquest fet ens aconsella que en tota activitat d'aprenentatge hi ha d'haver treball individual. Per un altre costat, és ben conegut que l'aprenentatge és també un fet social, en el sentit que la col·laboració i el contrast amb altres persones el faciliten molt. En aquest sentit, cal pensar que a l'hora d'organitzar els alumnes a l'aula, s'ha de preveure treball en grup en les diverses formes possibles: grup espontani, grup estable no estructurat, grup estructurat i/o amb repartiment de responsabilitats. En decidir una o altra modalitat s'haurà de tenir present que com més complexa és l'organització, més elaborades hauran d'estar les activitats d'aprenentatge que s'hi desenvolupin. En qualsevol cas, la variació controlada d'organitzacions pot afavorir una adequació a la diversitat de preferències que, certament, es presenta entre l'alumnat.

Finalment, fer una breu referència als materials i recursos didàctics a emprar. En aquest sentit, cal insistir que si s'empren diversos tipus de llenguatges (escrit, oral, imatges, ...) i suports (material imprès, exposició oral, audiovisual, informàtic, ...) serà un ajut important, en alguns casos decisiu, per adequar-se a les diverses disposicions i preferències dels alumnes.

En aquest punt, s'ha d'insistir en el disseny d'activitats d'aprenentatge que incorporin l'ús de suport informàtic. Entre els programes que poden estar a l'abast dels centres n'hi ha que ens poden ajudar a treballar la representació gràfica de funcions. A més, cal recordar que el full de càlcul serà un instrument molt interactiu amb què podrem dissenyar activitats d'aprenentatge més creatives i amb major intervenció dels alumnes en el seu desenvolupament.

### **2.3 Marc tecnològic**

Per finalitzar aquest capítol passem a l'últim àmbit que emmarca aquesta investigació, el marc tecnològic.

Estem als inicis del tercer mil·lenni i l'ordinador s'ha fet un lloc dintre de la nostra societat, ja que cada vegada es fa més necessari el seu ús. Per tant, podem aprofitar aquesta eina per l'aprenentatge de les matemàtiques i decidir quan, com i on pot ser útil per l'Educació Secundària Obligatòria i Postobligatòria. A més, comptem amb el suport del Departament d'Ensenyament, com acabem de fer referència en l'apartat anterior, ja que un dels objectius generals ens comunica que “en finalitzar l'etapa, l'alumne/a ha de ser capaç d'emprar amb destresa i familiaritat els mitjans tecnològics (calculadores i ordinadors) que facilitin les tasques de càlcul i representació”. L'ordinador està inclòs en el marc curricular de qualsevol dels nostres estudiants de secundària obligatòria i postobligatòria i hem de tenir clar que hem d'adequar el projecte curricular a les demandes d'una societat cada cop més dependent de l'ús de les noves tecnologies.

Sutherland (1990) analitza les influències del currículum a Gran Bretanya sobre l'àlgebra en un entorn computacional. Ell ha provat que el simbolisme algebraic és presentat com un final afegit al procés algebraic dintre del currículum nacional.

Similarment, les activitats proposades per desenvolupar-se en un entorn computacional dintre del currículum són vistes com un final afegit en executar les pràctiques d'àlgebra. Troba a faltar un coordinat esforç entre currículum desenvolupat, investigacions i les classes pràctiques. Es qüestiona: Quines matemàtiques poden aprendre els alumnes quan utilitzen un paquet informàtic?, Quines matemàtiques els alumnes necessitaran saber per efectivament usar tal com paquet? Partícep d'aquesta discussió, a la qual ens afegim, trobem a Borba (1999b), que considera que, donat aquest nou medi que irromp en les nostres vides, és important discutir les modificacions que comporta, considerant l'ambient a l'aula, el que ha de ser ensenyat i com ha de ser ensenyat, de forma que s'associï a aquest col·lectiu pensant un nou medi o "interface".

*"Com a investigadors i/o professors el més important que haurem d'endur-nos pel segle XXI és la capacitat d'escoltar als nostres alumnes"* Borba (1999b). Ell ens evidencia que no existeix una relació mecànica entre els medis i escoltar als alumnes, però no permetre la investigació realitzada per l'estudiant en els processos educatius formals es fa cada vegada més contradictori, en la mesura que la plasticitat d'aquests medis incentiva l'exploració i experimentació.

En la nostra recerca, el medi és el full de càlcul. Així, en primer lloc ens centrarem en presentar aquest medi emmarcat com a eina didàctic; en segon lloc, presentar algunes investigacions afins al nostre estudi; i en tercer lloc, farem referència a altres software.

### 2.3.1 Presentació del full de càlcul

L'origen del full de càlcul és relativament recent. L'embrió va ésser la creació d'un programa per a ordinadors que recalculés els resultats d'un problema al variar alguna de les dades inicials. El seu autor va ser Dan Bricklin, un estudiant de postgrau de l'Harvard Business School, que va realitzar aquest programa a finals dels anys setanta. Fruit d'aquesta idea, va sorgir el primer full de càlcul o full electrònic al 1979 i es va anomenar VisiCalc. Des d'aleshores ha estat un producte emblemàtic entre les aplicacions per al sistema operatiu DOS i Windows. Diferents fabricants de software han creat el seu propi full de càlcul: Lotus 1-2-3, Excel, Quattro Pro, SuperCalc, Wingz,. A l'actualitat, Excel és el full de càlcul més implantat en el món, tant el podem trobar a nivell professional com a ordinador domèstic.

La majoria dels fulls de càlculs tenen les següents prestacions:

- Organitzen i utilitzen informació en columnes, tant numèriques com alfanumèriques. Tenen algunes prestacions pròpies de les bases de dades, com funcions d'ordenació i cerca.
- Realitzen càlculs numèrics amb dites dades.
- Disposen de diferents tipus de funcions:
  - Financeres (taxes d'inversions, quotes d'amortització, etc.)



- Estadístiques (sumes, mitjanes, variàncies, etc.)
  - Científiques (trigonomètriques, logarítmiques, etc.)
  - Lògiques (condicionals, funcions booleanes, etc.)
  - Organització de dades (cerca i ordenació)
- Són eines dinàmiques i interactives; permeten la modificació de dades, actualitzant-se automàticament.
  - Creen diversos tipus de gràfics que ajuden a interpretar la informació emmagatzemada: barres, línies, circulars, eixos X-Y, etc.
  - Poden compartir informació amb altres eines d'usuari: bases de dades, processadors de textos, etc.
  - Tenen capacitats per imprimir tant els fulls com els gràfics.

També és important ressaltar la facilitat d'ús d'aquestes eines ja que estan basades en menús. A més, el mateix sistema operatiu Windows es gràfic, per tant també fa més fàcil la seva utilització.

A continuació, descriurem alguns materials elaborats amb una aplicació pedagògica i així reforçar la idea que els camps d'aplicació d'un full de càlcul com a recurs didàctic és molt ample i variat. I per afinitat al treball que presentem ens serveix com un estímul per desenvolupar la nostra tasca investigadora i docent.

Sánchez (1995) mostra models de full de càlcul que siguin generadors de conceptes en les matemàtiques de l'ensenyament secundari a través dels procediments. Aquests els presenta en cinc apartats: nombres i operacions (productes notables i igualtats), el llenguatge gràfic (punts i rectes, gràfiques de funcions notables, funcions especials), tractament de la informació (variable estadística discreta, contínua i bidimensional), estudi de l'atzar (nombres aleatoris, simulació d'experiments aleatoris, caos matemàtic) i probabilitat (freqüències i probabilitat, combinatòria i probabilitat, resolució de problemes). Només farem referència al segon apartat, el llenguatge gràfic on els conceptes treballats en els exercicis proposats són: a) expressar la dependència entre dos variables, b) funcions lineals i afins, c) distintes formes d'expressió entre variables, d) funcions quadràtiques, e) taxa de variació mitja d'una funció, f) funcions de proporcionalitat inversa i g) funcions monòtones, acotades, simètriques i extrems relatius d'una funció. Els procediments a seguir, respectivament, són: a) elaborar i interpretar una taula numèrica a partir d'un conjunt de dades, d'una gràfica o d'una expressió funcional senzilla, b) utilitzar polinomis de grau zero i de grau  $u$ , per descriure gràfiques, c) buscar funcions en taules de dades obtinguts experimentalment, d) establir conjectures sobre gràfics de funcions de segon grau, tenint en compte la seva expressió algebraica, e) utilitzar les TVM (tasses de variació mitja) pel càlcul de velocitats, preus, etc., f) utilitzar les gràfiques per comprendre i resoldre problemes i g) construir i interpretar gràfics a partir de la seva expressió algebraica.

Sutherland, Hawell i Wolf (1996) van dissenyar uns materials adreçats a "GNVQ Engineering" fent servir el full de càlcul. Són una part d'un projecte d'investigació realitzat per la Fundació Nuffield durant 1993-94 amb estudiants d'enginyeria de West Hertfordshire College, Brooklands College, Newham Vith Form College, Bromley College, City and Islington College i North Hertfordshire College (London). Aquest material es presenta distribuït en quatre capítols:

- El primer capítol és una introducció a la resolució de problemes amb el full de càlcul. L'alumne aprèn com utilitzar el full de càlcul i inclou les idees bàsiques que necessita per resoldre problemes d'enginyeria. Per exemple, anotar i copiar una fórmula, utilitzar referències absolutes, presentar dades, construir gràfics, taules, presentar gràfics, deduir una fórmula, percentatges, l'equació d'una recta, provar el gràfic d'una recta per les dades d'un estudi empíric.
- El capítol dos presenta idees algebraiques per plantejar i resoldre problemes, com construir una funció i la seva inversa, representar una funció simbòlicament, escriure expressions algebraiques equivalents, representar i resoldre problemes amb un full de càlcul i amb l'àlgebra, resoldre inequacions lineals...
- En el tercer capítol es resolen simultàniament equacions algebraiques gràficament, amb un full de càlcul i fent ús de l'àlgebra. També es resolen equacions quadràtiques gràficament, amb un full de càlcul, factoritzant i amb un mètode formulat.
- I per últim, en el capítol quart l'alumne investiga els efectes de transformació de les funcions  $y = x^2$ ;  $y = \sin x$ ;  $y = \cos x$ , utilitza les coordenades polars i converteix des de cartesiana a polar i de polar a cartesiana, estudia la periodicitat de les funcions sinus i cosinus i, per últim, com trobar el gradient d'una corba i l'àrea sota un gràfic fent ús de mètodes numèrics per aproximació.

### **2.3.2 Recerques amb el full de càlcul com eina didàctica en un model matemàtic**

Les investigacions que presentem en aquest apartat analitzen la influència del full de càlcul en diferents models matemàtics, que de manera més o menys directe estan relacionades amb el nostre estudi. En primer lloc, farem referència a les recerques relacionades amb l'anàlisi de tasques desenvolupades i, en segon lloc, amb l'anàlisi de l'ensenyament.

#### **➤ Des de la perspectiva de tasques desenvolupades**

Molyneux-Hodgson, Rojano, Sutherland i Ursini (1999) analitzen els resultats d'un projecte Mexicà/Britànic en el qual investiguen els camins on les matemàtiques són aplicades en problemes de ciències i el paper del full de càlcul com a eina en un model matemàtic. Després de discutir les diferències entre les escoles (bàsicament culturals) experimentades per dos grups d'estudiants preuniversitaris (de 16 a 18 anys), ells

analitzen com aquestes diferències culturals influeixen a la seva pràctica de matemàtiques i com en el seu treball amb full de càlcul influeixen en activitats dintre d'un model matemàtic. El projecte va ésser estructurat en dues fases principalment. La primera fase involucra un estudi de pràctiques on apliquen les matemàtiques a una classe de ciències. La segona fase va continuar aquest estudi però involucra la introducció del full de càlcul modelant les sessions dintre de les classes de ciències.

Els estudiants mexicans i britànics van treballar paral·lelament sobre sis problemes comuns a la biologia, la química i la física, juntament amb altres dintre del seu currículum de ciències. De les conclusions tretes podem dir que les diferències entre els estudiants mexicans i britànics poden traçar-se com les diferències entre escola ciència i cultures matemàtiques. També ressalten que la representació prioritzada per un professor està influenciant en l'ensenyament. Un estil més clàssic (de presentació) d'ensenyament sembla posar més èmfasi en donar una resposta amb precisió com passa amb els estudiants mexicans; en canvi, un estil més d'exploració sembla promoure aproximacions i donar més èmfasi en representacions gràfiques.

Aquest treball de Molyneux-Hodgson, Rojano, Sutherland i Ursini (1999) suggereix que les aplicacions matemàtiques dintre de temes de ciències pot ser influenciat a través de l'ús d'un model proper a un entorn computacional tal com un full de càlcul. El full de càlcul ajuda als estudiants mexicans a apreciar i usar gràfiques i representacions numèriques i, així mateix, el full de càlcul ajuda als estudiants anglesos a donar sentit a les representacions gràfiques d'una manera més formal, fent ús de l'àlgebra, generalitzant la situació. En resum, el full de càlcul aporta la part d'exploració i de generalització.

Passem a fer referència a investigacions més afins al nostre estudi respecte als continguts treballats.

Els estudis empírics portats a terme per Ainley, Nardi i Pratt (2000) suggereixen que l'ús del full de càlcul pot tenir el potencial per canviar fonamentalment el mètode amb què els estudiants aprenen coneixements gràfics. Ells descriuen una estratègia pedagògica desenvolupada durant l'exploració del treball que s'anomena "Active Graphing (AG)", amb la qual accedir a un full de càlcul on s'admeten gràfics per ésser utilitzats com eina analítica dintre de la part experimental. Gràcies a l'estudi del treball desenvolupat per alumnes de 8 i 9 anys, ells poden identificar aspectes de la seva interacció amb l'experiment en si mateix, la col·lecció de dades i els gràfics i així investigar com van apareixent els significants. Ells suggereixen que un domini dels gràfics requereix:

- una comprensió de com interpretar i usar gràfics
- un coneixement de les convencions i tècniques de gràfics, com l'ús de l'escala
- la pràctica, destresa necessària per representar gràfics a mà.

Quan els gràfics són fets amb l'ordinador, els alumnes no tenen la necessitat de tenir destresa en la representació gràfica, la seva atenció pot ésser enfocada directament a la interpretació de la gràfica. Ainley (1995) i Pratt (1995) han observat relativament nivells alts d'èxits en la interpretació dels coneixements mostrats per alumnes joves treballant

amb gràfics generats des d'un full de càlcul. Aquesta conducta ens suggereix que la interpretació de coneixements en gràfics pot ser menys difícil conceptualment quan apareixen en altres estudis. Bryant i Somerville (1986) reforcen aquesta visió amb els estudis portats a terme amb alumnes de 6 a 8 anys; no van trobar cap dificultat especial en dibuixar i en llegir punts, quan hi ha una necessitat de construir un coneixement mitjançant el dibuix de gràfics en lineals.

Phillips (1997) ofereix bastant suport a aquesta visió, i conclou que hi ha un progrés sorprenent demostrat per alguns alumnes. Aquests alumnes tenen l'habilitat de treballar amb un ample rang d'operacions amb gràfics per veure on tendeixen.

Ainley (1995) suggereix que quan els nens treballen amb feines que involucren la interpretació de gràfics amb l'ordinador també adquireixen un profund coneixement de les convencions i tècniques de gràfics. El desenvolupament de la interpretació de coneixements, abans d'ensenyar explícitament les convencions i tècniques de gràfics i el coneixement pràctic de dibuixar gràfics, l'ordinador pot apropar-nos a reavaluar el progrés tradicionalment aplicat a coneixements gràfics.

Ainley, Nardi i Pratt (2000) suggereixen que la possibilitat de representar gràfics amb un ordinador no simplement allunya la necessitat dels coneixements tradicionals pel llapis i paper, sinó que troba resultats molt ràpidament. Tot això obre nous tòpics i nous camins d'aprenentatge. Anomenen una sèrie de característiques que envolten un full de càlcul, que té una important rellevància en l'aprenentatge de coneixements gràfics. Aquests són

- ❖ La facilitat amb què pots triar diferents tipus de gràfics que poden ser representats i modificar els valors del rang d'un gràfic molt ràpidament.
- ❖ Els gràfics fets amb un full de càlcul són dinàmics, poden ser creats interactivament i el dibuix es pot modificar a través d'un menú que controla l'escala dels eixos, l'orientació... Aquestes característiques poden donar una sensació de control a l'alumne, però també pot sentir-se menys segur.
- ❖ Una nova pedagogia s'apropa "Active Graphing". El disseny de material i la pedagogia aplicada han de reconèixer la influència del conjunt en què les eines estan sent utilitzades. És necessari no només analitzar les característiques de l'eina, sinó també considerar el conjunt amb el qual es farà servir. L'anàlisi feta identifica un nombre de característiques en ambdós, l'ús del full de càlcul, i el conjunt de tasques, que contribueixen a la interpretació de gràfics. Aquestes són immediates, un context familiar ple de sentit, l'ús de diferents tipus de gràfics i una proposta clara per fer servir la gràfica per resoldre problemes.

Una anàlisi epistemològica de tendència, en el context de l'estudi fet per Ainley, Nardi i Pratt suggereix els següents subelements al concepte de tendència: correlació, linealitat, interpolació, extrapolació i interpretació. De les conclusions presentades en elaborar com en el pensament apareixen els significats durant l'activitat gràfica volem destacar que com el gràfic és utilitzat com a una eina analítica dintre del desenvolupament de les seves tasques, els alumnes han tingut l'oportunitat d'apreciar la

utilitat dels gràfics i de familiaritzar-se amb les convencions i tècniques de la seva construcció que ells repetidament llegeixen i interpreten. Les tasques van ser dissenyades de tal manera que la proposta explícita arriba a ser connectada amb la utilitat de gràfiques en el full de càlcul en l'anàlisi de l'experiment. Seria raonable preguntar si el full de càlcul està intrínsec en el procés de l'activitat gràfica?. L'alumne, per iniciar-se a fer-les i donar sentit a les activitats, necessita admetre algunes conjectures invalidades que ha de fer front des de la seva comprensió de la situació del problema i un professor no podria anticipar el rang de conjectures que un alumne desitjaria explorar. Així que, contestant a la pregunta, seria raonable dir que el full de càlcul facilita un grau de control per ser superat per l'alumne (passat sobre l'alumne) i és essencial en el suport per fer i donar sentit a les activitats del nen.

Leinhardt, Zaslavsky i Stein (1990) recullen que alguns treballs han investigat les translacions entre gràfics molt complexos i les seves equacions. Per exemple, els estudiants observats prefereixen les translacions d'equacions a gràfics en les paràboles quan es troben en un entorn computacional. Zaslavsky, citat en el "*review*" va demanar als estudiants de secundària determinar quines de les quatre paràboles corresponen a l'equació donada i quina de les quatre equacions correspon a la paràbola donada. Els estudiants van utilitzar els paràmetres com a base per comparar els gràfics, de manera que la direcció de moviment va estar d'una equació a gràfic.

Dreyfus (1991), pel que fa al raonament de manera visual en matemàtiques, ressalta que, des de fa pocs anys, la importància del raonament visual no només s'ha enfocat a descobrir sinó també a descriure i a justificar resultats matemàtics. Rival (1987), per exemple, va escriure un article amb el subtítol "Mathematicians are rediscovering the power of pictorial reasoning" on la necessitat del raonament visual queda patent a l'igual que Devaney (1989) on ell i els estudiants han explicat el procés d'una certa dinàmica a través de seqüències de transformacions en el pla complex, representant gràfics mitjançant programes d'ordinadors. Davis i Anderson (1979) fan referència a l'existència de "teoremes i demostracions purament visuals", i animen a la representació d'aquests teoremes. Molts d'aquests teoremes, però no tots, s'han trobat mitjançant el suport gràfic d'ordinadors. Davis i Anderson admeten com (part de) demostracions matemàtiques els arguments visuals.

Dintre de les implicacions per a l'educació matemàtica, Dreyfus en el mateix article recull que es fa extensible l'ús de raonaments de manera visual durant el procés creatiu; a més, s'aconsegueix legitimar els arguments visuals també en la presentació de resultats matemàtics, però es troben que els estudiants rebutgen el raonament visual. Primerament, perquè amb freqüència es fa amb caire introductor, se'l considera com un argument auxiliar, no se li assigna ple valor i, amb aquesta actitud, els estudiants sovint dedueixen que realment no necessiten saber ni usar els arguments de manera visual. I en segon lloc, la dificultat i varietat de representacions utilitzades com figures geomètriques, diagrames, el pla cartesià, punts, gràfics de funcions,.... Però les diferències entre tipus de representació visual són enormes; alguns són gràfics, altres estàtics, i també dinàmics. Per exemple, una funció pot ser representada mitjançant el seu gràfic cartesià, com un punt dintre d'un conjunt de funcions o per mitjà de valors d'alguns paràmetres dintre d'un espai paramètric.

Respecte als ordinadors i raonament visual, Dreyfus (1991) considera que els ordinadors fan possible representar matemàtiques de forma visual amb una quantitat d'estructures no ofrenades per qualsevol altre mitjà. Recull uns quants exemples: Tall (1991) manifesta l'ús de l'ordinador per fomentar conceptes basats en la visualització desenvolupant càlculs específicament amb la noció de derivada, la qual cosa implica que els estudiants aprenen a raonar visualment amb els detalls de la pantalla representacions dels conceptes tal com funció, secant, tangent, etc.; Kaput (1989) ha utilitzat les representacions de manera visual a l'ordinador per estructurar sobre accions naturals en el món de l'estudiant amb l'objectiu de donar suport a l'aprenentatge i aplicació de raonament multiplicatiu, raó i proporcionalitat. Així, les operacions de manera visual dels estudiants són directament utilitzades en el procés d'aprenentatge; Yerushalmi i Chazan (1990) han donat als estudiants l'oportunitat de generalitzar empíricament de manera visual sobre construccions geomètriques i inferir conjectures a partir de la informació; Shama i Dreyfus (1991) han utilitzat la pantalla de l'ordinador per a presentacions de situacions de programació lineal per incitar els estudiants a desenvolupar les seves pròpies estratègies de solució. També amb aquest propòsit, els estudiants necessiten analitzar els problemes en termes de la informació presentada visualment i així, donar una base visual a les seves estratègies.

El potencial dels ordinadors per visualitzar matemàtiques no resol per si mateix els problemes més importants que van ser anomenats al principi. En cada cas, les representacions visuals necessiten ser construïdes amb molta cura i les propietats cognitives de l'estudiant necessiten ser investigades amb detall. L'adaptació i correcció de les característiques d'aquestes representacions visuals en base de reacció d'estudiant a elles és una part integral del desenvolupament. Les dificultats associades amb representacions visuals poden ser salvades, però només si han investigat sistemàticament per analitzar i amb gestió. En aquest sentit, el disseny de les activitats de l'estudiant dintre de l'entorn d'aprenentatge juga una part tan important com el disseny de l'entorn informatitzat en si mateix. Molts dels exemples estudiats enllacen les representacions visuals a l'àlgebra i, així, obren la possibilitat d'integrar raonament visual/algebraic.

Dreyfus (1991) manifesta que hem d'aspirar a la integració d'un pensament visual, verbal i algebraic. Trobar equilibri, ja que el raonament visual necessita aconseguir igual "estatus" i atenció que el raonament algebraic

### ➤ **Des de la perspectiva de l'ensenyament.**

Sutherland i Balacheff (1999) parteixen de la complexitat didàctica d'entorns computacionals per a l'aprenentatge matemàtic. Diferencien entre coneixement com una construcció de la societat i saber com una construcció d'un individu. Suggereixen que hi ha una inevitable tensió entre aquests dos aspectes de coneixement, i que el professor juga un paper crucial en aquest aspecte. Discuteixen com la teoria de situacions didàctiques difereix d'una altra teoria constructivista respecte a aquesta noció de coneixement premeditat. Suggereixen que entorns basats en l'ordinador preparen l'accés a formalitzar un coneixement matemàtic, a través de la intermediació dels objectes de la pantalla, amb la qual els estudiants interactuen. A través de l'anàlisi de dos casos, els alumnes poden construir significats matemàtics que són superats quan el professor s'ho

proposi i que el professor ha de ser caut del possible propòsit matemàtic amb el qual l'estudiant pot comprometre's, en ordre a decidir com dirigir l'atenció de l'estudiant. Des de la perspectiva del professor la computadora ofereix la possibilitat de fer més visible la naturalesa dels objectes amb què un estudiant està atrafegat.

Segons Pifarre (1995), en la seqüència d'ensenyament-aprenentatge amb el full de càlcul l'ajuda que presta el/la professor/a es pot materialitzar en la realització de tres funcions principalment:

1. El professor és un facilitador de l'aprenentatge dels alumnes, bé mitjançant la instrucció directa o bé proporcionant a l'alumne diferents suports (materials didàctics, ordinador,...) que guien l'elecció i ús de distintes tècniques, procediments i estratègies de resolució de problemes, per ajudar a l'alumne en la construcció del coneixement matemàtic. L'objectiu d'aquests suports didàctics és doble: primer potenciar la reflexió, control i regulació de les pròpies actuacions a partir del control extern, per posteriorment aconseguir que l'orientació sigui progressivament interioritzada fins aconseguir que l'alumne entengui de manera autònoma l'ús estratègic que pot fer dels diferents procediments i tècniques de resolució de problemes.
2. És un model de pensament que en ocasions resol davant dels alumnes alguns problemes, aportant un model de resolució en què el professor explica quines estratègies utilitza, com i per què selecciona determinats procediments i exposa les variables que intervenen en el seu procés de presa de decisions.
3. És un facilitador d'espais de discussió i de reflexió sobre el procés de resolució de problemes, ja sigui en un grup gran o bé en situacions de treball en petits grups. El professor facilita la reflexió dels alumnes sobre els diferents processos que es poden seguir per resoldre un problema potenciant la valoració i justificació.

### 2.3.3 Altres software

Podem definir *software matemàtic*, segons Quesada (1996,pp.33-42) com tota implementació computacional d'algoritmes matemàtics. Entenem per algoritme un conjunt de regles mitjançant les quals s'especifica una sèrie d'estructures de dades i mecanismes o operadors per a la seva manipulació, de tal forma que la seva execució, en un temps finit, permet obtenir una o més estructures noves de dades, on el contingut serà la solució del problema considerat. Fins ara hem parlat del full de càlcul però incorporarem els sistemes de càlcul simbòlic (SCS). Com recull García, Martínez i Miñano (1995), el càlcul simbòlic (o àlgebra computacional) és la tecnologia especialitzada en la manipulació automàtica de fórmules, vectors, matrius,...amb elements numèrics i/o simbòlics. Treballa amb algoritmes algebraics i permet utilitzar expressions amb símbols sense que aquests tinguin cap valor assignat. Si afegim la realització d'operacions algebraiques, desenvolupament d'expressions polinòmiques, diferenciació formal, càlcul matricial amb elements no numèrics,...tenim el que s'anomena el sistema de càlcul simbòlic.

Entre les prestacions que formen part d'un SCS destaquem les següents:

- Operacions amb enters, racionals, reals i complexos en aritmètica de precisió il·limitada.
- Manipulació de variables, fórmules i expressions algebraiques, incloent la simplificació d'aquestes.
- Operacions amb polinomis i funcions racionals d'una o vàries variables.
- Càlcul amb matrius d'elements numèrics i/o simbòlics.
- Resolució d'equacions (algebraiques, diferencials,...)
- Anàlisis simple: derivació, desenvolupament en sèrie,...
- Integració formal
- Càlcul de límits

Els SCS més coneguts són REDUCE, MACSYMA, MATHEMATICA, MAPLE i DERIVE. Per afinitat al nostre estudi ens centrarem en el DERIVE.

La primera versió comercial del DERIVE va aparèixer en 1988, es va desenvolupar a partir del sistema muMATH i està programat en un dialecte de LISP. Corre en sistema operatiu DOS i els seus requeriments de hardware són mínims. Disposa d'un sistema de menú el qual facilita el seu ús. Té unes limitades capacitats de programació i inclou fitxers d'utilitats específiques amb funcions definides en el propi llenguatge. És un SCS apropiat per a la utilització com a eina docent, per la seva agilitat, fàcil ús i accessibilitat.

Amb aquesta eina didàctica tenim la possibilitat de representar gràfiques de funcions. Estaire (2001, pp. 73-76) presenta un mòdul (programa) per DERIVE que, a més de dibuixar la gràfica de la funció, li proporciona els seus elements característics: asímptotes, màxims i mínims, inflexions... Per això, ha de carregar i definir la funció  $f(x)$ .

Hunter i Monaghan, citats per García, Martínez i Miñano (1995), van realitzar un estudi empíric sobre les funcions lineals i quadràtiques utilitzant calculadores que admeten targetes ROM amb DERIVE. Manifesten que el comportament del grup experimental no va ser millor en aspectes conceptuals ni gràfics i en les proves de manipulació algebraica va anar pitjor. Van detectar també incidències negatives sobre la motivació dels alumnes, sobretot a causa de dificultats tècniques com manegar el zoom, confusió amb els resultats aproximats que s'obtenen amb les gràfiques,.... L'ús d'ordinadors de butxaca en un primer moment va ser positiu, però segons avançaven el treball apareixien dificultats, els estudiants van començar a perdre la confiança en les seves capacitats i decreixia la motivació. Manifesten que els professors van trobar més difícil el suport al treball dels alumnes que si es realitza en ordinadors usuals, a més, decreix el intercanvi d'informació entre els alumnes i l'ús



del DERIVE a casa es va transformar en jocs d'ordinador. Però com afirma Drijvers, citat per García, Martínez i Miñano (1995), no s'ha de posar èmfasi en les limitacions de cada eina, salvables pel desenvolupament continu de la tecnologia, sinó ensenyar als alumnes a aprofitar tot el potencial que cada eina aporta, en particular el poder de visualització i la capacitat per experimentar.

Com vam citar a la introducció d'aquest treball, el primer contacte amb un entorn d'aprenentatge informàtic va ser amb els programes d'informàtica educativa del PIE per representar funcions. Aquests programes, una vegada instal·lats, et permeten representar gràficament funcions lineals, quadràtiques o qualsevol funció a estudiar en el batxillerat. Són fàcils de manegar, l'alumne bàsicament ha d'introduir l'equació de la funció desitjada i determinar el rang dels valors dels eixos de coordenades. Aquests programes van molt bé quan l'únic objectiu és fer un estudi de la funció a partir del dibuix, l'alumne no ha de construir res.

## 2.4 Síntesi del marc teòric

Després de fer una lectura de les diferents literatures presentades per a aquesta investigació dintre dels tres àmbits en què queda emmarcada, considerem de gran interès sintetitzar el nostre marc teòric. Es presenten des dels tres àmbits exposats anteriorment, les funcions com a contingut, el marc curricular i el marc tecnològic.

### 2.4.1 Les funcions com a contingut

L'estudi de les funcions es considera des de tres perspectives diferents. La primera des de l'anàlisi de les tasques i la seva representació, la segona des de l'anàlisi de l'aprenentatge i desenvolupament del concepte de funció i gràfic i, per últim, des de l'anàlisi de l'ensenyament de funcions i gràfics.

#### 2.4.1.1 Anàlisi de les tasques i la seva representació

Analitzem el conjunt de tasques proposades sobre els quatre punts: acció, situació, variable i "focus".

- a) **Des del punt de vista de l'acció.** En les tasques proposades majoritàriament, la interpretació requereix de la construcció i, de vegades, la construcció es realitza sobre un tipus d'interpretació geomètric concret (paral·lelisme, incidència, translació). Les tasques que impliquen interpretació i/o construcció se centren en les relacions entre els diferents llenguatges (descripció verbal, taula, gràfic o algebraic) i són majoritàriament de traducció. Les tasques que impliquen identificar un tipus de funció són la gran majoria de classificació i les que han de conjecturar a partir d'una part donada d'un gràfic, de predicció.
- b) **Des del punt de vista de la situació.** Les activitats desenvolupades formen part de la lliçó de matemàtiques "Funcions". El context és predominantment algebraic

i, de vegades, es proposen situacions no abstractes (velocitat, acceleració, canvi de monedes,...).

- c) **Des del punt de vista de variable.** En un principi, considerem una interpretació estàtica del concepte de variable, és a dir, la variable com instrument per descriure pautes numèriques i per generalitzar. Per passar a una interpretació dinàmica, és a dir, emfasitzar la variabilitat i canvi simultani d'una variable en comparació amb una altra.
- d) **Des del punt de vista "focus".** Ens ocupem de qüestions d'atenció i visualització sobre la taula de valors, el gràfic donat, l'equació o des d'una característica particular d'una funció en la seva representació.

### ***2.4.1.2 Anàlisi de l'aprenentatge i desenvolupament del concepte de funció i gràfic***

La forma d'ensenyament que portem a terme no només compte amb la presentació de conceptes i resultats amb les corresponents tècniques de càlcul i representació sinó també amb un entrenament de la **intuïció**, que permet l'alumne descobrir propietats i característiques dels objectius d'estudi a partir d'anàlisis de diverses situacions. En general, això requereix realitzar molts càlculs per poder intuir resultats generals a partir d'observacions particulars i posteriorment una bona capacitat de raonament per contrastar la certesa de les intuïcions. Les **preconcepcions** són discutides a sota; les diverses formes de representar una relació funcional són taules, equacions, gràfics i descripcions verbals; les dificultats relatives a la lectura i interpretació de gràfics que representen situacions algèbriques per atendre a les característiques generals del gràfic; el concepte de variable com un prerrequisit per a l'estudi de funcions i els sistemes de notació simbòlica utilitzats per representar funcions, el gràfic i algebraic.

### ***2.4.1.3 Anàlisi de l'ensenyament de funcions i gràfics***

Considerem, en l'anàlisi de l'ensenyament de funcions i gràfics, els quatre punts següents. Primer, **el punt de partida**, abans d'iniciar l'estudi de funcions amb el full de càlcul a l'aula normal, expressem diferents tipus de lleis aritmètiques que relacionen dues magnituds. Segon, **la seqüenciació**, en un primer moment es donen les pautes per treballar amb el full de càlcul en Excel, després d'entrar en Excel i estudiar la pantalla passem a il·lustrar el seu funcionament amb el seguiment de dos exemples. A continuació es proposa en altre exemple i una qüestió. A partir d'aquest moment, abordem les formes abstractes i formals emfasitzant el pas de les representacions algebraiques a les representacions gràfiques per reconèixer i interpretar qualitativament. Per acabar, considerem la generació de dades des de situacions reals (pes, alçada, temps, canvi de monedes,...). Tercer, les **explicacions**, dirigides a instruir, es troben pautades a la unitat didàctica i, en aquesta recerca, considerem donar orientacions. I quart, els **exemples**, la selecció és de situacions reals relacionades amb la física (velocitat, acceleració). Cal destacar que només han estat dos, que ens serveixen per donar les pautes de treball amb el full de càlcul.

### 2.4.2 El marc curricular

El marc curricular per a l'ensenyament parteix d'una concepció constructivista de l'aprenentatge escolar i de l'actuació educativa del professorat recollida pel Departament d'Ensenyament. Aquest model curricular volem que sigui un instrument per a la reflexió i l'acció educativa.

Subratllem la importància dels conceptes i de les relacions entre conceptes en la construcció del coneixement, i del paper decisiu que juga el llenguatge per codificar, donar forma i adquirir significats. Considerem que tot coneixement és construït per la persona quan interacciona amb el medi i tracta de comprendre'l. Des d'aquest punt de vista, l'aprenentatge no es produeix per la interiorització de significats externs que ja ens vénen donats sinó per la construcció de representacions o models mentals propis: el significat és construït per la persona quan actua sobre l'objecte.

Incloem en el model de pràctica educativa la diversitat d'estratègies i mètodes d'ensenyament-aprenentatge, combinant una metodologia clàssica amb una manipulativa i visualitzadora i acceptem que l'objecte fonamental de l'aprenentatge sigui la construcció del coneixement en l'alumnat. Això comporta:

- a) Que l'alumnat sigui el responsable últim del seu procés d'aprenentatge.
- b) Que l'activitat mental constructiva de cada noi i de cada noia s'apliqui sobre camps d'experiència -sobre continguts- ja elaborats. Es tracta, doncs, d'una reconstrucció del coneixement.

Quant a la tasca del professorat, s'orienta a estimular l'activitat constructiva de l'alumnat, permetent l'alumne continuar progressant en el seu procés d'aprenentatge en facilitar-li els recursos perquè pugui afavorir i orientar aquest procés.

Considerem l'aprenentatge com el procés en què es modifica una activitat per reacció davant una situació donada. L'important és el que facin els alumnes, el que senten o pensen com a reacció als estímuls que els proposem. D'aquí la importància que donem a la **motivació**. Però, per poder motivar l'alumne/a eficaçment, és necessari conèixer el procés d'aprenentatge.

### 2.4.3 El marc tecnològic

Les raons per les quals fem servir el full de càlcul com a eina per desenvolupar els objectius en l'estudi de funcions quedaria a mode de sumari en:

- Obre la possibilitat d'experimentar amb les matemàtiques.
- Permet afavorir la reflexió i l'anàlisi dels resultats.
- Permet un treball autònom de l'estudiant, adequat al seu ritme de treball i a la seva situació personal. D'altra banda, també pot afavorir el treball en petits grups.

- Implica una comprensió del llenguatge algebraic en tant que l'alumne ha de familiaritzar-se amb una nova nomenclatura que, en utilitzar-la, fa servir un llenguatge algebraic.
- Permet manipular dades, símbols i gràfics.
- Possibilita un raonament visual.
- Pot precisar a l'hora d'escollir el rang de valors per estudiar el comportament de la funció per parcel·les amb valors tant petits com vulgui
- En qualsevol moment, si l'alumne/a s'equivoca, pot rectificar ràpidament, i això sempre és gratificant quan s'està fent un treball.
- Possibilita una major implicació de l'alumnat a l'hora de fer la feina perquè el fet de treballar amb l'ordinador els agrada i són ells, que desenvolupen la resolució de l'activitat. L'ordinador només calcula i representa el que tu li demanes, agilitant la feina feixuga.
- Permet que els alumnes siguin protagonistes del que estan fent.
- Obre un ventall de possibles aplicacions, tant en matemàtiques o assignatures afins, com a la resolució de problemes de la vida quotidiana: social, econòmic, ... És una eina molt versàtil i amb gran potencialitat que segurament serà necessari conèixer en un futur no molt allunyat.
- Cada vegada són més els alumnes que disposen d'ordinador i tenen instal·lat l'Excel i així, poden seguir estudiant a casa.
- Es poden introduir els conceptes bàsics de programació (sota Visual Basic), una vegada que els alumnes (de nivells més alts) s'han familiaritzat amb l'entorn d'un full de càlcul, per què creïn programes molt simples que automatitzen alguns aspectes de l'estudi d'una funció, ...
- Es poden crear programes més elaborats en Visual Basic sobre el full de càlcul perquè siguin executats per l'alumne sobre algun aspecte important.

# Capítol 3

## Elaboració de la unitat didàctica

---

Una vegada emmarcada la nostra recerca passem a la primera fase, *fase d'elaboració*. En aquest capítol en primer lloc, s'exposen les qüestions a considerar per dissenyar la unitat didàctica. En segon lloc, concretem els objectius generals. I en tercer lloc, els continguts, objectius i les activitats d'ensenyament-aprenentatge.

### 3.1 Disseny de la unitat didàctica

La unitat didàctica elaborada, en un primer moment per iniciar aquesta recerca tant per a 4t d'ESO com per al Batxillerat Humanístic, es pot consultar als annexos I i II. Per a l'elaboració de les activitats d'aprenentatge que es proposen als alumnes i a les alumnes s'ha tingut molt present el disseny curricular dictat pel Departament d'Ensenyament exposat prèviament dintre del marc curricular (veure 2.2). Les fonts d'informació consultades han estat diverses: articles, quaderns docents, llibres d'informàtica, apunts, qüestions personals, llibres de text i material de classe dels cursos del doctorat en Didàctica de les Matemàtiques (veure bibliografia). Això, ens ha permès crear qüestions per a l'ocasió i dissenyar un dossier d'activitats que inclou qüestions de relació, de generalització, exemples pautats per treballar amb Excel i qüestions de diferents graus de dificultat. Aquest material complementa l'estudi de funcions desenvolupat a l'aula normal i permet un procés constructivista basat en la manipulació i la visualització.

A l'hora de dissenyar la unitat didàctica hem tingut cura de diverses qüestions. Una ha estat la durada, al voltant de les 10 hores. L'altre aspecte a tenir en compte ha estat l'estructura, el procés d'aplicació; hem desenvolupat diverses fases que responen a finalitats diferents. Aquestes fases són:

- a) Fase inicial, en què hem dissenyat una activitat (la primera) per tal de detectar els coneixements previs dels alumnes referits als continguts a treballar en la unitat i, un altre per tal de presentar als alumnes els objectius de la unitat que s'està iniciant.
- b) Fase de desenvolupament, en què les activitats que proposem estan orientades a facilitar a l'alumnat l'aproximació i l'aprofundiment als continguts al voltant dels quals s'ha generat la unitat didàctica.
- c) Fase de síntesi, en què proposem qüestions dintre de les diferents activitats a partir de les quals l'alumne sintetitza l'aprenentatge fet, l'incorpora com a propi i l'aplica a situacions més globals.

També hem precisat la forma en què s'organitzarà l'alumnat a l'aula d'informàtica. Es treballa en grups petits d'un màxim de tres alumnes estables per ordinador però, sempre depenent de les necessitats de cada alumne i de la disponibilitat horària i d'ordinadors a l'aula d'informàtica. En qualsevol cas, la variació controlada de l'organització pot afavorir una adequació a la diversitat de preferències que, certament, es presenta entre l'alumnat.

Per adequar-nos a les diverses disposicions i preferències dels alumnes, els materials i recursos didàctics que fem són de diversos tipus. Utilitzem un llenguatge escrit, oral i d'imatges i com a suports material imprès i informàtic. Entre els programes que poden ajudar-nos a treballar la representació gràfica de funcions hem escollit el full de càlcul. Les raons d'escollir aquesta eina s'exposen en el capítol anterior (veure 2.4.3).

A més de les orientacions didàctiques per a l'ensenyament-aprenentatge considerades en l'elaboració del material docent (es poden consultar en els apartats 2.2.3.1.4. i 2.2.3.2.4.) partim dels següents principis:

1. Les activitats d'aprenentatge que es proposen han de ser variades però, sempre dintre d'un mateix nucli temàtic. El que presentem gira al voltant de la noció de dependència funcional. A l'hora de treballar aquest tema s'han plantejat models de dependència afí i quadràtica (4t d'ESO) i exponencial, logarítmica, polinòmica i racional (Batxillerat Humanístic). Es pretén que es reconguin adequadament aquests models.
2. Dedicuem una atenció especial a la representació gràfica de funcions amb el full de càlcul. Això, significa que cal donar unes pautes per fer-ne una correcta representació. Pretenem que arribin a reconèixer clarament, a través de la seva gràfica, els models abans esmentats i els diferents elements que poden donar informació sobre les característiques de les representacions gràfiques (punts de tall, creixement, ...).
3. En el procés de resoldre la situació proposada en l'activitat d'ensenyament-aprenentatge s'ha de promoure i facilitar que:

- Els alumnes expliquin per escrit (amb llapis i paper i/o en el full de càlcul) les solucions que han trobat. I això, perquè en fer-ho s'està ajudant l'alumne/a a estructurar i ordenar el seu propi pensament d'una manera lògica.
- Combinar la metodologia més "clàssica" amb una metodologia més de "reconstrucció", malgrat que aquesta pot semblar en un principi més lenta.

### **3.2 Objectius generals**





Els objectius generals a tenir en compte per a la unitat didàctica queden recollits en els següents punts:

1. Emprar els llenguatges matemàtics algebraic i gràfic per tal que les seves possibilitats expressives i de raonament millorin en rigor i precisió.
2. Analitzar un conjunt de dades i trobar-hi possibles relacions, fent ús de models matemàtics elements funcionals i algebraics.
3. Emprar amb soltesa el full de càlcul que faciliti les tasques de càlcul i de representació.
4. Trobar relacions entre les dades obtingudes o donades, reconèixer-hi les característiques de les funcions afins i quadràtiques i saber-les expressar mitjançant el llenguatge natural, expressions algèbriques o gràfics.
5. Fet servir el llenguatge associat (algebraic basat en posicions) al full de càlcul per trobar resultats d'expressions algèbriques i construir taules de valors.
6. Emprar el full de càlcul per a la representació cartesiana de gràfics, analitzant-ne les característiques (punts de tall, creixement,...) per mitjà de comparació de diferents gràfics relacionats.
7. Descobrir l'existència de relacions entre parells de valors corresponents a dues magnituds en situacions concretes i saber-la expressar en els casos de dependència afí i quadràtica, fent ús correcte dels conceptes i termes adequats.
8. Reconèixer, per les seves equacions i gràfics, les funcions de dependència afí i quadràtica.
9. Identificar el comportament del gràfic d'una paràbola segons les variacions dels seus paràmetres a través de translacions.

Ara passem a descriure els continguts, els objectius i les activitats d'ensenyament/aprenentatge de la unitat didàctica elaborada per a la investigació a 4t d'ESO.

### 3.3 Continguts, objectius i activitats d'ensenyament-aprenentatge

Com es pot veure en l'annex I la unitat està dividida en cinc blocs:

				
<u>Activitat 0</u>	<u>Activitat 1</u>	<u>Activitat 2</u>	<u>Activitat 3</u>	<u>Activitat 4</u>
<i>Lleis aritmètiques</i>	<i>Treball Excel</i>	<i>Resolució problemes</i>	<i>Estudi rectes</i>	<i>Estudi paràboles</i>

A les quatre activitats que es desenvolupen a l'aula d'informàtica se li han associat una icona i així, identificar ràpidament el contingut de l'activitat. Al llarg de tot el procés es pretén que l'alumne/a pugui desenvolupar aquestes activitats de manera autosuficient seguint les explicacions donades.

Per a cada activitat s'indica quins són els continguts, els objectius i activitats d'ensenyament-aprenentatge. Aquest últim, es realitza per cada qüestió o grups de qüestions similars on es presenta com es plantegen l'ensenyament-aprenentatge i es mostra un retall de la qüestió amb la resposta donada per un grup de treball.

#### **Activitat 0. Lleis aritmètiques**

Activitat prèvia al treball que s'ha de desenvolupar amb l'Excel. Inclou tres qüestions.

#### CONTINGUTS

Conceptes	Procediments
1. Diferents maneres d'expressar la dependència funcional: descripció verbal, taula de valors, expressió algèbrica (fórmula).	1. Expressions de la dependència entre variables mitjançant taules, descripció verbal o expressions algèbriques

➤ **Objectius:** Expressar diferents tipus de lleis aritmètiques que relacionen dues magnituds

➤ **Activitats d'ensenyament-aprenentatge**

Qüestions.

1. Convertir una *descripció verbal* en una *expressió algèbrica* corresponen a una funció.



## Retall de la qüestió

1) Expressa, en cada cas, la funció definida pels criteris següents:

a) Assigna a cada nombre el seu quadrat

Resposta:  $y = x^2$

2. Relacionar les funcions expressades per mitja d'una *taula de valors* amb la seva *descripció verbal*.

## Retall de la qüestió

2) Relaciona cada apartat de la qüestió anterior amb aquest llistat de dades numèriques.

$x$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$
-10	-1100	-0,10	100	200	-4
-9	-810	-0,11	81	162	-3,5
-8	-576	-0,13	64	128	-3
...	...	...	...	...	...
8	448	0,13	64	128	5
9	648	0,11	81	162	5,5
10	900	0,10	100	200	6

Resposta per  $y_1$ : Assigna a cada nombre la diferència entre el seu cub i el seu quadrat

3. Relacionar les funcions expressades per mitja d'una *taula de valors* amb l'*expressió algèbrica*.

## Retall de la qüestió

3) Existeix algun tipus de llei que relaciona les dades de la primera columna amb cadascuna de les altres? Quina?

$x$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$
-5	5	-20	2	-2,5	25
-4	4	-16	3	-2	16
-3	3	-12	4	-1,5	9
...	...	...	...	...	...
3	-3	12	10	1,5	9
4	-4	16	11	2	16
5	-5	20	12	2,5	25

Resposta per  $y_1$ : La relació és  $y_1 = -x$

### Activitat 1. Treball Excel

Amb aquesta activitat iniciem el desenvolupament de la innovació didàctica a l'aula d'informàtica per fer ús del full de càlcul. Primer es donen les pautes per treballar amb

Excel versió 5.0 a l'institut. Després d'entrar en Excel i estudiar la pantalla passem a il·lustrar el seu funcionament amb el seguiment d'un exemple i a continuació es proposa un altre exemple i una qüestió.

### CONTINGUTS FULL DE CÀLCUL

Conceptes	Procediments
1. La pantalla d'Excel.	1. Aplicació de les accions bàsiques.
2. El llenguatge específic per fer càlculs a través d'una expressió.	2. L'estudi de la pantalla d'Excel.
3. El format d'escriptura d'un text.	3. Creació de la taula de valors fent servir la nomenclatura adient.
4. Les accions bàsiques com entrar, guardar, salvar, copiar, arrossegar, la selecció de les dades i el tancar el document.	4. Selecció de les dades per representar gràficament.
5. Les cel·les.	5. Elecció del tipus de gràfic a representar.
6. Taules de valors.	6. Definició de la cel·la que correspon a la variable independent.
7. La representació gràfica.	7. Delimitació del lloc i la grandària del gràfic.
8. La deformació del gràfic.	8. Elecció dels valors de la variable independent a la taula.
	9. La construcció de taules de valors.
	10. L'entrada i la manipulació de les dades.

- **Objectius:** Donar a conèixer a un nivell elemental, dirigit a la ràpida aplicació als models de representació d'una funció afí (descripció verbal, taula de valors, expressió algebraica i gràfica), el funcionament del full de càlcul Microsoft Excel versió 5.0.

#### ➤ **Activitats d'ensenyament-aprenentatge**

Qüestions.

- 1 i 2 En aquests exemples la funció s'expressa per mitja d'una *descripció verbal* i s'ha de passar a *expressió algebraica*, a *taula de valors* i a la *representació gràfica* només per al primer.

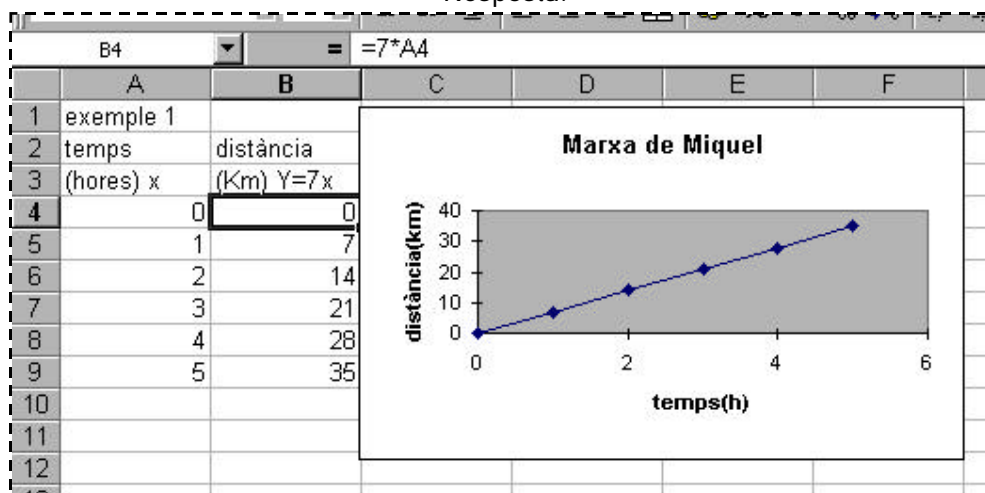
Amb el seguiment d'aquests exemples es pretén que l'alumne/a aprengui com *construir* una taula de valors fent servir la *nomenclatura específica* i utilitzar les *accions bàsiques* per *representar gràficament*.

#### Retall de l'exemple

1) Al Miquel li agrada molt caminar. El seu cronòmetre li indica que la seva velocitat mitjana és de 7 km/h. Anem a veure com es fa una taula que ens indiqui els quilòmetres que recorre segons les

hores que està caminant i després farem una gràfica que representa la marxa del Miquel.

Resposta:



3. Les funcions que s'expressen per mitja d'expressions algèbriques s'han de passar a taules de valors. Aquesta qüestió inclou una taula per omplir i fa referència a les qüestions 2 i 3 de l'activitat 0.

Es pretén comprovar el domini de l'ús del full de càlcul enllaçant amb les taules de valors mostrades a l'activitat 0 de les lleis aritmètiques trobades en aquell moment.

Retall de la qüestió

3) Completar amb 20 valors la taula de valors.

Resposta:

	A	B	C	D	E	F
17						
18	x	$y_1=x^3$	$y_2=2(x-1)$	$y_3=x+3$	$y_4=2/x$	$y_5=(x+1)^2$
19	-10	-1000	-22	-7	-0,2	81
20	-9	-729	-20	-6	-0,22222222	64
21	-8	-512	-18	-5	-0,25	49
22	-7	-343	-16	-4	-0,28571429	36

### Activitat 2. Resolució de problemes

Iniciem l'aplicació del full de càlcul per resoldre situacions. En concret, de canvi de moneda i de velocitat.

#### CONTINGUTS

Conceptes	Procediments
1. Les expressions algèbriques.	1. Expressions de la dependència entre variables mitjançant expressions algèbriques, taules o gràfics.
2. Les descripcions verbals.	
3. El valor numèric d'una expressió algèbrica	2. La representació gràfica d'una funció

algèbrica.	afí.
4. L'equació d'una funció afí.	
5. Les imatges i les antiimatges.	3. Obtenció d'imatges i antiimatges analíticament i gràficament.
6. La representació gràfica de les funcions afins en coordenades cartesianes.	4. Obtenció de l'equació de la funció afí.
7. La variable dependent i la variable independent.	5. Elaboració de taules numèriques a partir d'expressions funcionals.
8. L'ordenada en l'origen.	6. Utilització de les funcions afins en la resolució de problemes.
9. Taula de valors.	7. Utilització de les expressions algèbriques.
	8. Construcció de gràfiques a partir de taules, fórmules i descripció verbal d'un problema.
	9. Lectura comprensiva d'un problema contextualitzat.

➤ **Objectius:** Resoldre problemes contextualitzats aplicant les funcions afins fent ús del full de càlcul.

➤ **Activitats d'ensenyament-aprenentatge**

Qüestions.

1 i 2 La funció tractada s'expressa per mitja d'una *descripció verbal* i s'ha de passar a *expressió algèbrica*, a *taula de valors* i a la *representació gràfica*. En la qüestió 1 la funció és lineal mentre que en la qüestió 2 és afí i per tant, hem d'afegir l'ordenada en l'origen.

Han d'identificar quina és la variable independent i dependent. Han de trobar la relació de dependència de la situació contextualitzada i han de calcular diferents imatges i antiimatges.

#### Retall de la qüestió

1) Volem comprar francs per anar d'excursió a França i segons "El País" del dia 27 de juliol ens diuen que un franc francès ens costarà 25 pessetes.  
a) Quants francs podem comprar amb 2400 pessetes?

Resposta:

B3			
	A	B	C
1	a)		
2	pessetes	francs	
3	2400	96	
4			

3. Reforça l'aplicació de la funció *lineal* per a la resolució d'un problema contextualitzat. S'insisteix en les expressions algèbriques, taula de valors i a la representació gràfica

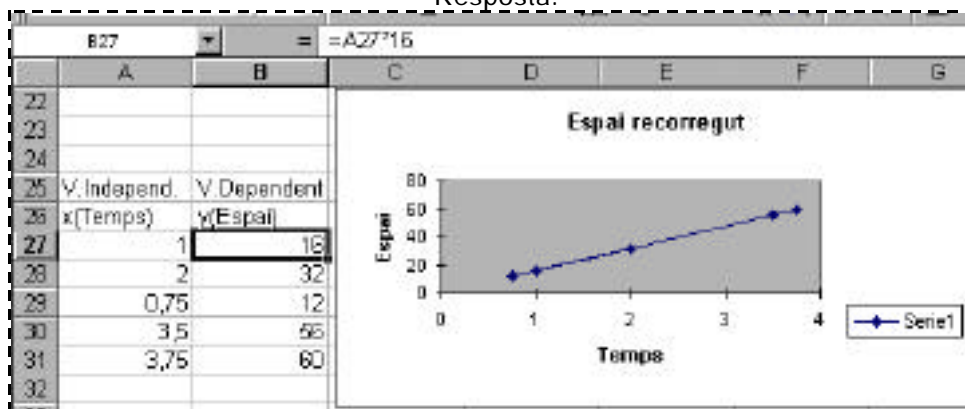
#### Retall de la qüestió

3) Suposem que, anant amb bicicleta, aconseguim portar una velocitat constant de 16 km per hora.

f) Completeu la taula.

g) Representa en un diagrama cartesià els parells de nombres obtinguts en f)

Resposta:



### Activitat 3. Estudi de rectes

Es presenten diferents situacions algèbriques que generen funcions afins per analitzar les seves característiques: pendent (orientació), ordenada en l'origen, punts de tall i la representació gràfica.

#### CONTINGUTS

Conceptes	Procediments
1. Les expressions algèbriques.	1. Construcció de gràfiques a partir de taules i expressions algèbriques.
2. El pendent.	2. Obtenció de l'equació d'una recta.
3. L'ordenada a l'origen.	3. L'anàlisi de la influència dels coeficients de l'equació d'una recta.
4. Els punts de tall.	4. Observació de les gràfiques per reconèixer les característiques de la recta.
5. L'equació d'una recta del pla.	5. Elaboració de taules numèriques a partir d'expressions funcionals.
6. La representació gràfica de les funcions afins en coordenades cartesianes.	6. Identificació de les característiques de la recta en funció dels valors del
7. La taula de valors.	
8. La recta paral·lela i la recta incident.	
9. Funció constant.	

coeficients.

- **Objectius:** A partir de l'equació d'una funció afí reconèixer les seves característiques.

- **Activitats d'ensenyament-aprenentatge**

Qüestions.

- 1 i 3 Construir la *taula de valors* i representar la *gràfica* de les funcions proposades que s'expressen per mitja d'una *expressió algebraica*.

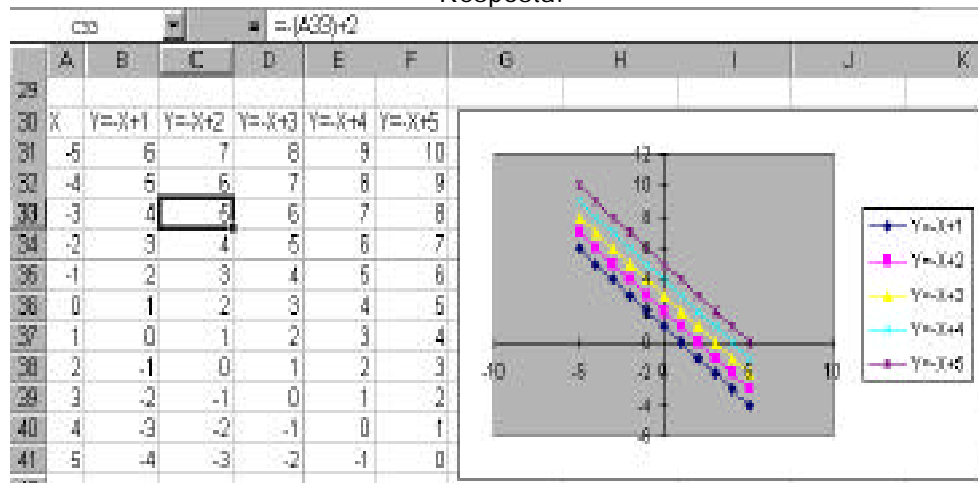
Han d'analitzar la influència del valor del pendent i de l'ordenada a l'origen. Per tant, han d'observar les diferents funcions afins per identificar les seves diferències i semblances, construir la taula de valors i representar gràficament cada funció en un mateix sistema de coordenades. En la qüestió 1 estudien el cas particular de les funcions lineals mentre que la qüestió 3 s'estudia un dels tipus de les funcions afins.

### Retall de la qüestió

3) Dibuixa les següents funcions d'equacions i treu-ne conclusions per cadascuna. Fes cada apartat en un mateix sistema de coordenades.

$$b) y = -x+1, y = -x+2, y = -x+3, y = -x+4, \dots y = ax+b, a < 0.$$

Resposta:



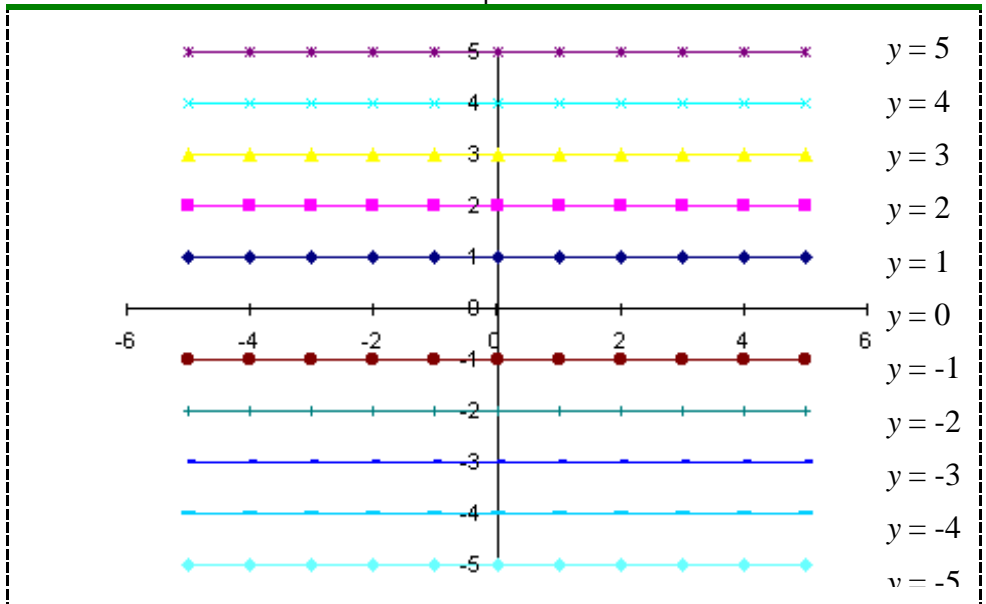
- 2 Relacionar l'*expressió algebraica* d'una funció constant amb la seva *gràfica*.

Han de construir la taula de valors per arribar a representar gràficament cada funció en un mateix sistema de coordenades similar al que es mostra al dossier i han d'observar els diferents funcions constants per identificar les seves diferències i semblances

### Retall de la qüestió

2) Tens dibuixades les gràfiques de les funcions  $y = 1$ ,  $y = 2$ ,  $y = 3$ ,  $y = 4$ ,  $y = 5$ ,  $y = -1$ ,  $y = -2$ ,  $y = -3$ ,  $y = -4$ ,  $y = -5$ . Escriu l'equació de cadascuna de les gràfiques al lloc corresponent després de dibuixar-les amb l'ordinador. Escriu què observes què tenen de particular aquestes gràfiques.

Resposta:



- 4 Es proposen dos apartats. Primer, relacionar dues equacions de funcions afins amb la seva gràfica i segon, les funcions afins s'expressen per mitja d'una *descripció verbal* i s'ha de convertir a una *expressió algèbrica*. A més, han de descriure les seves característiques comparant-les amb les rectes dibuixades.

Retall de la qüestió

2) Tens dibuixades les gràfiques de les funcions  $y = x + 3$  i  $y = x - 5$ .

b) A continuació has de trobar altres rectes que compleixin certes condicions, escriu la seva equació i compar-les amb les rectes dibuixades.

Resposta:

	equació	comparació amb les rectes dibuixades
paral·lela i entre les dues rectes	$y = x - 2$	Té el mateix pendent i talla als punts $(0, -2)$ i $(2, 0)$

...

...

...


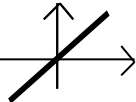
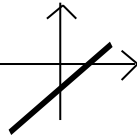
que les talli i passi per (0, 2)	$y = 3x + 2$	<i>No té el mateix pendent, <math>a = 3</math> i talla als punts (0, 2) i (-2/3, 0)</i>
----------------------------------	--------------	---

- 5 Realització d'un *sumari* en el que a partir dels coeficients de l'equació d'una recta identifiquen el punt de tall sobre l'eix OY, la seva orientació i l'esquema gràfic. Per omplir algunes caselles de la taula han de recopilar les característiques presentades en les qüestions anteriors segons la seva expressió algebraica i per omplir les altres, han de deduir les característiques a partir de la construcció d'expressions algebraiques, taula de valor i gràfics.

### Retall de la qüestió

5) Omple la següent taula:

Resposta:

$y = ax + b$	$b > 0$	$b = 0$	$b < 0$
$a > 0$	Talla a l'eix OY en el punt (0, $b$ ). La seva orientació és <b>positiva (creix)</b> Esquema gràfic 	Talla a l'eix OY en el punt (0, 0). La seva orientació és <b>positiva (creix)</b> Esquema gràfic 	Talla a l'eix OY en el punt (0, $b$ ). La seva orientació és <b>positiva (creix)</b> Esquema gràfic 
...	...	...	...

### Activitat 4. Estudi de paràboles

Aquesta activitat s'inicia amb la identificació de la relació funcional afí i quadràtica en un context geomètric per donar pas a la presentació de diferents situacions algebraiques que generen funcions quadràtiques per analitzar les seves característiques: vèrtex, l'eix de simetria, punts de tall, orientació de les branques, obertura i l'esquema gràfic. S'inclou en tres qüestions teòriques per omplir les característiques de l'equació de la paràbola i dues qüestions per desenvolupar l'expressió  $a(x - q)^2 + p$  en  $ax^2 + bx + c$  i a l'inrevés.

### CONTINGUTS

Conceptes	Procediments
1. Les expressions algebraiques.	1. Construcció de gràfiques a partir de taules i expressions algebraiques.
2. La variable independent i la variable dependent.	2. Identificació de la variable dependent i de la variable independent.
3. La imatge i la antiimatge.	



- 
- |   |   |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>4. La relació de dependència lineal i quadràtica.</li> <li>5. L'equació d'una recta i d'una paràbola del pla.</li> <li>6. La representació gràfica de les funcions lineals i quadràtiques en coordenades cartesianes.</li> <li>7. La taula de valors.</li> <li>8. Els punts de tall.</li> <li>9. Vèrtex.</li> <li>10. L'eix de simetria.</li> <li>11. L'orientació de les branques.</li> <li>12. L'Obertura de la paràbola.</li> <li>13. La translació.</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>3. Obtenció de la imatge i la antiimatge.</li> <li>4. Obtenció de l'equació d'una recta i d'una paràbola.</li> <li>5. Identificació de les característiques de la paràbola en funció dels valors dels coeficients.</li> <li>6. L'anàlisi de la influència dels coeficients de l'equació d'una paràbola.</li> <li>7. Observació de les gràfiques per reconèixer les característiques de la paràbola.</li> <li>8. Elaboració de taules numèriques a partir d'expressions algèbriques.</li> </ol> |
|---|---|
- 

➤ **Objectius:** Estudiar les funcions quadràtiques, és a dir, identificar el comportament del gràfic d'una paràbola segons les variacions del seus paràmetres a través de translacions.

➤ **Activitats d'ensenyament-aprenentatge**

Qüestions.

1. A partir de la *identificació verbal* de les variables han de trobar els dos tipus de relació funcional (lineal i quadràtica) per completar la taula valors. Han d'identificar la variable dependent i la variable independent i expressar la relació de dependència algebraicament. Per últim, han de representar gràficament les dues funcions per observar que correspon a una recta i a una paràbola, respectivament.

---

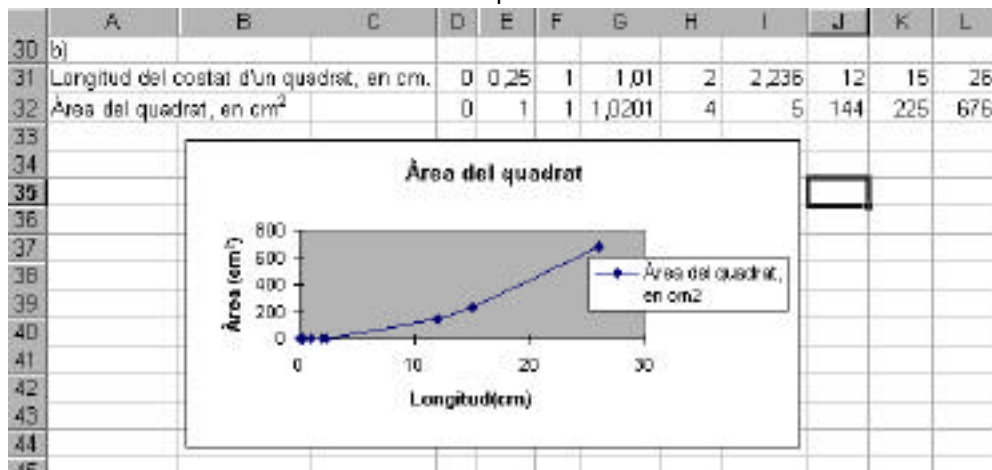
#### Retall de la qüestió

1) Completeu les taules següents i a continuació representeu aquests punts en el seu sistema de coordenades.

a)

longitud del costat d'un quadrat, en cm	0	0,25	1	1,01	2	15	26		
àrea del quadrat, en cm <sup>2</sup>								5	144

Resposta:



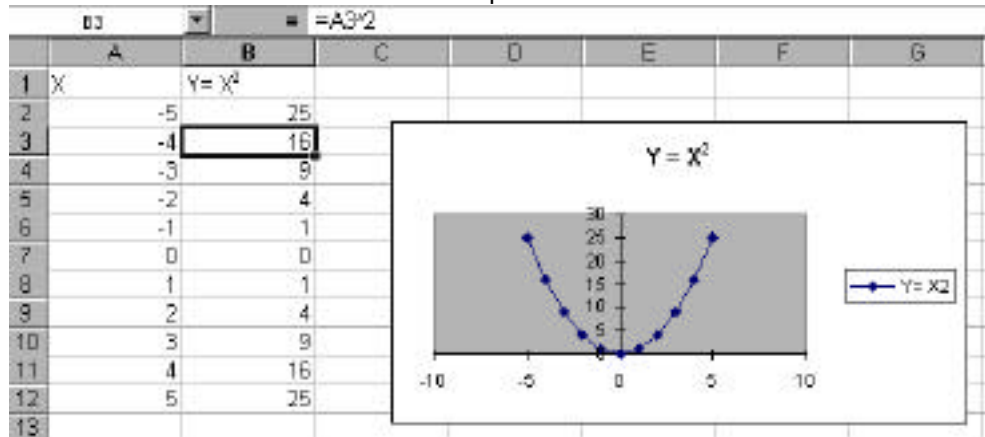
2. La funció *quadràtica* s'expressa per mitja d'una *expressió algèbrica*, i s'ha de passar a *taula de valors* i a la *representació gràfica*.

En acabar, han de passar el gràfic a paper mil·limetrat.

Retall de la qüestió

2) Completa la taula de valors per la funció  $y = x^2$  i fes la seva representació gràfica. A continuació la dibuixes en paper mil·limetrat.

Resposta:



3. Comprovar que el gràfic de la paràbola correspon a l'expressió algèbrica donada.

Han de construir la taula de valors per arribar a representar gràficament la funció desitjada i han d'indicar i relacionar el vèrtex amb l'eix de simetria.

Retall de la qüestió

3)  
 b) Quin és l'eix de simetria d'aquesta paràbola si dobleguessis el paper?  
 c) Quin és el punt de tall del gràfic amb l'eix,

de simetria? Quin és el vèrtex d'aquesta paràbola? Per tant, quina relació hi ha entre el vèrtex i l'eix de simetria?

Resposta:

	A	B	C	D	E	F	G
17							
18	ACTMTAT 3						
19	b) L'eix de simetria és X=0.						
20	c) El punt de tall del gràfic amb l'eix de simetria és (0,0); el seu vèrtex és (0,0)						
21	El vèrtex i el punt de tall del gràfic amb l'eix de simetria són el mateix punt i en aquest cas és (0,0)						
22							

4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13

En la qüestió 4 es treballen funcions del tipus  $y = ax^2$ , en la qüestió 6, 7 i 8 del tipus  $y = ax^2 + p$ , en la qüestió 10 i 11 del tipus  $y = a(x - q)^2$  i en la qüestió 12 i 13 del tipus  $y = a(x - q)^2 + p$ . En totes elles:

La funció **quadràtica** s'expressa per mitja d'una *expressió algebraica*, i s'ha de passar a *taula de valors* i a la *representació gràfica*.

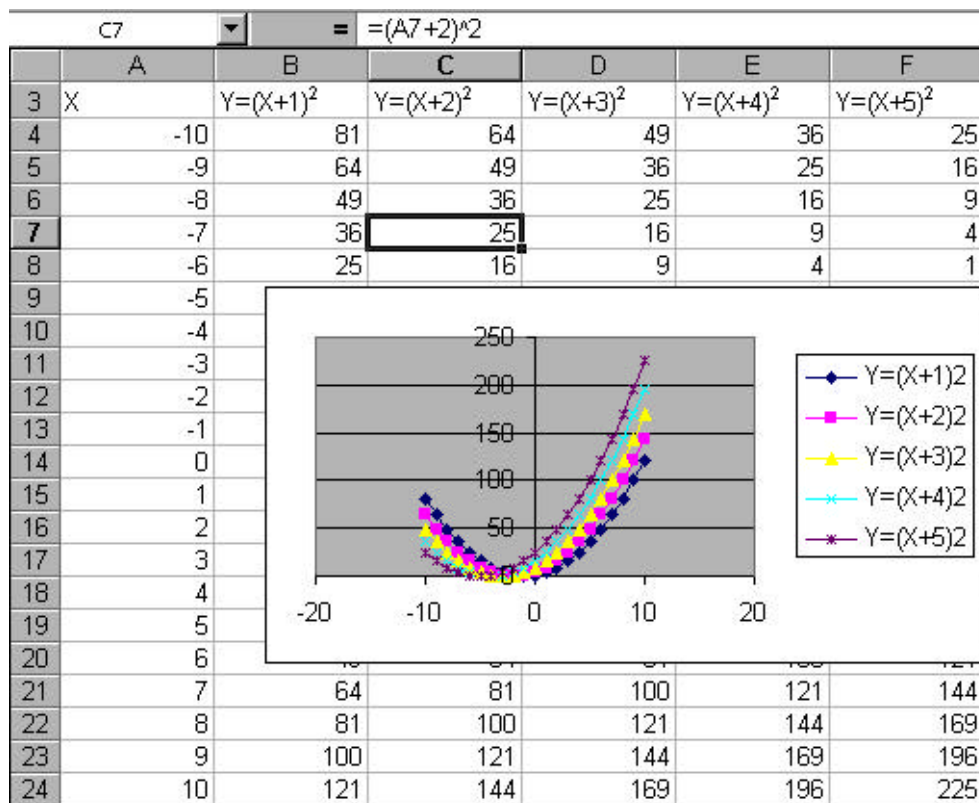
Han d'analitzar la influència del seus paràmetres i han d'observar els diferents tipus de funcions quadràtiques per identificar les seves diferències i semblances. Per això, han de construir la taula de valors i representar gràficament cada funció en un mateix sistema de coordenades.

#### Retall de la qüestió

10) Anem a estudiar la variació del paràmetre  $q$  per les funcions  $y = a(x - q)^2$  següents:

a)  $y = (x + 1)^2$ ,  $y = (x + 2)^2$ ,  $y = (x + 3)^2$ ,  
 $y = (x + 4)^2$ ,  $y = (x + 5)^2$

Resposta:



- 5 i 9 Han de completar les frases que ens informen de les característiques de les funcions quadràtiques:  $y = ax^2$  i  $y = ax^2 + p$ .

#### Retall de la qüestió

9) Podem assegurar que la representació gràfica de les funcions d'expressió matemàtica  $y = ax^2 + p$  és una paràbola amb les característiques següents:

Respostes pels apartats a i b:

- a) és simètrica respecte a l'eix  $x = 0$
- b) és la paràbola d'equació  $y = ax^2$  traslladada  $p$  unitats seguint l'eix d'ordenades (amunt si  $p$  és positiu i avall si  $p$  és negatiu)

- 14 i 15 Han de transformar l'expressió algebraica  $a(x - q)^2 + p$  en  $ax^2 + bx + c$  i a l'inrevés, efectuant les operacions necessaris.

#### Retall de la qüestió

14) Donada l'expressió algebraica  $3(x - 7)^2 + 5$ , transformeu-la, efectuant les operacions necessàries, en una del tipus  $ax^2 + bx + c$ .

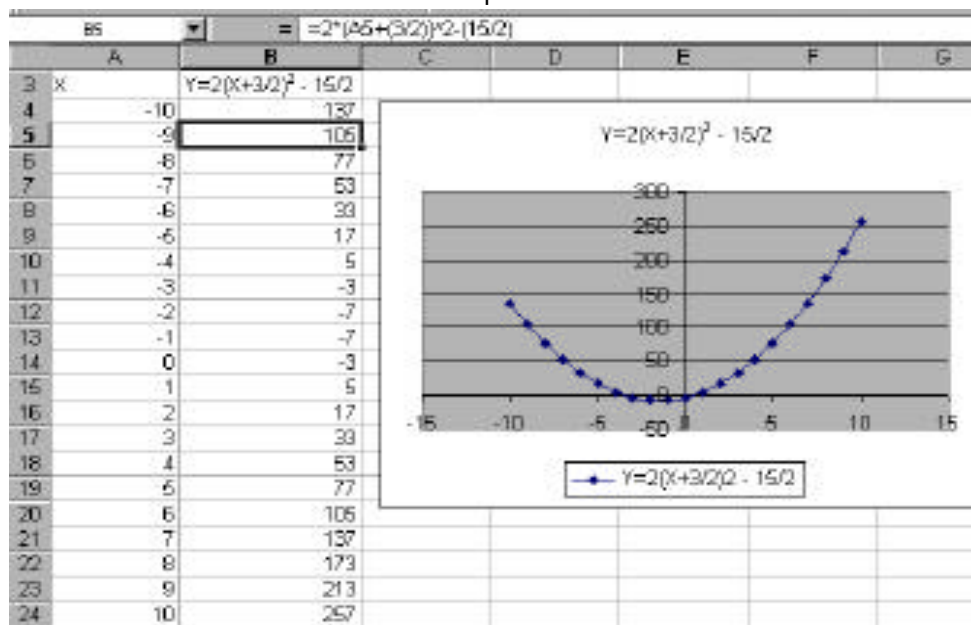
Resposta:  $3x^2 - 42x + 152$

- 16 i 17 S'estudia la funció  $y = ax^2 + bx + c$  transformant-la prèviament en  $y = a(x - q)^2 + p$ .

Retall de la qüestió

16) Comprova que la funció que té per fórmula  $f(x) = 2x^2 + 6x - 3$  es pot transformar en  $f(x) = 2(x + 3/2)^2 - 15/2$  i per tant, la funció donada és una funció que es representa gràficament amb una paràbola on el vèrtex correspon al punt  $(-3/2, -15/2)$  i que té per eix de simetria la recta d'equació  $x = -3/2$

Resposta:



18) Ens trobem amb la realització d'un *sumari* en el que a partir dels valors dels paràmetres d'una paràbola identifiquen els punts de tall, el vèrtex, la simetria, orientació de les branques, l'obertura i la representació gràfica. Per omplir les caselles de la taula han de recopilar les característiques presentades en les qüestions anteriors segons la seva expressió algebraica i en cas de dubtes, poden deduir les característiques a partir de la construcció d'expressions algebraiques, taula de valor i gràfics.

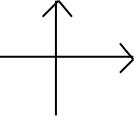
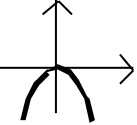
Retall de la qüestió

18) Acabeu d'omplir la següent taula

Resposta:

$y = ax^2 + bx + c$ $= a(x - q)^2 + p$	punts de tall	vèrtex	simetria	orientació de les branques	obertura de la paràbola	representació gràfica
---	---------------	--------	----------	----------------------------	-------------------------	-----------------------



$q = 0$	$a > 0$	(0,0)	(0,0)	respec te a OY	cap amunt	A més gran el $ a $ més gran l'obertur a	
$p = 0$	$a < 0$	(0,0)	(0,0)	respec te a OY	cap avall	A més gran el $ a $ més gran l'obertur a	
...	...	..	...	...	...	...	...

# Capítol 4

## Disseny de la metodologia de recerca

---

Abans de passar a la segona fase d'aquest treball d'investigació, *fase empírica*, s'exposen els elements bàsics que determinen la metodologia emprada en la realització del nostre estudi. En primer lloc, es fa una anàlisi del procés i de les seves dificultats. En segon lloc, es concreta el context d'actuació per al desenvolupament de l'experiència a l'aula. En tercer i quart lloc, es donen detalls dels instruments de recollida de dades i de les tècniques per a l'organització i anàlisi d'aquestes. I per últim, s'exposa la metodologia de treball.

### 4.1 Anàlisi del procés i de les dificultats

En el moment de decidir portar a terme aquesta experiència per estudiar les funcions fent ús del full de càlcul van trobar-nos amb una sèrie de dubtes. Presentem algunes de les preguntes que vam fer-nos i com superar aquestes dificultats des de tres punts de vista: la unitat didàctica, l'eina informàtica i la metodologia de treball.

❖ Des del punt de vista de la unitat didàctica.

- Quin tipus d'activitats proposar?

Ens plantejem la necessitat de trobar noves activitats que permetin assolir els objectius docents aprofitant la capacitat d'un full de càlcul i no competint amb aquest.

❖ Des del punt de vista de l'eina informàtica.

- Com i en quins casos permetre l'ús de l'ordinador?

L'ordinador ha de suposar un reforç positiu i útil per l'aprenentatge de les matemàtiques.

- Formació pròpia

El ràpid avenç de la tecnologia exigeix una actualització permanent, com a investigadora i com a docent, que has de fer compatible amb altres tasques. En ocasions, això resulta bastant difícil.

❖ Des del punt de vista de la metodologia de treball.

- Com evitar que la classe de matemàtiques es converteixi en classe d'aprendre a utilitzar una eina informàtica?

Un requisit fonamental de qualsevol eina novedosa que es pretén utilitzar és el de minimitzar els temps emprats en el seu aprenentatge. I és molt important que l'elecció de l'eina a utilitzar es faci tenint en compte que la dificultat d'ús pot conduir a una desmotivació per l'assignatura. A més, si en la seqüenciació presentada s'explora prèviament el full de càlcul redueix que l'alumne se centri més en la problemàtica de l'ordinador-programa que en la del problema matemàtic.

- Com gestionar l'aula fent ús de les noves tecnologies?

Ja que afecta a l'estructura horària del centre de manera que tingui accés a una sala d'ordinador i també, a la infraestructura de l'institut, disposar al menys de vuit ordinadors per poder treballar amb els alumnes. Sense oblidar el nombre d'alumnes que tenim a cada classe.

Aquestes dificultats s'han anat superant, de mica en mica, amb una bona dosi de paciència, entusiasme, perseverança i amb molta il·lusió per treballar per un ensenyament actual i de qualitat. Ens ha estat d'utilitat el fet de:

❖ Des del punt de vista de la unitat didàctica.

- Dissenyar meticulosament el guió de les activitats a realitzar. Donant les instruccions tècniques per treballar amb el full de càlcul Excel al nostre institut.
- Elaborar i escollir amb molta cura les activitats a proposar, així com, la manera d'exposar-les.

❖ Des del punt de vista de l'eina informàtica.

- Intentar fer una presentació atractiva de l'eina escollida, destacant les seves possibilitats i aplicacions a altres camps, ja sigui de matemàtiques com d'altres assignatures i al seu ús a la vida quotidiana.

❖ Des del punt de vista de la metodologia de treball.



- Intentar imaginar-nos el comportament i les dificultats de l'alumnat a l'hora de portar a terme la seva feina.
- Assegurar-nos abans de començar la classe que els ordinadors i tot el material necessari estiguin a punt.

## 4.2 Context d'actuació

L'institut IES Badia del Vallès, centre on des de l'àrea de matemàtiques hem portat a terme tota la part empírica, es troba situat a Badia del Vallès població del cinturó industrial de Barcelona. El municipi té totes les característiques d'una ciutat dormitori, amb un gran percentatge de població immigrada. Compta en l'actualitat amb uns 18000 habitants aproximadament, distribuïts amb menys d'un quilòmetre quadrat de superfície, el que fa que sigui una població amb molta densitat.

L'institut és un edifici que va ésser edificat el 1987 com a institut de Formació Professional, quan encara la població s'anomenava Ciutat Badia, i que gràcies a l'esforç de la comunitat educativa, gaudeix en l'actualitat d'una notable infraestructura. Concretament disposa: per a l'ESO, d'una aula d'informàtica amb deu ordinadors, "aula Pentium"; per al Batxillerat, una altra amb vuit ordinadors, "aula Argos"; per als Cicles Formatius Administratius, una altra amb vuit, i per últim, per als Cicles Formatius Elèctrics una aula taller amb sis ordinadors. Com a conseqüència de la implantació de la Reforma, en els últims anys s'han anat reestructurant diferents espais del centre adaptant-los a les necessitats presentades.

## 4.3 Instruments de recollida de dades

Durant el període d'aprenentatge de l'alumnat hem utilitzats diferents tècniques d'observació i registre. L'ordre de presentació es basa atenent a la seva seqüenciació temporal i a les característiques de les dades recollides, qualitatives i/o quantitatives malgrat, que es pot considerar un estudi qualitatiu. Per això, es mostren en primer lloc els instruments de recollida de dades durant el procés d'aprenentatge: el quadern de camp, enregistrament en disquet, enregistrament en vídeo i qüestions del material docent; i a continuació els instruments emprats en finalitzar el procés d'aprenentatge: el qüestionari i les entrevistes.

L'observació i l'enregistrament del procés realitzat s'ha desenvolupat des de tres perspectives:

- ❖ Una col·lectiva, on s'ha pres nota en el quadern de camp de la dinàmica de classe i de les dificultats que s'han anat plantejant, en general, al llarg de tot el procés realitzat.
- ❖ Una altra per grup de treball, on s'ha recollit la tasca desenvolupada de cada grup en disquet. S'ha pres nota en el quadern de camp de les preguntes formulades per alguns grups de treballs, aquests han estat escollits a l'atzar. També, s'ha enregistrat en

vídeo algunes sessions de dos grups de treball escollits a l'atzar. A més, s'han recollit les respostes d'algunes qüestions del material docent, lliurat voluntàriament.

- ❖ I una altra individualitzada, on s'han tingut en compte les seves opinions de tot el procés a través de qüestionaris i entrevistes.

Passem a descriure cadascun dels instruments de recollida de dades utilitzats:

- **El quadern de camp:** on s'han anotat dia a dia les observacions que s'han cregut oportunes del desenvolupament de tota la classe. Concretament, s'han ressaltat les incidències i dificultats presentades en el procés d'aprenentatge. Aquestes notes han servit per modificar i incorporar el que s'ha cregut oportú per millorar i salvar els obstacles presentats. A més, durant l'últim curs 99/00 es va prendre nota de les preguntes que van formular alguns grups, escollits a l'atzar.
- **Enregistrament en disquet:** de tota la feina feta sessió a sessió. Això ha donat l'oportunitat de revisar després de cada sessió el treball fet i així veure l'evolució de la tasca a desenvolupar i els errors comesos anotats en el quadern de camp.
- **Enregistrament en vídeo:** del desenvolupament d'algunes sessions senceres en alguns grups, també escollits a l'atzar. Aquest enregistrament va ser possible en instal·lar un convertidor TV a l'ordinador. Això, només va ésser durant l'últim curs 99/00 i ens ha servit per analitzar el procés de construcció realitzat per resoldre les qüestions plantejades.
- **Qüestions del material docent:** Només durant l'últim curs 99/00 es van recollir unes qüestions de les activitats que resumeixen les característiques principals i el comportament de les funcions en estudi. El lliurament d'aquestes qüestions va ésser voluntari. D'aquesta manera volia veure el grau de participació de l'alumnat i recollir informació d'una part molt important de la tasca desenvolupada per ells.
- **Qüestionari:** en finalitzar l'estudi empíric se'ls va passar un qüestionari on es recullen les opinions personals de l'alumnat. Aquest qüestionari consta de tres parts; la primera, intenta recollir informació sobre l'ús de l'ordinador i coneixement del full de càlcul de cada alumne abans d'aquest treball. La segona part, pretén determinar el grau de dificultat respecte el funcionament i ús del full de càlcul. I per últim, són qüestions pròpies de l'estudi de funcions per veure quins són els obstacles presentats.
- **Entrevistes:** després de passar el qüestionari, és a dir, en finalitzar tot el procés d'aprenentatge del tema en estudi van realitzar-se algunes entrevistes. A 4t d'ESO es van escollir a l'atzar de tres a quatre alumnes per grup classe (si era possible el mateix nombre de nois que de noies) i al Batxillerat dues alumnes que ja havien format part de la mostra de l'estudi pilot a l'ESO. En aquestes entrevistes s'ha volgut tenir un contacte més directe amb l'alumnat per recollir amb tot detall la seva opinió sobre alguns punts del procés d'aprenentatge. Per exemple, les dificultats de nomenclatura, reconèixer elements visuals amb la comparació de gràfics, el paper exercit per l'ordinador i el full de càlcul, la motivació, opinió de la

---

unitat didàctica, veure el domini d'un llistat de coses fetes i per últim suggeriments per millorar el seu aprenentatge.

#### 4.4 *Tècniques per a l'organització i anàlisi de dades*

Per analitzar les dades recollides hem organitzat tota la informació recollida del nostre estudi utilitzant diferents tècniques, tenint en compte els instruments de recollida de dades emprats per cada ocasió. Per tant, ens trobem amb categoritzacions, taules, gràfics estadístics, xarxes sistèmiques i mapes conceptuals. En algun moment hem fet una transcripció literal de les opinions dels alumnes, aquestes es troben entre cometes i en cursiva.

- **Categoritzacions:** tenen per objectiu classificar les dificultats i errors. En aquests cas, corresponen a dificultats i/o errors en les respostes donades pels alumnes referent al funcionament del full de càlcul i a les característiques de les funcions estudiades.
- **Taules:** tenen per objectiu ordenar les dades per files i columnes. Aquestes taules es presenten dintre de la categorització de dificultats i/o errors i també en el qüestionari i en les entrevistes. Per ajudar a entendre l'evolució de les activitats realitzades pels grups de treball a l'aula d'informàtica, presentem un quadre un tant especial perquè relacionem cada sessió desenvolupada amb les activitats realitzades indicant on es troba cada grup de treball.
- **Gràfics estadístics:** tenen per objectiu facilitar la interpretació de les dades que prèviament han estat organitzades en taules. Farem servir el diagrama de barres i el diagrama de sectors.
- **Xarxes sistèmiques:** la xarxa sistèmica és una descripció artificial del llenguatge, ja que l'analista tracta de fixar les seves percepcions respecte les dades obtingudes. Ens permet que aquestes interpretacions siguin evidents i es pugui discutir millor sobre elles; i que siguin menys vagues en la seva aplicació pràctica. En aquests treball utilitzem les xarxes per organitzar dades qualitatives de les respostes a preguntes obertes que es troben en el qüestionari i les entrevistes.
- **Els mapes conceptuals:** tenen per objectiu representar relacions significatives entre conceptes en forma de proposicions. Una proposició consta de dos o més termes conceptuals units per paraules per formar una unitat semàntica. En el nostre cas, s'han fet servir per organitzar part de les entrevistes.

## 4.5 Metodologia de treball

És una recerca inscrita dins del camp de la Didàctica de les Matemàtiques avaluable on es poden produir canvis que ocorren en funció del temps. Inclou un material que depenent de les necessitats de l'alumnat es pot modificar. Cal tenir molta cura en el procés d'ensenyament/aprenentatge i per això, volem destacar alguns aspectes fonamentals d'aquesta metodologia de treball que són: la forma d'ensenyament que presentem, el paper que juga l'alumne/a i la professora, la coordinació entre les classes impartides a l'aula d'informàtica amb les impartides a l'aula normal, disponibilitat de l'eina didàctica, l'eina de suport per impartir les classes i per últim, a mode de sumari recollim tots els aspectes que han marcat la metodologia de treball.

- **La forma d'ensenyament** que presentem no només ha de contemplar la presentació de conceptes i resultats amb les corresponents tècniques de càlcul, sinó també un entrenament de la intuïció, que permet a l'alumne descobrir propietats i característiques dels objectes d'estudi a partir de l'anàlisi de diverses situacions. Aquest, en general, requereix molts càlculs per poder intuir resultats generals a partir d'observacions particulars i posteriorment una bona capacitat de raonament per contrastar la certesa de les intuïcions. Recordem que volem treballar sota un model constructivista enfocat en la manipulació i la visualització.

- **El paper que juga l'alumne/a i la professora**

L'alumne/a és subjecte actiu en el procés de l'ensenyament a partir dels seus descobriments, descobriments guiats per una ajuda pedagògica, construeix els seus coneixements i els significa. El veritable artifici en la construcció del coneixement és l'alumne.

La professora ensenya a aprendre, és la que presta l'ajuda pedagògica. Què entenem per ajuda pedagògica? Segons Yábar (1995) és tota orientació que, donada en el moment oportú, permet l'alumne continuar progressant en el seu procés d'aprenentatge i que utilitza tots els mitjans disponibles per afavorir i orientar aquest procés.

Recordem que entre les característiques d'aquesta recerca cal destacar que la persona docent i la investigadora són la mateixa, és a dir, l'autora d'aquest treball. Per tant, des d'un primer moment, ja es va tenir molt present en comptar amb aquesta doble funció. Això, comporta saber diferenciar com has d'actuar i en quin moment, la qual cosa no sempre és fàcil.

Per clarificar les funcions com a docent i com a investigadora respecte als diversos aspectes que s'han presentat mostrem la següent taula.

	Com a investigadora	Com a docent
Metodologia de treball	Desenvolupar un projecte i aportar uns resultats de l'anàlisi del procés d'aprenentatge.	Orientar en el moment oportú per permetre a l'alumne continuar progressant en el seu procés d'aprenentatge.
Unitat didàctica	Dissenyar i elaborar un material que s'adeqüi a l'estudi de les funcions. Avaluar-lo i millorar-lo.	Fer servir un material que s'adeqüi a la programació i a les necessitat dels alumnes.
Full de càlcul	Permetre un procés d'aprenentatge constructiu. Versàtil i amb moltes possibilitats per investigar.	És un software que està instal·lat en la majoria d'ordinadors, tant a l'institut com a casa. És de fàcil utilització.
Convertidor TV	Permetre enregistrar en vídeo el treball d'alumne.	Serveix per explicar, clarificar en el moment d'impartir la classe. És una eina de suport.
Procés de recollida de dades	Donar prioritat.	Posteriorment orientar.
Temps dedicat a l'estudi	Només està limitat el període d'aprenentatge i el moment de la recollida de dades.	Està limitat per la programació a donar, per les tasques compartides a l'institut i per la infraestructura del centre.

➤ **Coordinació entre les classes impartides a l'aula d'informàtica i l'aula normal.**

Les classes a l'aula normal, tant les que són anteriors com les són a posteriori de les sessions informàtiques, s'han de començar enllaçant amb el que es farà o amb el que s'ha fet amb el full de càlcul. És molt important que vegin aquesta connexió i que la feina feta amb el full de càlcul no sigui una cosa aïllada, sinó que completa la seva formació

matemàtica. Perquè existeixi una bona organització és necessari que tots, professorat/alumnat, tinguin les seves tasques clares i ben definides.

#### ➤ **Disponibilitat de l'eina didàctica**

Per portar a terme el nostre estudi empíric es necessita una aula d'informàtica amb almenys vuit ordinador i així, poder treballar amb grups formats per dos o tres alumnes. El programa amb el qual es treballa és l'Excel versió 5.0, aquest programa es troba instal·lat en tots els ordinadors de l'institut. La qual cosa, facilita la feina de la docent ja que pot treballar des de qualsevol ordinador sense necessitat d'anar a l'aula d'informàtica i també la feina de l'alumnat ja que tenint un ordinador a la seva disposició poden treballar.

#### ➤ **Eina de suport per impartir la classe.**

També nosaltres com a docents hem d'avançar tecnològicament i aprofitar els nous avenços adoptant noves formes per a fer les coses. Així que, a partir del curs 99/00, hem incorporat a la sala d'ordinadors un nou element, una pantalla de televisió que a través d'un convertidor de mides molt reduïdes i portàtil permet visualitzar les imatges VGA del PC a TV. També pot fer-ho a monitors S-VHS, vídeo projectors, projectors LCD, VCR i qualsevol altre dispositiu de vídeo dotat de l'entrada pertinent. És fàcil d'instal·lar i d'utilitzar. Així que, en el moment en què s'inicia la classe a la sala d'ordinadors tots plegats miren la pantalla del televisor perquè a través d'ella es veu el que surt a l'ordinador que està connectat, i la professora explica el que han de fer i dona les pautes de treball, les quals normalment estan escrites en el material imprès que té cada alumne juntament amb les activitats que cal desenvolupar. Quan s'acaba l'explicació tothom comença a treballar. El fet de tenir l'ordinador connectat a la pantalla d'un televisor en iniciar la classe, ajuda a que els alumnes estiguin més atents i la professora en un primer moment no ha d'anar un per un, i, a més, durant el transcurs de la classe pots cridar-los l'atenció per a fer observacions del que estan fent i així:

Clarificar i diagnosticar una situació problemàtica.

Formular estratègies d'acció per resoldre el problema.

Posar en pràctica i avaluar les estratègies d'acció.

Ressaltar i enllaçar conceptes i/o procediments i, a més a més, en acabar la classe es pot fer un resum molt visual i manipulatiu de tota la feina, ja que tots poden veure com es fa i fer-ho ells mateixos a la vegada.

#### ➤ **Sumari.**

Com qualsevol recerca de Didàctica comporta una dinàmica de renovació i experimentació. Concretament, en el treball que presentem ha implicat una adaptació als recursos tants humans com materials, enfocat al dossier de l'alumne i a les tecnologies disponibles del centre on s'ha desenvolupat l'estudi empíric:

- Humans, perquè el nombre d'alumnes és diferent en cada grup i de vegades ha estat possible que una companya de l'àrea col·laborés en la fase d'implementació. També hem de destacar que la dinàmica ha quedat marcada pels nivells que com docent va haver d'impartir en cada curs acadèmic.
- Materials, perquè va revisar-se la unitat didàctica en procés constructiu, és a dir, després de cada fase de l'estudi empíric i per tant, va modificar-se el dossier d'activitats de l'alumne tenint en compte els resultats de l'anàlisi. Respecte a les tecnologies, perquè depenem del nombre d'ordinadors disponibles en el moment d'anar-hi i amb quina versió d'Excel. I com que el món de la tecnologia avança ràpidament, hem d'aprofitar-nos dels nous avenços i per això, vam introduir l'últim curs de l'estudi empíric una pantalla de televisió que a través d'un convertidor visualitzava les imatges del PC a TV.

Aquesta adaptació que acabem d'exposar és la causa per la qual es presenten variacions dintre d'un mateix nivell acadèmic i dintre d'un mateix curs escolar. A continuació recollim totes aquestes variants en dos quadres. Primer per 4t d'ESO i en segon lloc pel Batxillerat Humanístic. En el capítol següent s'expliciten amb més detall les variacions mostrades a continuació.

#### 4t d'ESO

<i>Curs</i>	<i>Grup</i>	<i>Nombre alumnes</i>	<i>Versió dossier</i>	<i>Instruments recollida dades</i>	<i>Trimestre</i>
97/98 (2 prof.)	4t B	25+ACI	1	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Quadern de Camp</li> <li>➤ Enregistrament disquet</li> <li>➤ Qüestionari</li> <li>➤ Entrevistes</li> </ul>	1r: 1h/setm. (la meitat) 3h en total
	4t C	20			1r: 1h/setm. 9h en total
	4t A	21	2		2n: 1h/setm. 7h en total
98/99 (1 prof.)	CV1	21	3	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Quadern de Camp</li> <li>➤ Enregistrament disquet</li> <li>➤ Qüestionari</li> </ul>	2n: 2h/setm. 5h en total
	CV2	9+ACI			2n: 2h/setm. 8h en total
99/00 (2 prof.)	4t B (Argos)	19	3	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Quadern de Camp</li> <li>➤ Enregistrament disquet i en vídeo</li> <li>➤ Qüestions Dossier</li> </ul>	1r: 1h/setm. 7h en total
	4t C	18			1r: 1h/setm. 7h en total

	4t A	20	4	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Questionari</li> <li>➤ Entrevistes</li> </ul>	2n: 1h/setm. 5h en total
--	------	----	---	--	-----------------------------

Com podem observar mai dos grups classe d'un mateix nivell són iguals. Es diferencien en algun/s dels següents aspectes: nombre d'alumnes, nombre de professores, versió de la unitat didàctica, aula d'informàtica disponible, instruments de recollida de dades, temporització, hores impartides per setmana, freqüència d'anar a l'aula d'informàtica i total d'hores treballades.

### Batxillerat Humanístic

Ens trobem que al Batxillerat d'Humanitats i Ciències Socials també presenten variacions, en aquest cas, en quant al nombre d'alumnes, a l'aula d'informàtica disponible, instruments de recollides de dades utilitzats, trimestre i total d'hores treballades. En el quadre següent queden recollides totes aquestes diferències.

<i>Nivell</i>	<i>Nombre d'alumnes</i>	<i>Versió dossier</i>	<i>Instruments recollida dades</i>	<i>Trimestre</i>
1r (98/99)	9	1	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Quadern de Camp</li> <li>➤ Enregistrament disquet</li> </ul>	3r: 2h/setm. 5h en total
2n (Argos) (99/00)	14	1	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Quadern de Camp</li> <li>➤ Enregistrament disquet i en vídeo</li> <li>➤ Qüestions Dossier</li> <li>➤ Entrevistes</li> </ul>	2n: 2h/setm. 6h en total



# Capítol 5

## **Desenvolupament de la innovació didàctica**

---

Tenim present quines són les fases del disseny d'aquesta recerca (veure 1.3), passem a descriure la segona fase, la *fase empírica*.. En aquest capítol concretem la mostra, alguns aspectes a considerar en l'organització i les fases de l'estudi empíric que amb el sumari de la metodologia de treball, exposat en finalitzar el capítol anterior, ens hem pogut fer una idea de les diferents fases per desenvolupar la innovació didàctica. I per últim, d'on es van recollir les dades per ser organitzades i analitzades posteriorment.

### ***5.1 Determinació de la mostra***

El pla d'actuació es va desenvolupar en dos nivells acadèmics: a 4t d'ESO i al Batxillerat Humanístic. En el següent quadre queda recollit el conjunt de la població estudiada durant l'estudi empíric, s'indica el nombre de nois i noies, el nombre total d'alumnes per curs acadèmic i en quina fase de l'estudi ens trobem.

<i>Nivell</i>	<i>Curs</i>		<i>Nombre de nois</i>	<i>Nombre de noies</i>	<i>Total d'alumnes</i>
4t ESO	97-98 (estudi pilot)		28	38+ACI	66+ACI
	98-99 (reforçar proposta didàctica)		16	14+ACI	30+ACI
	99-00 (nova proposta didàctica)		28	29	57
Batx. Hum.	1r	98-99 (estudi pilot)	0	9	9
	2n	99-00 (estudi pilot)	1	13	14

Cal ressaltar que la població en el Batxillerat Humanístic és de noies (excepte un noi a segon) mentre que a 4t d'ESO està més equilibrat el nombre de noies i nois.

Les inicials ACI correspon a una alumna amb Adaptació Curricular Individualitzada, que per les seves discapacitats psicomotrius va haver de treballar amb un material específic coordinat pel psicopedagog. Durant el període del desenvolupament empíric el seu material no va estar relacionat amb el nostre tema d'estudi però, si amb la necessitat de l'entorn informàtic. Per tant, no forma part de la mostra però en canvi, com a docent si que forma part del grup classe i hem de reservar-li un ordinador per desenvolupar les seves tasques.

## 5.2 Aspectes organitzatius

En el moment de plantejar el desenvolupament empíric s'han de tenir en compte una sèrie d'aspectes que afecten l'organització com són: el nombre d'hores lectives impartides per la matèria als grups i nivells escollits, disponibilitat de l'aula d'informàtica, la distribució dels alumnes en petits grups, tenir en compte si disposen d'ordinador a casa seva, necessitat d'adaptació curricular si cal a algun alumne, depenent de les obligacions docents de l'autora d'aquesta recerca,...

Per implementar la unitat didàctica elaborada comptem amb una mostra molt concreta, com acabem de determinar en l'apartat anterior. Partint d'aquesta mostra i que la tasca a realitzar a l'aula d'informàtica és complementària a la desenvolupada a l'aula

normal, els aspectes que afecten a l'organització, abans esmentats, queden plantejats de la manera següent:

- Durant el trimestre que s'imparteixi el tema de funcions intentar anar a la sala d'informàtica almenys una hora a la setmana de les tres lectives que té l'assignatura.
- La distribució de la classe queda en funció del nombre d'alumnes i del nombre d'ordinadors disponibles a la sala d'informàtica. Això vol dir, abans d'anar-hi: a l'ESO s'han de distribuir en grups de dos i de vegades de tres alumnes i al Batxillerat en grups de dos i quan sigui possible treballar individualment.
- En el cas que algun alumne necessiti una adaptació curricular reservar-li un ordinador i assegurar-li que vagi a totes les sessions.
- En el moment de la distribució de grups intentar que almenys un d'ells tingui ordinador a casa seva, ja que cada vegada hi ha més alumnes que en tenen.

### 5.3 Fases de l'estudi empíric

S'organitza l'estudi empíric per nivells acadèmics (4t d'ESO i Batxillerat Humanístic) i dintre de cada nivell per cursos escolars (97/98, 98/99 i 99/00). Cada vegada que finalitza el curs escolar s'analitza tot el seu procés i així, poder modificar tot allò que es cregui oportú per millorar l'aprenentatge de l'alumnat, és a dir, després de cada curs s'ha tret una síntesi de resultats. Recordem que la part empírica d'aquest treball d'investigació es desenvolupa a nivell de 4t d'ESO i es continua amb el Batxillerat Humanístic. Encara que en aquest treball de recerca es fa una explicació del seu procés, no oblidem que aquesta part només dóna pas a indicis ja que treballem en un grup classe i s'ha fet el seguiment de dues alumnes.

➤ **A 4t d'ESO** durant tres cursos escolars:

- **Curs 97/98.** Es desenvolupa l'estudi pilot dintre del crèdit comú de matemàtiques a les tres línies. Durant el primer trimestre, dues línies (B i C) i en el segon trimestre, una línia (A) ja que aquest últim grup no feia crèdit comú de matemàtiques al primer trimestre segons l'estructura organitzativa del centre.

De les tres hores setmanals que corresponen a l'assignatura, va haver-n'hi una en la qual vam estar dues professores a l'aula (també per estructura organitzativa del centre), així que, tenint en compte el nombre d'alumnes de cada grup classe i el nombre d'ordinadors disponibles, a 4t A i C vam portar tot el grup sencer a l'aula d'informàtica i ens vam quedar les dues professores. En canvi, en el 4t B en ser més nombrós i tenir una alumna amb adaptació curricular per les seves incapacitats físiques i psíquiques, vam portar la meitat del grup a la sala d'ordinadors i l'altra meitat es va quedar treballant a l'aula normal amb l'altra professora. Aquesta alumna amb adaptació curricular va venir cada setmana i va treballar un material especial coordinat amb el psicopedagog del centre. El

desenvolupament de les activitats del 4t B va quedar molt marcat pel fet de disposar de menys sessions, només tres (equival a tres hores).

Vam disposar de 10 ordinadors en una sala anomenada l'aula "Pentium" amb el full de càlcul Microsoft Excel versió 5.0. Durant el primer trimestre hem treballat amb el material elaborat inicialment (versió 1, veure annex I) i en el segon trimestre amb la versió 2 (veure 7.1.3.1.1 curs 97/98). A cada alumne/a se li va lliurar un dossier amb totes les activitats proposades en aquesta unitat didàctica elaborada per la investigació.

Amb la taula que mostrem a continuació recollim com es va organitzar aquest estudi pilot. S'indica el grup classe, nombre total d'alumnes, distribució del grup a l'aula d'informàtica i la temporització. Com vam comentar en la metodologia de treball (veure 4.5) el treball que presentem ha implicat una adaptació als recursos tants humans com materials amb la qual cosa no trobarem dos grups en les mateixes condicions.

<i>Nivell</i>	<i>Grup</i>	<i>Nombre d'alumnes</i>	<i>Distribució a l'aula</i>	<i>Trimestre</i>
ESO (2 prof.)	4t B	25+ACI	12 de 2 2 de 1	1r: 1h/setm. (la meitat) 3h en total
	4t C	20	10 de 2	1r: 1h/setm. 9h en total
	4t A	21	9 de 2 1 de 3	2n: 1h/setm. 7h en total

Vam recollir les dades mitjançant quadern de camp, qüestionari, i entrevistes.

- **Curs 98/99.** Tota la tasca de recerca portada a terme al llarg del curs 97/98 ens va servir per fer un replantejament de les activitats i presentar una nova estructura del dossier d'activitats (versió 3, veure 7.1.3.1.1 curs 98/99). Vam portar a terme l'estudi empíric durant el segon trimestre amb dos crèdits variables d'inici (CV1 i CV2). El fet de treballar amb l'alumnat dels crèdits variables va ser pel marc horari assignat pel centre com a docent.

Oferir des de l'àrea de matemàtiques aquest crèdit variable, l'estudi de funcions amb el full de càlcul, va ésser tot un èxit per l'assignatura ja que van escollir-lo de manera voluntària molts alumnes (30). La qual cosa és reconfortant perquè normalment són reticents a escollir crèdits variables de matemàtiques.

La distribució dels alumnes no va poder ser equitativa, sinó que van quedar 21 alumnes en la franja un (CV1) i 10 alumnes en la franja dos (CV2). En la última franja vam tenir la mateixa alumna del 4B del curs anterior amb adaptació curricular, la qual cosa vol dir que van reservar un ordinador sempre per a ella sola i va treballar amb un material coordinat pel psicopedagog que no va formar part del tema de funcions.

Com a conseqüència de desmuntar una de les dues aules d'informàtica per instal·lar-ne una de nova, el professorat del centre només va poder tenir a la seva disposició una aula, així que; pel grup CV1 va ser impossible de tenir aula fins final de gener, i a més, les dues primeres sessions en una aula i després en una altra en un entorn Windows diferent. El grup CV2 va estar en millors condicions d'ubicació, només van haver de compartir l'aula amb un altra crèdit variable de Ciències Experimentals, que feien servir també els ordinadors (sort que van ser molt pocs alumnes). Va ésser possible anar a l'aula d'informàtica dues hores a la setmana, malgrat que no va ser possible fer-se paral·lelament els dos grups. L'organització d'aquesta segona fase d'implementació queda recollida amb la següent taula.

<i>Nivell</i>	<i>Grup</i>	<i>Nombre d'alumnes</i>	<i>Distribució a l'aula</i>	<i>Trimestre</i>
ESO	4t CV1	21	3 de 2 5 de 3	2n: 2h/setm. 5h en total
	4t CV2	9+ACI	4 de 2 2 de 1	2n: 2h/setm. 8h en total

Els instruments de recollida de dades van ser quadern de camp i qüestionari.

- **Curs 99/00.** En aquest curs vam reforçar la nostra proposta didàctica i vam dissenyar un nou material (versió 4, veure 7.1.3.1.1 curs 99/00) que considerem més adient per assolir els nostres objectius. A l'igual que en l'estudi pilot es va desenvolupar l'estudi empíric dintre del crèdit comú de matemàtiques a les tres línies. Durant el primer trimestre, dues línies (B i C) i en el segon trimestre, una línia (A) ja que aquest últim grup no feia crèdit comú de matemàtiques al primer trimestre segons l'estructura organitzativa del centre. A causa de la distribució horària feta pel centre, aquest nivell va ésser impartit per una companya de l'assignatura. Gràcies a la seva col·laboració i a la compatibilitat horària, va ésser possible continuar la investigació.

L'assistència a l'aula d'informàtica va ésser d'una hora a la setmana. L'aula "Pentium" va ésser assignada als grups A i C i la nova aula d'informàtica anomenada "Argos" al grup B. Aquesta sala té instal·lat el sistema operatiu

Windows 98 i Excel 97, així que vam haver de donar noves pautes per treballar en aquest nou entorn.

A partir de la segona sessió vam anotar totes les preguntes fetes per un grup escollit a l'atzar. A més, en el grup de 4t C vam introduir un nou element, un televisor connectat a l'ordinador del grup escollit on es va permetre veure pel televisor la pantalla de l'ordinador i per tant, seguir les explicacions de la professora més fàcilment. Així, en començar la classe vam poder recordar el que havien fet en sessions anteriors i, en acabar la classe, clarificar el que s'havia fet. Per transmetre i convertir la senyal VGA de la pantalla a senyal reconeguda pel televisor es necessita d'un hardware que es denomina convertidor de VGA a TV. En el 4t B no va ser possible fer-lo servir per problemes aliens a la nostra recerca. El convertidor va ésser cedit temporalment pel Departament de Didàctica de les Matemàtiques de la Facultat de Ciències de l'Educació de la UAB. En vista de la bona utilitat, el centre va decidir comprar-ne un. Així que, a partir del segon trimestre es podria disposar d'ell, com a conseqüència, a partir d'aquest moment, va patir un canvi notable la metodologia de treball. En el 4t A, com recollim en el quadern de camp, vam iniciar les classes explicant les pautes de treball amb Excel, explicitades en el dossier de l'alumne, aprofitant la connexió feta entre TV-ordinador i també van fer-lo servir en sessions successives. Per altra part, vam poder enregistrar en cinta de vídeo la feina feta pel grup que tenia el seu ordinador connectat al TV. Aquest vídeo va ser analitzat posteriorment. A més, d'introduir noves tecnologies es va concretar el contingut de cada sessió. La primera sessió es va dedicar a la presentació de l'eina informàtica utilitzada i al seu funcionament, la segona i tercera a l'estudi de les funcions afins i la quarta i cinquena a l'estudi de les funcions quadràtiques. Les qüestions que van quedar sense fer, com els de l'última activitat, es va recomanar als alumnes realitzar-los a casa seva de manera voluntària.

Aquest canvi metodològic està fonamentat en el factor temps és primordial, no és possible realitzar totes les qüestions de totes les activitats proposades dintre de l'horari lectiu, s'allargaria massa i comptant amb què ara, la gran majoria dels alumnes disposen d'ordinador a casa amb l'Excel instal·lat poden treballar fora de l'institut. I en el cas de no ser possible a casa facilitar-los la possibilitat de fer-ho en el centre fora de l'horari escolar.

S'intenta en tot moment la coordinació del desenvolupament de l'assignatura entre l'aula normal, per la nostra companya (dues hores a la setmana) i la sala d'informàtica, per les dues (una hora a la setmana) malgrat que en el tema de funcions quadràtiques no es va explicar a l'aula normal el desenvolupament de l'expressió algebraica de  $ax^2 + bx + c$  a  $a(x-q)^2 + p$  i en conseqüència van tenir dificultats en aquesta part.

En resum, l'organització va quedar de la següent manera:

<i>Nivell</i>	<i>Grup</i>	<i>Nombre d'alumnes</i>	<i>Distribució a l'aula</i>	<i>Trimestre</i>
ESO (2 prof.)	4t B (Argos)	19	5 de 2 3 de 3	1r: 1h/setm. 7h en total
	4t C	18	9 de 2	1r: 1h/setm. 7h en total
	4t A	20	10 de 2	2n: 1h/setm. 5h en total

A la foto que ve a continuació, es recull un instant del desenvolupament de les tasques a l'aula d'informàtica "Pentium".



A més dels instruments de recollida de dades fets servir fins ara, el quadern de camp, qüestionari i entrevistes, afegirem les sessions enregistrades en vídeo i el dossier que van lliurar de manera voluntària en acabar les activitats per alguns grups.

➤ Al **Batxillerat Humanístic** a un grup classe de primer i a un altre de segon:

- **Curs 98/99.** En l'assignatura de Matemàtiques aplicades a les Ciències Socials dintre de la modalitat d'humanitats va iniciar-se l'estudi pilot pels alumnes de primer de Batxillerat Humanístic amb la unitat didàctica elaborada (veure annex II). El fet de treballar amb l'alumnat d'aquesta modalitat va ser pel marc horari assignat pel centre com a docent. En el grup classe va haver-hi una repetidora, dues alumnes que van venir del CF d'administratiu i la resta, havien format part de la mostra de l'estudi pilot a 4t d'ESO.

El tema de funcions exponencials i logarítmiques va ésser impartit en el tercer trimestre sense arribar a les derivades a causa de la modulació feta per l'àrea. De

la llista inicial d'alumnes inscrits, només van assistir amb assiduitat 9 alumnes, ja que alguns van abandonar el batxillerat i altres van deixar l'assignatura pel proper curs. Com a conseqüència d'aquest nombre reduït d'alumnes, va estar possible treballar individualment a l'aula d'informàtica. El fet de poder treballar soles amb un ordinador pensem que va molt bé perquè en aquest nivell han d'ésser més crítics amb la seva feina i, a més, vam observar que consulten i s'ajuden entre elles, amb la qual cosa l'ambient de treball va ser participatiu i dóna la sensació d'equip de treball.

De les tres hores lectives de la setmana va ésser possible anar dues a la sala d'ordinadors "Pentium", les mateixes que a les d'ESO.

Per la raó de finalitzar el curs no va ésser possible fer cap entrevista i només cinc sessions. Per tant, el tema de funcions logarítmiques va ésser explicat a l'aula normal però no es va poder treballar a l'aula d'informàtica.

Les tècniques d'observació i registres utilitzades van estar: enregistrament de la feina feta a l'aula i a casa (quan va ser possible) en el disquet i anotacions en el quadern de camp del dia a dia a l'aula.

- **Curs 99/00.** A segon de Batxillerat Humanístic es va continuar amb l'estudi pilot amb el tema de funcions polinòmiques i racionals aplicant les derivades (veure annex II).

Es desenvolupa durant el segon trimestre amb la possibilitat d'anar a la sala d'ordinadors dues hores a la setmana de les tres que té l'assignatura. La sala assignada va ésser l'aula "Argos" amb vuit ordinadors amb el sistema operatiu Windows 98 i Excel 97. L'any anterior van treballar a l'aula "Pentium" amb Windows 95 i Excel 5.0. Per tant, en el moment de lliurar el dossier d'activitats també hi anaven les pautes per treballar amb aquesta nova versió i així evitar les preguntes pels canvis produïts entre versions que van sorgir durant el primer trimestre amb el 4t B.

Per poder realitzar el seguiment de l'alumnat vam escollir un grup format per dues alumnes per anotar les seves preguntes i, després entrevistar-les. En aquesta ocasió no va ser a l'atzar sinó que hem mostrat interès per un grup que haguessin participat a 4t d'ESO, a 1r de Batxillerat i per últim a 2n.

Vam utilitzar un TV connectat a l'ordinador per visualitzar la seva pantalla. Va servir d'ajuda per impartir la classe i també per enregistrar en vídeo la feina realitzada per aquest grup de seguiment.

La primera sessió es va dedicar a veure com funciona el full de càlcul i tenir un primer contacte amb les funcions polinòmiques. La segona sessió vam continuar amb funcions polinòmiques. La tercera i quarta sessió ens vam dedicar a les funcions racionals. La feina que va quedar pendent de realitzar-se l'han d'acabar a casa o a l'institut i es va lliurar el dia de l'examen.



A continuació, mostrem la distribució dels grups de 1r i 2n a l'aula d'informàtica.

<i>Nivell</i>	<i>Grup</i>	<i>Nombre d'alumnes</i>	<i>Distribució a l'aula</i>	<i>Trimestre</i>
Batx. Hum.	1r (Pentium)	9	9 de 1	3r: 2h/setm. 5h en total
	2n (Argos)	14	7 de 2	2n: 2h/setm. 6h en total

Per realitzar el seguiment de les dues alumnes, mencionades anteriorment, a més de recollir les dades amb el quadern de camp, enregistrament en disquet i entrevistes es van afegir l'enregistrament en vídeo i dos qüestions del dossier d'alumnes.

#### 5.4 Recollida i organització de dades

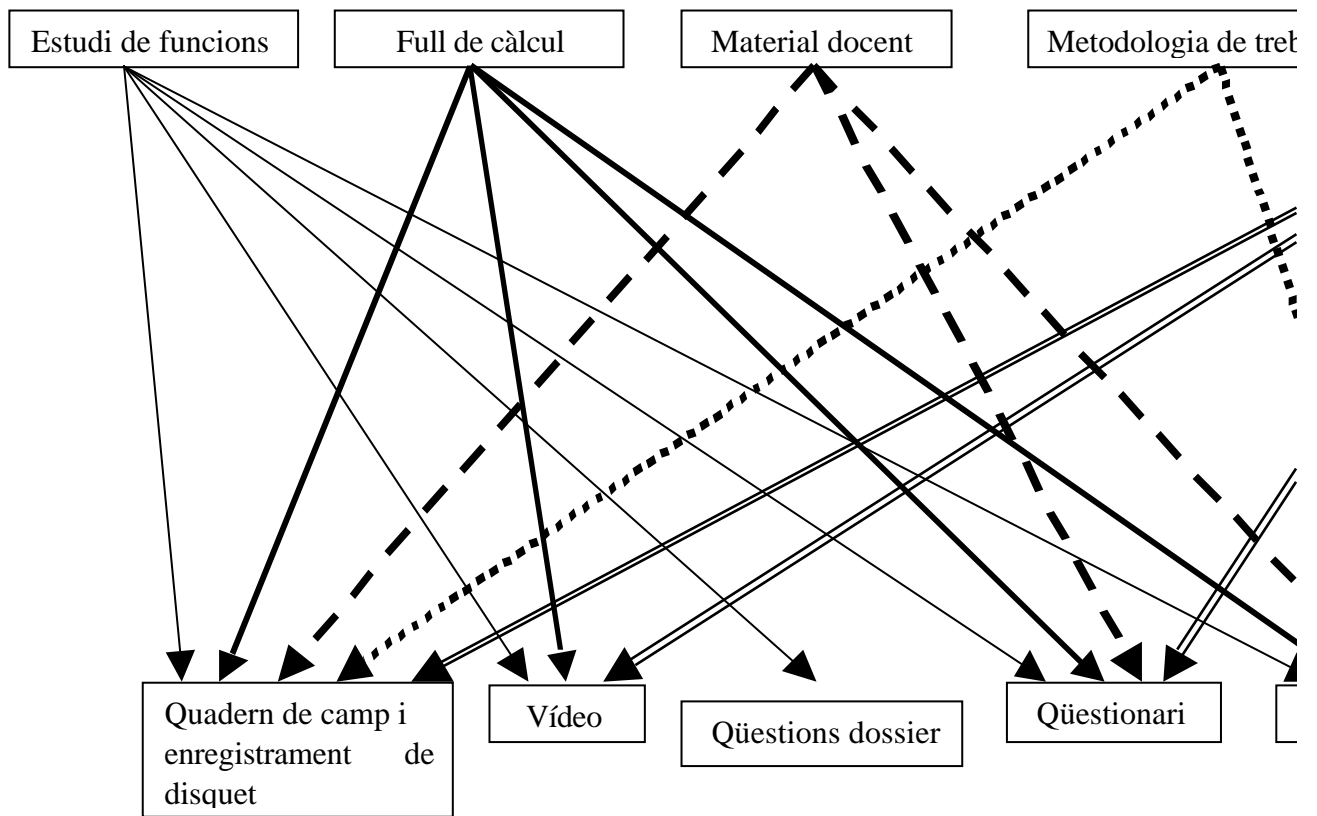
Acabem d'explicitar les fases de l'estudi empíric on hem citat els instruments de recollida de dades utilitzats. En aquest apartat, recollim en una taula quines d'aquestes tècniques van ésser utilitzades durant cada curs dels que componen l'estudi. Podem observar que de les diferents tècniques d'observació i registre les que sempre es troben presents són el quadern de camp i l'enregistrament en disquet, i per 4t d'ESO també el qüestionari. En canvi, les entrevistes no van ser possibles de realitzar durant el curs 98/99. L'enregistrament en vídeo i algunes qüestions del dossier de l'alumne són instruments de recollida de nova incorporació pel curs 99/00.

	4t ESO			Batx. Hum.	
	Curs 97/98	Curs 98/99	Curs 99/00	1r Curs 98/99	2n Curs 99/00
<b>Quadern de camp</b>	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
<b>Enregistrament en disquet</b>	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
<b>Enregistrament en vídeo</b>	No	No	Sí	No	Sí

<b>Qüestions del material docent</b>	No	No	Sí	No	Sí
<b>Qüestionari</b>	Sí	Sí	Sí	No	No
<b>Entrevistes</b>	Sí	No	Sí	No	Sí

En el diagrama de la pàgina següent relacionem cada bloc principal de l'estudi a 4t d'ESO amb els instruments fets servir per treure les aportacions de l'anàlisi de dades (veure capítol 7). Podem observar que el quadern de camp (amb el suport de l'enregistrament en disquet) i les entrevistes recullen informació de tots els blocs a tenir en compte: funcions, full de càlcul, unitat didàctica, metodologia de treball i actitud de l'alumnat. En canvi, tenim les qüestions del dossier que ens aporten informació de les característiques de les funcions.

## BLOCS D'ESTUDI



## INSTRUMENTS DE RECOLLIDA DE DADES