

Capítol 7

Aportacions de l'anàlisi de dades

A partir de l'anàlisi de dades d'aquest procés d'aprenentatge constructiu basat en la manipulació i la visualització, fent servir el full de càlcul com a eina de treball, hem pogut conèixer com els alumnes han construït i han interpretat els gràfics per estudiar les funcions, la qual cosa ens ha portat a determinar la influència que té el full de càlcul i a concretar les dificultats i errors dels alumnes, ja sigui relacionades amb el full de càlcul com amb els continguts de les funcions treballades, tant de caràcter conceptual com procedimental. Ens han servit per a presentar una unitat didàctica millorada, revisar la metodologia de treball emprada i concretar l'actitud de l'alumnat dintre del seu procés d'aprenentatge.

En aquest capítol, fem una síntesi dels resultats més rellevants obtinguts en l'anàlisi de les dades durant les tres fases de l'estudi empíric a 4t d'ESO. I així, partint dels objectius d'aquesta tesi, veure quines aportacions es poden fer des de l'anàlisi. Per tant, es presenta en els cinc grans blocs de la nostra recerca; els continguts de funcions, el full de càlcul, la unitat didàctica (material docent o dossier d'activitats), la metodologia de treball i l'actitud de l'alumnat. Les aportacions de l'anàlisi de dades per al Batxillerat Humanístic mantenen la mateixa estructura que a 4t d'ESO. Recordem que aquesta anàlisi de dades només correspon a un seguiment de dues alumnes. Per tant, en cap moment les considerem dintre de la investigació com consolidades, tant per la mostra com pels temes treballats.

7.1 4t d'ESO

Presentem les aportacions de l'anàlisi de dades dividides en els cinc blocs principals esmentats anteriorment; els continguts de funcions, el full de càlcul, la unitat didàctica, la

metodologia de treball i l'actitud de l'alumnat. Els instruments de recollida de dades que s'han fet servir per treure les aportacions en cadascun dels blocs en què s'ha dividit aquest estudi podem consultar-los en el diagrama presentat a l'apartat 5.4.

7.1.1 Continguts de funcions

Després de l'estudi empíric i des dels continguts treballats de les funcions afins i quadràtiques, la nostra investigació ens ha aportat:

- El raonament visual els ha permès descriure i justificar el comportament de les funcions en estudi segons els seus paràmetres.
- Els alumnes han reparat en la importància de l'ordre de prioritat de les operacions a causa de la constant manipulació de les expressions algèbriques facilitat per la utilització del full de càlcul.
- Els alumnes han adquirit l'habilitat de treballar amb expressions algèbriques en un ample rang d'operacions i gràfics per veure on tendeixen. S'ha afavorit l'assoliment dels continguts desenvolupats.
- S'ha provocat un canvi d'hàbits. Els alumnes tendeixen a comprovar per exemple, que els valors donats a la variable independent siguin coherents amb el problema plantejat, que els resultats de la variable dependent siguin els que corresponen a la seva funció. Els alumnes, també tendeixen a verificar els valors de la taula amb els que apareixen en els eixos de coordenades de la gràfica representada.
- S'ha provocat un canvi d'actitud. L'alumnat ha estat més dialogant i participatiu. S'ha preguntat amb freqüència per assegurar-se que el desenvolupament de les activitats sigui correcte, tant del tipus procedimental com conceptual i així, no avançar de manera errònia

Al llarg del procés d'aprenentatge de l'alumnat, també s'han exhibit una sèrie de dificultats i errors que ens han servit per millorar la unitat didàctica. A continuació, presentem, en primer lloc, les dificultats des d'una visió genèrica i, a continuació, concretem en les funcions afins i quadràtiques. En segon lloc, la tipologia d'errors per a la funció afí i quadràtica. En tercer lloc, uns comentaris generals sobre els continguts treballats.

7.1.1.1 Dificultats

Es classifiquen, segons el seu origen, en dificultats de comprensió (lectora o de conceptes), confirmació (dels conceptes, dels procediments o del seguiment de la feina), taula de valors, l'equació d'una funció i característiques (punts de tall i creixement) (veure apartat 6.1.1.2.1).

- **Comprensió lectora (CL).** Són dificultats provocades, d'una banda per una lectura ràpida i superficial de l'alumne sense donar-li temps a saber el que la qüestió li demana (CL1, CL2 i CL5), i de l'altra, pel fet de relacionar el que demana en aquell moment amb les coses ja desenvolupades. Aquesta capacitat de reflexionar i enllaçar no és un hàbit que tinguin assolit (CL3 i CL4).
- **Comprensió conceptual (CC).** Aquestes dificultats són molt variades; des de no entendre, no saber, no recordar i, fins i tot, dubtar. No entendre el plantejament d'un problema perquè tenen dificultat en associar situacions reals amb situacions matemàtiques, com pot ser pagar un mínim de comissió en canviar de moneda al banc (CC1), no saber quin tipus de funció és $y = 1$, per després trobar els valor de la taula (CC3 i CC6) i indicar les característiques de les funcions afins en preguntes obertes (CC4), no recordar el significat dels símbols $>$ i $<$ (CC2), com s'expressa l'equació de segon grau amb p i q (CC5) i diferenciar la variable independent de la dependent (CC8), dubtar en l'ordre d'execució de les operacions per calcular el valor numèric d'una equació de funció (CC7).
- **Confirmació.** Preguntaven amb freqüència si el que desenvolupaven era el correcte, ja sigui procedimental (CFP) o conceptual (CFC). Aquesta actitud pot ser influenciada per la metodologia de treball. En el cas procedimental, tenim alumnes que s'adonaven de l'error perquè els resultats no eren els correctes (CFP1) i altres volien assegurar-se que realitzaven el que li demanava la qüestió (CFP2, CFP3, CFP4 i CFP5). En el cas conceptual, les preguntes de confirmació les trobem per indicar alguna característica (CFC4), com per exemple, l'eix de simetria (CFC1) per on va el gràfic de la funció (CFC2), també per calcular l'invers (CFC3).
- **Seguiment de la feina (SFM).** En el moment de fer la representació gràfica van sorgir preguntes de la continuació de la feina (SFM1, SFM2, SFM3, SFM4, SFM5, SFM6 i SFM7). Pot ser a causa del disseny d'algunes qüestions i per la metodologia portada a terme.
- **Taula de valors (VA).** Dels 135 alumnes enquestats en el moment de construir la taula de valors, un 14'07% van contestar que els valor donats a la variable independent no havien estat coherents amb el problema plantejat. Aquest percentatge indica que no es va tenir en compte el rang de valors de la variable dependent segons les seves característiques Un 22'22% no van comprovar si els resultats de la variable dependent van ser els que corresponien a la seva funció i un 21'48% tampoc van verificar si els valors de la taula van ser els que van sortir en els eixos de coordenades de la gràfica representada.
- **Trobar l'equació d'una funció (EQR).** Cal ressaltar que la dificultat de trobar l'equació d'una funció va ser manifestada pels alumnes del curs 97/98 (estudi pilot) en la resolució de problemes en un 45'45% i els alumnes del curs 99/00 en com expressar l'equació de segon grau amb p i q en un 33'96%. Aquesta última l'hem considerada una dificultat conceptual ja que no es va treballar a classe. En

general, un 37'03% de l'alumnat van trobar problemes per trobar l'equació d'una funció. Dels 8 alumnes entrevistats durant el curs 99/00, el 50% ho van dominar molt bé, fins i tot podria explicar-ho a un company, i l'altra 50%, a mitges. Partint del fet que la capacitat d'abstracció dels alumnes en aquestes edats sobre els gràfics i les taules es troba encara en l'inici de la seva formació, és considerat més com a un procés que pròpiament com a un objectiu.

- **Característiques.** Es presenten en l'estudi de les característiques de les funcions afins, concretament en els punts de tall (PT) i en el creixement i decreixement (CD). Tenim que per generalitzar un punt de tall escriuen uns quants punts (PT2). Això pot ser a causa de presentar dificultat per usar el llenguatge matemàtic per fer abstraccions o de resultar-los més còmode agafar els punts que tenen a la taula que no pas generalitzar. A vegades per escriure el punt de tall (0,0) s'obliden del parèntesi (PT4) o només posen 0 (PT5). Això pot ésser a causa del llenguatge col·loquial que fan servir els alumnes per expressar-se. Diuen "*talla en el zero*" quan en realitat s'estaven referint a l'origen de coordenades. Presenten dificultats per expressar per escrit que la funció és decreixent. Per exemple, escriuen que les rectes puguen cap a l'esquerra (CD2). Van associar decreixer amb disminuir el valor d' x (3,2,1,0,-1,-2..), la direcció és correcte i vol dir que si disminueix el valor d' x augmenta el valor de y . També van escriure que va de positiva a negativa (CD3). Sembla que és una característica fàcil de veure però en canvi, una mica més dificultós a l'hora d'explicar-ho.

7.1.1.2 Errors

Estudiarem en primer lloc la funció afí i en segon lloc, la funció quadràtica. La tipologia d'errors és presentada segons les característiques de la funció en estudi. A la funció afí, s'ha dividit segons els punts de tall, creixement o decreixement i esquema gràfic. A la funció quadràtica, s'ha dividit segons els punts de tall, vèrtex, simetria, orientació de les branques, obertura de la paràbola i esquema gràfic (veure 6.1.1.2.2 i 6.1.1.2.3).

➤ **Funció afí**

- **Punts de tall (PT).** Quan hi ha dos punts de tall, normalment escriuen el punt de tall per $x = 0$, malgrat que a l'esquema gràfic sí que dibuixen els dos punts de tall, és a dir, que visualment sí que tenen en compte els dos punts de tall (PT1). Això pot estar condicionat per la construcció de la taula on donem $x = 0$ i no trobem la antiimatge de $y = 0$. Ens trobem que la dificultat PT2 s'ha convertit en un error i que per generalitzar un punt de tall escriuen uns quants punts. Això pot ser perquè els resulta difícil usar el llenguatge matemàtic per fer abstraccions o és més còmode agafar els punts que tenen a la taula que no generalitzar. Per exemple, per indicar que talla en el punt $(0,b)$ escriuen els punts $(0,1)$, $(0,2)$, $(0,3)$, $(0,4)$, $(0,5)$.

Per $a < 0$ i $b < 0$ escriuen que talla en el punt $(-b,0)$ (PT3). Aquest error pot ésser a causa de considerar la divisió $-b/a$ amb $a=1$, ja que la unitat didàctica treballa amb

el coeficient $a=1$. La dificultat PT4 s'ha convertit en un error, per escriure el punt de tall (0,0) s'obliden del parèntesis. Això pot ser a causa de tenir molt interioritzat l'associació dels parèntesis amb les operacions i no amb les coordenades d'un punt.

Dels vuit alumnes entrevistats, un 37'5% van comentar que dominaven molt bé indicar els punts de tall, fins i tot explicar-ho a un company. La resta, un 62'5%, que ho dominaven a mitges.

- **Creixement i decreixement (CD).** Per $b < 0$ va indicar que és decreixent quan $a > 0$ i creixent quan $a < 0$ (CD1). No trobem cap causa que justifiqui això.

Dels vuit alumnes entrevistats durant el curs 99/00 set (87'5%) ho dominaven molt bé, fins i tot podria explicar-ho a un company. I un (12'5%), que ho dominava a mitges.

- **Esquema gràfic (ER).** En el moment de dibuixar la funció segons la seva equació general predominen els errors conceptuals, tenim que l'orientació de la recta és correcta però la dibuixen passant pel (0,0) quan $b = 0$, $a = 0$ (ER3), indicant anteriorment que no talla en el (0,0). Pensem que tenen problemes per passar a gràfic. Per $a = 0$ ens trobem que les rectes van per sota quan han d'anar per dalt o a l'inrevés (ER1). I el creixement no és correcte (ER2). Dels dos grups que presenten aquest error, el grup 7 va mantenir aquest error de creixement. Es presenta un error de presentació; van oblidar-se de dibuixar els eixos de coordenades, només ens trobem amb la recta (ER6). Pot ser a causa de fer una transcripció literal de l'enunciat de la qüestió, *esquema gràfic*.

En general, el comptador d'errors dona 20 de 64 respostes, en global tenim un 31'25%. Això vol dir una mediana d'1, molt acceptable.

Dels tipus d'errors produïts de la comparació dels gràfics domina el classificat com d'efecte òptic; 15 de 135 enquestats (11'11%) observen que s'han canviat les mides de la finestra on està dibuixada la gràfica (ER7), un 1'88% observa que les distàncies entre punts manté la proporcionalitat d'una gràfica a l'altra (ER8). La resta d'errors estan molt equilibrats i amb una freqüència molt baixa, semblant a aquesta última. De presentació, recollim que el gràfic fet a mà és diferent al fet a l'ordinador (ER4), representa un 7% i els que no han escollit el gràfic adient per representar la funció (ER5) és un 1'88%. Per últim, tenim els errors anomenats de la limitació amb la representació dels valors de la taula (ER9), també un 1'88%. Diferencien entre la precisió del gràfic fet a mà i amb l'ordinador (ER10), això representa un 1'81% i tenim un error provocat pels valors donats a la taula (ER11) amb un 3'70%. Hem d'afegir que, dels 135, donen una resposta incompleta 30, això representa un 22'22% que els falta per comentar el canvi d'escala de l'eix d'abscisses. En canvi, un 42'96% donen una resposta correcta.

Dels vuit alumnes entrevistats durant el curs 99/00, sis (75%) ho dominaven molt bé, fins i tot podria explicar-ho a un company. La resta, un 25% que ho

dominaven a mitges. De la comparació de gràfics a l'entrevista, en tenim sis de dotze, entre els cursos 97/98 i 99/00, que donen una resposta regular, és a dir, al 50% els falta comentar que la segona gràfica es representa diferents punts per $x < 0$ i només una alumna, el 8'33% dóna una resposta incorrecta. Per a ella hi ha un canvi d'escala. Creiem que és un error conceptual, confondre el fet de representar diferents punts per $x < 0$ i ampliar el rang de valors amb un canvi d'escala.

➤ **Funció quadràtica**

- **Punts de tall (PT).** El tipus d'error PT1 es presenta de nou en la funció quadràtica, és a dir, quan hi ha dos punts de tall. Normalment escriuen el punt de tall per $x = 0$, malgrat que a l'esquema gràfic si que dibuixen els dos punts de tall. Segons el comptador d'errors, apareix quatre vegades en cadascun dels quatre grups d'ESO, en total 16 de 32 (50%) amb una mediana del 0'5. Això pot estar condicionat per la construcció de la taula on donem $x = 0$ i no trobem la antiimatge de $y = 0$ i, a més, provocat pel disseny de la unitat didàctica ja que no els trobem en la part teòrica. Aquest procediment pot arribar a constituir un obstacle que impedeixi, a curt termini, la modificació d'aquesta concepció (trobar els punts de tall). Per això, aquesta tendència dels alumnes per trobar només el punt de tall per $x = 0$ s'ha de contemplar en el material docent. L'altre tipus d'error PT4, que es presenta pel cas $q = 0, p = 0$ pot ésser a causa d'escriure només una coordenada del punt que volen indicar. Per exemple, quan escriuen $x = r$ es refereixen al punt $(r, 0)$ i quan escriuen $y = z$ es refereixen al punt $(0, z)$ per $a > 0$. Aquest tipus d'error només s'ha presentat dues vegades en els tres grups de 4t C, això representa 6 de 32 (18'75%) i pel que fa al valor de la mediana és de zero.

De les entrevistes, tres de vuit (37'5%) ho dominen molt bé, fins i tot podrien explicar-ho a un company i la resta (62'5%) ho dominen a mitges.

- **Vèrtex (VX).** Ens trobem amb quatre tipus d'errors que es presenten per $q = 0$. Cal ressaltar que els errors VX1, VX3 són comesos pels grups de 4t C. Podem observar que han confós el cas $p = 0$ amb el cas $p = 0$ i succeeix dues vegades a cada grup, que són 6 d'un total de 32 (18'75%) i amb una mediana de zero. El grup de 4t A presenta dos tipus d'error diferents; el VX2 on podem adonar-nos que en el cas $q = 0, p = 0$ han confós les coordenades i succeeix 2 vegades de 32 (6'25%) amb una mediana de zero, i l'error VX4 que en lloc d'expressar de forma genèrica les coordenades del vèrtex escriuen les coordenades del vèrtex de la paràbola que han dibuixat, això succeeix 6 vegades de 32 (18'75%) amb una mediana de zero. Aquests grups presenten una tendència a escriure els valors que corresponen a les coordenades de les qüestions desenvolupades.

Dels vuit entrevistats durant el curs 99/00, quatre (50%) dominen molt bé el càlcul del vèrtex, fins i tot podrien explicar-ho a un company, tres (37'50%) ho dominen a mitges i un (12'50%) no ho domina i suggereix repassar-ho per millorar el seu aprenentatge.

- **Simetria (S).** Es presenten dos tipus d'errors S1, S2. El primer es troba en els tres grups de 4t C per $q=0$, $p \neq 0$, on canvia l'eix de simetria (la y per x). Pot ésser perquè l'equació de l'eix de simetria és $x = 0$, un joc de paraules i ha succeït dues vegades en cada grup, en total 6 de 32 respostes (18'75%). L'altre tipus d'error (S2) és quan $q \neq 0$, on l'eix de simetria és $x = q$ i escriuen $x = 0$. Pot ésser perquè l'equació de la funció quadràtica no està desenvolupada com $y = a(x-q)^2 + p$. S'ha presentat 4 vegades d'un total de 32 (12'50%).

Dels vuit entrevistats, el 50% dominen molt bé l'identificar l'eix de simetria, fins i tot podrien explicar-ho a un company i l'altre 50% ho dominen a mitges.

- **Orientació de les branques (OBR).** El fet de presentar-se només per $q=0$, $p \neq 0$ i $a < 0$ un canvi de concavitat, pensem que ha estat un lapsus en el moment de dibuixar-la (OBR1). Ha succeït 2 vegades de 32 respostes (6'25%).

Dels vuit entrevistats, el 50% ho dominen molt bé, fins i tot podrien explicar-ho a un company, el 37'5% ho dominen a mitges i el 12'5% ho domina molt poc i suggereix repassar-ho per millorar el seu aprenentatge. Tenint en compte aquestes dades, sembla que és una característica fàcil de veure però, en canvi, una mica més difícil a l'hora d'explicar-ho.

- **Obertura de la paràbola (OP).** En el grup de 4t A es detecta dos tipus d'errors: quan $q = p = 0$ diuen que no hi ha moviment (OP1) i per $a < 0$ en $q=0$, $p \neq 0$ i $q \neq 0$, $p=0$ permuten més gran l'obertura per més petita (OP2). Cada tipus succeeix 2 vegades de 32 (6'25%). Els grups de 4t C dibuixen una sèrie de paràboles amb diferents obertures, però no fan cap descripció amb paraules (OP3). Això s'ha presentat 24 vegades de 32 (75%). La gran majoria ha optat per expressar l'obertura de la paràbola fent un gràfic amb diverses paràboles per crear una sensació de canvi de l'obertura. Aquesta actitud pot estar influenciada pel impacte visual en el moment de manipular els gràfics i per la dificultat amb el valor absolut.

De les entrevistes, s'observa que només un dels vuit (12'5%) ho domina molt bé, fins i tot podrien explicar-ho a un company, la resta, el 87'5% ho dominen a mitges. Aquest resultat evidencia la manca de treball en aquesta característica. Són conscients de la dificultat amb el valor absolut i hem de contemplar-ho en les explicacions per millorar el seu significat i aclarir el comportament de la paràbola.

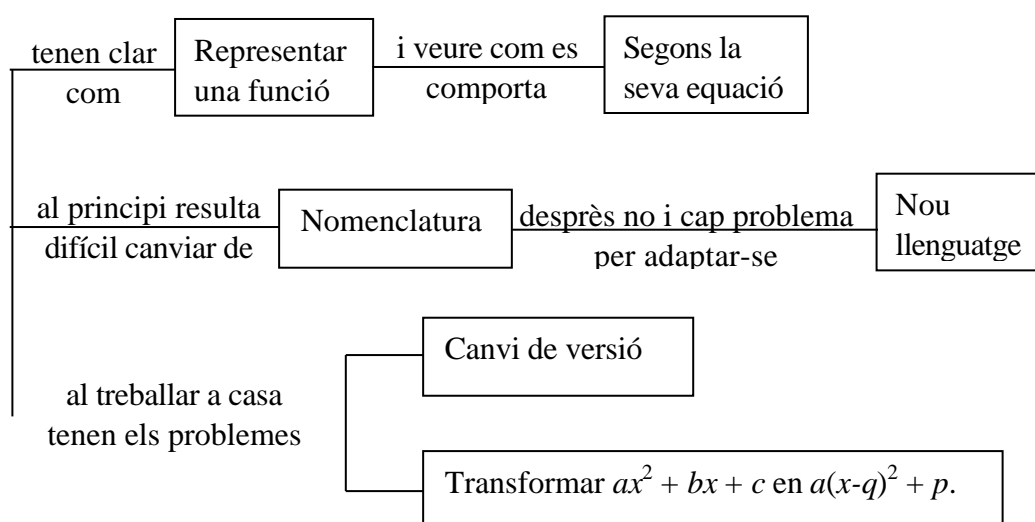
- **Esquema gràfic (EP).** La tipologia d'errors presentada queda dividida en conceptual (EP1, EP2) i de presentació (EP3). Els grups de 4t C han confós el cas $q=0$, $p \neq 0$ amb el de $q \neq 0$, $p=0$. Sembla que l'equació $y = ax^2 + p$ ($q=0$, $p \neq 0$) no van saber relacionar-la amb $y = a(x - q)^2$ ($q \neq 0$, $p=0$). Aquest tipus d'errors (EP2) succeeix 10 vegades de 32 (31'25%). El grup de 4t A ha confós el moviment de l'obertura de la paràbola amb la variació del vèrtex, malgrat estar ben dibuixada una de les paràboles (la que té com vèrtex (0,0)). En aquest cas, s'ha de treballar amb l'equació $y = ax^2$, però afegixen al gràfic les paràboles d'equació $y = ax^2 + p$. Això, pot ésser degut a la forma de presentar les qüestions de la unitat didàctica

que han de realitzar. Aquest tipus d'error (EP1) succeeix 2 vegades d'un total de 32 respostes (6'25%). En el cas del tipus d'error que hem classificat com de presentació, només dibuixen una paràbola de totes les que poden ser possibles (EP3). Això es presenta 4 vegades de 32 (12'50%).

En general, s'observa que a partir de $q = 0$ s'incrementen els errors, a causa d'haver de passar a expressar l'equació de segon grau $y = ax^2 + bx + c$ com $y = a(x-q)^2 + p$. El desenvolupament d'aquestes dues expressions algèbriques no s'han treballat el suficient com perquè quedi clar el comportament d'una funció quadràtica tenint en compte la variació dels seus paràmetres, per ambdós casos.

7.1.1.3 Comentaris generals

L'opinió dels alumnes entrevistats queda resumida en el següent mapa conceptual. De la seva lectura s'evidencia de nou la dificultat de fer servir la nomenclatura, però només al principi. I de l'estudi de la funció quadràtica, el desenvolupament de la seva expressió algèbrica $y = ax^2 + bx + c$ en $y = a(x-q)^2 + p$.



Dels vuit entrevistats, el 100% dominaven molt bé, fins i tot podrien explicar-ho a un company com representar gràficament. Un 25'92% (35 de 135 enquestats) van trobar dificultats en els conceptes i un 2'77% van manifestar una dificultat de comprensió lectora.

7.1.2 El full de càlcul

Després de l'estudi empíric i des de l'ús del full de càlcul, aquesta investigació ens ha aportat :

- S'ha afavorit l'experimentació i el descobriment de resultats. Un aprenentatge més actiu per part de l'alumnat.

- S'ha reforçat el descobriment dirigit amb el suport de la professora.
- La manipulació i la visualització per l'estudi de funcions afins i quadràtiques han afavorit descobrir propietats i característiques de les funcions en estudi a partir de l'anàlisi de diverses situacions.
- S'ha afavorit el raonament visual i ha permès fer més èmfasi en la generalització i l'abstracció.
- Ha ajudat els alumnes a rectificar ràpidament, la qual cosa ha estat molt gratificant per a ells i, així, no avançar de manera errònia.
- Ha permès els alumnes treballar de manera autònoma, adequant-se al seu ritme de treball i a la seva situació personal. S'ha afavorit el desenvolupament de la feina en petits grups.
- S'ha afavorit un bon clima de treball i una millora de l'actitud de l'alumnat cap a les matemàtiques.

Al llarg del procés d'aprenentatge dels alumnes, també s'han presentat algunes dificultats que ens han servit per millorar la unitat didàctica. A continuació, en primer lloc concretem les aportacions de l'anàlisi de dades respecte a les dificultats exhibides amb la utilització del full de càlcul per estudiar les funcions afins i quadràtiques. En segon lloc, comentarem com ha anat evolucionant la disponibilitat d'aquesta eina informàtica per part de l'alumnat i què han opinat del full de càlcul com a eina docent.

7.1.2.1 Dificultats

Les dificultats es classifiquen en quatre grans blocs: escriptura, gràfica, confirmació i l'ordinador com una tecnologia. A més, hem d'afegir respostes indefinides que corresponen a respostes inconcretes que podem trobar-nos en les preguntes obertes (veure 6.1.1.1).

Durant els cursos 97/98 i 98/99, les dificultats presentades en les primeres sessions eren només del full de càlcul. En canvi, durant el curs 99/00 les dificultats de l'eina de treball es barrejaven amb les dificultats de l'estudi de funcions afins i quadràtiques.

- **Esriptura.** Les dificultats més comunes i que van aparèixer en primer lloc van estar d'*escriptura*, que abasta totes aquelles dificultats relacionades amb l'escriptura de textos o realització d'operacions. Una de les primeres en aparèixer va ésser de comprensió instrumental (CI), on posen directament els resultats sense escriure la fórmula (CI1); de càlcul (EC), escriuen les fórmules sense utilitzar la nomenclatura adient (EC1) per desconeixement en un primer moment (EC2, EC3, EC4, EC5, EC7, EC8) o perquè se n'oblidaven (EC6); d'agilitat (EA) perquè van escriure en cada casella la fórmula corresponent sense utilitzar el mètode d'arrossegat fórmula (EA1) en un primer moment per desconeixement i després se n'oblidaven a vegades (EA2); de format perquè en el moment d'escriure expressions algèbriques no sabien quins passos s'han de donar per escriure un subíndex o/i superíndex en una equació (EF1), utilitzen el símbol

d'eleva una potència $^$, per expressar un superíndex en una equació (EF2). En general, desconeixen la notació que s'utilitza per expressar l'equació d'una funció com text (EF3) i com mostrar les xifres de les operacions realitzades, per exemple amb dues xifres decimals (EF4). A continuació, es van presentar dificultats de selecció: per representar la gràfica, seleccionen tota la taula inclosa la fila on han escrit el nom de les variables (ST1); per omplir la taula de valors arrossegueu des de la casella on han escrit l'equació de la funció (ST2) i per obtenir el valor numèric d'una funció no seleccionen la casella adient corresponent al terme independent (ST3). Tanquem aquest primer bloc de dificultats amb la localització per continuar escrivint un text ja que, quan volen continuar escrivint (en general un text llarg), no se situen a la casella on van començar a escriure sinó a la casella on acaba el text (LT1). Com ja s'ha indicat anteriorment, aquestes dificultats s'han produït en un primer moment per desconeixement i algunes vegades després per oblit.

- **Gràfica.** El segon bloc de dificultats anomenat *gràfica* són aquelles relacionades amb la manipulació del gràfic i la seva elecció. S'han presentat en el moment de la representació gràfica, quan no s'ha escollit el tipus de gràfic adient: "X-Y dispersió" (RG1) o no saber quantes funcions han de sortir dibuixades en el gràfic (RG2). En el moment de la manipulació del gràfic, les dificultats presentades han estat en com fer un gràfic que representi les funcions expressades en dues taules (MG1), com rectificar els noms de la llegenda del gràfic (MG2) i com afegir la llegenda després de representar el gràfic (MG3).
- **Confirmació i l'ordinador com una tecnologia.** De l'anàlisi de dades de tot l'estudi empíric a l'ESO, s'observa que els dos grans blocs exposats es barregen amb els altres dos grans blocs anomenats de *confirmació* i *l'ordinador com una tecnologia*. Dintre d'aquest apartat de *confirmació* s'agrupen les observacions i/o preguntes que fan els alumnes per continuar desenvolupant les seves tasques. S'ha dividit en procediments (CF1, CF2, CF3, CF4, CF5, CF6) on l'alumnat pregunta per assegurar-se que ho està desenvolupant bé, i de seguiment de la feina (SF1, SF2, SF3, SF4, SF5, SF6) per poder continuar realitzant la seva tasca. Dintre de l'aparat *l'ordinador com una tecnologia* ens trobem aquelles dificultats provinents de fer servir una eina informàtica, com presentar-se un canvi de versió (CV1, CV2), de funcionament de l'ordinador (FD1, FD2, FD3) i tècnics (TC1, TC2, TC3). Són problemes aliens a nosaltres però que hem de preveure'ls dintre del possible i afrontar-los.

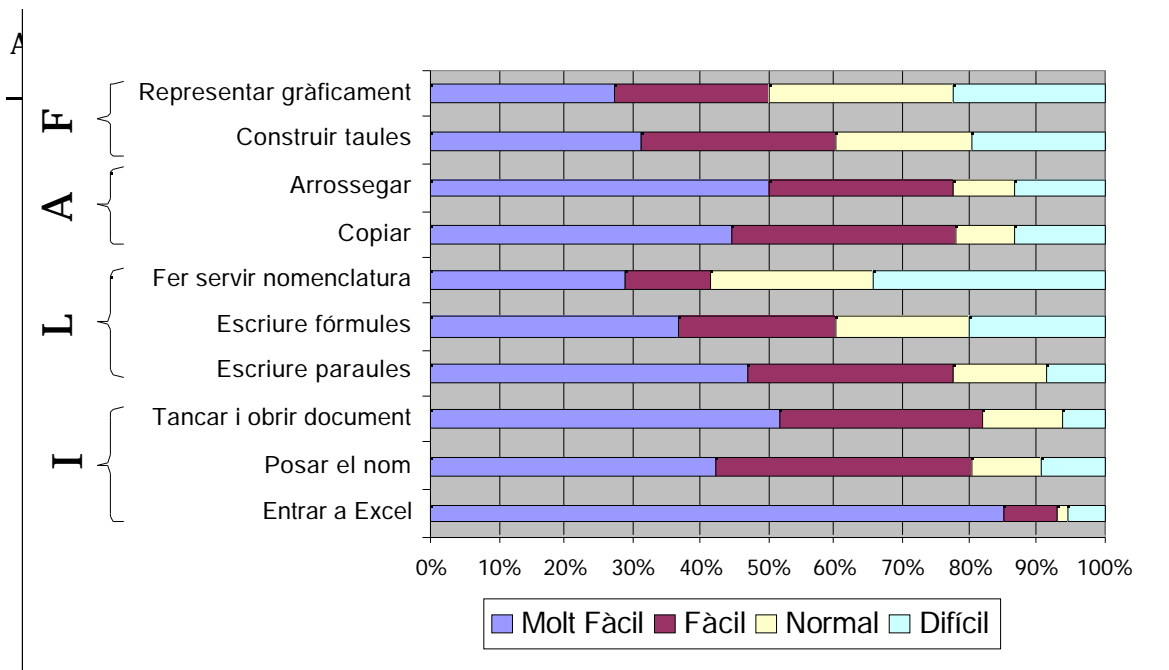
Dels 135 alumnes enquestats, 43 manifesten haver trobat dificultats en l'ús del full de càlcul (31'85%). En concret, un 11'11% no va utilitzar la nomenclatura adient per escriure les fórmules (EC1), un 9'09% fan referència a les preguntes formulades per confirmar (CF), un 5'66% s'obliden d'algun operador en el moment d'escriure l'expressió algebraica (EC6) i reconeixen que han tingut dificultats però no concreten (RD1), un 3'70% tenen dificultats d'escriptura de format (EF1) i d'agilitat (EA2), de representació gràfica en general i en particular de l'error (RG2) i de confirmació procedimental (CF1), un 2'77% donen respostes indefinides referent al moment de presentar-se la dificultat (MP1, MP2), un 2'43% d'escriptura en el càlcul (EC2) i en el format (EF3) i per últim

un 1'81% d'escriptura de càlcul (EC5, EC7, EC8), de selecció (ST3), de localització per continuar escrivint un text (LT1) i de respostes indefinides (ED1, GD1).

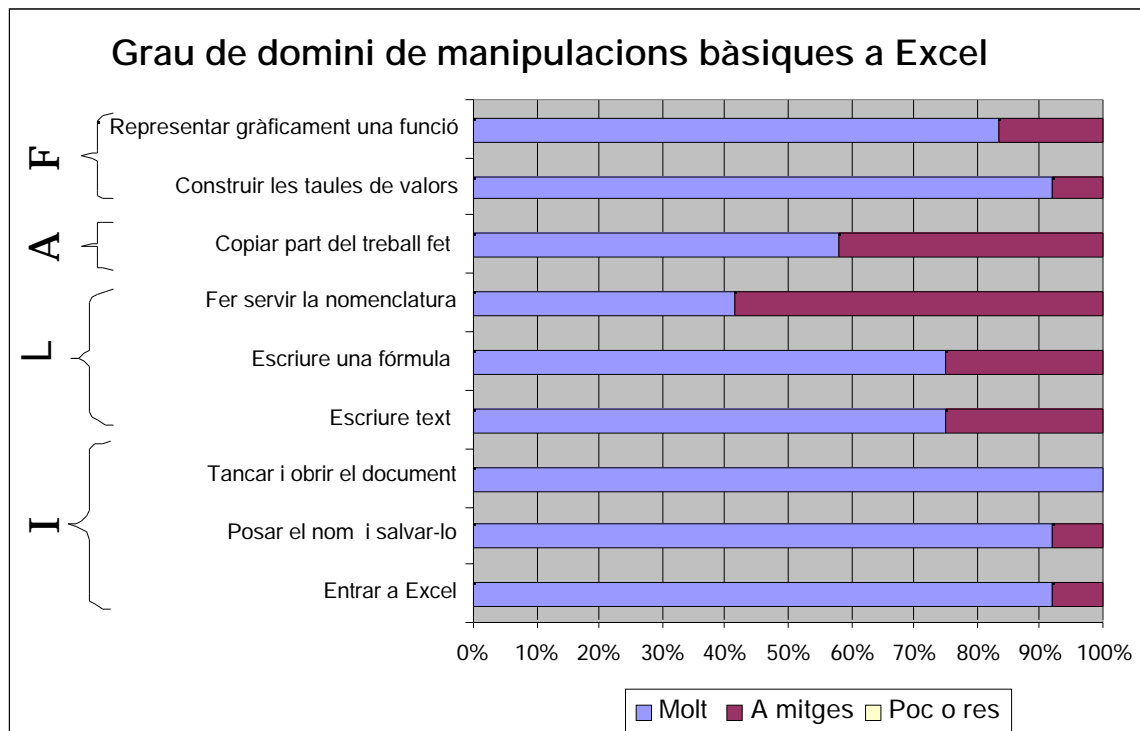
A continuació, es presenta una taula resum de les dificultats trobades en la manipulació bàsica d'un full de càlcul en l'estudi de funcions dividida en quatre blocs: **Inici** (entrar en Excel, posar el nom, obrir i tancar un document), **Llenguatge** (escriure paraules, fórmules i fer servir la nomenclatura), **Accions bàsiques** (copiar i arrossegar) i **Funcions** (construir taules i representar gràficament). Dels 135 alumnes enquestats, n'hi ha 7 que no contesten i dels 128 restants mostrem les respostes a la següent taula:

	Molt Fàcil	Fàcil	Normal	Difícil
Entrar a Excel	109	10	2	7
Posar el nom	54	49	13	12
Tancar i obrir document	66	39	15	8
Escriure paraules	60	39	18	11
Escriure fórmules	47	30	25	26
Fer servir nomenclatura	37	16	31	44
Copiar	57	43	11	17
Arrossegar	64	35	12	17
Construir taules	40	37	26	25
Representar gràficament	35	29	35	29

El major percentatge de dificultat el trobem en el bloc anomenat de *Llenguatge*, destacant el fer servir la nomenclatura adient, que té un percentatge molt semblant al dels alumnes que van trobar dificultats en l'ús del full de càlcul, aproximadament un 32%. A continuació, es presenta el bloc de *funcions* amb molt poca diferència entre la construcció de taules i la representació gràfica (supera la primera en percentatge però per molt poc).



A continuació, amb els resultats dels dotze alumnes entrevistats, podem ressaltar que en cap moment comenten que no ho dominen. L'única cosa que diferencia la taula anterior de la següent és que no surt arrossegar perquè no es va preguntar, en el moment de l'entrevista.



Destaca una altra vegada pel seu grau de dificultat el fet de fer servir la nomenclatura adient, i en tercer i quart lloc les que completen el bloc del Llenguatge. Però no oblidem que això vol dir que ho dominen a mitges, en cap moment afirmen que no ho dominen. Quan han de copiar part del treball fet en un altre document i han de seleccionar la part a

copiar, seleccionaven més del compte i per això ha sortit com que ho dominen a mitges, no arribaven a controlar el ratolí, amb la qual cosa havien de repetir-ho.

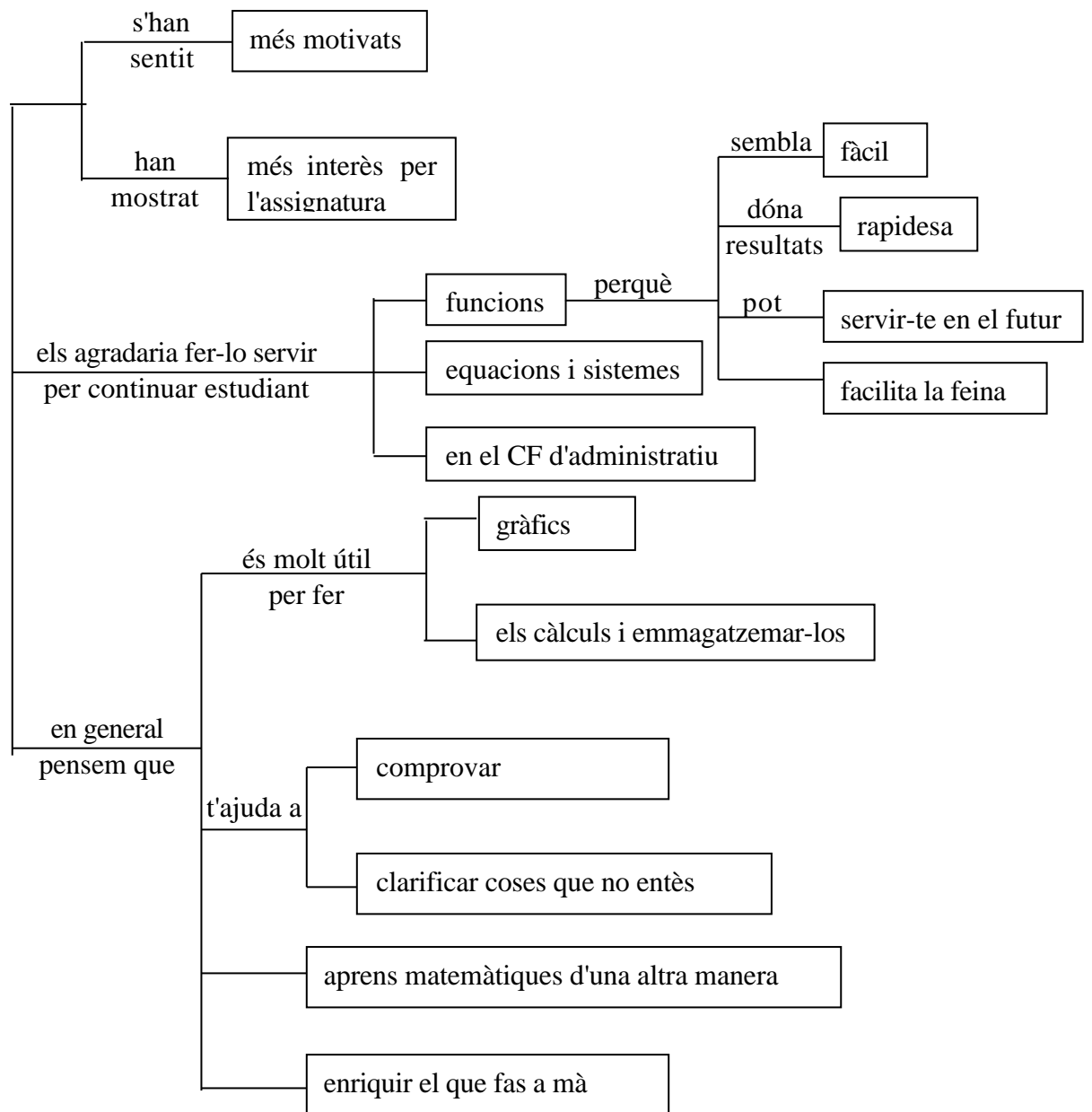
7.1.2.2 Comentaris generals

Cada vegada són més els alumnes que disposen d'ordinador a casa i tenen instal·lat l'Excel. Durant el curs 97/98, aproximadament un 32% de l'alumnat tenien ordinador a casa. En canvi, al llarg del curs 98/99 i el següent la tendència va ser que cada vegada va haver-hi més alumnes amb d'ordinador a casa. Aproximadament un 75 % de l'alumnat del curs 99/00 tenien ordinador a casa amb l'Excel instal·lat. Per tant, això fa pensar que el fet de treballar i fer els deures a casa amb l'ordinador vagi en increment.

La situació de partida respecte a la utilització de l'ordinador i l'ús del full de càlcul queda resumida de la següent manera: dels 135 alumnes enquestats, 121 alumnes (89'63%) havien utilitzat alguna vegada l'ordinador en front a 14 alumnes (10'37%) que no. Els llocs més habituals de fer-lo servir han estat a l'institut per 57 alumnes (42'22%) i a casa d'ells o d'algun company per 59 alumnes (43'70%). En aquests dos últims percentatges les diferències són mínimes, però hem de ressaltar que en un primer moment (curs 97/98) era de 43'63% en front de 27'27% per passar de 41'50% en front de 75'47% (curs 99/00). Això vol dir que l'increment d'alumnes amb ordinador durant l'últim curs ha fet equilibrar les dues situacions, institut i casa. Respecte a les tasques més habituals a desenvolupar hem de dir que 67 alumnes (49'62%) utilitzen l'ordinador per fer treballs. En canvi, per jugar han estat 24 alumnes (17'77%). Això vol dir que a aquestes edats comença a ser considerat l'ordinador com una eina de treball docent.

Només 39 dels 121 havien fet servir un full de càlcul (un 28'89% del total d'alumnes) No hem d'oblidar que durant el curs 98/99 ens van trobar amb alumnes repetidors i que durant el curs anterior 97/98 (estudi pilot) havien fet servir per primera vegada un full de càlcul.

L'opinió que tenen els alumnes del full de càlcul com a eina docent queda resumida en el següent mapa conceptual. En aquests moments no hem afegit cap transcripció literal de l'alumne, en cas de voler-ne consultar veure apartat 6.2.5. De la seva lectura, podem veure que hem aconseguit motivar-los, que mostrin més interès per l'assignatura i en concret pel tema de funcions. Han apreciat la seva utilitat i han valorat l'ajuda prestada per comprovar i clarificar.



7.1.3 La unitat didàctica

Les aportacions de l'anàlisi de dades quant a la unitat didàctica les presentem des de dues perspectives. La primera correspon a l'evolució d'aquesta unitat segons les activitats desenvolupades. Recordem que s'ha revisat el material docent en procés constructiu. I la segona fa referència a la valoració d'aquest material per part de l'alumnat.

7.1.3.1 Evolució de la unitat didàctica

7.1.3.1.1 Desenvolupament de les activitats per a 4t d'ESO

Tenint en compte que s'ha revisat el material en procés constructiu, és a dir, després d'analitzar cada fase empírica, curs a curs, s'ha anat presentant millores al material docent utilitzat i per especificar i clarificar els canvis produïts, a continuació es presenta la seva evolució segons les activitats desenvolupades per cursos acadèmics:

Curs 97/98

Les diferències entre la unitat didàctica elaborada inicialment (versió 1) per al primer trimestre i la revisada (versió 2) per el segon trimestre són de dos tipus. La primera correspon a un canvi d'ordre entre les activitats 2 i 3 (veure taula següent) a causa que resoldre en primer lloc els problemes d'aplicació restava importància a l'abstracció i la generalització.

1r trim. 4t B i C	<u>Activitat 0</u> <i>Lleis aritmètiques</i>	<u>Activitat 1</u> <i>Treball Excel</i>	<u>Activitat 2</u> <i>Resolució problemes</i>	<u>Activitat 3</u> <i>Estudi rectes</i>	<u>Activitat 4</u> <i>Estudi paràboles</i>
2n trim. 4t A	<u>Activitat 0</u> <i>Lleis aritmètiques</i>	<u>Activitat 1</u> <i>Treball Excel</i>	<u>Activitat 2</u> <i>Estudi rectes</i>	<u>Activitat 3</u> <i>Resolució problemes</i>	<u>Activitat 4</u> <i>Estudi paràboles</i>

La segona correspon a modificacions de les qüestions 1, 2 i 3 de l'activitat de resolució de problemes a causa de les dificultats presentades per aconseguir trobar l'equació d'una funció.

MODIFICACIONS DE LES ACTIVITATS

Resolució de problemes:

- A la qüestió 1 apartat f, es va afegir a la taula una fila on apareix "x" a la primera columna i en blanc la segona columna.

- A la qüestió 2 apartat d, es va afegir una taula que s'ha d'omplir abans de contestar la pregunta.
- A la qüestió 3 apartat f, també es va afegir, a l'igual que l'1, a la taula una fila on apareix "x" a la primera columna i en blanc la segona columna.

Curs 98/99

Durant aquest curs es va implementar una unitat didàctica millorada (Versió 3). Va haver-hi un canvi força important que va afectar a la presentació i plantejament de les qüestions respecte al curs anterior a causa de presentar-se dificultats de comprensió lectora i conceptual. Per això, en aquesta nova versió, les qüestions es presenten més pautades. A la taula següent, recollim l'estructura d'aquesta revisió.

2n trim.	Activitat 0		Activitat 1	Activitat 2	Activitat 3	
	4t CV1, CV2	0.1 <i>Lleis aritmèti- ques</i>	0.2 <i>Treballar Excel</i>	<i>Estudi rectes</i>	<i>Estudi paràboles</i>	3.1 <i>Problemes d'aplicació funcions afins</i>

Podem destacar:

MODIFICACIONS DE LES ACTIVITATS

- L'activitat 0 va quedar dividida en dues parts que corresponen a les activitats 0 i 1 del dossier del curs anterior.

0.1 Lleis aritmètiques que relacionen dues magnituds.

- La qüestió 1 va mantenir el que volia aconseguir, però la manera de demanar-ho va canviar.
- La qüestió 2 va fer referència a l'1 i va canviar també la presentació però demanant el mateix

0.2 Pautes per treballar amb Excel 5.0 a l'institut.

- Per "Guardar como" vam suprimir el nombre de la qüestió ja que van fer cada qüestió d'una mateixa activitat en un full de càlcul diferent.
- Va començar l'enumeració en el punt 0.1. Per tant, la qüestió 4 va correspondre a la qüestió 1 de l'activitat 1 i, així, va passar amb el 5 que era el 2 de l'activitat 1, la qüestió 6 i el 7 junts formaven el 3 de l'activitat 1.

- L'activitat 1. Estudi de les funcions afins va correspondre a l'activitat 2 d'abans.

La qüestió 1 va quedar més pautada i dividida en quatre apartats; els tres primers van correspondre al que vam demanar en el dossier anterior amb la diferència que aquest proposava que havien de donar 15 valors a la taula. Això és conseqüència que de vegades van donar massa valors i la taula va ser molt llarga. L'últim apartat va estar relacionat amb la taula de la qüestió 5.

La qüestió 2 va demanar el mateix però les preguntes van quedar més pautades al dividir-se en tres apartats. A més, han d'omplir un requadre de la qüestió 5 que abans es va deixar per al final.

La qüestió 3 va incorporar la funció $y = 0$ que abans no hi era explicitada.

La qüestió 4, que va correspondre a la 3 d'abans, va mantenir el mateix contingut però es va demanar en diferents apartats i també va estar relacionada a la qüestió 5.

La qüestió 5 va ser la 5 d'abans però pel desenvolupament del mateix es va demanar en 4 apartats.

La qüestió 6 va ser la 4 d'abans sense cap modificació.

- L'activitat 2. Estudi de les funcions quadràtiques va correspondre a l'activitat 4 d'abans.

Entre la qüestió 8 i 9 d'abans va haver-hi uns apartats de preguntes teòriques que ara els hem considerat com una altra qüestió que hem indicat com el 9. Això vol dir que l'enumeració s'incrementa en un nombre. És a dir, l'actual qüestió 10 era la 9, l'11 era 10 i així successivament fins a la 18 que era la 17. A més, hem afegit, a cada qüestió, l'apartat g on han d'anar a la qüestió 18 per omplir els requadres corresponents.

- L'activitat 3. Problemes d'aplicació.

3.1 Problemes d'aplicació a les funcions afins que va correspondre a l'activitat 3 sencera d'abans.

- Les tres primeres qüestions van ser noves.
- Les qüestions 4, 5 i 6 van correspondre a les qüestions 1, 2 i 3 d'abans sense cap modificació.

3.2 Problemes d'aplicació a les funcions quadràtiques. Va ser un nou apartat amb tres qüestions

Durant el *primer trimestre* vam afegir un full per mostrar les operacions bàsiques amb Excel. La resta del dossier es va mantenir igual que el curs anterior, és a dir, van treballar amb la versió 3. Després de revisar aquest material va néixer la versió 4, amb la qual van treballar els alumnes del 4t A durant el segon trimestre. Com recollim a la següent taula l'estructura es manté.

1r trim. 4t B i C	Activitat 0		Activitat 1	Activitat 2	Activitat 3	
	<i>0.1</i> <i>Lleis aritmètiques</i>	<i>0.2</i> <i>Treballar Excel</i>	<i>Estudi rectes</i>	<i>Estudi paràboles</i>	<i>3.1</i> <i>Problemes d'aplicació funcions afins</i>	<i>3.2</i> <i>Problemes d'aplicació funcions quadràtiques</i>
2n trim. 4t A	Activitat 1		Activitat 2	Activitat 3	Activitat 4	
	<i>1.1</i> <i>Lleis aritmètiques</i>	<i>1.2</i> <i>Treballar Excel</i>	<i>Estudi rectes</i>	<i>Estudi paràboles</i>	<i>4.1</i> <i>Problemes d'aplicació funcions afins</i>	<i>4.2</i> <i>Problemes d'aplicació funcions quadràtiques</i>

Passem a descriure els canvis que afecten a aquesta nova versió. L'alumnat de 4t A va treballar els mateixos continguts que els seus companys del primer trimestre però amb algunes modificacions. Aquestes van ser bàsicament tres, que van afectar a l'enumeració, a la presentació i al plantejament a causa de les dificultats presentades de comprensió lectora, de seguiment de la feina i de confirmació. Així que vam començar a numerar les activitats a partir de l'u. Creiem que és més entenedor el fet de començar pel nombre 1 que pel 0. Vam fer canvis respecte a la presentació del dossier. Pensem que fins ara no era molt atractiu per als alumnes malgrat que no van fer cap comentari al respecte. Aquests canvis de presentació van ser afegir títols a les activitats i als conceptes previs que s'han de conèixer per l'estudi de les funcions, deixar més espai entre línies, les funcions a representar i les equacions generals, afins i quadràtiques, van estar emmarcades en un requadre, aparèixer en negreta l'equació de la funció en estudi, van estar diferenciades les qüestions teòriques de les pràctiques i separades per uns dibuixos alineats. Passem a concretar activitats i qüestions implicades.

MODIFICACIONS DE LES ACTIVITATS

- L'activitat 1.

1.1 Lleis aritmètiques que relacionen dues magnituds. Qüestions inicials

- Teòrica 1 va ser la mateixa que la qüestió 1 de l'activitat 0.1.

- Teòrica 2 i 3 van ser les mateixes que les qüestions 2 i 3 de l'activitat 0.1 respectivament, afegint l'última frase

1.2 Pautes per treballar amb Excel a l'institut.

- El requadre de "Guardar como" va estar en negreta i en un altre tipus de lletra. A més, vam modificar com anomenar el nom de l'arxiu que es crea al resoldre les qüestions de cada activitat i van haver d'afegir el nombre de nivell que per aquests cursos de 4t d'ESO va ser 4.
- Vam incorporar el full de les operacions bàsiques davant de la qüestió 1.
- Les qüestions 1, 3 i 4 van correspondre al 4, 6 i 7 respectivament del primer trimestre.
- La qüestió 2 va ser la 5 del primer trimestre. Només vam afegir una dreuera al requadre explicatiu de com escriure un exponent.

- L'activitat 2. Estudi de les funcions afins.

Les qüestions van mantenir els mateixos apartats però va canviar la presentació com s'ha comentat al principi. En la construcció de les taules els 15 valors van ser entre -7 i 7.

A la taula de la qüestió 5, vam canviar els encapçalaments de les columnes

A la qüestió 6, vam afegir l'última frase i vam incorporar a la taula un exemple.

- L'activitat 3. Estudi de les funcions quadràtiques.

Les qüestions que només van tenir el número volia dir que s'havien de resoldre a través del full de càlcul. Les que van portar la paraula teòrica davant del número només s'havia de contestar o, en tot cas, observar el que ja s'havia fet a l'ordinador.

Es van ordenar els valors de la taula de la qüestió 1 perquè en el moment de fer el gràfic la representació segueix l'ordre dels valors de la taula, per tant, sortia malament.

Les qüestions teòriques 1, 2, 5, 6, 7 i 9 van ser les qüestions 5, 9, 14, 15, 16 i 18 respectivament del dossier d'abans.

La qüestió teòrica 3 va correspondre a l'11 d'abans però sense qüestió pràctica i va fer referència als resultats de la qüestió 6 d'aquesta versió 4.

La qüestió teòrica 4 va correspondre a la pregunta que es va fer entre les qüestions 13 i 14 d'abans.

La qüestió teòrica 8 va ser un treball previ per resoldre el 17 d'abans.

En totes les qüestions teòriques, va haver-se d'afegir un apartat per omplir el requadre corresponent de la teòrica 9.

Les qüestions 5, 6, 7, 8 i 9 van ser les qüestions 6, 10, 12, 13 i 17 respectivament del dossier del primer trimestre.

- L'activitat 4. Problemes d'aplicació.

A la qüestió 6, van ordenar la taula i van suprimir dibuixar en paper mil·limetrat.

NOVA PROPOSTA

Considerem com nova proposta el que presentem dintre de les noves perspectives d'innovació (veure apartat 8.1.4.1) Aquesta unitat didàctica manté la mateixa estructura que l'últim dossier treballat a classe però respecte al disseny i a la presentació es presenten algunes modificacions a causa dels errors provocats pel disseny d'aquesta unitat didàctica. Però, per aconseguir una visió més globalitzadora de com ha evolucionat aquest material didàctic, passem a comparar-la amb la versió inicial. Per mostrar les diferències entre el dossier inicial i el que proposem ara es té en consideració tres punts de vista: de seqüenciació de les activitats, de presentació i de disseny i elaboració de les activitats.







PRIMER DOSSIER versus NOVA PROPOSTA

Des del punt de vista de seqüenciació de les activitats

Cal destacar el moment en què s'ha decidit desenvolupar l'activitat de resolució de problemes d'aplicació. Aquesta es presenta l'últim a causa que resoldre en primer lloc els problemes d'aplicació restava importància a l'abstracció i la generalització. A continuació es presenta un quadre resum amb les diferències més notòries entre aquestes dues unitats didàctiques.

1r dossier	Activitat 0	Activitat 1	Activitat 2	Activitat 3	Activitat 4
	<i>Lleis aritmètiques</i>	<i>Treballar Excel</i>	<i>Resolució problemes</i>	<i>Estudi rectes</i>	<i>Estudi paràboles</i>
	Activitat 1	Activitat 2	Activitat 3	Activitat 4	



nou dossier	Activitat 1		Activitat 2	Activitat 3	Activitat 4	
	Des del punt de vista de presentació	<i>L.1 Lleis</i>	<i>L.2 Treballar</i>	<i>Estudi rectes</i>	<i>Estudi paràboles</i>	<i>4.1 Problemes</i>

Pensem que s'ha de tenir cura amb la presentació a causa de la comprensió i l'aplicació del següent de la unitat. Ara, a part de ser més atractiu per els alumnes, problemes espai entre línies, estan diferenciades les qüestions teòriques de les pràctiques, es ressalten les equacions de les funcions en estudi canviant el tipus de lletra i es ressalten les seves característiques emmarcant-les, s'especifica amb diferents icones les qüestions que s'han de realitzar en el dossier () , les que s'han de realitzar en el dossier i són teòriques () o només són de lectura () , també el seu grau de dificultat per realitzar en el dossier (TEÒRICA  ) o amb el full de càlcul (). L'activitat de l'estudi de funcions quadràtiques és la que ha patit més canvis de presentació, no pas de continguts.

Des del punt de vista de disseny i elaboració de les activitats

Per presentar aquest punt ho farem a partir dels títols de les activitats però sense especificar la seva numeració com a conseqüència dels canvis mostrats anteriorment en la seqüenciació. Els comentaris de cada activitat fan referència al contingut de la nova unitat didàctica.

Lleis aritmètiques que relacionen dues magnituds. Exercicis inicials

- 1) : S'incorpora la taula però amb les mateixes funcions. Només canvia la manera de demanar-ho.
- 2)  Tenint en compte els resultats de la qüestió anterior.

Pautes per treballar amb Excel a l'institut.

- S'ha modificat el sistema de nomenar els fulls de càlcul que creen els alumnes per realitzar les activitats del dossier per facilitar la seva lectura.
- Afegir el full amb la nomenclatura de les operacions bàsiques.
- Les qüestions 3 i 4 juntes corresponen a la 3 d'abans

Problemes d'aplicació

- A les funcions afins, els hem afegit les qüestions 1, 2 i 3. La resta 4, 5, i 6 són les mateixes del principi. Només hem afegit "x" al final de la primera columna de la taula, on tenim la qüestió 6.
- Els problemes d'aplicació per les funcions quadràtiques no hi eren.

Estudi de les funcions afins.

- Ara cada qüestió té més apartats per contestar les mateixes preguntes d'abans. A més, especifiquem quants valors ha de tenir la taula i entre quins valors s'han de moure.
- Afegim la qüestió 3.
- A la qüestió 4, hem afegit trobar els dos punts de tall.
- Entre la qüestió 4 i la qüestió 5 hem afegit la Teòrica 1) per a la funció afi d'equació $y = ax + b$
- A la qüestió 4 i 5, hem modificat el valor del coeficient $a = 1$ i $a = -1$ per $a = 2$ i $a = -2$, respectivament.
- La qüestió 5 és una taula resum de l'estudi de les funcions afins. S'omple a la vegada que es realitzen els apartats incorporats en les quatre qüestions prèvies.
- A la qüestió 6, hem agregat un exemple.

Estudi de les funcions quadràtiques.

- La taula de la qüestió 1 té els valors ordenats.
- A les qüestions Teòriques 1), 2), 3), i 4), hem afegit els punts de tall i omplir les files adjacents de la taula resum (Teòrica 9).
- A la qüestió 5, hem modificat el valor del coeficient $a = 1$ i $a = -1$ per $a = 2$ i $a = -2$, respectivament.
- Al sumari per $y = ax^2 + bx + c$ hem afegit els tres possibles punts de tall.

7.1.3.2 Nova unitat didàctica

Acabem de veure com ha anat evolucionant el material dels alumnes, per tant ara només comentarem com es desenvoluparien les activitats de la nova unitat didàctica (veure annex III) que presentem.

La proposta que fem per a l'estudi de funcions afins i quadràtiques fent ús de l'ordinador tenint com a eina un full de càlcul és la següent:

- Portar-la a terme amb alumnes de 4t d'ESO dins del crèdit comú de matemàtiques. S'ha de desenvolupar paral·lelament a les classes normals quan s'estudiïn les funcions afins i quadràtiques, i la seva representació gràfica.
- En els grups de treballs, s'ha de procurar que hi hagi almenys un alumne que tingui ordinador a casa.

- De les tres hores lectives per setmana de l'assignatura, utilitzar-ne dues per setmana per anar a l'aula d'informàtica.
- Disposar del convertidor per visualitzar la pantalla de l'ordinador, que servirà de guia, al TV i així utilitzar aquesta eina com a recurs didàctic.
- Distribuir les quatre activitats en un màxim de set sessions i a la següent fer l'examen, mantenint els mateixos grups de treball.
- El material didàctic es caracteritza per donar de manera molt pautada el funcionament d'un full de càlcul amb Excel pel que fa als objectius que pretén aconseguir, així que l'alumnat pot treballar de manera autònoma. I com que cada vegada tenim més alumnes que disposen d'ordinador i Excel poden fer deures a casa i, si no en tenen, facilitar-los el treballar a la sala d'ordinadors de l'institut fora d'horari lectiu.
- L'activitat 1.1 Lleis aritmètiques, fer-la a l'aula normal abans de treballar amb el full de càlcul.
- Proponem de manera orientativa distribuir per sessions el desenvolupament de les activitats de la nova unitat didàctica de la següent manera:

Primera sessió. Amb l'activitat 1.2, iniciarem el treball amb Excel presentant el full de càlcul i com funciona. Per això tenim la qüestió 1, molt pautada, per poder il·lustrar el seu funcionament. A continuació, tenim tres qüestions més per assolir aquest funcionament.

Segona sessió. Amb l'activitat 2, iniciem l'estudi de les funcions afins. Recordeu que les funcions lineals es consideren un cas particular.

Tercera sessió. Continuar amb les rectes.

Quarta sessió. Amb l'activitat 3, iniciem l'estudi de les funcions quadràtiques. S'ha de veure a l'aula normal el desenvolupament de l'expressió algebraica $ax^2 + bx + c$ a $a(x - q)^2 + p$.

Cinquena sessió. Continuar amb les paràboles.

Sisena sessió. Comencem l'activitat 4 amb problemes d'aplicació.

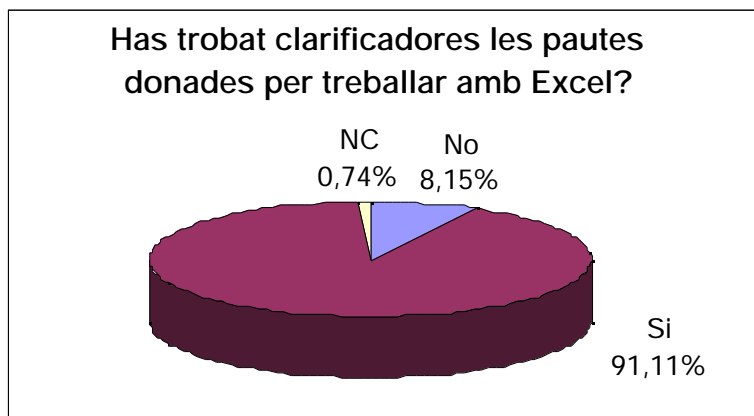
Setena sessió. Continuar treballant o examen. Opcional

Vuitena sessió. Examen si no s'ha fet a la sessió anterior

Aquesta proposta pot ésser modificada sempre que calgui pel professor/a, depenent de les necessitats dels seus alumnes.

7.1.3.3 Comentaris generals

La valoració feta de la unitat didàctica a seguir en el procés d'aprenentatge pels 135 alumnes enquestats ha tingut com resultat 123 que opinen haver trobat clarificadores les pautes per treballar amb l'Excel, 11 que no i 1 que no contesta. Això vol dir que té una acceptació molt alta per la gran majoria dels alumnes. Com s'observa en el següent gràfic, a un 91'11%, molt a prop del 100% els ha resultat entenedor el material didàctic.



Els alumnes entrevistats durant el curs 97/98 deixarien del dossier tot el que fa referència a gràfiques i operacions i només una petita minoria trauria el trobar l'equació d'una funció per la seva dificultat, no l'han aconseguit trobar amb la mateixa agilitat que feien la resta de qüestions. En canvi, durant el curs 99/00 deixarien el dossier com fins ara, només un alumne dels vuit modificaria les qüestions teòriques.

Un dels comentaris que van fer en acabar l'entrevista va ésser que el dossier és molt llarg i la teoria molt difícil. Però aquest suggeriment feia referència al desenvolupament de l'expressió algebraica de segon grau, que no es va treballar a classe, amb la qual cosa va resultar tediós realitzar les qüestions corresponents sense ajuda.

En general, el material docent elaborat i dissenyat per a aquest procés d'aprenentatge va tenir una bona acceptació i, com és obvi, sempre el podem millorar.

7.1.4 La metodologia de treball

Dintre d'aquest apartat, farem referència a tot allò que forma part de la metodologia de treball emprada al llarg dels tres cursos que integren l'estudi empíric. Anem a veure cadascuna d'aquestes parts.

- **A nivell curricular.** Inscrit dintre del crèdit comú de matemàtiques a totes les línies de 4t d'ESO durant els cursos 97/98 i 99/00. Durant el curs 98/99 va ésser ofert com a crèdit variable d'inici de l'àrea, va ésser tot un èxit per a l'assignatura ja que van escollir-lo de manera voluntària molts alumnes (30).

- **Disponibilitat de l'aula d'informàtica.** Segons la compatibilitat entre l'horari de l'assignatura en el marc horari del grup classe i disponibilitat de l'aula d'informàtica, va estar possible anar-hi una hora a la setmana i, com excepció, en alguns casos dues setmanals. Valorem molt positivament el fet de tenir la màxima continuïtat possible entre sessions per a un bon desenvolupament de les activitats.
- **Distribució de l'alumnat a l'aula d'informàtica.** Tenint en compte el nombre d'alumnes de cada grup classe, les seves necessitats i el nombre d'ordinadors disponibles, es van formar grups de 2 o 3, fins i tot es va reservar, en algunes ocasions, un ordinador per atendre les necessitats de l'alumnat amb adaptació curricular individualitzada. Sempre que va ser possible, es va evitar formar grups de tres.
- **Personal docent.** Per l'estructura organitzativa del centre, durant l'estudi pilot, va ésser possible estar dues professores a l'aula d'informàtica (una companya i l'autora d'aquest treball), excepte en el 4t B. Al curs següent, en ser crèdit variable, només va impartir les classes una professora, en aquest cas també la investigadora. I per últim, durant el curs 99/00 hi havia dues professores a l'aula d'informàtica, però en situació diferent al primer any; en aquests cas, una companya era la que impartia el crèdit comú i la investigadora només anava a l'aula d'informàtica.
- **Adaptació als mitjans.** A les situacions noves que es van anar presentant vam reaccionar amb una adaptació ràpida i superant els problemes que van sorgir. Aquestes van estar en un entorn informàtic (canvi d'aula, canvi de versió, virus, no funciona...).
- **El ritme de treball de l'alumnat.** Va estar marcat pel desenvolupament de les activitats i, tenint en compte els problemes que van haver d'afrontar, com canvi d'aula, mal funcionament d'ordinadors, realitzar altres tasques docents (crèdit de síntesi), període de vacances,... va ser impossible de realitzar totes les qüestions de totes les activitats del dossier dins de l'horari lectiu.
- **Innovacions.** Els canvis més notoris en la metodologia de treball van arribar durant l'últim curs 99/00 per diferents causes. Una d'elles va ésser en el moment d'introduir un nou element, un televisor connectat a l'ordinador a través d'un convertidor de VGA a TV on es va poder veure pel televisor la pantalla d'ordinador i, per tant, els alumnes van seguir les explicacions. Així, en començar la classe, vam poder recordar el que s'havia fet en sessions anteriors i, en acabar la classe, clarificar i recordar el que s'havia fet. A més, amb el grup 4t A es va concretar el contingut de cada sessió; la primera es va dedicar a la presentació de l'eina informàtica i al seu funcionament, la segona i la tercer a l'estudi de funcions afins, la quarta i la cinquena a l'estudi de la funció quadràtica. Les qüestions i l'activitat de problemes que van quedar sense fer, es va recomanar fer-los a casa seva o a l'institut. Aquest canvi metodològic està fonamentat que cada vegada va haver-hi més alumnes amb ordinador amb l'Excel instal·lat i hem d'aprofitar-nos

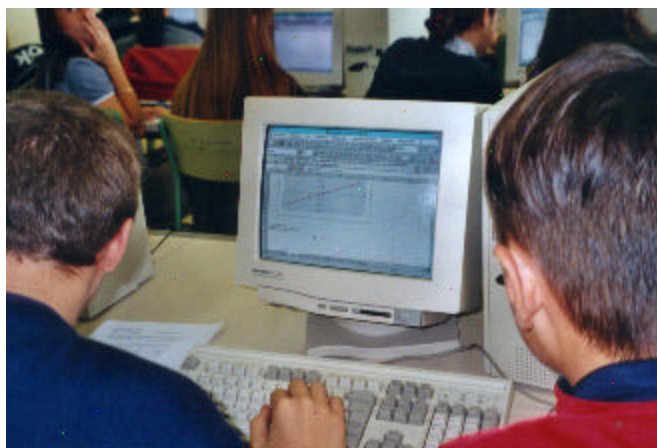
de les noves tecnologies sense oblidar que el factor temps juga un paper important; no és possible fer-ho tot a classe. La gran majoria dels alumnes van poder treballar a casa seva i, en el cas de no ser possible, facilitar-los la possibilitat de fer-ho al centre.

- **Coordinació del treball fet a l'aula normal i a l'aula d'informàtica.** Durant els dos primers cursos 97/98 i 98/99, el treball desenvolupat a l'aula normal i a l'aula d'informàtica va estar coordinat i així ho van manifestar els alumnes. En canvi, durant el curs 99/00, en el moment de necessitar el desenvolupament de l'expressió algèbrica de " $ax^2 + bx + c$ " en " $a(x - q)^2 + p$ ", no es va donar aquesta coordinació.
- **Alumne/a - Professora.** Aquesta metodologia de treball de construcció va tenir molt present quin era el paper que jugava l'alumne i la professora. L'alumne va ser subjecte actiu en el procés de l'ensenyament a partir dels seus descobriments, descobriments guiats per una ajuda pedagògica; construeix els seus coneixements i els signfica. El veritable artifici en la construcció del coneixement va ser l'alumne. La professora ensenya a aprendre, va ser la que va prestar l'ajuda pedagògica, és a dir, va orientar en el moment oportú, permetent a l'alumne continuar progressant en el seu procés d'aprenentatge i utilitzant tots els mitjans disponibles per afavorir i orientar aquest procés.

7.1.5 L'actitud de l'alumnat

Des d'un primer moment, els alumnes van estar centrats en la realització de les activitats del dossier, sense cap distracció, fins i tot els alumnes considerats problemàtics (desinterès pels estudis, faltes de disciplina,...) que van mostrar gran interès i van estar participatius. La realització del dossier els va resultar engrescador. A més, els alumnes que es van trobar amb alguna dificultat, ja sigui perquè no ho havien fet bé o se'ls presentava algun problema del funcionament de l'ordinador, cap problema en fer de nou la feina, ja sigui a casa seva en el cas de disposar d'ordinador o a l'institut. Els alumnes van mostrar molta bona predisposició, van estar pacients i mostrant gran interès per la tasca desenvolupada. En resum, el clima de treball va ser molt bo i així es va mantenir al llarg de tot el procés.

A la foto que ve a continuació, mostrem un moment del desenvolupament de les tasques per part d'uns alumnes.



Cal ressaltar l'adaptació ràpida al sistema operatiu Windows 98 i a l'Excel 97 dels grups afectats, només van fer algunes preguntes per confirmar que el que feien estava bé perquè en el dossier només apareixia l'explicació pel sistema operatiu Windows 95 i l'Excel 5.0. No oblidem que el 4t A del curs 99/00 va assistir dues tardes fora d'horari escolar per completar les sessions marcades. Tot plegat, demostra que estan prou motivats per assolir el nou aprenentatge.

En el moment de treballar, els va agradar posar títols a les gràfiques i als eixos de coordenades amb un toc personal. No farem cap comentari als títols, però sí dir que aquests petits detalls ens indiquen que se senten còmodes treballant i aquest fet no endarrerix la tasca a desenvolupar.

Quan, durant el curs 98/99, va ésser ofert com crèdit variable d'inici de l'àrea, va ésser tot un èxit per a l'assignatura ja que van escollir-lo de manera voluntària molts alumnes (30), la qual cosa és reconfortant perquè normalment són reticents a escollir crèdits variables de matemàtiques.

Tenint en compte les seves opinions personals de tot el treball en general, cal valorar molt positivament la tasca desenvolupada en el seu procés d'aprenentatge, malgrat que es van queixar de no entendre en alguns moments algunes coses, sobretot al principi. Però el recull de tot això ens ha servit per continuar treballant, millorant i fent noves propostes.

7.2 Batxillerat Humanístic

Recordem que l'anàlisi de dades per al Batxillerat Humanístic correspon a un seguiment de dues alumnes que van formar part de la mostra en l'estudi pilot de 4t d'ESO. Aquesta anàlisi ens dona unes primeres idees sobre l'estudi de funcions utilitzant el full de càlcul sota un procés d'aprenentatge constructiu basat en la manipulació i la visualització. Per tant, en cap moment considerem dintre de la investigació com consolidades tant per la mostra com pels temes treballats. Amb aquest apartat, concloem l'última fase dissenyada en la nostra recerca per a aquest nivell acadèmic, la fase anomenada *fase intuïtiva* amb la intenció d'aportar una sèrie "d'intuïcions" que ens serviran per continuar investigant. Les aportacions presentades mantenen la mateixa estructura que a 4t d'ESO, és a dir, es troben dividides en cinc blocs: els continguts de

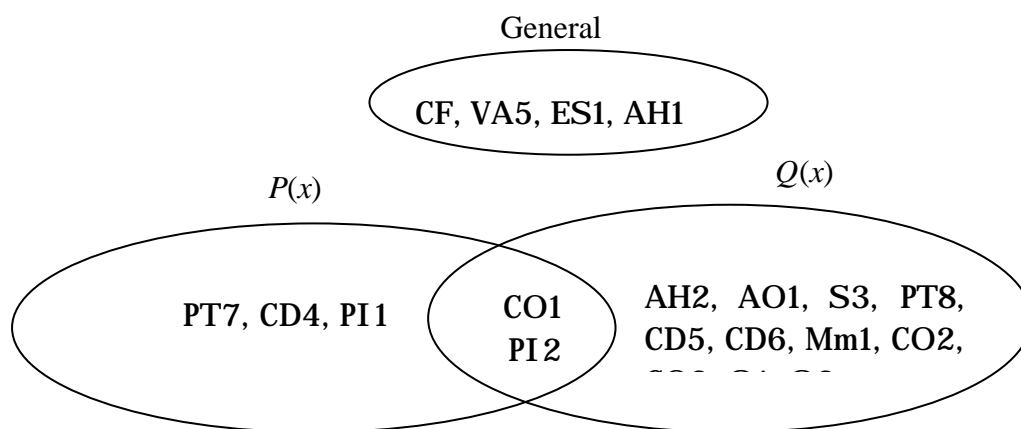
funcions, el full de càlcul, la unitat didàctica, la metodologia de treball i l'actitud de les dues alumnes de seguiment.

7.2.1 Continguts de funcions

Després de l'estudi pilot i des dels continguts de funcions treballats, pensem que:

- S'ha afavorit un raonament visual.
- S'ha provocat la necessitat d'aplicar el teorema de Bolzano per trobar els punts de tall, màxims, mínims i punts d'inflexió.
- S'ha provocat la necessitat d'ajustar els eixos de coordenades en l'estudi de les funcions polinòmiques i racionals.
- La manipulació i la visualització facilitades per l'ús del full de càlcul han ajudat a estudiar i a representar gràficament les funcions polinòmiques i racionals utilitzant les derivades.

Al llarg del procés d'aprenentatge, les dues alumnes de seguiment han presentat una sèrie de dificultats i d'errors que ens serveixen per reconèixer que cal continuar investigant. En primer lloc, presentem les dificultats a nivell general del tema de funcions i, a continuació, concretament les dificultats i la tipologia d'errors en funcions polinòmiques ($P(x)$) i en funcions racionals ($Q(x)$). Per il·lustrar aquest conjunt de dificultats i errors



tenim els següents diagrames.

7.2.1.1 Dificultats

Es classifiquen, segons el seu origen, en dificultats de confirmació, taula de valors, modificació d'escala i asímptota horitzontal. (veure 6.1.2.2.1)

- **Confirmació (CF).** No molt sovint van preguntar si el que feien era el correcte.

- **Taula de valors (VA).** De l'observació del gràfic, van adonar-se que alguna cosa no estava bé perquè la representació no corresponia a una funció (VA5). Això va ser perquè dos valors de la columna d' x no van estar ordenats.
- **Modificació d'escala (ES).** Quan van voler delimitar el rang de valors dels eixos de coordenades per ajustar la funció i fer un estudi més acurat, van haver de modificar els valors moltes vegades fins aconseguir-ho (ES1). Es produeix a causa de no fixar-se, en un primer moment, on estan ubicats els punts de tall, els punts estacionaris i les asímptotes.
- **Asímtota horitzontal (AH).** Van escriure incorrectament l'equació de l'asímtota horitzontal (AH1) però després d'observar la taula i el gràfic, van rectificar i van escriure l'equació correctament. Es va tractar de la funció $y_2 = \frac{e^x}{e^x - 1}$ que té per equació l'asímtota horitzontal $y = 1$. L'equació escrita en un primer moment va ser $y = 0$.

7.2.1.2 Errors

La tipologia d'errors no ve donada per les característiques de les funcions sinó per les causes que provoquen aquest errors (veure 6.1.2.2.2 i 6.1.2.2.3). Els dividim en quatre tipus: aproximació, oblit, conceptual, indefinit.

- **Aproximació.** Al menys una de les coordenades d'un punt o dels extrems d'un interval van ser expressades per valors aproximats (PT7, CO3 i CD6). Això pot ésser a causa de fer una aproximació visual i no fixar-se en el valor numèric que es troba a la taula. Per fer l'aproximació visual, van fer servir el ratolí a sobre del gràfic per obtenir les coordenades però com van haver-hi representats molts punts en un interval petit fàcilment es pot cometre un error de precisió.
- **Oblit.** Quan la funció va tenir:
 - **Dos punts** de tall o d'inflexió, van oblidar-se d'un d'ells (PI1 i PT8).
 - **Una asímtota horitzontal**, van oblidar-se de dibuixar-la (S3), desplaçant el gràfic, amb la qual cosa va semblar simètrica respecte a l'origen.
 - **Dues asímptotes**, només van escriure l'equació de l'asímtota vertical (AH2 i AO1). Va ser a causa que els punt que no van pertànyer al domini van ser els valors de les equacions de les asímptotes verticals i com el domini va ser un concepte que mostren tenir assolit no es van oblidar d'escriure'l. En canvi, per trobar els altres tipus d'asímtotes han de calcular límits.
 - **Que ésser representada en el dossier**, van oblidar-se de col·locar les asímptotes (Q2). El motiu va ser la traducció literal de l'enunciat que va dir "*esquema gràfic*", per tant, es van limitar a dibuixar en el paper només el gràfic tenint en compte per on van passar les asímptotes.

- **Conceptuals.** Ens trobem amb dos tipus d'errors en les funcions racionals. Primer, van presentar dificultats en trobar els punts d'inflexió (PI2). Va ser a causa de fixar-se només en el gràfic i no en els valors de la taula que fan la segona derivada zero. No va ser un punt fàcil de precisar sobre el gràfic amb el ratolí, amb la qual cosa va provocar errors en determinar els intervals de concavitat (CO1 i CO2). Segon, a l'estudi per la funció racional $y_5 = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$ (Q1), van concentrar-se la gran majoria d'errors (AO1, PT8, CD5 i Mm1). Pot ésser a causa de considerar l'asímtota obliqua com una horitzontal, provocant una distorsió en l'estudi.
- **Indefinit.** Un extrem de l'interval no correspon al valor correcte (CD4). Es va tractar de la funció $y_4 = x^4 + 2x^3$ que és decreixent per l'interval $(-\infty, -1,5)$, van escriure -2 en lloc de $-\infty$. Creiem que va ser una petita errada d'escriptura a causa de no repassar.

Com a sumari d'aquests resultats es presenta la taula següent:

	$P(x)$	$Q(x)$
Aproximació	PT7	CD6, CO3
Oblit	PI1	AH2, AO1, S3, PT8, Q2
Conceptual	CO1, PI2	CD5, Mm1, CO1, CO2, PI2, Q1
Indefinit	CD4	

7.2.1.3 Comentaris generals

Quan a l'aula normal es demostra un teorema, la majoria de les vegades es queden amb la sensació d'ésser una cosa molt abstracta i de poca utilitat. En canvi, si es planteja una activitat que provoqui la necessitat d'aplicar el teorema se n'adonen de la seva importància i de la seva aplicació. Això ho van aconseguir amb l'observació i la manipulació de la taula de valors. Cal destacar l'aplicació del teorema de Bolzano per trobar els punts de tall, màxims, mínims i punts d'inflexió.

En observar el gràfic i la taula, van adornar-se de la necessitat d'ajustar els eixos de coordenades. Això, ho van aconseguir després de modificar el rang de valors dels eixos de coordenades reiteradament perquè des d'un primer moment no van trobar els valors adients per fer l'estudi més acurat.

Intuïm que el fet de manipular i visualitzar amb el full de càlcul els va ajudar a estudiar i a representar gràficament les funcions polinòmiques i racionals

7.2.2 El full de càlcul

Després de l'estudi pilot i des de l'ús del full de càlcul a la nostra investigació pensem que:

- S'ha afavorit el raonament visual.
- La manipulació i la visualització, per a l'estudi de funcions polinòmiques i racionals utilitzant les derivades, han afavorit descobrir propietats i característiques de les funcions en estudi a partir de la construcció de taules de valors i de l'observació dels gràfics representats.
- S'ha fet servir per completar, clarificar i assolir l'estudi de les funcions polinòmiques i racionals utilitzant les derivades.
- S'ha afavorit l'experimentació i el descobriment de resultats. Un aprenentatge més actiu per part de l'alumnat.
- S'ha reforçat el descobriment dirigit amb el suport de la professora.
- Ha permès els alumnes treballar de manera autònoma i adequant-se al seu ritme d'aprenentatge. S'ha afavorit el treball individual i en petits grups.

Al llarg del procés d'aprenentatge d'aquestes dues alumnes, s'han presentat una sèrie de dificultats i d'errors que ens serveixen per reconèixer que cal continuar investigant. A continuació, presentem les dificultats dividides en tres blocs: escriptura, manipulació i l'ordinador com a tecnologia.

- **Esctipura.** Aquestes dificultats van aparèixer en un primer moment per diferents motius. En primer lloc, per desconeixement (EC7, EF1 i ST4), que en algun cas (EF5) va provocar una petita recerca (escriure el símbol de l'infinit). En segon lloc, van voler agilitar la seva tasca (EA3).
- **Manipulació.** Van anar apareixent al llarg de tot el procés d'aprenentatge. Les trobem en el moment de manipular el gràfic (MG4 i MG5). Aquestes van ser provocades per desconeixement. Les dificultats de manipulació de funcions i de manipulació de la taula van ser a causa d'actuar incorrectament: ocultar una fila en lloc d'eliminar-la (MT1), escriure punt en lloc de coma per indicar decimals (MF2), fer servir la tècnica d'arrossegar per omplir unes cel·les des d'una casella equivocada (MF1), oblidar-se d'indicar l'increment per omplir una columna (MF3) o posar una cel·la equivocada en "Definir celda" del quadre de diàleg de "Buscar Objetivo" quan van voler trobar el valor d' x que fa la primera derivada de la funció zero.
- **L'ordinador com a tecnologia.** Aquesta dificultat (TC4) va ser produïda per treballar amb una eina informàtica.

En general, les alumnes van considerar el full de càlcul com una eina de treball que els va servir per completar, clarificar i assolir l'estudi de les funcions polinòmiques i racionals aplicant derivades.

7.2.3 La unitat didàctica

L'estructura i el disseny de la unitat didàctica va ser de molta ajuda, en concret l'ordre de presentació del dossier per desenvolupar les activitats i les pautes donades per arribar a fer l'estudi i representar la funció desitjada.

Aquest material els va permetre treballar a casa de manera autònoma i no se'ls va plantejar cap problema del funcionament del full de càlcul i del tema de funcions, la simetria. La resta bé.

7.2.4 La metodologia de treball

Anem a concretar les aportacions que formen part de la metodologia de treball portada a terme al Batxillerat Humanístic.

- **A nivell curricular.** Inscrit dintre de la modalitat d'Humanitats a l'assignatura de Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. Durant el primer curs (98/99) van estudiar les funcions exponencials i logarítmiques i durant el segon curs (99/00) van estudiar les funcions polinòmiques i racionals utilitzant derivades.
- **Disponibilitat de l'aula d'informàtica.** Va ésser possible anar-hi dues hores a la setmana de les tres lectives, tant a primer com a segon de batxillerat, durant tres setmanes seguides. Això va permetre una continuïtat de treball entre sessió i sessió, a més d'un equilibri entre les classes impartides a la sala d'ordinadors i a l'aula normal.
- **Distribució de l'alumnat a l'aula d'informàtica.** El nombre reduït d'alumnes en comparació amb el nombre d'ordinadors disponibles va permetre treballar individualment a primer de Batxillerat. En canvi, com a segon va ésser més nombrós el grup classe, aquestes alumnes van treballar juntes a l'igual que a 4t d'ESO.
- **Personal docent.** Durant els dos cursos de Batxillerat vam desenvolupar la tasca docent juntament amb la tasca d'investigadora.
- **El ritme de treball de l'alumnat.** Les dues alumnes van desenvolupar totes les activitats de segon de Batxillerat. Aquestes activitats no només les van realitzar dintre de l'horari lectiu sinó que li van dedicar temps d'estudi a casa seva.
- **Innovacions.** Els canvis més notoris en la metodologia de treball es presenta a segon de Batxillerat durant el mateix curs 99/00 a 4t d'ESO: instal·lar el convertidor que ens va ajudar a impartir les classes, concretar les activitats a

desenvolupar en cada sessió i tenir les dues alumnes ordinador a casa seva amb Excel.

- **Coordinació del treball fet a l'aula normal i a l'aula d'informàtica.** Durant els dos cursos de Batxillerat, el treball desenvolupat a l'aula normal i a l'aula d'informàtica va estar coordinat.
- **Alumne - Professora.** El paper que juga l'alumna i la professora va ser el mateix que l'exposat a 4t d'ESO.
- **Continuïtat d'ESO a Batxillerat.** El procés d'aprenentatge va mantenir la mateixa línia de treball, tant a 4t d'ESO per estudiar les funcions afins i quadràtiques com a primer de Batxillerat Humanístic per estudiar les funcions exponencials i logarítmiques i a segon per estudiar les funcions polinòmiques i racionals aplicant derivades. El fet de tenir coneixements d'un any per l'altre sobre el full de càlcul pot facilitar la tasca a desenvolupar però no li van donar molta importància.

7.2.5 L'actitud de les alumnes de seguiment

El clima de treball va ésser relaxat i d'ajuda entre elles, ja sigui quan van estar treballant individualment com juntes, ja que consultaven entre elles. Van ser alumnes molt motivades acadèmicament per diferent raons(els agrada estudiar, volen anar a la universitat, ...), per tant, el que vam procurar va ser de no desmotivar-les . Elles no van manifestar cap problema per acabar les qüestions a casa i si es presentava algun problema tècnic que provocava repetir alguna activitat o part de l'activitat sempre van acceptar repetir-ho sense problemes.

Capítol 8

Conclusions

En aquest darrer capítol, presentem les conclusions que es deriven dels resultats obtinguts a l'estudi. D'acord amb els objectius d'aquesta recerca, hem organitzat aquestes conclusions en dos blocs. En primer lloc, resultats pròpiament de recerca quant al perfil d'aprenentatge basats en l'anàlisi i la categorització realitzada des de l'ús del full de càlcul i dels continguts desenvolupats en el tema de funcions. En segon lloc, resultats quant a la innovació didàctica basats en el disseny de la unitat didàctica elaborada, en la forma d'intervenció didàctica portada a terme durant el procés d'aprenentatge de l'alumnat i en l'actitud de l'alumnat. Les conclusions es presenten enumerades de manera consecutiva entre els dos blocs. A més, afegim les limitacions trobades a l'eina didàctica en aquest estudi i les futures línies de recerca.

8.1 Resultats respecte al perfil d'aprenentatge

En finalitzar l'estudi empíric i des de l'anàlisi de dades, aquesta recerca aporta respecte al perfil d'aprenentatge de l'alumnat les següents conclusions:

1. El full de càlcul ha estat una bona eina per potenciar l'aprenentatge per descobriment i ha permès un procés manipulatiu i visualitzador.
2. S'ha fet servir una eina manipulativa i visualitzadora emfasitzant en la generalització i l'abstracció a partir de comparacions de gràfics.
3. Ens ha permès resoldre problemes d'aplicació a les funcions afins en situacions reals.
4. S'han presentat diferents situacions algèbriques que han generat funcions. En primer lloc, funcions afins (considerem les funcions lineals com un cas particular de les afins) per analitzar les seves característiques (pendent, ordenada a l'origen, punts de

tall i la representació gràfica). En segon lloc, funcions quadràtiques a partir de translacions també, per analitzar les seves característiques (vèrtex, l'eix de simetria, punts de tall, orientació de les branques, obertura i la representació gràfica).

5. S'ha desenvolupat una categorització per a les dificultats i errors trobats en l'estudi de les funcions afins i quadràtiques fent ús del full de càlcul. Ens ha servit per millorar la unitat didàctica elaborada per a la investigació. A continuació, en primer lloc, inclourem les dificultats i, en segon lloc, els errors. Es presenten des de tres perspectives: el disseny de la unitat didàctica, la influència del full de càlcul i els continguts treballats en l'estudi de funcions afins i quadràtiques.

8.1.1 Les dificultats

En l'estudi de les funcions afins i quadràtiques amb l'ús del full de càlcul, s'ha presentat, a l'inici del procés d'aprenentatge, una sèrie d'obstacles epistemològics i didàctics. En el cas de les dificultats epistemològiques, han estat provocades per les característiques a reconèixer de les funcions afins. I en el cas de les didàctiques, han estat produïdes pel disseny de la unitat didàctica i més per desconeixement del funcionament del full de càlcul que no pas per la seva complexitat.

- **Des del disseny de la unitat didàctica.** S'han presentat dificultats en trobar l'equació d'una funció abans de desenvolupar les activitats de generalització proposades per estudiar les funcions afins i quadràtiques.
- **Des de la influència del full de càlcul.** S'ha manifestat un canvi d'hàbits en els alumnes en el moment de realitzar les seves tasques. Principalment, aquestes tendeixen a:
 - Preguntar amb freqüència per assegurar-se que el desenvolupament de les activitats siguin correctes, tant del tipus procedimentals com conceptuals i així no avançar de manera errònia.
 - Comprovar, per exemple, que els valors donats a la variable independent siguin coherents amb el problema plantejat, que els resultats de la variable dependent siguin els que corresponen a la seva funció.
 - Verificar que els valors de la taula coincideixen amb els que apareixen en els eixos de coordenades de la gràfica representada.
- **Des dels continguts treballats en l'estudi de funcions afins i quadràtiques:**
 - Els alumnes han reparat en la importància de l'ordre de prioritats de les operacions, a causa de la constant manipulació de les expressions algèbriques facilitat per la utilització del full de càlcul.
 - Els alumnes han mostrat hàbits no favorables al procés d'aprenentatge com realitzar una lectura ràpida, superficial i no enllaçar coses ja desenvolupades amb les que s'estaven treballant.

- De vegades, els alumnes no han recordat el significat d'algun símbol estudiat en una altra unitat didàctica i han dubtat en l'ordre d'execució de les operacions per calcular el valor numèric d'una equació de la funció en estudi.
- S'ha presentat una dificultat en expressar correctament les coordenades del punt (0,0). S'ha escrit sense parèntesi o només la xifra 0. També, s'ha presentat un problema de llenguatge, s'ha indicat un punt de tall escrivint uns quants punts sense generalitzar.
- S'ha identificat decreixent amb pujar cap l'esquerra o que va de positiva a negativa la recta.

8.1.2 Els errors

Presentem els errors desenvolupats en l'estudi de les funcions afins i quadràtiques utilitzant el full de càlcul.

- **Des del disseny de la unitat didàctica.** Tendeixen a:
 - Escriure només el punt de tall per $x = 0$ quan en realitat hi ha dos.
 - Considerar $a = 1$ en el moment de generalitzar el punt de tall $(-b/a, 0)$.
 - Realitzar una traducció literal de l'enunciat "esquema gràfic" per dibuixar ja que no han dibuixat els eixos de coordenades.
- **Des de la influència del full de càlcul.** Tendeixen a:
 - Expressar l'obertura de la paràbola fent un gràfic amb una sèrie de paràboles per crear una sensació de canvi de l'obertura.
 - El mètode inductiu ha predominat sobre el mètode del llenguatge algebraic S'ha manifestat un impacte visual en el moment de manipular els gràfics.
 - Una tipologia d'errors òptics i de la limitació amb la representació dels valors de la taula.
- **Des dels continguts treballats en l'estudi de funcions afins i quadràtiques:** Tendeixen a:
 - Escriure una sèrie de punts de la funció en estudi en lloc de donar les coordenades generalitzades (dificultat convertida en error).
 - Escriure les coordenades del punt (0,0) sense parèntesis (dificultat convertida en error).
 - Escriure una coordenada del punt (per exemple, $x = r$ en lloc de $(r, 0)$).

- Identificar decreixent amb pujar cap l'esquerra (dificultat convertida en error) i a associar-ne amb disminuir el valor d' x (3,2,1,0,-1,-2...).
- Dibuixar les rectes passant pel (0,0).
- En general, s'ha observat que a partir de $q = 0$ s'han incrementat els errors, a causa d'haver de passar a expressar l'equació de segon grau $y = ax^2 + bx + c$ com $y = a(x-q)^2 + p$. El desenvolupament d'aquestes dues expressions algèbriques no s'han treballat suficientment coordinades entre les explicacions de l'aula d'informàtica i les de l'aula normal com perquè quedi clar el comportament d'una funció quadràtica tenint en compte la variació dels seus paràmetres, per ambdós casos.

No oblidem que la recerca en didàctica de les Matemàtiques és un camp complex on la incidència concreta d'un sol factor és difícil de determinar per la gran varietat d'aspectes que intervenen en el procés educatiu, en especial factors humans i recursos materials en aquest cas, en un entorn informàtic. Per això, suggerim que els resultats que es presenten es considerin dintre del seu context i en circumstàncies concretes.

8.2 Resultats quant a la innovació didàctica

En finalitzar l'estudi empíric i des de les aportacions de l'anàlisi de dades, podem concloure que s'han assolit els dos objectius marcats com a treball d'innovació: 1) Dissenyar i construir una seqüència d'aprenentatge sobre les funcions afins i quadràtiques i 2) Implementar la unitat didàctica elaborada. S'ha assolit, també el segon objectiu marcat com a recerca, que correspon al 4) Millorar la unitat didàctica elaborada per a la investigació i que constitueix part del currículum per a l'aprenentatge.

Aquesta recerca aporta uns resultats quant a la innovació didàctica des de sis perspectives diferents: sobre el disseny de la unitat didàctica elaborada, l'aprenentatge i desenvolupament a l'estudi de funcions afins i quadràtiques, l'ensenyament de funcions i gràfics, el full de càlcul com a eina didàctica, l'actitud de l'alumnat i, per últim, les aportacions al sistema educatiu. Passem a resumir cadascuna d'aquestes aportacions.

8.2.1 Sobre el disseny de la unitat didàctica

6. S'ha elaborat una unitat didàctica per a la investigació. S'ha revisat arran dels diversos seguiments sobre la seva implementació. S'ha proposat una nova unitat didàctica (veure annex III). Aquesta constitueix part del currículum per a l'aprenentatge i s'ha analitzat el conjunt de tasques proposades sobre els quatre punts: acció, situació, variable i "focus".
 - **Des del punt de vista de l'acció en el treball de gràfiques afins i quadràtiques.** En les tasques proposades majoritàriament la interpretació ha requerit de la construcció, i a vegades la construcció s'ha realitzat sobre un tipus d'interpretació geomètrics concrets (paral·lelisme, incidència, translació). Les

tasques que han implicat interpretació i/o construcció se centren en les relacions entre els diferents llenguatges (descripció verbal, taula, gràfic o algebraic) i han estat majoritàriament de traducció. Les tasques que han implicat identificar un tipus de funció han estat la gran majoria de classificació i en les que s'ha de conjeturar a partir d'una part donada d'un gràfic per predicció.

- **Des del punt de vista de la situació.** Les activitats desenvolupades han format part de la lliçó de matemàtiques "Funcions". El context ha estat predominantment algebraic i a vegades, s'han proposat situacions no abstractes (velocitat, acceleració, canvi de monedes,...).
- **Des del punt de vista de variable.** S'ha partit d'una interpretació estàtica del concepte de variable, és a dir, la variable com instrument per descriure pautes numèriques i per generalitzar. Per anar transformant-se en una interpretació dinàmica, és a dir, emfasitzar la variabilitat i canvi simultani d'una variable en comparació amb una altra.
- **Des del punt de vista "focus".** Ens hem ocupat de qüestions d'atenció i visualització sobre la taula de valors, el gràfic donat, l'equació o des d'una característica particular d'una funció en la seva representació.

8.2.2 Sobre l'aprenentatge i desenvolupament a l'estudi de funcions afins i quadràtiques

7. La metodologia emprada, no només ha comptat amb la presentació de conceptes i resultats amb les corresponents tècniques de càlcul i representació sinó també amb un entrenament de la **intuïció**, que ha permès l'alumne descobrir propietats i característiques dels objectius d'estudi a partir d'anàlisis de diverses situacions. En general, això ha requerit realitzar molts càlculs per poder intuir resultats generals a partir d'observacions particulars i, posteriorment, una bona capacitat de raonament per contrastar la certesa de les intuïcions.
8. Les **preconcepcions** han estat discutides sota
 - Les diverses formes de representar una relació funcional. Aquestes han estat taules, equacions, gràfics i descripcions verbals.
 - Les dificultats relatives a la lectura i interpretació de gràfics en què s'han representat situacions algèbriques per atendre a les característiques generals del gràfic.
 - El concepte de variable com un prerrequisit per l'estudi de funcions.
 - Els sistemes de notació simbòlica que han estat utilitzades per representar funcions, el gràfic i l'algebraic.

8.2.3 Sobre l'ensenyament de funcions i gràfics

9. Respecte a l'ensenyament de funcions i gràfics s'ha considerat els quatre punts següents:

- Primer, el **punt de partida**, abans d'iniciar l'estudi de funcions amb el full de càlcul a l'aula normal, s'han expressat diferents tipus de lleis aritmètiques que relacionen dues magnituds.
- Segon, la **seqüenciació**, en un primer moment s'han donat les pautes per treballar amb el full de càlcul en Excel, després d'entrar en Excel i estudiar la pantalla, s'ha passat a il·lustrar el seu funcionament amb el seguiment de dos exemples i, a continuació, s'ha proposat en altre exemple i una qüestió. A partir d'aquest moment hem abordat les formes abstractes i formals emfasitzant el pas de les representacions algebraïques a les representacions gràfiques per reconèixer i interpretar qualitativament. Per acabar, hem considerat la generació de dades des de situacions reals (pes, alçada, temps, canvi de monedes,...).
- Tercer, les **explicacions**, dirigides a instruir s'han trobat pautades a la unitat didàctica i, en aquesta recerca, hem considerat donar orientacions i trobar suport amb una eina com el convertidor.
- I quart, els **exemples**, la seva selecció ha estat de situacions reals relacionats amb la física (velocitat, acceleració) Cal destacar que només han estat dos, que ens ha servit per donar les pautes de treball amb el full de càlcul.

8.2.4 Sobre el full de càlcul com a eina didàctica

10. Respecte a l'ús del full de càlcul s'ha aportat importants millores:

- En els **aspectes metodològics**, s'ha afavorit l'experimentació, el descobriment de resultats i, a la fi, un aprenentatge més actiu per part de l'alumnat. S'ha reforçat el descobriment dirigit amb el suport del professor. El paper del professorat, ha estat en ensenyar a aprendre, en orientar en el moment oportú, permetent a l'alumne continuar progressant en el seu procés d'aprenentatge i en utilitzar tots els mitjans disponibles per afavorir i orientar aquest procés.
- En l'estudi de funcions afins i quadràtiques, els alumnes han adquirit l'habilitat de treballar amb expressions algèbriques en una ample rang d'operacions i amb gràfics per veure on tendeixen. Aquest **mètode de treball** ha afavorit l'assoliment dels continguts desenvolupats.
- En aquest estudi, el **raonament visual** ha jugat un paper molt important: els ha permès descriure i justificar el comportament de les funcions en estudi segons els seus paràmetres. Hem fet servir una eina manipulativa emfasitzant en la **generalització i l'abstracció**. L'ús del full de càlcul amb el seu potencial de

càlcul i de representació gràfica ha permès fer més èmfasi en les idees, els processos, ha afavorit la reflexió i l'anàlisi de resultats.

11. La metodologia portada a terme **ha provocat una actitud més dialogant i de participació**. Al llarg de tot el procés d'aprenentatge, els alumnes han estat fent preguntes per confirmar i/o de seguiment de la feina amb molta freqüència, la qual cosa no ha passat a l'aula normal amb tanta continuïtat; ha ajudat als alumnes a **rectificar ràpidament**, la qual cosa sempre ha estat molt gratificant per a ells i ha evitat avançar de manera errònia.
12. **L'ús del full de càlcul des de l'ensenyament de les matemàtiques** ha permès un treball autònom de l'estudiant adequat al seu ritme de treball i a la seva situació personal. D'altra banda, també ha afavorit el treball en petits grups. Ens hem donat que cada vegada tenim més alumnes que disposaven d'ordinador a casa seva i amb l'Excel instal·lat i, a més, l'alumnat ha mostrat una ràpida capacitat d'adaptació a les situacions noves que s'han anat presentant en un entorn informàtic.

8.2.5 L'actitud de l'alumnat

Al llarg de tot el procés, s'ha mantingut un ambient de treball centrat en la realització de les qüestions del dossier d'activitats, fins i tot els alumnes considerats problemàtics (indisciplinats, desinterès pels estudis, ...). L'ambient de grup ha estat relaxat i sense pressa (però sense pausa), cadascú al seu ritme. Els alumnes han mostrat molt bona predisposició i gran interès per la tasca desenvolupada. En definitiva, del nostre estudi empíric traiem com conclusió:

13. S'ha afavorit un **bon clima de treball** perquè estiguin **prou motivats** per assolir el nou aprenentatge i, així, s'ha millorat l'actitud dels estudiants cap a les matemàtiques.

8.2.6 Les aportacions al sistema educatiu

14. Les aportacions que fa aquest treball al sistema educatiu es poden veure des de dues òptiques diferents

➤ **Què aportar als ensenyants?**

- Unes unitats didàctiques millorades a partir de l'estudi empíric on s'estudia les funcions afins i quadràtiques amb un full de càlcul sense allunyar-se de la necessitat dels coneixements tradicionals.
- Combinar una metodologia clàssica, amb llapis i paper, amb una metodologia manipulativa i visualitzadora, amb el full de càlcul.
- Una unitat didàctica que no requereix d'un coneixement excessiu d'Excel per a la seva implementació. No cal instal·lar res, només s'ha de reservar l'aula d'informàtica i seguir les pautes donades.

- Una forma més personalitzada de treball fent ús de noves tecnologies.
- Una nova tècnica: l'ús del full de càlcul com a eina didàctica per a l'estudi de funcions.
- Una proposta d'ensenyament-aprenentatge des d'una òptica diferent, desenvolupant un estímul en el procés d'aprenentatge d'alumnat i aconseguint un ensenyament de més qualitat i actualitat.

➤ **Què aportar als alumnes?**

- Construir i descobrir el propi aprenentatge.
- Fer Matemàtiques des d'una altra vessant.
- Un material adequat al seu ritme de treball.
- Utilitzar una eina que els agrada per reconstruir un concepte matemàtic.
- Arribar a l'abstracció i la generalització des de la manipulació i visualització.

8.3 Limitacions del full de càlcul en aquest estudi

Les limitacions del full de càlcul, que ens hem trobat al llarg de l'estudi, han estat dues.

La primera correspon a un problema de format en l'expressió algèbrica. Succeeix quan es representa gràficament un funció quadràtica, però també és extensible a qualsevol funció que en la seva equació ha d'escriure un exponent, resulta que, quan surt a la representació la llegenda, aquesta fa una traducció literal dels exponents, és a dir, si l'equació és $y = 3x^2 + 5x - 2$ apareix en el gràfic $y = 3x2 + 5x - 2$. Això es pot evitar però creiem que a nivell d'ESO no cal entrar-hi, i com no ha provocat cap dificultat pensem que s'ha de comentar a l'hora de treballar però res més.

La segona limitació correspon que el full de càlcul sempre treballa amb nombres amb finites xifres decimals. Per tant, mai podem treballar amb el valor exacte quan sigui un nombre amb infinites xifres decimals. Per tant, si volem calcular y per $x = 1/3$ el full de càlcul troba y per un valor aproximat d' $1/3$, com per exemple $x = 0.333333$. Aquesta segona limitació la trobem en qualsevol software matemàtic que no tingui resolució algebraica.

8.4 Futures línies de recerca

Presentem dues futures línies de recerca. La primera correspon a continuar investigant en l'estudi de funcions al Batxillerat. La segona fa referència a un model de

nou entorn d'aprenentatge amb el full de càlcul, per a 4t d'ESO. A continuació, es descriuen les dues futures línies de recerca.

En aquesta recerca, hem iniciat l'anàlisi del procés d'aprenentatge dels alumnes del Batxillerat Humanístic i, des de les aportacions merament intuïtives, pensem que cal continuar investigant sobre l'estudi de funcions al Batxillerat des de qualsevol modalitat. A més, pensem que, perquè l'alumne es trobi en una situació òptima per rebre la instrucció, seria bo treballar el concepte de límit amb el full de càlcul abans de passar a les derivades.

Un dels instruments de recollides de dades que proposem és l'enregistrament en disquets mitjançant una macro d'Excel i, així, analitzar en profunditat tot el desenvolupament de les activitats. Per experiència prèvia, aquests enregistraments recomanem gravar-los en el disc dur, ja que des del disquet es pot produir un bloqueig a l'ordinador i perdre tota la feina feta. S'ha de tenir present que necessita suficient memòria a causa que estarà enregistrant durant una hora aproximadament per cada sessió.

Gràcies a les facilitats i versatilitat de què disposa un full de càlcul, en particular Excel, permet crear un full programat (llibre d'Excel, veure annex VIII) que ens pot servir per a fer una exploració inicial per a l'estudi de funcions afins i quadràtiques i, també, per il·lustrar, comprovar i verificar les conclusions tretes sobre l'estudi de funcions realitzat prèviament en alguna activitat del dossier. Es pot completar l'estudi de funcions amb l'aplicació d'aquest model de nou entorn d'aprenentatge sota tres criteris molt diferenciats:

1. Amb la manipulació d'aquest full, l'alumne/a podrà explorar, des d'una vessant molt visual, l'estudi de funcions abans de començar les activitats del dossier.
2. Durant l'estudi de funcions, l'alumne/a podrà comprovar els resultats obtinguts.
3. L'alumne/a podrà verificar les conclusions tretes de les funcions estudiades, en acabar les activitats.

Farem una breu explicació de les fórmules i recursos que podem utilitzar per a la seva creació:

- Podem utilitzar, en el full de càlcul, botons de selecció per escollir la funció a representar i barres de desplaçament per variar els valors dels coeficients de la funció a representar dins d'un rang predefinit, sovint entre -20 a 20. La funció escollida es pot representar dintre d'una regió que l'usuari pot canviar prement el botó de modificar escala que activa una macro d'Excel. Utilitzem la funció ELEGIR() per realitzar la taula de valors de la funció a representar.
- En un full programat, permet donar com a resultat una sèrie de característiques de la funció escollida utilitzant funcions matemàtiques i funcions lògiques d'Excel. A més, tenim comentaris en aquestes cel·les donant explicació de l'origen del

resultat. Per indicar la funció concreta a representar, es passen a format tipus text els nombres (exemple, DECIMAL(7,45;0)) i després s'agrupen (&).

En el full anomenat "Funcions afins i quadràtiques", l'alumne de 4t d'ESO ha d'escollir el tipus de funció i introduir els coeficients corresponents, també pot modificar el rang de l'escala del gràfic. A partir d'aquest moment, sortirà el gràfic i les característiques de la funció desitjada. En el cas de les funcions afins, et dirà quin és el pendent, si és creixent o decreixent, l'ordenada en l'origen i els punts de tall segons els eixos de coordenades. I en el cas de les funcions quadràtiques, et dirà els punts de tall segons els eixos, el vèrtex de la paràbola i l'eix de simetria. Per exemple, si introduïm la funció quadràtica $y = -9x^2 + 13x + 4$, el full de càlcul ens mostrarà el que apareix en el llibre d'Excel de l'annex VIII.

Referències

bibliogràfiques

- Adam, P. (1965). *Didáctica matemática heurística*. Ed. Institución de Formación del Profesorado de E.L.
- Ainley, J. (1995). "Re-viewing Graphing: traditional and intuitive approaches". *For the Learning of Mathematics*, 15(2), 10-16.
- Ainley, J., Nardi, E. & Pratt, D. (2000). "The construction of meanings for trend in active graphing". *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5, 85-114.
- Apple Computer (1998) *Estimulos para la educación. Aprendizaje y enseñanza con ordenadores*. Apple Computer España S.A
- Armendáriz, V. G., Azcárate, C y Deulofeu J. (1993). "Didáctica de las Matemáticas y Psicología". *Infancia y aprendizaje*, 63, 77-99.
- Azcárate, C. (1995). "Sistemas de representación". *Revista de Didáctica de las Matemáticas UNO*, 4, 53-61.
- Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1996). *Funciones y gráficas*. Colección Matemáticas: Cultura y aprendizaje nº 26. Editorial Síntesis, Madrid.
- Bell, J. (1991). *Doing your research project. A guide for first-time researches in education and social science*. Bristol, Open University Press.
- Bergeron, J. C., & Herscovics, N. (1982). Levels in the understanding of the function concept, en: Van Barnveld, G & Krabbendam, H. (Eds.) *Conference on functions* (Report 1, pp. 39-46). Enschede, The Netherlands: Foundation for Curriculum Development.

- Biaix (editorial) (2000). "Quines matemàtiques ha de dominar una persona en el tercer mil·lenni?". *Biaix*, 16.
- Bishop, A.J. (1989). "Review of research on visualization in mathematics education". *Focus on Learning Problems in Mathematics* 11(1), 7-16
- Bliss, J., Monk, M. & Ogborn, J. (1985). *Qualitative Data Analysis*. Beverly Hills: Sage Publicacions.
- Borba, M. (1999a). *Calculadoras Gráficas e Educação Matemática*. Rio de Janeiro Ed. Art Bureau.
- Borba, M. (1999b). "Lo que debemos llevar para el siglo XXI: el caso de las funciones". *UNO*, 22, 45-54.
- Bryant, P.E. & Somerville, S.C. (1986). "The spatial demands of graphs". *British Journal of Psychology*, 77, 187-196.
- Busquets, O., Castañer, C. i Vicens, F. (1995). *Matemàtiques*. Crèdit comú 8, 2n cicle d'ESO. Editorial Barcanova, Barcelona.
- Carbonell, Ll. i Carreté, J. (1985). *Descobrim les funcions! Funció exponencial i logarítmica*. Editorial Claret, Barcelona.
- Coll, C. (1989). *Conocimiento psicológico y práctica educativa*. Editorial Barcanova, Barcelona.
- Coll, C. (1991). "Constructivismo e interacción educativa: ¿cómo enseñar lo que se ha de construir?". *Ponencia en el Congreso Internacional de Psicología y Educación «Intervención educativa»*. Madrid, noviembre 1991.
- Corbella, J., y Valls C. (1989). *Ante una edad difícil. Psicología y biología del adolescente*. Círculo de Lectores, S.A.
- Davis, P.J. & Anderson, J.A. (1979). "Nonanalytic aspects of mathematics and their implication for research and education". *SIAM Review*, 21(1), 112-127.
- Davis, P.J. & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*. Boston, MA: Birkhäuser.
- Davis, R. B. (1982). Teaching the concept of function: Method and reasons, en: Van Barnveld, G & Krabbendam, H. (Eds.) *Conference on functions* (Report 1, pp. 47-55). Enschede, The Netherlands: Foundation for Curriculum Development.
- De Francisco, J. (2001). "Estudio de funciones con Derive". *SUMA*, 36, 73-76.
- Delacôte, G. (1979). *Enseñar y aprender con nuevos métodos. La revolución cultural de la era electrónica*. Editorial Gedisa, Barcelona.

- De Miguel, M.A., Gisbert, M. i Manrique, S. (1990). *Funció afí (Rectes)*. Programa d'Informàtica Educativa (PIE). Generalitat de Catalunya, Departament d'Ensenyament. Barcelona
- De Miguel, M.A., Gisbert, M. i Manrique, S. (1990). *Funció quadràtica (Parabòles)*. Programa d'Informàtica Educativa (PIE). Generalitat de Catalunya, Departament d'Ensenyament.
- Departament d'Ensenyament (1993). *Curriculum ESO. Àrea de matemàtiques*. Generalitat de Catalunya, Departament d'Ensenyament.
- Departament d'Ensenyament (1997). *Curriculum Batxillerat. Àrea de matemàtiques*. Generalitat de Catalunya, Departament d'Ensenyament.
- Deulofeu, J. (1993a). "Els gràfics cartesianes de funcions: Un estudi de les concepcions dels alumnes centrat en el significat del gràfic". Tesi Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.
- Deulofeu, J. (1993b). "Un review sobre els estudis cognitius dels conceptes de funció, amb particular atenció al llenguatge gràfic". Curs de Doctorat de Didàctica de les Matemàtiques (93-94). Problemes d'aprenentatge en funcions i gràfics. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Deulofeu, J. (1995). "Concepciones de los alumnos de Secundaria sobre distintas gráficas de funciones". *Revista de Didáctica de las Matemáticas UNO*, 4, 6-16.
- Devaney, R.L. (1989). "Film and video as tool in mathematical research". *The Mathematical Intelligencer*, 11(2), 33-38.
- Domènech, M., Domènech, M.A., Jimeno, M., Morató, M.A., Suñé, M.M., Tomàs, X. i Equip Edebé (1995). *Matemàtiques. Segon cicle d'ESO 3*. Editorial Edebé, Barcelona.
- Domínguez Muro, M. (1991). "El aprendizaje por descubrimiento aplicado a la enseñanza de las matemáticas". *SUMA*, 7, 23-27.
- Dreyfus, T. (1991). "On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education". *Proceedings of PME-15*, 33-48.
- Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1982). "Intuitive functional concepts: A baseline study on intuitions". *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 13, nº 5, 360-380.
- Drijvers, D. (1994). The use of Graphic Calculators and Computer Algebra Systems: Differences and Similarities, en Heugl, H. & Kutzler, B. (Eds.): *Derive in Education. Oportunities and Strategies*. Kent. Chartwell-Bratt.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. Dordrecht: Reidel

- Fischbein, E. (1990). Mathematics and cognition: A research synthesis en *Nesher; Kilpatric*. Cambridge U.P., 1-13.
- Font Moll, V. (1996). "Esquemas cognitivos. Algunos ejemplos de su aplicación a las matemáticas". *SUMA*, 22, 51-57.
- Freixa, M., Salafranca, L., Guàrdia, J., Ferrer, R. y Turbany J. (1992). *Análisis Exploratorio de Datos: Nuevas técnicas estadísticas*. Editorial PPU, Barcelona.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel Publishing Company. Dordrecht.
- García, A., Martínez, A. y Miñano, R. (1995). *Nuevas Tecnologías y Enseñanza de las Matemáticas*. Colección Educación Matemática en Secundaria. Editorial Síntesis, Madrid.
- Gete-Alonso, J.C. y Del Barrio V. (1990). *Lenguaje Gráfico*. Biblioteca de Recursos Didácticos Alhambra. Editorial Alhambra. Madrid
- Giménez, J. (1994). "Role of intervals when functions are introduced". Ponte, Cunha (eds), Manuscript from the author
- Gimeno Sacristán, J. (1983). *Planificación de la investigación educativa y su impacto en la realidad*. A: La enseñanza entre su teoría y su práctica. Editorial Akal, Madrid.
- González, C., Llorente, J. y Ruíz, M.J. (1994). *Matemáticas. E.S.O. 2º Ciclo*. Editorial Editex, Madrid.
- Hopkins, D. (1989). *La investigación-acción y la investigación en el aula por los profesores*. A: Investigación en el aula. Editorial PPU, Barcelona.
- Hunter, M.; Monaghan, J. (1994). "Derive on a Palmtop". *Maths & Stats*, 5(1), 13-15.
- Jané, A., Guiteras, J.M. i Besora, J. (1998) *Matemàtiques aplicades a les Ciències Socials. Batxillerat. Crèdits 1, 2 i 3*. Editorial McGraW-Hill.
- Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations: Studies and teaching experiments*. Doctoral Dissertation, University of Nottingham.
- Janvier, C. (1982). Approaches to the notion of function in relation to set theory, en: Van Barnveld, G & Krabbendam, H. (Eds.) *Conference on functions* (Report 1, pp. 114-124). Enschede, The Netherlands: Foundation for Curriculum Development.
- Janvier, C. (1987). Representation and understanding: The notion of function as an exemple. A: Janvier, C.(Ed.) *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics* (67-71). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates,.

- Janvier, C. & Garançon, M. (1989). "Graphical understanding of simple feedback systems". *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(2), 127-138.
- Kaput, J.J. (1989). "Supporting concrete visual thinking in multiplicative reasoning". *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 35-47.
- Kilpatrick, J. (1987). What constructivism might be in mathematics education, en Bergeron, J.C., Herscovics, N. & Kieran, C. (Eds.): *Proceedings of the 11th international conference of the P.M.E.*, (Univ. de Montreal: Montreal, Canada). Vol 1, 3-23.
- Krabbendam, H. (1982). The non-qualitative way of describing relations and the role of graphs: Some experiments, en: Van Barnveld, G & Krabbendam, H. (Eds.) *Conference on functions* (Report 1, pp. 125-146). Enschede, The Netherlands: Foundation for Curriculum Development.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). "Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching". *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.
- Macnab, D.S. & Cummine, J.A. (1986). *La enseñanza de las matemáticas de 11 a 16. Un enfoque centrado en la dificultad*. Aprendizaje Visor. Visor Distribuciones S.A., Madrid.
- Martínez-Mediana, J.M., Cuadra, R. y Heras, A. (1996). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales*. Primero de Bachillerato LOGSE. Editorial McGraw-Hill/Interamericana, Madrid.
- Miles, M.B. & Huberman, A.M. (1994). *An Expanded Sourcebook Qualitative Data Analysis*. Beverly Hills: Sage Publicacions.
- Millán García, L. (1996). "El álgebra lineal y la calculadora gráfica. Una experiencia en bachillerato". *SUMA*, 22, 63-69.
- Miñarro, A., Vegas, E., Villarroya, A. i Vives, S. (1996). *Aplicacions Informàtiques. Full de càlcul: Excel 5.0*. Sèrie de Quaderns Docents del Departament d'Estadística, nº 4. Universitat de Barcelona, Barcelona.
- Molyneux-Hodgson, S., Rojano, T., Sutherland, R. & Ursini, S. (1999). "Mathematical Modelling: The interaction of culture and practice". *Educational Studies in Mathematics*, 39, 167-183.
- Morente, I. (2000). *Estudi de les dificultats dels alumnes de secundària obligatòria en els processos de traducció funcionals i elaboració d'una proposta didàctica*. Treball de recerca del curs de doctorat de Didàctica de les Matemàtiques. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Novak, J.D. & Gowin, D.B. (1988). *Aprendiendo a aprender*. Ediciones Martínez Roca, Barcelona

- Phillips, R.J. (1997). "Can juniors read graphs?". *Journal of Information Technology in Teacher Education*, 6(1), 49-58.
- Pifarre, M. (1995). "La hoja de calculo en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas". *NOVATICA*, nº 117, sep/oct. 30-35.
- Pratt, D. (1995). "Young children's active and passive graphing". *Journal of Computer Assisted Learning*, 11, 157-169.
- Presmeg, N.C. (1999). "Possibilitats i paranys del pensament en imatges en la resolució de problemes matemàtics". *Biaix*, 14, 21-27.
- Quesada, J.F. (1996). "El software matemático y los lenguajes de programación". *SUMA*, 22, 33-42.
- Richmond, P.G. (1981). *Introducción a Piaget*. Editorial Fundamentos.
- Rico, L.(Coord) (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. ICE/Horsori, Barcelona.
- Rival, I. (1987). "Picture puzzling: Mathematicians are rediscovering the power of pictorial reasonig". *The Sciences*, 27, 41-46.
- Rivière, V. (1998). "El currículum de Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria". *SUMA*, nº 29, 53-72.
- Sánchez, S. (1995). *La hoja de cálculo: Un nuevo instrumento pedagógico*. Madrid, Alhambra Longman, S.A.
- Segura, M.J. (2001). "La gestió de l'aula fent ús de les noves tecnologies". *Fòrum Europeu d'administradors de l'educació a Catalunya*, 23, 44-46.
- Shama, G. & Dreyfus, T. (1991). "Spontaneous strategies for visually presented linear programming problems". *Proceedings of PME -15*, 64-79.
- Sutherland, R.(1990). Mathematics versus the national curriculum. In Dowling P. & Noss R. (Eds.) *The changing role of algebra in school mathematics: the potential of computer-based environments* (pp. 154-175). The Falmer Press.
- Sutherland, R., Howell, D. & Wolf, A. (1996). *A spreadsheet approach to maths for GNVQ Engineering*. Edit. Arnold, London.
- Sutherland, R. & Balacheff, N. (1999). "Didactical complexity of computational environments for the learning of mathematics". *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 4, 1-26.
- Swan, M. (1982). The teaching of functions graphs, en: Van Barnveld, G & Krabbendam, H. (Eds.) *Conference on functions* (Report 1, pp. 151-164). Enschede, The Netherlands: Foundation for Curriculum Development.

- Tall, D.O. (1991). Intuition and rigour: The role of visualization in the calculus. In Zimmermann, W. & Cunningham, S.(Eds.) *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 105-119). Providence, RI:MAA Notes Series, Vol. 19.
- Trigo Aranda, V. (1991). "Informática y Matemáticas en la enseñanza secundaria". *SUMA*, 7, 23-27.
- Vall de Pérez, C. y Deulofeu, J. (2000). "Las ideas de los alumnos respecto de la dependencia funcional entre variables". *SUMA*, 33, 73-81.
- Valdeperes Coma, C. (1998). *Estudi i caracterització de les idees dels alumnes de secundària en relació a la dependència funcional entre variables en un context geomètric*. Treball de recerca del curs de doctorat de Didàctica de les Matemàtiques. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Vázquez Jiménez, S. (1995). *Guía de iniciación a Excel 5*. Ediciones Anaya Multimedia, Madrid.
- Vergnaud, G. (1990). Epistemology and psychology of mathematics education, en *Nesher; Kilpatrick* "Mathematics and cognition: A research synthesis". Cambridge U.P., 14-30.
- Vilella Miró, X. (1998). "Cataluña: un modelo curricular para la ESO". *SUMA*, 29, 61-72.
- Vinner, S. (1983). "Concept Definition. Concept Image and the Notion of Function." *International Journal for Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3), 293-305.
- Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). "Images and Definitions for the Concept of Function". *Journal for Research in Mathematics*, 20(4), 356-366.
- Vizmanos, J.R. i Anzola, M. (1995). *Matemàtiques*. Educació Secundària Obligatòria 3. Segon Cicle 1. Editorial Cruïlla. Barcelona
- Waits, B.K. & Demana, F. (1995). "La reforma de las Matemáticas y el papel de la tecnología". *Revista de Didáctica de las Matemáticas UNO*, 4, 76-84.
- Yábar, J.M. (1993). *Unitat 3: Les funcions i les seves gràfiques*. Projecte ordinador a l'aula. Departament de Didàctica de les Matemàtiques i de les Ciències Experimentals. Universitat Autònoma de Barcelona. (material de classe)
- Yábar, J.M. (1995). "El constructivismo en la práctica". *Aula de Innovación Educativa*, 40-41, 33-37.
- Yerushalmi, M. & Chazan, D. (1990). "Overcoming visual obstacles with the aid of the Supposer". *Educational Studies in Mathematics*, 21(3), 199-219.

Annexos

Annex I : Primera Unitat Didàctica a 4t d'ESO

Annex II : Unitat Didàctica a Batxillerat Humanístic

Annex III: Nova Unitat Didàctica a 4t d'ESO

Annex IV: Qüestionari a 4t d'ESO

Annex V: Guió de les Entrevistes a 4t d'ESO

Annex VI: Guió de l'Entrevista a Batxillerat Humanístic

Annex VII: Transcripció d'una Sessió de Vídeo a 4t d'ESO

Annex VIII: Full Programat "Funcions Afins i Quadràtiques" a 4t d'ESO