Una revisión de la historia del descubrimiento de las geometrías no euclidianas

Carlos J. Rodríguez Buitrago

Apèndix A

Els articles del *Disquisicions*

Articles 1 i 2. Geometria esfèrica

L'article §1, molt breu, està dedicat a identificar les rectes per l'origen amb els punts d'una esfera de centre arbitrari i radi 1.

L'article §2 està dedicat a estudiar la geometria esfèrica, i obté un resultat, el teorema *VI*, que engloba totes les fórmules de la trigonometria esfèrica.[1]

Calcula el volum d'una piràmide que té un vèrtex a l'origen de coordenades i els altres tres vèrtexs sobre l'esfera. Obté 1/6 del determinant[2] format per les coordenades d'aquests tres punts.

Nosaltres hem desenvolupat àmpliament aquests articles a l'apèndix E.

Articles 3 i 4. Superfícies

A l'article §3, GAUSS defineix què vol dir que la superfície tingui curvatura contínua i comenta que el *Disquisicions* tractarà només amb superfícies corbes de curvatura contínua, en el sentit que tinguin un pla tangent en cada punt, que varií suaument.

A l'article §4 es preocupa de l'orientació del pla tangent, veu que hi ha el problema de la direcció de la normal, i, abans d'anar més lluny, dóna tres

[1]Sobre aquesta secció SPIVAK diu: «Aquesta secció es pot ometre completament». El que vol dir és que no és necessària per al desenvolupament posterior del *Disquisicions*. Però per a GAUSS el teorema *VI* és molt important, sobretot a la versió de 1825, ja que la utilitza fonamentalment a l'article 14, a la prova del teorema del defecte (vegeu la pàgina 96).

[2]No utilitza aquesta paraula, tot i que la va inventar ell.

maneres per a definir superfície: la primera, com els zeros d'una funció; la segona, en forma paramètrica, i la tercera, com a gràfica d'una funció.

Article 5. Orientació

Torna al problema de l'orientació del pla tangent, però ara el signe de F, si estem considerant la superfície $F = 0$, li dóna un criteri per a elegir una de les dues direccions de la recta normal al pla tangent. Si la superfície està donada en paramètriques, pren com a direcció de la recta normal la direcció donada pel vector tal que els vectors tangents a les corbes $p = constant, q = constant$, i aquest vector, en aquest ordre, formin una base positiva respecte a la base canònica de $\mathbb{R}^3$. I anàlogament quan la superfície és gràfica d'una funció.

Article 6. Curvatura i curvatura integral

Defineix el que avui coneixem com a aplicació de Gauss, associant a cada punt de la superfície el punt de l'esfera unitat representat pel vector normal orientat a la superfície en el punt. Tota figura sobre la superfície té una corresponent figura sobre l'esfera, però ja adverteix que aquesta segona figura pot tenir autointerseccions i ser, en general, molt complicada.[3]

Defineix la curvatura integral d'una figura sobre la superfície com l'àrea de la imatge d'aquesta figura per l'aplicació de Gauss. I la mesura de curvatura com la funció que assigna a cada punt el quocient entre la curvatura integral d'una figura que conté el punt i l'àrea de la mateixa figura, quan aquesta figura tendeix al punt. Remarca molt el problema del signe, ja que pensa la curvatura integral com l'àrea amb signe. També comenta que la imatge de la figura sobre l'esfera pot estar sobreposada i, en aquests casos, s'ha de comptar tantes vegades com calgui, amb el signe corresponent en cada cas.

Acaba amb una frase que sembla acceptar que es pot anar més lluny en aquest punt:

> No obstant això, hem de reservar per a una altra ocasió una exposició més estesa de la teoria d'aquestes figures considerades des d'aquest punt de vista tan general.[4]

[3]Per exemple, quan arruguem un paper, sense estirar-lo, les normals van a parar a molts punts diferents de l'esfera, però aquest conjunt de punts té mesura zero.

[4]Vegeu el peu de la pàgina 37.

Article 7. Càlcul explícit de la curvatura

Primer càlcul de la mesura de curvatura. Obté, quan la superfície està donada en la forma $z = z(x, y)$, l'expressió

$$k = \frac{TV - U^2}{(1 + t^2 + u^2)^2},$$

on

$$t = \frac{dz}{dx}, \qquad u = \frac{dz}{dy}$$

i

$$T = \frac{d^2z}{dx^2}, \quad U = \frac{d^2z}{dx \cdot dy}, \quad V = \frac{d^2z}{dy^2}.$$

De fet, com que la parametrització és

$$\varphi(x, y) = (x, y, z(x, y)),$$

tenim que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= (1, 0, t) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= (0, 1, u) \end{aligned}$$

i, per tant, els coeficients e, f, g de la segona forma fonamental $\Phi = e\,dx^2 + 2f\,dx\,dy + g\,dy^2$ i els coeficients E, F, G de la primera forma fonamental $ds^2 = E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2$ estan donats per

$$\begin{aligned} E &= 1 + t^2, \qquad F = ut, \qquad G = 1 + u^2, \\ e &= \frac{T}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}}, \quad f = \frac{U}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}}, \quad g = \frac{V}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}}. \end{aligned}$$

Per tant,

$$k = \frac{TV - U^2}{(1 + t^2 + u^2)^2} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

és a dir, *la curvatura és el quocient entre el determinant de la segona forma fonamental i el determinant de la primera forma fonamental.*

Article 8. Curvatura i curvatures principals

Demostra que $k = k_1 k_2$, és a dir, que la mesura de curvatura és el producte de les curvatures principals. Recordem que les curvatures principals eren ja conegudes per EULER i RODRIGUES. [5]

Articles 9 i 10. Diverses expressions per a la curvatura

A l'article §9 calcula per segon cop la curvatura. Ja anuncia que l'expressió serà més complicada que la precedent, que contenia només cinc elements. Ara dóna una fórmula per a k que involucra nou elements. Considera la superfície com $F = 0$.

A l'article §10 calcula per tercer cop la curvatura. També anuncia que l'expressió serà més complicada que la precedent, ja que ara la fórmula per a k involucra quinze elements. Considera la superfície parametritzada.

Article 11. Equacions de Gauss i fórmula de la curvatura

En llenguatge modern, les anomenades *equacions de* GAUSS de la superfície $X(p, q) = (x(p, q), y(p, q), z(p, q))$ són

$$\begin{aligned} X_{pp} &= \Gamma^1_{11} X_p + \Gamma^2_{11} X_q + eN \\ X_{pq} &= \Gamma^1_{12} X_p + \Gamma^2_{12} X_q + fN \\ X_{qq} &= \Gamma^1_{22} X_p + \Gamma^2_{22} X_q + gN\,, \end{aligned}$$

on Γ^k_{ij} són els símbols de Christoffel, e, f, g són els coeficients de la segona forma fonamental, i N el vector normal a la superfície. X_p i X_q denoten les

[5] Vegeu el treball d'EULER [Eul60], i també els del deixeble de MONGE, RODRIGUES, [Rod15a] i [Rod15b]. La contribució de RODRIGUES a aquest punt és molt important, tal com remarca OSSERMAN a [Oss90], pàg. 733. De fet, tal com es diu a [KY96], pàg. 6, RODRIGUES s'anticipa a GAUSS usant, ja el 1815, la imatge esfèrica d'una superfície, el quocient de les àrees de les corresponents superfícies, que en el límit és la curvatura de Gauss, la interpretació de la curvatura com el jacobià de l'aplicació de Gauss, i en demostrar que aquesta curvatura és igual al producte de les curvatures principals. Pensem que RODRIGUES no ha rebut el reconeixement que es mereix, i que la seva obra no ha estat suficientment divulgada, fins al punt que és pràcticament impossible accedir als seus treballs originals.

derivades parcials de X respecte de p i respecte de q. X_{pp}, X_{pq}, X_{qq} són les derivades segones.

Observem que les equacions

$$\begin{array}{rcrcrcl} A\alpha & + & B\beta & + & C\gamma & = & D \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1) \\ A\alpha' & + & B\beta' & + & C\gamma' & = & D' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2) \\ A\alpha'' & + & B\beta'' & + & C\gamma'' & = & D'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3) \end{array}$$

de l'article 10 i les equacions

$$\begin{array}{rcrcrcl} a\alpha & + & b\beta & + & c\gamma & = & m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4) \\ a\alpha' & + & b\beta' & + & c\gamma' & = & m' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5) \\ a\alpha'' & + & b\beta'' & + & c\gamma'' & = & m'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6) \\ a'\alpha & + & b'\beta & + & c'\gamma & = & n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7) \\ a'\alpha' & + & b'\beta' & + & c'\gamma' & = & n' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8) \\ a'\alpha'' & + & b'\beta'' & + & c'\gamma'' & = & n'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9) \end{array}$$

de l'article 11 són les nou equacions escalars corresponents a les tres equacions vectorials anteriors. Les equacions (1), (2) i (3) s'obtenen de les tres equacions vectorials multiplicant els dos costats escalarment per N. Recordem que $e = D$, $f = D'$ i $g = D''$. Anàlogament les altres sis.

Observem que la numeració de Gauss és ja correlativa, és a dir, que numera aquestes equacions i no altres que apareixen entremig.

Observem també que les fórmules de Serret-Frenet per a corbes a l'espai, que daten de 1851, i que involucren la curvatura i la torsió de la corba, són l'anàleg unidimensional de les equacions de Gauss.

Un cop obtingudes aquestes equacions, les utilitza, juntament amb els càlculs de l'apartat anterior, per obtenir la impressionant fórmula per a la curvatura k,

$$\begin{aligned} 4(EG-F^2)^2k = E\left(\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dG}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dq} + \left(\frac{dG}{dp}\right)^2\right) \\ + F\left(\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dq} - \frac{dE}{dq}\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dq}\frac{dF}{dq} + 4\frac{dF}{dp}\frac{dF}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dp}\right) \\ + G\left(\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dp}\frac{dF}{dq} + \left(\frac{dE}{dq}\right)^2\right) - 2(EG-F^2)\left(\frac{d^2E}{dq^2} - 2\frac{d^2F}{dp\cdot dq} + \frac{d^2G}{dp^2}\right), \end{aligned}$$

que només involucra les funcions E, F, G que apareixen a l'element de longitud intrínsec de la superfície

$$ds^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$$

i les seves derivades primeres i segones. És a dir, desapareix de la fórmula de k obtinguda a l'article 7 la menció explícita a la segona forma fonamental. En particular, *el coneixement de l'element de longitud implica el coneixement de la curvatura*.[6]

Aquesta fórmula és de fet el teorema egregi, que enuncia d'una manera lleugerament diferent a l'article següent.

Article 12. Teorema egregi

En aquest article, i com a conseqüència de la fórmula que acaba de demostrar, remarca que la curvatura és un invariant mètric. En particular, si dues superfícies es poden desenvolupar l'una sobre l'altra conservant distàncies, tenen la mateixa mesura de curvatura en punts corresponents. És el famós teorema egregi.

Per tant, l'anul·lació de la curvatura és una condició necessària per tal que una superfície sigui desenvolupable sobre un pla. El recíproc és cert localment i fou provat per MINDING (vegeu el peu de la pàgina 49).

Article 13. Geometria intrínseca

En aquest brevíssim article comenta que el teorema egregi obre el camí a estudiar el que avui es coneix com a geometria intrínseca d'una superfície. És a dir, l'estudi de les propietats de la superfície que depenen només de la mètrica.

Aquest és l'article més important del *Disquisicions*, i, sense cap mena de dubte, una observació genial. Tan sols li va faltar pensar les superfícies independentment del seu encaix a $\mathbb{R}^3$.

[6]En unes notes privades de GAUSS del 12 de desembre de 1822, (l'endemà de sotmetre per a publicació l'article comentat al peu de la pàgina 18), cinc anys abans, doncs, de la publicació del *Disquisicions*, i que ell mateix anomena ≪L'estat de les meves investigacions sobre la transformació de superfícies≫ (vegeu [Gau27], pàg. 381), s'hi troba la fórmula anterior per al cas de coordenades isotermals, és a dir, $ds^2 = E(du^2+dv^2)$. Concretament demostra que

$$k = -\frac{1}{2E}\Delta \log E,$$

on Δ és el laplacià, i fa el comentari següent: ≪La curvatura conserva el mateix valor per a totes les transformacions de la superfície que deixin l'element de línia $E(du^2+dv^2)$ invariant≫. Com que sempre existeixen coordenades isotermals (però això ho va provar més tard LIOUVILLE; vegeu [Lüt90], pàg. 742), aquesta fórmula implica el teorema egregi. De fet, aquesta és la prova que va donar LIOUVILLE del teorema egregi.

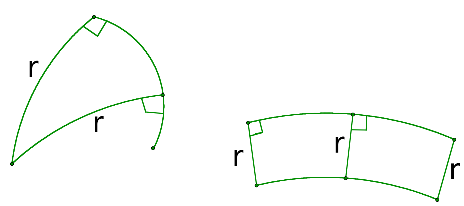
Article 14. Geodèsiques

Inicia l'estudi de geodèsiques sobre una superfície a partir del càlcul de variacions. Demostra que l'acceleració de les geodèsiques ha de ser normal a la superfície. El camí d'una partícula sobre una superfície, en absència de forces diferents de la força normal que la manté sobre la superfície, és una geodèsica. Vegeu el peu de la pàgina 53.

Articles 15 i 16. Lema de Gauss

A l'article §15 demostra que la línia que uneix les extremitats de geodèsiques d'igual longitud i que surten d'un mateix punt és perpendicular a aquestes geodèsiques.

A l'article §16 demostra que la línia que uneix les extremitats de geodèsiques d'igual longitud i perpendiculars a una corba inicial donada és perpendicular a aquestes geodèsiques.



Renamarquem que l'article §16 acaba amb aquestes paraules:

> [...] també aquí com precedentment, consideracions geomètriques poden prendre el lloc de l'anàlisi, les quals, no obstant això, no ens prendrem el temps de considerar aquí, ja que són suficientment òbvies.

Article 17. Interpretació geomètrica de E,F,G

En aquest article Gauss mostra cóm els coeficients E, F i G del ds^2 determinen i estan, al mateix temps, determinats per mesures sobre la superfície; l'element infinitesimal de longitud de la línia coordenada sobre la superfície donada per $q =$constant està donat per $\sqrt{E}dp$; el de la línia $p =$constant per $\sqrt{G}dq$; mentre que l'angle ω entre aquestes línies coordenades està donat per

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}\,;$$

i, finalment, l'element d'àrea està donat per $\sqrt{EG - F^2}dp \cdot dq$.

Article 18. Equació de les geodèsiques

En aquest article troba, emprant càlcul de variacions, i també en funció de E, F i G, les equacions d'una geodèsica sobre una superfície. Concretament troba l'equació necessària

$$\begin{aligned}\sqrt{EG - F^2} \cdot d\theta &= \frac{1}{2}\frac{F}{E} \cdot dE + \frac{1}{2}\frac{dE}{dq} \cdot dp \\ &- \frac{dF}{dp} \cdot dp - \frac{1}{2}\frac{dG}{dp} \cdot dq\,,\end{aligned}$$

on θ és l'angle d'inclinació de la geodèsica respecte de les línies coordenades $q = \mathit{constant}$. Aquesta és l'equació d'Euler-Lagrange del funcional de longitud.

Segons Dombrowski ([Dom79], pag 109), aquesta fórmula es pot interpretar introduint el *transport paral·lel* segons la definició que molts anys més tard, al voltant de 1900, donaria Levi-Civita.

En efecte, la fórmula anterior es pot escriure com

$$\Theta = \frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}}\left(\frac{F}{E}dE + E_q dp - G_p dq - 2F_p dp\right)\,,$$

on posem, com Dombrowski, Θ i no $d\theta$, perquè aquesta 1-forma no és exacta.

Llavors, la fórmula

$$\theta^\circ = \pi - B, \quad \theta' = C$$

de l'article 20 es pot interpretar com

$$\int_c \Theta = \theta(\dot{c}(\sigma)) - \theta(\dot{c}(0))\,,$$

on $c : [0, \sigma] \to M$ és una geodèsica. És a dir, la integral de la *variació angular* Θ al llarg d'una geodèsica mesura l'angle que el vector tangent a una de les corbes coordenades va girant al llarg de c en relació amb el vector tangent a c en cada punt, que és una direcció *paral·lela al llarg de c*, en el sentit de Levi-Civita.

L'estudi de superfícies, i més generalment l'estudi de varietats de Riemann, porta ràpidament al problema de comparar l'angle entre vectors tangents situats a punts diferents de la varietat. Aquesta connexió entre espais tangents en punts diferents és el problema que ve a resoldre la *teoria de connexions.*

Article 19. La derivada de l'angle d'inclinació

Introdueix els sistemes de coordenades, que ell mateix posteriorment anomenarà *abcisogeodèsics ortogonals*. En aquests sistemes es compleix que $E = 1$ i $F = 0$. Un cas particular són els sistemes de coordenades polars geodèsiques, que utilitzarà abastament d'ara endavant. Troba la famosa fórmula per a la curvatura en aquestes coordenades

$$k = -\frac{1}{m} \cdot \frac{ddm}{dp^2}\,, \tag{A.1}$$

on $m = \sqrt{G}$.

Observem que si la mètrica és rotacionalment invariant, és a dir, quan m no depèn de q, com succeeix en el cas del pla, l'esfera i l'esfera imaginària, l'anterior equació en derivades parcials es transforma en una equació diferencial ordinària que es pot resoldre fàcilment.

A més Gauss dóna condicions inicials que han de complir les solucions d'aquesta equació diferencial; aquestes condicions, en coordenades polars p, q, (p la longitud, q l'angle), són $m = 0$ i $\dfrac{dm}{dp} = 1$, per a $p = 0$.

Està dient, doncs, encara que no ho explicita, que en aquestes condicions d'invariància rotacional, i almenys localment, la curvatura determina la mètrica! En el cas general, en què $m = m(p, q)$, l'equació de la curvatura és una equació en derivades parcials i el problema es complica.

Calcula també la derivada de l'angle d'inclinació θ i obté

$$d\theta = -\frac{dm}{dp}dq\,.$$

A l'apèndix F demostrarem com tot aquest important càlcul es pot copiar a partir del càlcul fet per a l'esfera. En aquesta reconstrucció, l'aparentment secundària fórmula de l'article 2, que tant pondera Gauss, jugarà un paper fonamental.

Observem, de passada, que si imposem que la funció $y = \sqrt{G}$ sigui rotacionalment simètrica, és a dir, que depengui només de p, i tenim curvatura constant[7] $-\dfrac{1}{R^2}$, l'anterior equació (A.1) es redueix a l'equació diferencial ordinària $y'' - \dfrac{1}{R^2}y = 0$, fàcil de resoldre i que ens porta de manera directa a l'aparició dels sinus i cosinus hiperbòlics. Això explica l'aparició natural d'aquestes funcions en l'*analogia* de Lambert i explica per què la geometria de l'angle agut es diu també geometria hiperbòlica.

[7] De fet, curvatura constant implica G rotacionalment simètrica.

Article 20. Teorema del defecte

En aquest article demostra el teorema del defecte per a triangles geodèsics: la integral de la curvatura, respecte de l'element d'àrea, és l'excés o el defecte del triangle. Coincideix, també, amb l'àrea de la imatge esfèrica del triangle.

A partir de la fórmula per a la curvatura (A.1), que és aproximadament el teorema egregi, obté, per una primera integració i posant atenció a les condicions inicials,

$$\int_0^{p(\theta)} k\sqrt{G}dp = 1 - \frac{d}{dp}\sqrt{G},$$

que, tornant a integrar, dóna

$$\int_0^{\alpha}\int_0^{p(\theta)} k\sqrt{G}dp\, d\theta = A - \int_0^{\alpha} \frac{d}{dp}\sqrt{G}\, d\theta,$$

és a dir,

$$\int_T k\, dA = (\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

És a dir, la *curvatura total és igual a l'excés (o defecte)*, que és el teorema del defecte.

Si $k = 1/R^2$, tenim

$$\text{Àrea de } T = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

És a dir, a l'esfera de radi 1, l'*àrea és l'excés.*

Si $k = 1/(iR)^2 = -1/R^2$, tenim

$$\text{Àrea de } T = R^2(\pi - (\alpha + \beta + \gamma)).$$

És a dir, a l'esfera de radi i, l'*àrea és el defecte.*

Observem que la recerca de l'esfera imaginària es redueix a la recerca d'una superfície de curvatura constant -1. Han desaparegut els nombres complexos.

Pensem que la recerca d'aquesta superfície portà GAUSS a escriure el *Disquisicions.*

Article 21. Canvi de coordenades

En llenguatge modern, el que fa GAUSS en aquest article és estudiar en gran profunditat la fórmula per al canvi de base de formes bilineals. De fet considera

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}^t \begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E' & F'\\ F' & G'\end{pmatrix}$$

i dóna una interpretació geomètrica de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Una de les igualtats d'aquest article (vegeu la pàgina 65), s'obté simplement aplicant determinants a l'anterior igualtat.

Justament va ser el mateix GAUSS en el *Disquisitiones aritmethicae* (vegeu la magnífica traducció al català de la GRISELDA PASCUAL, [Gau01]), qui va estudiar en profunditat les formes quadràtiques.

En cert sentit, el *Disquisicions* es pot pensar com una aplicació del seu treball sobre formes bilineals a la geometria de superfícies de Monge i Euler.

Article 22. Coordenades polars

Com que sap canviar de coordenades, aplica els càlculs precedents a passar d'unes coordenades arbitràries a coordenades polars.

S'adona que al radi r i l'angle ϕ d'aquestes coordenades polars, que són funció de les coordenades inicials, queden caracteritzats com a funcions que són solució d'un sistema d'equacions en derivades parcials. En particular, el teorema d'existència de solucions de les equacions diferencials li dóna, a posteriori, l'existència local de coordenades polars.

En particular obté les equacions de les geodèsiques que passen pel pol simplement posant $\phi = constant$.

Però la solució d'aquest sistema és difícil en general, i GAUSS comenta que, no obstant això, moltes coses interessants se'n poden deduir, a partir de desenvolupaments en sèrie, encara que aquests només siguin vàlids localment.

Articles 23 i 24. Desenvolupaments en sèrie

A l'article §23 passa de coordenades polars r, ϕ a coordenades ortogonals. Concretament, considera unes noves coordenades p, q tals que les corbes $p = constant$ són geodèsiques ortogonals a la corba $\phi = 0$, i q és la distància del punt donat a la corba $\phi = 0$.

Resol, usant sèries, l'equació diferencial de les geodèsiques

$$d\theta = \frac{\partial n}{\partial q} \cdot dp\,,$$

on $ds^2 = n^2 dp^2 + dq^2$, i θ és l'angle entre la geodèsica i la corba $q = constant$.

A l'article §24, també a partir dels càlculs de l'article §22, obté sèries que representen les funcions r, ϕ (i altres) en termes de les coordenades p, q. Per exemple, $r^2 = p^2 + q^2 + ...$ Això li permet, entre altres coses, donar una sèrie que aproxima l'àrea del triangle rectangle sobre la superfície de vèrtexs $(0,0), (p,0), (p,q)$.

Article 25. Aproximació de l'àrea d'un triangle

Generalitza els càlculs de l'àrea del triangle rectangle de l'article precedent al càlcul de l'àrea d'un triangle arbitrari.

Article 26. Teoremes de comparació

Considera el triangle pla tal que els seus costats tenen respectivament la mateixa longitud que els costats d'un triangle donat sobre la superfície. Compara, a continuació, els angles d'aquests dos triangles. Obté una fórmula per a l'excés o defecte del triangle considerat.

Aquesta manera de fer ha donat, posteriorment, grans fruits en l'estudi de la geometria diferencial moderna, i és per això que ens agrada remarcar la perspicàcia de GAUSS, que es va adonar de seguida de la importància d'aquesta idea, aparentment senzilla, i va començar la secció, tal com ja hem comentat a la pàgina 75, amb les paraules *magnam utilitatem*.[8]

Articles 27. Fórmules de Legendre

Aplica la fórmula que acaba d'obtenir a l'esfera de radi R. Obté així unes fórmules que, si negligim termes de quart ordre, coincideixen amb les fórmules de Legendre, [Leg87],

$$A^* = A - \frac{\sigma}{3R^2},$$

on A és l'angle en un del vèrtexs del triangle sobre la superfície, A^* és l'angle en el vèrtex corresponent del triangle pla amb el qual comparem i σ és l'àrea del triangle.

[8]Aquesta idea de comparar triangles sobre la superfície amb triangles plans la va tenir ja LEGENDRE per al cas particular de l'esfera. Vegeu l'article següent.

Article 28. Hohehagen[9], Brocken, Inselsberg

Per a superfícies en general, i no només sobre l'esfera, la relació entre A i A^* (igual per als altres vèrtexs) és

$$A^* = A - \frac{1}{12}\sigma(2\alpha + \beta + \gamma)\,,$$

on α, β, γ és la mesura de curvatura en els vèrtexs A, B, C respectivament.

La mala interpretació d'aquest article per part de molts lectors ha fet córrer rius de tinta, fins al punt que s'han hagut d'escriure diversos articles[10] explicant què estava fent Gauss quan aplicava les seves fórmules al triangle Hohenhagen, Brocken, Inselsberg.[11]

Simplement està parlant de la diferència que hi ha entre suposar que la terra és esfèrica i aplicar les fórmules de Legendre, amb la mateixa correcció $\frac{\sigma}{3R^2}$ per a cada angle (igual, per tant, a 4.95116, que correspon a 1/3 de l'excés 14.85348), i a suposar, com es fa en cartografia, que la terra és un el·lipsoide i aplicar llavors les fórmules de Gauss que contenen correccions diferents $\frac{1}{12}\sigma(2\alpha+\beta+\gamma)$, $\frac{1}{12}\sigma(\alpha+2\beta+\gamma)$ o $\frac{1}{12}\sigma(\alpha+\beta+2\gamma)$ per a cada angle, ja que la curvatura del geoide no és constant.

La diferència és pràcticament inapreciable.[12]

La mesura del triangle Hohenhagen, Brocken, Inselsberg[13] es va fer entre el 13 i el 27 de setembre de 1823 (Gauss a Brocken esperant que se n'anés

[9]Actualment escrit Hohenhagen, és una petita muntanya, al poblet de Dransfeld, a uns 15 quilòmetres de Göttingen. D'ara endavant, escriurem Hohenhagen

[10]Vegeu l'article de Miller [Mil72]. Destaquem, d'aquest article, la frase ≪El famós experiment és de fet una mera llegenda que va sorgir d'una interpretació errònia d'aquest important treball de 1827, Disquisitiones generales circa superficies curvas.≫

Vegeu també l'article de Breitenberger [Bre84]. Destaquem, d'aquest article, la frase ≪[...] aquest és el quid de la qüestió d'aquest moltes vegades mal citat passatge.≫

[11]L'aparició de l'article de E. Scholz, ≪Carl F. Gauss, el "gran triangulo" y los fundamentos de la geometría≫ a *La Gaceta de la RSME*, vol. 8.3, (2005), durant la correcció de les galerades del present llibre, mostra que la controvèrsia encara continua.

[12]Comentant això en una carta a Olbers ([Gau27], 9, pàg. 378), Gauss fa un comentari que ens ensenya la seva manera de fer i pensar: ≪[...] no obstant això, la dignitat de la ciència requereix que entenguem clarament la naturaleza d'aquesta desigualtat.≫

[13]Aquests càlculs no són coherents amb els que es poden trobar a la pàgina 314 de [Gau27], vol. *IX*, on es donen els costats i els angles d'aquest triangle. Concretament, els costats en metres són $HI = 84942.45328$, $IB = 105974.4570$ i $BH = 69195.07749$ i els angles $B = 53^o\ 6'\ 45.967''$, $H = 86^0\ 13'\ 58.691''$ i $I = 40^o\ 39'\ 30.195''$. Com que el triangle pla amb aquests costats té angles $B^* = 53^o\ 6'\ 41.009760''$, $H^* = 86^o\ 13'\ 53.763480''$ i $I^* = 40^o\ 39'\ 25.227360''$, podem calcular directament les diferencies en cada vèrtex, i tenim, en segons, $H - H^* = 4.92752$, $B - B^* = 4.95724$ i $I - I^* = 4.96764$. En particular l'excés és 14.8524.

la boira, i GERLING a Inselsberg), i entre el 5 i el 16 d'octubre del mateix any (GAUSS a Hohengagen). Aquestes mesures es feien reflectint la llum del Sol en uns miralls, usant un aparell inventat pel mateix GAUSS al voltant de 1820, i anomenat heliotropi.

Article 29. Comparació de l'àrea d'un triangle

Acaba el *Disquisicions* comparant l'àrea d'un triangle sobre una superfície amb l'àrea del triangle pla que té els costats de la mateixa longitud que els costats del triangle donat.

Ho aplica llavors al cas en què la superfície és l'esfera, i fa la mateixa observació de la secció §28, referint-se allà als angles, i ara a l'àrea, de què l'error que es comet en suposar que la superfície de la terra és una esfera, en lloc del geoide, és insensible.

Heliotropi

Apèndix B

El *Disquisicions* de 1825

La versió de 1825 consta de divuit articles. Hem consultat la versió anglesa [Gau68].

En els primers sis articles desenvolupa la geometria diferencial de corbes planes. Aquest tema desapareix a la versió de 1827.

A continuació inicia la teoria de superfícies de manera molt semblant a com apareixerà a la versió del 1827. De fet, en els articles set i vuit fa essencialment el que fa en els primers quatre de l'actual *Disquisicions*.

L'article realment nou i important és l'article 15, on dóna una primera demostració del teorema egregi.

Totes les altres coses que havia escrit no eren més que reformulacions de resultats coneguts pels que, podríem anomenar, precursors de la teoria de superfícies. Vegeu els treballs d'Euler [Eul28], [Eul60], [Eul72], Bernouilli [Ber67], Meusnier [Meu85], Monge [Mon80] i Lagrange [Lag92]. Un estudi de la teoria de corbes i superfícies abans (i després) de Gauss el podeu trobar en els articles de Girbau [Gir84] i [Gir73]

Article 1

Identifica les direccions de les rectes orientades del pla amb els punts d'una circumferència de radi 1.

Article 2

Defineix curvatura com el resultat de comparar l'amplitud d'un arc de corba amb la seva longitud. L'amplitud d'un arc de corba és la longitud de l'arc determinat sobre la circumferència de radi 1 per les direccions de les rectes tangents en els extrems de l'arc. Defineix *mesura de curvatura* en un punt

P de la corba com el límit de la curvatura de l'arc de la corba d'origen P quan l'altre extrem de l'arc s'acosta a P. Coincideix amb la derivada de l'angle d'inclinació de la recta tangent respecte al paràmetre arc.

Article 3

Introdueix el radi de curvatura com l'invers de la mesura de curvatura.

Article 4

Estudia el signe de la curvatura.

Article 5

Estudia el cas particular en què la corba és gràfica d'una funció.

Article 6

Estudia el cas particular en què la corba està parametritzada per la longitud de l'arc.

Article 7

Inicia l'estudi de superfícies. Identifica les direccions de les rectes orientades de l'espai amb els punts d'una esfera de radi 1. Recorda els mateixos resultats sobre l'esfera que apareixeran posteriorment a la secció §2 de la versió de 1827. Sobre la fórmula

$$\cos LL'' \cdot \cos L'L''' - \cos LL''' \cdot \cos L'L'' = \sin LL' \cdot \sin L''L''' \cdot \cos A$$

que correspondrà al teorema *VI* de la secció §2 de 1827 (vegeu la pàgina 28), diu:

> Afegirem aquí un altre teorema, que, pel que sabem, no ha aparegut abans, i que es pot utilitzar sovint amb profit.

Article 8

Estudia el pla tangent a una superfície i el signe del vector normal.

Article 9

Calcula la curvatura de la corba que s'obté tallant la superfície amb un pla.

Article 10

Calcula la curvatura de la corba que s'obté tallant la superfície amb un pla que conté la normal. Apareixen les curvatures normals.

Article 11

Troba les curvatures principals com les curvatures normals màxima i mínima. Considera l'avui anomenada aplicació de Gauss. Troba una fórmula per al producte de la màxima i mínima de les curvatures normals (que anomenarem curvatura euleriana), introdueix la mesura de curvatura (que anomenarem curvatura gaussiana) com la comparació entre amplitud i àrea. L'amplitud d'una figura és l'àrea de la seva imatge esfèrica, i demostra el notable resultat que la curvatura gaussiana coincideix amb la curvatura euleriana. De fet, aquest resultat havia estat ja provat per Rodrigues el 1815 ([Rod15a], vegeu el peu de la pàgina 84).

Article 12

Estudia geodèsiques.

Article 13

Estudia corbes sobre superfícies.

Article 14

Utilitza la trigonometria esfèrica de l'article 7 per a calcular angles sobre l'esfera que són imatges, per l'aplicació de Gauss, d'angles sobre la superfície.

Article 15

Demostra, de manera incompleta, el teorema del defecte: *el defecte d'un triangle T és l'àrea de la seva imatge esfèrica T'.* Escriurem $\delta(T) = a(T')$. Donat un triangle a la superfície, Gauss parla del triangle que s'obté per la imatge esfèrica, però remarquem que, encara que els costats del triangle original siguin geodèsiques, les seves imatges per l'aplicació de Gauss no són en general geodèsiques de l'esfera.

Concretament Gauss diu (vegeu [Gau27], vol. 8, pàg. 435 o [Dom79], pàg. 132),

> La suma dels tres angles d'un triangle format per línies més curtes sobre una superfície corba arbitrària, és igual a la suma de 180° i l'àrea del triangle sobre l'esfera auxiliar, la bora del qual està formada pels punts L, corresponents als punts de la bora del triangle original, i de tal manera que l'àrea del triangle es pot mirar com a positiva o negativa segons si aquest està envoltat per la seva bora en el mateixa sentit que la figura original o en el contrari.

L'esbós de prova que Gauss dóna allà mateix no el satisfà i comenta: «Aquesta prova necessitarà explicació i algun canvi en la seva forma».

És el resultat principal d'aquesta versió. Se'n dedueix el teorema egregi.

En aquesta secció apareixen les úniques figures que inclou Gauss en aquest treball (vegeu la pàgina 100). A la versió del 1827 no hi ha cap figura.

Article 16

Demostra el teorema egregi, del qual diu únicament que és un teorema important.

La prova original del teorema egregi la dedueix Gauss a partir de la igualtat $\delta(T) = a(T')$ de la manera (imprecisa) següent: Si canviem el triangle T per un polígon Q de n costats i n angles α_i, la fórmula $\delta(T) = a(T')$ es transforma en $\delta(Q) = a(Q')$, on $\delta(Q) = \sum \alpha_i - (n-2)\pi$. Equivalentment $\sum \alpha_i = \int_Q k + (n-2)\pi$. Com que les isometries conserven angles el terme $\int_Q k$ es conserva per isometries. Aproximant una regió petita qualsevol R per polígons també tindrem que $\int_R k$ es conserva. Finalment, com que la curvatura en el punt P és

$$k(P) = \lim_{R \mapsto P} \frac{\int_R k}{\text{àrea de } R}$$

és veu que aquest valor és invariant per isometries, és a dir, val el teorema egregi.

Com a corol·lari obté que, si una superfície es pot desenvolupar sobre un pla, llavors té curvatura zero, i comenta que aquest fet era ja conegut però no demostrat amb prou rigor. Es refereix als treballs de Monge [Mon80].

Article 17

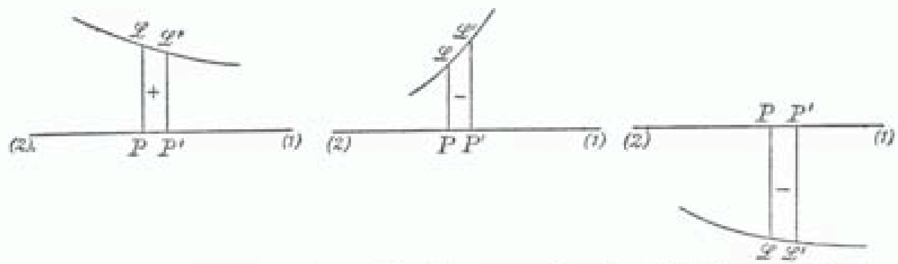
Lema de Gauss.

Article 18

Fórmula de la curvatura en polars:

$$k = -\frac{1}{m}\frac{dd\,m}{d\,p^2}.$$

En el peu de la pàgina 48 intentem explicar per què Gauss s'atura aquí.



fang der Figur $LL'P'P$ in demselben Sinn umgeht, wie (1)(2)(3), negativ beim entgegengesetzten.

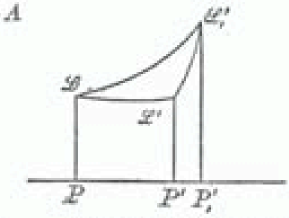
Man denke sich nun ein endliches Stück der Linie von L nach L' und nenne φ, φ' die an beiden Endpunkten geltenden Werthe des Winkels, so ist

$$\varphi' = \varphi + \text{Area}\, LL'P'P,$$

das Zeichen der Area eben so verstanden.

Man nehme nun ferner an, dass von dem Anfangspunkte auf der krummen Fläche unzählige andere kürzeste Linien auslaufen und nenne den Winkel, den indefinite das erste Element mit dem ersten Elemente der ersten Linie links herum macht, A; durch das zweite Ende dieser verschiedenen krummen Linien sei eine krumme Linie gezogen, von der wir vorerst unentschieden lassen, ob sie eine kürzeste Linie sei oder nicht. Setzen wir nun, dass indefinite für jede dieser Linien das, was für die erste φ, φ' war, durch ψ, ψ' bezeichnet wird, so ist $\psi'-\psi$ auf ähnliche Weise auf der Hülfskugel durch den Raum $LL'P'P$ darzustellen, und da offenbar $\psi = \varphi - A$ wird, so ist der Raum

$$\begin{aligned} LL_1'P_1'P'L'L &= \psi'-\psi-\varphi'+\varphi \\ &= \psi'-\varphi'+A \\ &= LL_1'L'L + L'L_1'P_1'P'. \end{aligned}$$



Ist nun die Grenzlinie auch eine kürzeste und macht sie fortschreitend genommen mit LL', LL_1' die Winkel B, B_1, wird ferner für sie in den Punkten L', L_1' durch χ, χ_1 dasselbe bezeichnet, was φ für L in der Linie LL'

Reproducció dels únics dibuixos del *Disquisicions* de 1825, pàg. 434, vol. IV, de [Gau27]. El *Disquisicions* de 1827 no té cap dibuix.

Apèndix C

Cartes de Gauss sobre geometria no euclidiana

Tot i que GAUSS no va anar massa lluny en el desenvolupament de la geometria no euclidiana, no hi ha dubte que estava en el camí correcte i definitiu, ja que la consistència de la geometria no euclidiana es va provar a través de la geometria diferencial.[1]

Ja hem comentat a la introducció que coneixia molt bé l'*analogia* de Lambert i, per tant, tenia un fil conductor que li indicava quins eren els resultats que havia d'anar trobant.

Probablement pel problema de la fonamentació, no va publicar res sobre aquest tema, tot i que després de la seva mort es varen trobar entre els seus papers uns escrits sobre teoria de les paral·leles, probablement de 1831, que no va arribar a publicar.[2] Però va deixar molta informació en diverses cartes als seus amics i col·legues.

Citem cronològicament els documents més importants que contenen comentaris, i tots els resultats de GAUSS, sobre el problema de les paral·leles.[3] Tots aquests resultats es poden deduir directament de l'*analogia*.[4] Cap pa-

[1] Una demostració elemental d'aquesta consistència, basada en propietats euclidianes d'un sistema de cercles ortogonals a un cercle donat, fou donada per CARSLAW el 1910, ([Bon55], pàg. 238).

[2] En aquests escrits GAUSS no arriba massa lluny, però ja s'hi entreveu la idea d'horocicle (vegeu [Gau27], volum *VIII*, pàg. 202-209, o [Bon55], pàg. $67-75$). L'enfocament és «a l'Euclides», és a dir, aborda el problema de les paral·leles axiomàticament, abandonant així el punt de vista analític del *Disquisicions*. La redacció s'assembla molt al treball de Bolyai (vegeu la pàgina 111).

[3] Totes les cartes que citem les podeu trobar també al volum *VIII* de [Gau27] entre les pàgines 159 i 220.

[4] Probablement el camí seguit per GAUSS.

raula de GAUSS es pot desaprofitar, però ens hem permès subratllar-ne algunes frases. Vegem alguns dels paràgrafs més importants d'aquestes cartes.

CARTA A F. BOLYAI (17 de desembre de 1799)

> Si es pogués demostrar l'existència d'un triangle d'àrea tan gran com volguéssim, aleshores es podria demostrar[5] amb tot rigor la totalitat de la geometria euclidiana. *Moltes persones prendrien aquesta proposició com un axioma, però jo no!* És possible que l'àrea no arribi mai a un cert valor límit.

CARTA A F. BOLYAI (25 de novembre de 1804)

> He llegit el teu manuscrit amb gran interès i cura, i he gaudit completament de la precisió subjacent. [...] He buscat la solució a aquest nus gordià, i fins ara he buscat en va. Desitges la meva atenta opinió: és que la teva explicació no em satisfà. Miraré de fer el punt crític (que pertany al mateix tipus d'obstacles que fan els meus esforços inútils) tan clar com pugui.

CARTA A GERLING (11 d'abril de 1816)

> Sembla paradoxal que pugui haver-hi una línia recta constant donada *a priori*,[6] però no trobo en això cap contradicció. De fet, seria desitjable que la geometria euclidiana no fos certa, ja que llavors tindríem una mesura universal a priori, per exemple, podríem assumir com a unitat de l'espai el costat del triangle equilàter amb angle $= 59°59'59''.99999$

CARTA A OLBERS (28 d'abril de 1817)

> Cada vegada estic més convençut que la necessitat física de *la nostra geometria euclidiana no pot ser demostrada*,[7] almenys per la raó humana [...] hem de posar la geometria, no en el mateix lloc que l'aritmètica, que és purament a priori, sinó en el mateix lloc que la mecànica. Potser en una altra vida ens serà possible de penetrar en la naturalesa de l'espai; però ara no és factible.

[5]Es dedueix del punt 5 de l'*analogia*. Vegeu la introducció, pàgina 14.

[6]Es dedueix del punt 2 de l'*analogia*. Vegeu la introducció, pàgina 14.

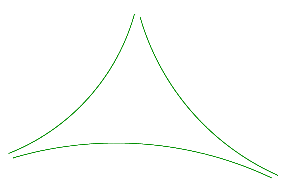
[7]Aquesta observació ens recorda l'afirmació de KLÜGEL, que hem comentat a la pàgina 18.

Carta a Gerling (25 d'agost de 1818)

M'alegra que tingueu el coratge d'expressar-vos com si reconeguéssiu la possibilitat que la nostra teoria de les paral·leles, i amb aquesta tota la geometria, pogués ser falsa.

Carta a Gerling (16 de març de 1819)

Sospito que el professor Schweikart estarà d'acord en tots aquests punts, la qual cosa m'alegraria molt perquè aquest punt de vista coincideix amb el meu. Tan sols vull remarcar que he desenvolupat la *geometria astral* tan lluny que puc resoldre completament tots els problemes un cop la constant C està donada. El defecte de la suma dels angles en el triangle pla respecte de 180° és, per exemple, no únicament més gran quan l'àrea es fa més gran, sinó que és exactament proporcional a aquesta, de manera que l'àrea té una cota que no es pot mai assolir, i aquesta cota és igual a l'àrea entre tres línies rectes asimptòtiques.[8]



La fórmula per a aquesta cota és:[9]

$$\text{Limes areae trianguli plani} = \frac{\pi CC}{(\log \text{hyp}(1+\sqrt{2}))^2}\,.$$

Carta a Taurinus (8 de novembre de 1824)

Pel que fa al seu intent de demostrar el cinquè postulat no tinc res (o no gaire) a dir, llevat que és incompleta [...] [no és correcta la seva demostració que] la suma dels angles [d'un triangle] no pot ser inferior a la suma de dos angles rectes: *aquest és el punt crític, el penya-segat on es produeixen tots els naufragis.* M'imagino que sobre aquest problema no hi ha estat pas molt de temps. Jo hi he estat pensant durant més de trenta anys i no crec que ningú no hi hagi pensat més que jo, tot i que no n'he publicat res.

[8]S'està referint, clarament, al punt 5 de l'*analogia*. Vegeu la introducció, pàg. 14.

[9]Aquesta constant que multiplica π prové d'agafar com a unitat de longitud el segment que té angle de paral·lelisme $\pi/4$, i. e. $\Pi(1) = \frac{\pi}{4}$.

[...]

La suposició que la suma dels angles d'un triangle és inferior a dos rectes condueix a una geometria curiosa, molt diferent de la nostra (la euclidiana) però totalment consistent, que he desenvolupat a la meva entera satisfacció, de manera que puc resoldre-hi qualsevol problema llevat la determinació d'una constant que no es pot determinar a priori.

[...]

Tots els meus esforços per descobrir una contradicció, una inconsistència, en aquesta geometria no euclidiana no han tingut èxit, i la cosa més oposada a les nostres concepcions és que, si fos certa, *existiria en l'espai una magnitud lineal, determinada per ella mateixa* (però que ens és desconeguda). Però em sembla a mi que, malgrat la sàvia xerrameca dels metafísics, sabem massa poc, o quasi res en absolut, sobre la vertadera naturalesa de l'espai per a considerar impossible del tot el que ens sembla poc natural.[10]

CARTA A BESSEL (27 de gener de 1829)

I la meva convicció que no podem establir completament una geometria a priori s'ha tornat més forta. Mentrestant passarà probablement un temps abans no comenci a preparar les meves *molt extenses investigacions* sobre això per publicar-les; potser això no passarà mai mentre jo visqui ja que temo el rebombori dels beocis.[11]

[10]La carta a Taurinus és la més extensa i diligent de totes aquestes cartes de GAUSS que estem comentant. A [Rod05] es pot trobar una anàlisi de l'obra de TAURINUS, que va ser el primer a desenvolupar l'*analogia* usant lliurement els mètodes infinitesimals, seguint les idees del seu oncle SCHWEIKART. GAUSS, en aquesta carta, reconeix el mèrit de Taurinus, però en atribuir-se les seves conclusions va frustrar la carrera d'un matemàtic amb talent.

[11] Els beocis eren els natius de Beocia, a l'antiga Grècia, cèlebres perquè els seus exercits atacaven cridant. Aquí s'aplica als metafísics neokantians.

De fet GAUSS no anava gens desencaminat, ja que fins i tot molt posteriorment, el 1871, el professor LOTZE, un neokantià de Göttingen, va declarar que la geometria no euclidiana no tenia sentit, cosa que va causar molts problemes a KLEIN (vegeu [Lau99], pàg. 222).

Carta a Bessel (9 d'abril de 1830)

> Hem d'admetre humilment que si bé el nombre és merament un producte de les nostres ments, l'espai té una realitat fora de les nostres ments i les seves lleis no les podem saber a priori.

Carta a Schumacher (17 de maig de 1831)

> Fa algunes setmanes que he començat a escriure alguns resultats de les meves meditacions sobre aquest assumpte, que provenen de quaranta anys endarrere, i de les quals res he redactat, cosa que m'ha obligat tres o quatre vegades a començar de nou el meu treball. *No voldria, però, que això morís amb mi.*

Carta a Schumacher (12 de juliol de 1831)

> La longitud d'una circumferència de radi r és:
>
> $$L = \pi k(e^{r/k} - e^{-r/k}),$$

i comenta que perquè les mesures coincideixin amb l'experiència k hauria de ser infinitament gran.[12]

Aquesta redacció la va interrompre el 1832, en conèixer el treball de János Bolyai.

Carta a Gerling (14 de febrer de 1832)

> Et comento que he llegit aquests dies un petit treball d'un hongarès, sobre geometries no euclidianes, que conté totes les meves idees i resultats, desenvolupats molt elegantment. [...] L'autor és un jove oficial austríac, fill d'un amic de la meva joventut, que vaig conèixer el 1798, amb qui havia parlat del tema, però aleshores les meves idees no havien arribat a la maduresa i formació d'ara. *Tinc aquest jove geòmetra com un dels genis més grans.*

[12] Aquesta fórmula es pot deduir a partir del punt 9 de l'*analogia*. Vegeu la introducció, pàg. 14.

Carta a F. Bolyai (6 de març de 1832)

> Ara deixa'm dir una cosa sobre el treball del teu fill. Si començo dient que no el puc alabar, restaràs desconcertat. No obstant això, no puc fer altra cosa: *si l'alabés, m'alabaria a mi mateix*, ja que el total contingut del treball, el camí que segueix el teu fill i els resultats a què ha arribat coincideixen quasi completament amb les meves reflexions de fa trenta o trenta-cinc anys.

I, més endavant,

> És, per tant, una agradable sorpresa per a mi, i estic molt satisfet que sigui justament el fill del meu vell amic qui m'hagi precedit de manera tan remarcable.

És en aquesta carta que suggereix el nom de *paraesfera*[13] per a la superfície F de J. Bolyai.

A més, la carta conté una demostració original que l'àrea d'un triangle hiperbòlic és proporcional al defecte. Aquesta demostració, una de les poques que va escriure Gauss, es basa en el fet, no suficientment aclarit per Gauss però que es pot deduir del treball de J. Bolyai, que els triangles amb tres vèrtexs a l'infinit tenen àrea finita.

Acabem amb un parell de cartes molt posteriors, a Schumacher i a Gerling, on Gauss remarca que fa més de cinquanta anys que es dedica al problema de les paral·leles i de la seva relació amb el teorema del defecte en el cas hiperbòlic.

La primera no figura a [Gau27], però la podeu trobar a [Ros88], pàg. 220. La publicació d'aquesta carta, just després de la mort de Gauss, el 1855, on pondera positivament el treball de Lobatxevski, va causar una forta impressió a la comunitat matemàtica europea. Quant haria pogut canviar aquesta història si Gauss hagués fet publica la seva molt bona opinió del treball de J. Bolyai !

Carta a Schumacher (28 de novembre de 1846)

> [...] el que Schweikart va anomenar *geometria astral*, Lobatxevski ho anomena *geometria imaginària.* Saps que durant 54 anys (1792) he compartit els mateixos punts de vista amb alguns desenvolupaments addicionals [...]. No

[13] És la superfície que hem anomenat horoesfera, seguint la notació de Lobatxevski, avui universalment acceptada. Vegeu el comentari al treball de J. Bolyai a la pàgina 112.

> he trobat res nou per mi en el treball de LOBATXEVSKI. Però el seu desenvolupament, en un vertader esperit geomètric, és diferent del camí[14] que jo vaig seguir.

CARTA A GERLING (10 d'octubre de 1846)

> El teorema que el sr. Schweikart li menciona a vostè, que en qualsevol geometria la suma de tots els angles exteriors d'un polígon difereix de 360° per una quantitat, [....] que és proporcional a l'àrea, és el primer teorema que es troba en el llindar d'aquesta teoria, *un teorema la necessitat del qual vaig reconèixer ja el* 1794*.*

Així doncs, segons el mateix GAUSS, es va començar a interessar en la geometria no euclidiana amb disset anys!

Recensions

Per completesa, citem també dues recensions que va fer GAUSS a *Göttingische gelehrte Anzeigen*, el 20 d'abril de 1816 (vegeu [Gau27], pag 170).

Comença amb el comentari següent:

> [...] Rarament passa un any sense un intent d'omplir aquests forats [els fonaments de la teoria de les paral·leles] i sense que puguem dir de cap manera, si parlem honestament i clarament, que hem anat més enllà del que va fer EUCLIDES fa 2000 anys.

Sobre el treball de J. C. Schwab comenta que l'autor creu demostrar que si una línia recta talla dues paral·leles ho fa amb el mateix angle, i sobre el treball de Matthias Metternich comenta que el seu error està a suposar que una successió monòtona de punts que s'acosta a un punt donat té per límit aquest punt.

[14] El camí diferent al qual es refereix GAUSS és possiblement el camí del *Disquisicions*: el camí de la recerca de l'esfera imaginària.

Apèndix D

János Bolyai *ab omni naevo vindicatus*

J. BOLYAI[1] està considerat la figura més gran de la ciència hongaresa i se'l té pel Copèrnic de la geometria. En el seu treball de 26 pàgines publicat el 1831 i citat generalment com a *Apèndix*, i que és un apèndix al volum I del *Tentamen*,[2] la monumental monografia en dos volums del seu pare, F. BOLYAI, va fer una troballa revolucionària creant l'anomenada geometria no euclidiana.

Podeu trobar la traducció anglesa de G. B. Halsted, per exemple, a [Bol31], [Bol02] i [Gra04][3]. I la de F. Kärteszi a [Kár87].

La voluntat de János d'estudiar la teoria de les paral·leles devia ser molt forta, ja que el 4 d'abril de 1820 va rebre una carta del seu pare que deia:

> Per l'amor de Déu! *Deixa les paral·leles tranquil·les*, abjura'n com d'una xerrada indecent, et prendran (com a mi) el teu temps, la salut, la tranquillitat i la felicitat de la teva vida. Aquesta foscor sense fons pot devorar un miler d'altes torres com Newton i mai més no tornarà a brillar a la terra...

[1] Així com SACCHERI va reivindicar el paper d'Euclides a la seva famosa obra *Euclides ab omni naevo vindicatus sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universiae geometriae principia,* nosaltres volem reivindicar el paper de J. Bolyai com a fundador de la geometria hiperbòlica.

[2] *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae introducendi,* 1832. Un intent d'introduir la joventut estudiosa en els elements de la matemàtica pura.

[3] Aquesta referència fou coneguda per nosaltres posteriorment a la redacció d'aquest treball. La opinió de Gray sobre Bolyai coincideix amb la que nosaltres estem defensant aquí, i que ja varem formular en tot detall l'any 2001 a [Rod05].

A principis de setembre de 1823, amb vint-i-un anys, János va ser nomenant sotslloctinent, i va ser assignat a la Direcció de Fortificacions de Temesvár.[4] Des d'aquí va escriure al seu pare la carta de 3 de novembre de 1823 que va esdevenir extensament coneguda:

> Apreciat pare! Tinc moltes coses per escriure-us sobre els meus nous descobriments, però, de moment, no puc sinó evitar-ne la discussió en profunditat aquí i us els escriuré en unes quartilles... Estic determinat a publicar un treball sobre les paral·leles tan aviat com l'hagi arreglat i preparat i hi hagi una oportunitat de fer-ho; de moment, encara no està descobert, però el camí que he seguit promet aconseguir la meva meta si d'alguna manera és possible; encara no està llest però *he descobert coses tan superbes que jo mateix estic atònit*, i significaria una vergonya eterna deixar-ho perdre per sempre; si vostè, apreciat pare, les veu, les reconeixerà; ara no puc dir més: *de no-res he creat un món nou i diferent*; totes les altres coses que us he enviat són com un castell de cartes comparat amb una torre.

La importància dels seus resultats no va ser reconeguda fins després de la seva mort i fins i tot llavors no sense resistència. Durant la seva vida, les seves brillants idees, que havien estat madurades a l'edat de vint-i-un anys, no van ser enteses. Les va presentar amb la bravesa revolucionària de la joventut, sense por de les crítiques de la classe dirigent científica.

Qui sí que va entendre les idees de J. Bolyai fou Gauss, que va ser injust amb J. Bolyai quan va formar la seva opinió sobre l'*Apèndix* el 1832.[5]

A més, una posterior conducta de Gauss és també reprensible. Quan va saber que el rus Lobatxevski [6] havia descobert el mateix, en essència, que J. Bolyai, no va informar-lo que hi havia una altra persona que havia obtingut resultats similars. Lobatxevski, per suggeriment de Gauss, fou elegit membre de la societat científica de Göttingen.

[4]Timisoara, Rumania.

[5]El juny de 1831 l'*Apèndix* fou enviat a Gauss, però es va perdre (sembla que per una epidèmia de còlera); només va arribar la carta de presentació de F. Bolyai i la còpia de l'*Apèndix* es va tornar al remitent, J. Bolyai. El gener del 1832 se li va tornar a enviar. Va contestar a F. Bolyai set setmanes més tard. Vegeu un breu resum d'aquesta carta a la pàgina 106.

[6]L'onze de febrer de 1826 Lobatxevski va fer una presentació de la seva geometria imaginària. Aquestes primeres notes es van perdre, però ell mateix en va redactar unes de noves el 1829, i es varen publicar a la revista de la seva Universitat, *El Missatger de Kazan* (vegeu [Boi91]). El 1837 publica *Géométrie imaginaire* (vegeu [Lob37]), i el 1840 a Berlín publica un resum de *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parellellinien* (vegeu [Lob55]), que fou l'obra llegida per Gauss. El seu treball és independent del de J. Bolyai. Però així com Lobatxevski era un professor universitari de cert prestigi, János era tan sols un sotslloctinent de vint-i-un anys. Per això és l'heroi d'aquesta història.

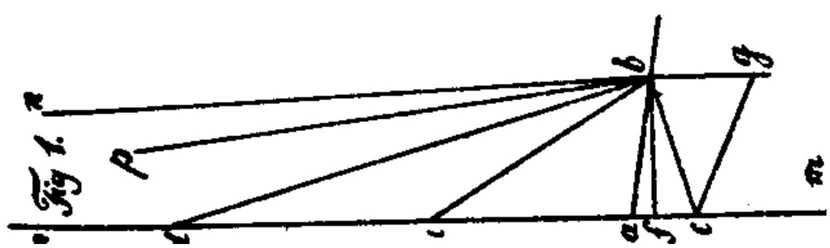
D.1 L'apèndix del Tentamen

La gran victòria de J. Bolyai sobre Gauss està que J. Bolyai va arribar a introduir l'element de longitud que buscava Gauss, a partir del desenvolupament purament axiomàtic de la geometria no euclidiana, és a dir, fent el mateix que havia fet Euclides, en els *Elements*, però a partir d'uns altres postulats.

Comentem breument l'*Apèndix*, destacant els punts més rellevants.

§1

En aquest paràgraf defineix paral·lela. Es basa en el dibuix



Diu concretament: ≪Si el raig *am* no és tallat pel raig *bn*, situat en el mateix pla, però és tallat per cada raig *bp* comprès en l'angle *abn*, direm que el raig *bn* és paral·lel al raig *am*; es denota per $bn||am$. És evident que hi ha un tal raig *bn* i només un, i que la suma dels angles *bam*, *abn* no excedeix d'un st.$\angle$.[7] ≫

A la pàgina 128 reproduïm els dibuixos originals de J. Bolyai.

§2–§10

Dedica llavors els apartats §2 al §10 a estudiar les propietats del paral·lelisme, com, per exemple, la transitivitat.[8] De fet, aquesta transitivitat la prova a l'espai, i no només en el pla, ja que posteriorment, a la secció §10, ho necessitarà.

[7] Angle recte.

[8] Aquesta part és la que hem comentat que és molt semblant al treball no publicat de Gauss sobre teoria de les paral·leles, datat el 1831.

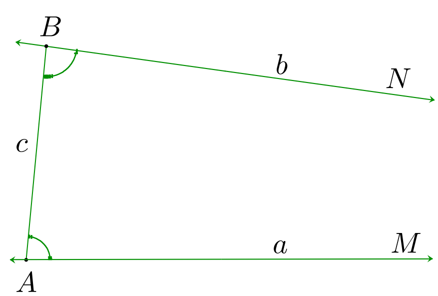
L'eina descoberta per J. Bolyai (coneguda també per Gauss i Lobatxevski) i que és el punt central del seu treball, sense la qual, i sens dubte, no hauria pogut fer res, és el que avui coneixem per *horoesfera*. Gauss proposa posteriorment dir-ne *paraesfera*, però J. Bolyai no li dóna cap nom, simplement la defineix en el §11 i li diu superfície F.

Recordem-ne la definició. La primera observació, molt rellevant, és que hem de sortir del pla i situar-nos a l'espai. És a dir, augmentar una dimensió. Fixem un raig o semirecta. Direm que dos punts A i B són *isogonals* corresponents, o breument punts corresponents (el terme és degut a Gauss), quan en considerar les semirectes paral·leles AM i BN al raig inicial es compleix que

$$\angle MAB = \angle NBA\,.$$

Escriurem, com J. Bolyai, $A \simeq B$, per a denotar que A i B són isogonals.

Aquesta relació és independent del cinquè postulat, pertany al reialme de la geometria absoluta i té les propietats reflexiva, simètrica i transitiva: $A \simeq A$; si $A \simeq B$, llavors $B \simeq A$; si $A \simeq B$ i $B \simeq C$, llavors $A \simeq C$. Si una relació té les propietats anteriors, se'n diu relació d'equivalència. És ben conegut que qualsevol relació d'equivalència en un conjunt dóna lloc a una subdivisió del conjunt en subconjunts disjunts. Se'n diuen classes d'equivalència.



Ara, cada classe d'equivalència obtinguda a partir de la relació anterior és un subconjunt de l'espai, que anomenarem *horoesfera*.[9] Es pot considerar també com la figura a la qual tendeix una esfera que passa per un punt fixat quan el centre tendeix a infinit.

[9] Observem que una manera de definir esfera sense explicitar el radi és la següent: Considerem el feix de rectes que passen per un punt O; diem que dos punts A i B són

§15

Aquest paràgraf el reproduïm completament, ja que és molt important i curt:[10]

> A la llum dels §13 i §14, *el Sistema de Geometria basat sobre la hipòtesi de la veritat de l'Axioma XI* [11] *d'Euclides es diu* Σ*; i el sistema basat sobre la hipòtesi contrària es diu* S*.*
>
> *Totes les coses de les quals no es diu explícitament si estan a* Σ *o a* S*, es sobreentén que estan enunciades absolutament,*[12] *és a dir, s'està dient que són certes tant a* Σ *com a* S*.*

En particular, tot el que s'havia dit fins aquí era absolut, és a dir, cert, tant si suposem el cinquè postulat com si no.

§16–§24

En aquests paràgrafs estudia les propietats de l'horoesfera, i arriba a l'extraordinari descobriment del §21: *La geometria de l'horoesfera és euclidiana!*

Més precisament, si considerem com a conjunt de *punts* els punts de l'horoesfera i com a conjunt de *rectes* els horocicles (intersecció amb l'horoesfera de plans que contenen el seu eix),[13] es compleixen els cinc postulats d'Euclides. En particular, *la geometria euclidiana de dimensió dos viu dins de la geometria hiperbòlica de dimensió tres.*[14]

---

isogonals corresponents, $A \doteq B$, quan

$$\angle OAB = \angle OBA.$$

Cada classe d'equivalència és una esfera de centre O. La definició d'horoesfera és una generalització natural d'aquesta manera de pensar, quan O tendeix a infinit.

[10] L'emfasitzat és de Bolyai.

[11] El cinquè postulat.

[12] D'aquest paràgraf va sortir el nom de geometria absoluta per a la geometria comuna al pla euclidià i al pla hiperbòlic.

[13] Qualsevol recta paral·lela a la semirecta emprada en la definició d'horoesfera es diu *eix* de l'horoesfera. Els horocicles es poden pensar també com la figura a la qual tendeix una circumferència que passa per un punt fixat quan el centre tendeix a infinit. Vegeu la secció D.2, pàgina 118.

[14] Aquest fet era conegut per GAUSS, ja el 1816, a través del seu alumne WACHTER i li podia haver suggerit, per reciprocitat, que l'espai euclidià podria contenir una superfície on fos certa la geometria hiperbòlica: la tan buscada esfera imaginària! Vegeu la nota a peu de pàgina 126.

§25

En aquest paràgraf demostra el teorema del sinus, és a dir, la fórmula (H.7) de la trigonometria hiperbòlica (pàgina 162), enunciada, però, en termes de longituds horocícliques. Concretament J. Bolyai demostra, de manera absoluta, és a dir, independent del cinquè postulat, que:

> *En qualsevol triangle rectilini, els cercles amb radi igual als seus costats són com els sinus dels angles oposats.*[15]

§26

En aquest paràgraf aplica els anteriors resultats a l'esfera i obté un resultat extraordinari, que ell mateix emfasitza:

> *La trigonometria esfèrica, que segueix d'això, s'ha establert, doncs, independentment de l'Axioma XI.*

Demostra, aplicant el §25, que

> *En qualsevol triangle esfèric, els sinus dels costats són com els sinus dels angles oposats.*

És a dir, la fórmula (E.7) de la trigonometria esfèrica (pàgina 143).[16]

§27–§30

En els paràgrafs §27, §28 i §29 estudia l'angle del paral·lisme donant-ne diverses expressions.

En el §30 calcula la longitud del cercle en funció del radi, de manera que pot escriure els resultats del §25 en funció de les longituds dels costats i obtenir, ara sí, exactament la fórmula (H.7) (pàgina 162).

De fet, demostra que la longitud L i l'àrea A d'un cercle de radi r són donats per

$$L = 2\pi R \tan z \tag{D.1}$$
$$A = \pi (R \tan z)^2 , \tag{D.2}$$

[15] Aquest enunciat conté el teorema del sinus per a les tres geometries.

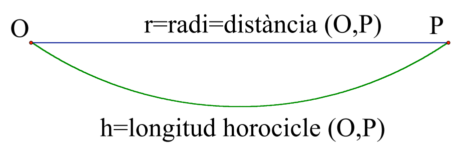
[16] El més sorprenent d'aquest resultat, colateral en el camí emprès per J. Bolyai, és que demostra que la intuïció inicial que va conduir al descobriment de l'horocicle, estava ben fonamentada. Recordem que Lambert, en el número 8 de la seva *analogia*, ja ho havia afirmat. Fins i tot sembla suggerir una prova elemental d'aquest fet que ens podria remetre a la prova de Harriot, que hem reproduït a la secció E.4.

on z és el complementari de l'angle de paral·lelisme de $r/2$. En particular

$$\tan z = 2\sinh\frac{r}{2R}\,.$$

Si denotem per O el centre de la circumferència i per P un punt d'aquesta, la relació entre el radi $r = d(O,P)$ i la longitud h de l'horocicle que uneix aquests dos punts és

$$h = 2R\sinh\frac{r}{2R}\,.$$



De manera que també tenim

$$L = 2\pi h = 2\pi R\tan z = 2\pi(2R\sinh\frac{r}{2R}) \tag{D.3}$$

$$A = \pi h^2 = \pi(R\tan z)^2 = \pi(2R\sinh\frac{r}{2R})^2\,. \tag{D.4}$$

§31

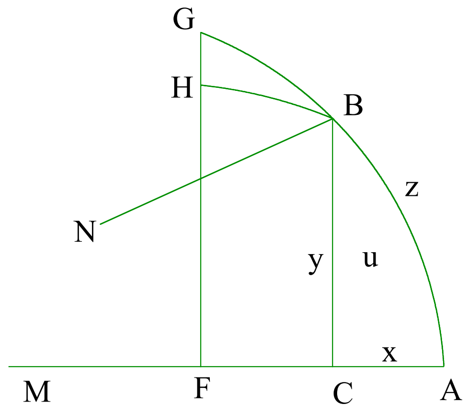
Aquest paràgraf està dedicat a la trigonometria hiperbòlica. Demostra que les fórmules que relacionen els angles i els costats d'un triangle hiperbòlic són anàlogues a les fórmules que relacionen els angles i els costats d'un triangle esfèric quan les longituds d'aquests costats es consideren imaginaris purs: l'*analogia* es compleix!

§32

És ara quan introdueix la mesura de longitud de corbes i, en particular, l'element de longitud ds.[17]

[17]En aquest article J. Bolyai introdueix per primer cop a l'*Apèndix* el mètode dels infinitèsims, passant de la geometria sintètica a la geometria diferencial. Sospitem que el mètode dels infinitèsims fou el mètode utilitzat per J. Bolyai a la primera versió del seu treball, l'any 1825, que es va perdre. Tan sols sabem que aquesta versió fou enviada al seu professor J. W. von Eckwher; vegeu [Kár87], pàg. 33. Que J. Bolyai era conscient que estava barrejant dos mètodes queda palès a la seva pròpia frase de la secció *VII* de l'article 32: «De totes formes, les coses tractades des de *IV* fins aquí es poden demostrar sense integració, però per brevetat han estat suprimides.»

Considera la corba AB d'equació $y = y(x)$, en coordenades rectangulars x, y. És a dir, es fixa el punt A i la recta AM, i llavors per a calcular les coordenades d'un punt B es calcula la distància y del punt a la recta AM i la distància x entre el peu de la perpendicular de B a AM i A.[18]



Reproducció de la figura 17 de l'*Apèndix*.

Demostra,[19] amb la seva notació,

$$\frac{dz^2}{dy^2 + \overline{BH}^2} \doteq 1\,. \tag{D.5}$$

Per dz entén un increment de z, essent z la longitud de AB; és, doncs, el nostre ds. Per $\overline{BH}$ entén la longitud de l'equidistant a FC. Per $\doteq$ entén que la igualtat és certa en el límit, quan $dx = FC$ tendeix a zero.

[18] El pla euclidià està caracteritzat pel fet de que les línies $y = constant$, en les coordenades rectangulars, és a dir, les equidistants a l'eix de les x, són línies rectes; el pla esfèric està caracteritzat pel fet que aquestes línies coordenades són circumferències concèntriques; i, en el pla hiperbòlic, aquestes línies coordenades no són ni rectes ni circumferències; tenen, això sí, longitud infinita, com en el cas euclidià.

[19] La demostració de J. Bolyai no és prou rigorosa, però es pot formalitzar aplicant trigonometria hiperbòlica al triangle infinitesimal de costat $dx = FC, dy = GH, dz = GB$ (vegeu per exemple [Kár87], pàg. 167). Segurament Gauss podia fer aquests càlculs en tot rigor. Pensem que Gauss havia de forçosament reconèixer, en la fórmula (D.5), l'expressió de l'element de longitud hiperbòlic. A aquesta fórmula ens referim a la pàgina 23 de la introducció quan diem que Gauss va veure alguna cosa a l'*Apèndix* que el va fer desistir en el seu projecte. J. Bolyai acaba de donar l'esfera imaginària sintèticament. Creiem que és el primer exemple d'una varietat de Riemannn de dimensió dos que no és una superfície de l'espai. L'obstrucció que tenia Gauss és que la buscava analíticament i a l'espai euclidià. Això respon les preguntes 1 i 2 de la pàgina 21.

Prèviament, §27, ha demostrat que la relació de longituds entre una recta i la seva equidistant a distància y (que no és recta!) és

$$\frac{\overline{BH}}{FC} = \frac{1}{\sin \Pi(y)}\,,$$

o, equivalentment (vegeu (H.12), pàgina 164),

$$\frac{\overline{BH}}{FC} = \cosh \frac{y}{R}\,.$$

Identificant FC amb dx, la fórmula (D.5) s'escriu

$$dz^2 \doteq \cosh^2 \frac{y}{R} dx^2 + dy^2.$$

Això vol dir, en llenguatge modern, que l'element de longitud ds està donat per la fórmula

$$\boxed{ds^2 = \cosh^2 \frac{y}{R}\, dx^2 + dy^2} \tag{D.6}$$

que, en coordenades polars, és igual a (vegeu la secció D.3)

$$\boxed{ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R}\, d\theta^2}$$

El coneixement de l'element de longitud, és a dir, de la mètrica, li permet fer *geometria diferencial*, i en el mateix §32 calcula l'element d'àrea, l'àrea del cercle, l'àrea de l'esfera, volums, comenta que es poden calcular curvatures, evolutes, etc.

§33

Remarca que saber quina de les dues geometries és la real queda per decidir. Però si la real és la hiperbòlica faltarà encara decidir quin és el valor de la constant que dóna la proporcionalitat entre l'àrea i el defecte.

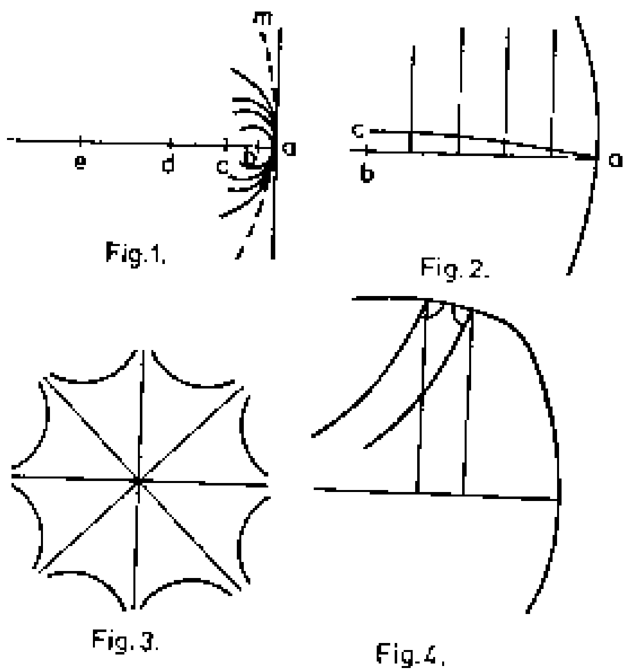
§34–§43

D'aquestes seccions destaquem dos fets fonamentals: a la secció 42 demostra que l'àrea d'un triangle hiperbòlic és proporcional al seu defecte i a la secció 43 demostra que, en geometria hiperbòlica, es pot quadrar el cercle (no pas tots!; vegeu [Rev04]).

D.2 Els dibuixos del descobriment

En un llibre d'exercicis de mecànica del jove J. Bolyai, de l'any acadèmic 1820-1821, quan era estudiant d'enginyeria a l'Acadèmia d'Enginyeria de Viena i tenia només divuit anys, es varen trobar, amb l'anotació *Parallelarum Theoria*, els dibuixos següents.[20]

La primera figura és la construcció de l'horocicle. El dibuix mostra una successió de circumferències, amb un punt comú de tangència, quan el centre es desplaça cap a l'infinit. Si aquest límit és una recta, estem en el cas de la geometria euclidiana; si aquest límit és una certa corba, com la m del dibuix, estem en el cas de la geometria de l'angle agut. Aquest mateix plantejament, en una dimensió més, dóna lloc a la construcció de les horoesferes, tan fonamental a l'obra de J. Bolyai.



Més encara, si pensem l'horoesfera com la posició límit d'esferes de radi R, quan el centre, i per tant R, tendeixen a infinit, és clar que la *geometria de l'horoesfera és euclidiana,* ja que és la geometria d'una esfera de radi

[20]Aquestes dibuixos apareixen a la pàgina 223 de [Kár87].

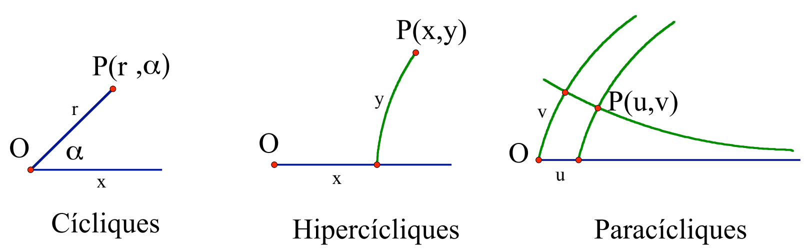
infinit.[21] Ja hem comentat que aquest fet, demostrat rigorosament, és una de les grans aportacions de J. Bolyai. Però aquests dibuixos són molt anteriors a l'*Apèndix*.

Les figures 2 i 4 semblen gràfiques de funcions, pensades per a estudiar analíticament *equidistants* i horocicles. En particular, la figura 4 s'assembla molt a la figura 24 de l'*Apèndix*, que hem reproduït a la pàgina 116.

La figura 3 fa pensar, irremissiblement, en l'octògon regular amb vèrtexs a l'infinit, centrat a l'origen del disc de Poincaré. La consideració de triangles *ideals*, és a dir, amb un o diversos vèrtexs a l'infinit, és natural en la geometria de l'angle agut, ja que apareixen com casos extrems de les fórmules trigonomètriques. De fet, una figura semblant, només amb quatre costats, apareix en la memòria que envia Schweikart a Gauss (vegeu [Gau27], pàg. 181).

D.3 Canvi de coordenades

En el pla hiperbòlic, a part de les coordenades polars o cícliques, i de les coordenades rectangulars o hipercícliques, es consideren també coordenades paracícliques o horocícliques, en les quals una de les distàncies es mesura sobre l'horocicle.



Cícliques. r és la distància entre el punt P i l'origen O. α és l'angle entre la geodèsica PO i una geodèsica prefixada. Observem que $r = constant$ és un cercle hiperbòlic.

Hipercícliques. x és la distància entre l'origen O i la projecció del punt P sobre una geodèsica prefixada. y és la distància entre el punt P i aquesta

[21] Un pas crucial en la reconstrucció sintètica de la nova geometria fou donar una definició d'horocicle que no usés aquest procediment de pas al límit, propi dels mètodes de l'anàlisi però no pas de la geometria sintètica. J. Bolyai troba aquesta definició a la secció 11 de l'*Apèndix* (vegeu la nota al peu de la pàgina 112). Curiosament és la mateixa definició que Gauss dóna en els manuscrits del 1831, i també la de Lobatxevski.

geodèsica prefixada. Observem que $y = constant$ és un hipercicle (equidistant).

Paracícliques. u és la distància sobre una geodèsica prefixada entre l'origen O i la intersecció amb aquesta geodèsica de l'horocicle per P i eix la geodèsica. v és la longitud de l'horocicle per O i eix la geodèsica prefixada entre O i la intersecció d'aquest horocicle amb la geodèsica per P pral·lela a la geodèsica prefixada. Observem que $u = constant$ és un paracicle (horocicle).[22]

Volem demostrar que l'element de longitud obtingut per J. Bolyai, que en coordenades rectangulars s'escriu com

$$ds^2 = \cosh^2 \frac{y}{R}\, dx^2 + dy^2$$

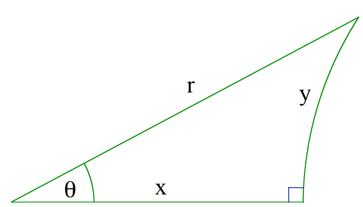
(vegeu la fórmula D.6), en coordenades polars està donat per

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R}\, d\theta^2.$$

Per a fer això, observem primerament que la relació entre les coordenades rectangulars i les coordenades polars està donada per[23]

$$\begin{aligned} \cosh \frac{r}{R} &= \cosh \frac{x}{R} \cosh \frac{y}{R} \\ \sinh \frac{y}{R} &= \sinh \frac{r}{R} \sin\theta, \end{aligned}$$

com es veu estudiant el triangle rectangle de la figura següent.



En particular, derivant aquestes fórmules obtenim

$$\begin{aligned} \sinh \frac{r}{R} \frac{\partial r}{\partial x} &= \sinh \frac{x}{R} \cosh \frac{y}{R} \\ \sinh \frac{r}{R} \frac{\partial r}{\partial y} &= \cosh \frac{x}{R} \sinh \frac{y}{R} \end{aligned}$$

[22]Recordem que per tres punts del pla hiperbòlic hi passa o bé una recta, o bé una circumferència, o bé un hipercicle, o bé un paracicle. Suposar que tres punts no alineats determinen una circumferència és equivalent al cinquè postulat.

[23]D'aquest sistema podem deduir l'expressió del canvi de coordenades: $x = x(r, \theta)$, $y = y(r, \theta)$.

i

$$\begin{aligned}
\cos\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial x} &= -\frac{\sinh\dfrac{x}{R}\,\cosh^2\dfrac{y}{R}\,\cosh\dfrac{x}{R}\,\sinh\dfrac{y}{R}}{(\cosh^2\dfrac{x}{R}\cosh^2\dfrac{y}{R}-1)^{3/2}}\\
\cos\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial y} &= \frac{\sinh^2\dfrac{x}{R}\,\cosh\dfrac{y}{R}}{(\cosh^2\dfrac{x}{R}\cosh^2\dfrac{y}{R}-1)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\theta}{\partial x} &= -\frac{\sinh\dfrac{y}{R}\,\cosh\dfrac{x}{R}\,\cosh\dfrac{y}{R}}{(\cosh^2\dfrac{x}{R}\,\cosh^2\dfrac{y}{R}-1)}\\
\frac{\partial\theta}{\partial y} &= \frac{\sinh\dfrac{x}{R}}{(\cosh^2\dfrac{x}{R}\,\cosh^2\dfrac{y}{R}-1)}\,.
\end{aligned}$$

Com que

$$\begin{aligned}
dr &= \frac{\partial r}{\partial x}dx+\frac{\partial r}{\partial y}dy\\
d\theta &= \frac{\partial\theta}{\partial x}dx+\frac{\partial\theta}{\partial y}dy\,,
\end{aligned}$$

podem substituir directament els anterior càlculs a $dr^2+\sinh^2\dfrac{r}{R}d\theta^2$ i obtenim

$$dr^2+\sinh^2\frac{r}{R}d\theta^2=\cosh^2\frac{y}{R}\,dx^2+dy^2=ds^2,$$

com volíem demostrar.

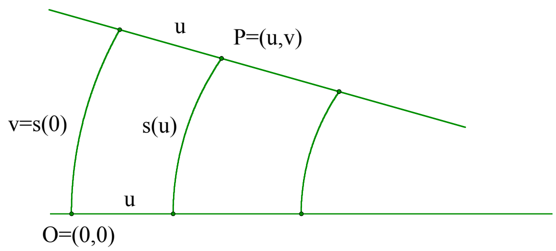
També es pot veure que aquest mateix element de longitud en coordenades paracícliques està donat per

$$ds^2=du^2+e^{-2u}dv^2. \tag{D.7}$$

Es dedueix de la relació

$$s(u)=s(0)e^{-u} \tag{D.8}$$

entre les longituds dels horocicles del mateix feix, compresa entre dos eixos (vegeu per exemple [Rev02], pàg. 120).[24]



Observem que les coordenades cícliques i hipercícliques tenen un anàleg clar a l'esfera, i que les expressions de l'element de longitud en cadascuna s'obté simplement substituint les funcions hiperbòliques per les funcions circulars corresponents.

No obstant això, les coordenades paracícliques no tenen un anàleg sobre l'esfera, ja que a l'esfera no hi ha horocicles.

D.4 Consistència de la geometria no euclidiana

Les últimes línies de l'*Apèndix* són aquestes:

> Manca, finalment (perquè la cosa estigui completa des de tots els punts de vista), demostrar la impossibilitat (sense cap suposició) de decidir *a priori* si Σ o alguna S (i quina) existeix. Això, tanmateix, es reserva per a una ocasió més convenient.

Recordem que Σ és la geometria euclidiana i S la geometria de l'angle agut. Quan diu *quina S existeix* sembla que s'està preguntant sobre la curvatura de l'Espai. Les diferents S difereixen en una constant iR, el radi de l'esfera imaginària, i per tant la curvatura de la geometria de l'angle agut és $-\dfrac{1}{R^2}$.

El problema de la consistència, en els seus orígens, es plantejava en el sentit de si els resultats de geometria obtinguts a partir d'un sistema d'axiomes contradeien o no l'experiència del món físic real.

[24] La relació entre les coordenades hipercícliques (x, y) i les paracícliques (u, v) està donada per $x = u + \ln\sqrt{1 + v^2 e^{-2u}}$; $\sinh y = ve^{-u}$. Però per a demostrar la fórmula (D.7) tan sols cal observar que u és paràmetre geodèsic, que les corbes $u = \mathit{constant}$, $v = \mathit{constant}$ són ortogonals (no apareix el terme $du\,dv$), i tenir en compte la relació (D.8).

Però, des del punt de vista de la lògica, el problema de la consistència vol dir *absència de contradiccions internes.* És a dir, demostrar que un sistema d'axiomes és consistent vol dir demostrar que no podem deduir-ne dos resultats contradictoris. Com que no tenim una llista finita de tots els resultats que es poden deduir d'un sistema d'axiomes donat, el problema de la consistència no és fàcil, en general.

El que es fa és construir models matemàtics que compleixin els axiomes del nostre sistema, amb la qual cosa es pot dir que el sistema és *tan consistent com* el model construït. Es parla de *consistència relativa.*

J. Bolyai no s'adona que la seva geometria és la geometria que tindria una superfície de $\mathbb{R}^3$ amb element de longitud en coordenades rectangulars $ds^2 = \cosh^2 \dfrac{y}{R} dx^2 + dy^2$. Si existís una tal superfície quedaria provada la consistència relativa de la geometria hiperbòlica: seria tan consistent com la geometria euclidiana de $\mathbb{R}^3$.

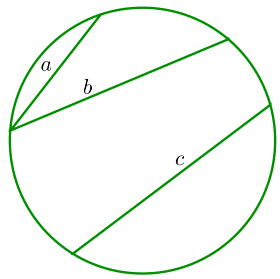
De fet, aquesta superfície existeix localment, s'anomena *pseudoesfera*, i l'estudiem a la secció H.2. Però no existeix globalment, com va demostrar Hilbert a [Hil01].

El problema de la consistència el va tancar Beltrami trenta-sis anys després del treball de J. Bolyai. Però el treball de Beltrami està inspirat en el de Battaglini.[25]

El que va fer Battaglini[26] va ser donar el que avui dia es coneix com a *model projectiu* de la geometria hiperbòlica. Sense entrar en detalls diguem que agafa com a punts del pla no euclidià els punts interiors d'un disc, i com a rectes la intersecció de rectes euclidianes amb el disc (les cordes). Pensa la vora del disc com l'infinit (els punts de la vora no pertanyen al pla hiperbòlic). Llavors, es diu que dues rectes són paral·leles quan es tallen a l'infinit, i és clar que per un punt exterior a una d'aquestes rectes passen infinites rectes que no la tallen.

[25] Battaglini va ser fundador i editor del *Giornale di Matematica*, revista que es va transformar, a partir de 1867, en l'òrgan reconegut de la geometria no euclidiana. El 1867 hi va publicar la traducció a l'italià de la *Pangeometria* de Lobatxevski, i el 1868 la traducció a l'italià de l'*Apèndix* de J. Bolyai.

[26] Vegeu [Bat67].



Les rectes a i b de la figura són paral·leles i les rectes a i c ni es tallen ni són paral·leles (es diuen ultraparal·leles).

La senzillesa d'aquest model, davant la dificultat del treball de J. Bolyai, explica per què, a partir de llavors, la geometria hiperbòlica s'accepta fàcilment. Responem, així, a la pregunta 4 de la pàgina 21.

Per a poder parlar de circumferències s'ha d'introduir una distància. Això es fa declarant isometries les projectivitats del pla que preserven el cercle.[27]

Potser pel fet de ser anterior a l'obra de Hilbert, el treball de Battaglini encara no és prou rigorós. La identificació del model projectiu amb la geometria hiperbòlica es deu a Klein, que va saber interpretar els treballs previs de Cayley sobre geometria mètrica projectiva (vegeu [Bon55], pàg. 164).

Hom considera Beltrami el vertader artífex de la prova de la consistència de la geometria hiperbòlica. No obstant això, hi ha dubtes de fins a quin punt va ser conscient Beltrami d'aquest fet. Més aviat va ser Bonola a [Bon55], pàg. 175, qui, comentant el *Saggio*, demostrà la consistència (vegeu [Gra87], pàg. 29).

Inspirat, com dèiem, en Battaglini,[28] Beltrami[29] introdueix una mètrica (una manera de mesurar longituds) en el disc $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+$

[27] Un lloc on està molt ben explicat és en el llibre de Santaló [San61].

[28] Aquest tema està molt ben recollit en el treball de Montesinos [Mon94].

[29] Vegeu [Bel68]. Aquest article de Beltrami, conegut com el *Saggio*, apareix publicat en el volum següent de la mateixa revista on va publicar Battaglini, *Giornale di Matematica*. A la nota *I* d'aquest article Beltrami explica que va arribar aquesta expressió del ds^2 usant l'*analogia*.

En efecte, l'expressió (D.9) de la mètrica de Beltrami que donem prové de la que havia obtingut el mateix Beltrami el 1866, dos anys abans del *Saggio*, a l'article [Bel66], però allà per a curvatura constant positiva.

El problema que preocupava Beltrami, i que tracta en aquest article, era si es podien posar coordenades sobre una superfície de manera que les geodèsiques tinguessin equacions lineals. La resposta és que una tal superfície és de curvatura constant.

Concretament demostra que l'element de longitud és

$y^2 < a^2\}$, concretament

$$ds^2 = R^2 \frac{(a^2 - y^2)dx^2 + 2xydxdy + (a^2 - x^2)dy^2}{(a^2 - x^2 - y^2)^2}. \tag{D.9}$$

Així, la distància entre els punts $(0,0)$ i (x,y) està donada per

$$\rho = \frac{R}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}, \qquad (r^2 = x^2 + y^2).$$

Aquest valor és diferent de la distància euclidiana entre aquests dos punts, que seria r. És a dir, que el coneixement de les coordenades d'un parell de punts no ens diu de manera immediata quina és la distància entre ells. Tenim, això sí, una fórmula que ens permet calcular-la. Això és un grau d'abstracció difícil d'assolir.

$$ds^2 = R^2 \frac{(a^2 + v^2)du^2 - 2uv\,du\,dv + (a^2 + v^2)dv^2}{(a^2 + u^2 + v^2)^2}.$$

Sembla que en aquell moment, 1866, no va relacionar encara la geometria hiperbòlica amb la geometria de les superfícies de curvatura constant; no havia aparegut encara el treball de Battaglini, que és de 1867. Però és remarcable aquesta mena de casualitat que el porta d'un problema aparentment menor o tècnic (existència d'unes certes coordenades) a la resolució d'un problema cabdal, com és el de la consistència de la geometria hiperbòlica.

En el *Saggio*, motivat per la lectura de Battaglini, reescriu aquesta fórmula i diu: ≪Però com que els valors de les constants R i a són realment arbitraris, és permès de suposar-los imaginaris, si es considera oportú. En efecte, si canviem aquestes constants per $R\sqrt{-1}$, $a\sqrt{-1}$, l'element lineal resultant correspon a una superfície de curvatura constant negativa $-\frac{1}{R^2}$≫. Novament l'analogia! En fer això s'obté la fórmula (D.9).

Menciona Gauss i Lobatxevski com a precursors de la geometria no euclidiana, però curiosament no menciona J. Bolyai, malgrat que, com hem comentat, a la mateixa revista es publicava una traducció de l'*Apèndix*.

Sembla, no obstant això, que Beltrami no va reconèixer l'existència de varietats de Riemann de dimensió dos, ja que sempre parla del disc hiperbòlic com d'una carta que *representa* la totalitat de la superfície, però no és directament la superfície. Per exemple, diu: ≪[...] dintre del cercle límit ($u^2 + v^2 = a^2$) es representa tota la regió real de la nostra superfície.≫ Sembla que pensa que tenim una certa superfície de l'espai euclidià de la qual coneix el ds^2.

Gray, a [Gra87] pàg. 26, comenta: ≪No és clar [...] què pensava exactament Beltrami sobre les superfícies de curvatura constant.≫ i més endavant: ≪Qualsevol sentiment d'inquietud [...] que un podria tenir sobre l'article de Beltrami [...] .≫ Això explicaria per què Beltrami acaba aquest article dient que li sembla impossible fer el mateix en dimensió tres. Error que repara després de la lectura de la memòria de Riemann, publicada el 1867 (llegida el 1854). Tornem a recomanar el treball de Montesinos [Mon94].

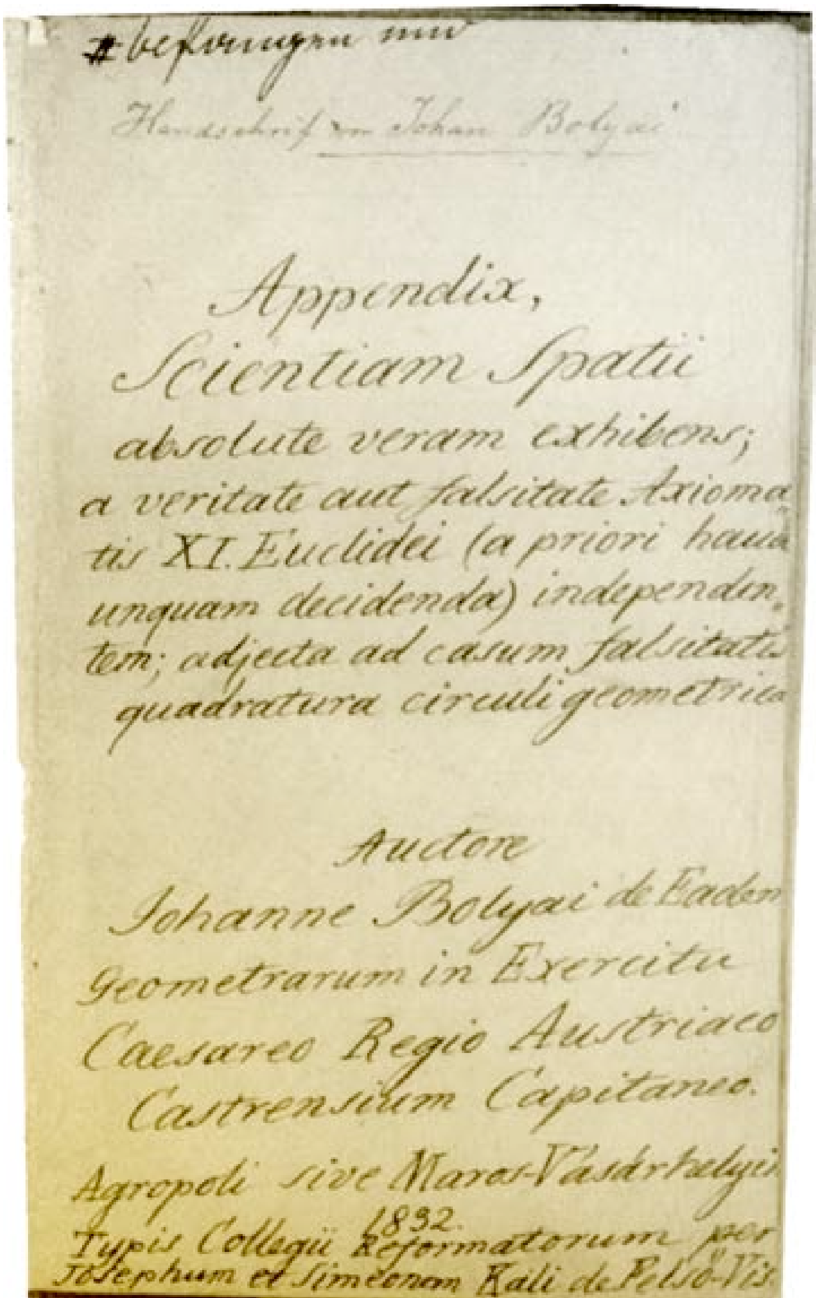
Amb el model de Beltrami, és a dir, el disc D amb la mètrica anterior, la geometria hiperbòlica quedava absolutament reconeguda com una més de les geometries riemannianes i es tancava definitivament el problema de la seva consistència.

El 1901, Hilbert [30] va demostrar que no hi havia cap superfície analítica de $\mathbb{R}^3$ de curvatura constant negativa que representés globalment el pla hiperbòlic.[31] Això vol dir que no hi ha cap isometria entre una superfície de $\mathbb{R}^3$ (amb la mètrica heretada de l'euclidiana de $\mathbb{R}^3$) i el model de Beltrami. En particular, això ens diu que les singularitats que apareixen a la base de la pseudoesfera són absolutament inevitables.

Aquest resultat de Hilbert, molts anys posterior a l'època de Gauss i J. Bolyai, explica per què la geometria hiperbòlica va ser tan difícil de descobrir: estava ben amagada.

[30] Vegeu [Hil01].

[31] Kuiper, a [Kui55], construeix una superfície de l'espai euclidià derivable només una vegada, isomètrica al pla hiperbòlic.



Handschrift von Johan Bolyai

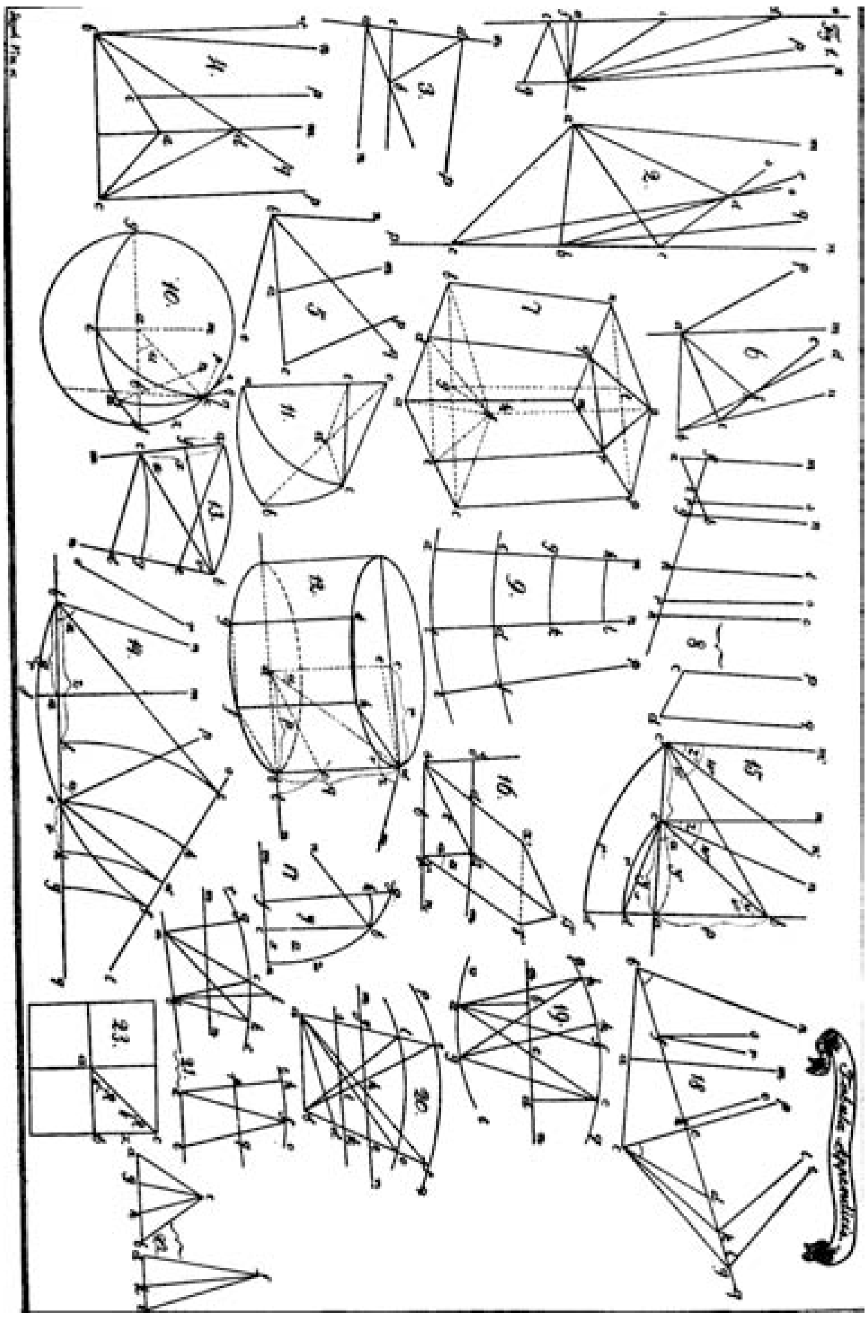
Appendix,
Scientiam Spatii
absolute veram exhibens;
a veritate aut falsitate Axioma
tis XI. Euclidei (a priori haud
unquam decidenda) independen
tem; adjecta ad casum falsitatis
quadratura circuli geometrica.

Auctore
Johanne Bolyai de Eaden
Geometrarum in Exercitu
Caesareo Regio Austriaco
Castrensium Capitaneo.

Agropoli sive Maros-Vásárhelyini
1832.
Typis Collegii Reformatorum per
Josephum et Simeonem Kali de Felső-Vis.

La primera pàgina de l'*Apèndix* es va perdre i va ser substituïda per aquesta, escrita pel mateix János Bolyai.

127



Els dibuixos originals de l'*Apèndix*

Apèndix E

Geometria esfèrica

Per a poder parlar de geometria sobre una superfície corba serà necessari definir el concepte de *línia recta* (que serà una corba sobre la superfície) i el concepte d'*angle* entre dues d'aquestes noves rectes. També ens caldrà el concepte de *distància* entre dos punts, que serà la longitud del *segment rectilini* que aquests dos punts determinin. La primera figura a tractar serà la del triangle rectilini, és a dir, la figura formada per la unió de tres segments rectilinis dos a dos no alineats.

La primera superfície corba amb la qual ens topem és la superfície d'una esfera de radi R a l'espai euclidià, i la seva geometria (la *geometria esfèrica*) és tant o més antiga que la mateixa geometria plana, per la seva importància en l'astronomia.

En una esfera els conceptes de línia recta i angle entre línies rectes són fàcils de definir, però el tractament dels triangles esfèrics ens porta a un problema fonamental: calcular cadascun dels elements d'un triangle esfèric en funció dels altres. És a dir, hem de desenvolupar una *trigonometria esfèrica*.

Gauss coneixia molt bé la trigonometria esfèrica de la seva època, que coincideix pràcticament amb la que coneixem avui en dia. De fet, Euler havia escrit un parell de textos pràcticament definitius de la matèria: *Principes de la trigonométrie sphérique tirés de la méthode des plus grans et plus petits*, 1755 (vegeu [Eul56], vol. 27, pàg. 277-308) i *Trigonometria sphaerica universa ex primis principiis breviter et lucide derivata*, 1782 (vegeu [Eul56], vol. 26, pàg. 224-236).

Si es volia desenvolupar el programa analític de Lambert, era natural desenvolupar primer aquest mateix programa per a la geometria esfèrica, i fer-ho de tal manera que les tècniques fossin posteriorment útils per a estudiar una superfície qualsevol.

En aquest capítol ens proposem una reconstrucció completament analítica, sense recolzar-nos en cap figura o imatge material geomètrica, de la geometria de l'esfera.

Comencem amb un breu recordatori de la geometria analítica de l'espai, secció E.1, i, a partir d'aquí, reconstruïm la geometria analítica de l'esfera, secció E.2.

A la secció E.3 calculem l'àrea de l'esfera i a la secció E.4 calculem l'àrea del triangle esfèric.

A la secció E.5 retrobem el teorema *VI* de l'article 2 del *Disquisicions*, sense usar, contràriament al que va fer Gauss, la trigonometria esfèrica. De fet, d'aquest teorema *VI* es dedueixen les fórmules fonamentals de la trigonometria esfèrica.

A la secció E.6 estudiem la variació de l'angle sobre un triangle esfèric, i ho fem de tal manera que el mètode és generalitzable al posterior estudi de la variació d'aquest angle en una superfície qualsevol.

E.1 Geometria analítica de l'espai

Sigui $\mathbb{R}^3$ el conjunt de ternes (x, y, z) de nombres reals. $\mathbb{R}^3$ amb la suma $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$ i la multiplicació $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ és un espai vectorial tridimensional; el conjunt ordenat de vectors $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ i $e_3 = (0, 0, 1)$ és la base canònica positiva de $\mathbb{R}^3$; qualsevol reordenació obtinguda per un nombre imparell de transposicions serà, per definició, una base negativa. Al punt $O(0, 0, 0)$ li direm origen.

Identificarem el conjunt de punts de l'espai $\mathbb{R}^3$ amb l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$. Cada terna (x, y, z) podrà pensar-se, doncs, com un punt $P(x, y, z)$ o com un vector $\overrightarrow{P}(x, y, z)$. Quan vulguem emfasitzar la distinció entre punt i vector usarem P per als punts i $\overrightarrow{P}$ per als vectors. Direm que (x, y, z) són les *components* del *punt* $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Observem que els components de P són les coordenades de $\overrightarrow{P}$ en la base canònica. Usarem les abreviaciones $-\overrightarrow{P}$ per $-1\overrightarrow{P}$ i $\overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P}$ per a $\overrightarrow{Q} + (-\overrightarrow{P})$. El vector $\overrightarrow{PQ}$, d'origen P i extrem a Q, és el vector $\overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P}$.

Una *línia recta* és el conjunt de punts $P(x, y, z)$ tals que les seves components compleixen les equacions següents:

$$\begin{aligned} x &= a + lt \\ y &= b + mt \\ z &= c + nt\,, \end{aligned}$$

amb a, b, c, l, m, n fixats i t variable. Direm que són les *equacions paramètriques* de la recta que passa pel punt $A(a, b, c)$ en la *direcció* del vector $\overrightarrow{D}(l, m, n)$. La recta que passa per A i té direcció $-\overrightarrow{D}$ és la mateixa recta anterior, però direm que té direcció oposada. Si $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, $\overrightarrow{D}$ serà el *vector director unitari*. Totes les rectes que considerem estan *dirigides*, és a dir, dels dos vectors directors unitaris que una recta pot tenir, un ha estat triat, que defineix a la recta la seva direcció o orientació.

El nombre $\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = xx' + yy' + zz'$ és el producte escalar dels vectors (x, y, z) i (x', y', z'). Amb la noció de producte escalar podem formular els conceptes fonamentals de la geometria euclidiana: la distància entre dos punts i l'angle entre dues rectes.

La *distància* de $P(x, y, z)$ a $O(0, 0, 0)$, anomenada *norma* de $\overrightarrow{P}$, és el nombre

$$\| \overrightarrow{P} \| = \sqrt{\langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{P} \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

La *distància* de $P(x, y, z)$ a $Q(x', y', z')$ és la norma de $\overrightarrow{PQ}$. És a dir,

$$d(P, Q) = \| \overrightarrow{PQ} \|\,.$$

L'*angle no orientat* $\theta = \angle(\overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}) = \angle(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})$ entre els vectors $\overrightarrow{P}(x, y, z)$ i $\overrightarrow{Q}(x', y', z')$ està donat per la fórmula:

$$\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q} \rangle}{\| \overrightarrow{P} \| \cdot \| \overrightarrow{Q} \|}\,.$$

El vector $(x, y, z) \times (x', y', z') = (yz' - zy', -(xz' - zx'), xy' - yx')$ és el producte vectorial dels vectors (x, y, z) i (x', y', z').

Es compleix el

Teorema E.1.1 *Siguin $P, Q \in \mathbb{R}^3$. Llavors,*

$$\langle \overrightarrow{P} \times \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{P} \times \overrightarrow{Q} \rangle = \langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{P} \rangle \langle \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{Q} \rangle - \langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q} \rangle^2$$

Demostració. Un càlcul directe. □

Si $\langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{P} \rangle = 1$ i $\langle \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{Q} \rangle = 1$, aquest teorema ens diu que

$$\| \overrightarrow{P} \times \overrightarrow{Q} \| = \| \sin \angle(\overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}) \| .$$

Inspirats en la definició clàssica d'àrea d'un paral·lelogram (base per altura), definim

Definició E.1.2 *L'àrea del paral·lelogram generat per* $\overrightarrow{P}$ *i* $\overrightarrow{Q}$ *és* $\| \overrightarrow{P} \times \overrightarrow{Q} \|$.

Però també un altre càlcul directe ens ensenya que:

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{P} \times \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{P} \rangle &= 0 \\ \langle \overrightarrow{P} \times \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{Q} \rangle &= 0 . \end{aligned}$$

És a dir, que el vector $\overrightarrow{P} \times \overrightarrow{Q}$ és perpendicular a $\overrightarrow{P}$ i a $\overrightarrow{Q}$.

També és fàcil veure que

$$\langle \overrightarrow{P} \times \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R} \rangle = \det \begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix} ,$$

on $P(x, y, z), Q(x', y', z')$ i $R(x'', y'', z'')$.

Inspirats en la definició clàssica de volum d'un paral·lelepípede (base per altura), definim

Definició E.1.3 *El nombre* $\langle \overrightarrow{P} \times \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R} \rangle$ *és el volum orientat del paral·lelepípede generat pels vectors* $\overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R}$.

Si el volum és positiu, direm que el conjunt ordenat $\overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R}$ és una base positiva de $\mathbb{R}^3$.

Un pla de $\mathbb{R}^3$ és un conjunt de punts $P(x, y, z)$ les components dels quals satisfan una equació del tipus:

$$ax + by + cz + d = 0 , \quad \text{amb} \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0 .$$

El vector $\overrightarrow{N}(a, b, c)$, que és no nul, es diu vector normal del pla. Aquest vector normal defineix una orientació del pla i el vector $-\overrightarrow{N}$ defineix l'orientació contrària. Si $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, es tracta del vector normal unitari.

Ara podem definir el concepte d'angle orientat. Si els punts P, Q, R estan en el pla *orientat* donat per l'equació anterior, llavors l'angle $\angle(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})$ és positiu únicament si $\langle \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}, N \rangle > 0$. Observem que si es canvia l'orientació del pla, la qual cosa equival a canviar $\overrightarrow{N}$ per $-\overrightarrow{N}$, l'angle canvia de signe.

Sigui $\mathbb{S}(1)$ l'esfera de radi 1 amb centre en l'origen $O(0,0,0)$; és a dir, el conjunt de punts $P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tals que la seva distància a $O(0,0,0)$ és 1.

Tota recta orientada de l'espai determina un punt de $\mathbb{S}(1)$: el vector director unitari de la recta donada. De la mateixa manera, tot pla orientat determina un punt en $\mathbb{S}(1)$: el vector normal unitari del pla donat.

Sempre suposarem les rectes, els plans i els angles d'un pla, orientats. L'angle entre dues rectes d'un pla és l'angle, en el pla, entre els seus vectors directors; si aquest angle és igual a 0 o a π radians, les rectes són paral·leles (poden coincidir).

Donats dos plans de vectors normals $\overrightarrow{N}_1$ i $\overrightarrow{N}_2$, el vector $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{N}_1 \times \overrightarrow{N}_2$, quan és diferent de zero, és un vector director de la recta d'intersecció dels dos plans; si $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{0}$ els plans són paral·lels o coincidents. Així, una parella ordenada de plans orientats que es tallen determinen una recta orientada. L'angle entre els dos plans de vectors normals $\overrightarrow{N}_1$ i $\overrightarrow{N}_2$ és justament l'angle entre aquests vectors normals, i aquest angle sempre serà positiu si orientem el pla que els conté amb el vector normal $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{N}_1 \times \overrightarrow{N}_2$.

El problema de l'orientació en geometria es un assumpte delicat. Gauss fou conscient d'això, fins al punt que l'única raó de ser de l'article 2 del *Disquisicions* és poder donar, en el seu apartat *VII*, una prova (massa complicada, tal com diu Spivak), d'un fet que li permet decidir quan una base de $\mathbb{R}^3$ és positiva o no. Ja Gauss sabia el paper dels determinants, del producte escalar i del producte vectorial en aquesta qüestió. El problema es torna més complicat en la geometria esfèrica, ja que els punts de la recta esfèrica no es poden ordenar com els punts de la recta euclidiana. Malgrat les dificultats, les precisions de Gauss en els seus dos primers articles són suficients per a manejar la qüestió localment.

El problema de l'orientació apareix posteriorment com a fonamental en la definició de curvatura total, un concepte global (vegeu l'article 5 del *Disquisicions* i el comentari de [Dom79], pàg. 103).

E.2 Geometria analítica de l'esfera

Amb les definicions anteriors de punt, recta, pla i angle es pot desenvolupar tota la geometria euclidiana del pla i de l'espai. És la geometria reduïda al que és algebraic.

Geometria esfèrica.

Un *punt* de la geometria esfèrica de radi R és un punt $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. El conjunt d'aquests punts (que juga, doncs, el paper de *pla* d'aquest geometria) és una esfera de radi R que denotarem $\mathbb{S}(\mathrm{R})$.

Les *rectes* són les circumferències màximes d'aquesta esfera; és a dir, la intersecció d'un pla per l'origen $O(0, 0, 0)$ amb l'esfera de radi R. Així doncs, les rectes estan donades analíticament pel sistema

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= R^2. \end{aligned}$$

Suposarem que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Si $N(a, b, c)$ orienta el pla, direm que el punt de $\mathbb{S}(\mathrm{R})$, $N(Ra, Rb, Rc)$, és el pol nord de la recta, i direm que $-N(Ra, Rb, Rc)$ és el pol sud de la mateixa recta. L'orientació de la *recta* serà la del seu pla i, si A i B són punts de la *recta*, la direcció de A cap a B serà positiva només si $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{N}$ és una base positiva de $\mathbb{R}^3$.

L'*angle* entre dues *rectes* orientades és l'angle entre els seus pols nord. És a dir, l'angle $\widehat{NON'}$, amb $N(Ra, Rb, Rc)$ i $N'(Ra', Rb', Rc')$. La distància $d(A, B)$ entre dos punts A i B és

$$d(A, B) = R \cdot \mid \arccos(R^{-2} \langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \rangle \mid,$$

on $-\pi < \arccos x \leq \pi$; és a dir, $\cos(R^{-1} d(A, B)) = \pm R^{-2} \langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \rangle$. No és més que la longitud de l'arc de cercle màxim que uneix A i B. Si A i B no són diametralment oposats, aquest arc és el més petit dels dos arcs que uneixen A i B; és a dir, el que té longitud $d(A, B) < \pi R$. Direm que aquest arc és el *segment esfèric* AB.

Observem finalment que, si $A \neq \pm B$, hi ha una única recta que va de A a B. Concretament, aquesta recta està donada per les equacions següents:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= R^2, \end{aligned}$$

on $\overrightarrow{N}(a, b, c) = \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} / |\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}|$.

Un *triangle esfèric* $\triangle ABC$ és el conjunt de tres punts A, B, C de $\mathbb{S}(\mathrm{R})$, de manera que no estiguin continguts en un mateix cercle màxim i de manera que dos a dos no siguin diametralment oposats, juntament amb els segments esfèrics AB, BC i CA que determinen. Aquests tres punts s'anomenen *vèrtexs* del triangle i els tres arcs de cercle màxim AB, BC i CA s'anomenen *costats* del triangle.

Orientem la recta AB de manera que el seu pol nord N_{AB} i C estiguin en el mateix subespai respecte del pla OAB. Anàlogament per a les rectes BC i CA. Equivalentment, orientem els costats del triangle de manera que $\langle N_{AB}, C\rangle > 0$, $\langle N_{BC}, A\rangle > 0$, $\langle N_{CA}, B\rangle > 0$.

Denominarem *angle en* A l'angle format pels vectors N_{AB} i N_{AC}. Anàlogament, l'*angle en* B és l'angle format pels vectors N_{BC} i N_{BA} i l'*angle en* C és l'angle format pels vectors N_{CA} i N_{CB}.

Vegem alguns resultats de la geometria esfèrica.

1. *Les rectes de $\mathbb{S}(R)$ tenen longitud finita. La seva longitud és $2\pi R$. En particular, existeix una unitat absoluta per a la mesura de longituds.*

2. *Totes les rectes es tallen. No hi ha paral·leles!*

3. *La suma dels angles α, β, γ de qualsevol triangle $\triangle ABC$ és major que π; la diferència $(\alpha+\beta+\gamma)-\pi$ es diu que és l'*excés angular *del triangle.*

4. *El pla esfèric $\mathbb{S}(R)$ té àrea finita igual a $4\pi R^2$.*

5. *L'àrea d'un triangle esfèric $\triangle ABC$ és proporcional al seu excés angular; més precisament, igual a $R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$.*

6. *No hi ha triangles esfèrics semblants, és a dir, si dos triangles esfèrics tenen angles iguals, els seus costats són també iguals.*

Les proves d'aquests resultats ja eren conegudes a l'època de Gauss.

1. i **2.** Les demostracions analítiques de 1 i 2 són immediates.

3. L'excés angular del triangle $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ és $\pi/2$. Però hi ha una proposició, descoberta per Saccheri i demostrada també per Lambert, que diu que, si hi ha un triangle amb excés positiu, llavors tots els triangles tenen excés positiu. Queda així provada 3.

4. Vegeu la secció E.3.

5. Vegeu la secció E.4.

6. Vegeu l'observació E.5.6 de la secció E.5.

E.3 Càlcul de l'àrea de l'esfera

La demostració analítica del punt 4 de l'apartat anterior E.2 és una aplicació del càlcul diferencial i integral a la geometria. Això, que es pot considerar com el naixement de la geometria diferencial, ho havia iniciat Euler el 1760 amb la publicació del seu teorema sobre les curvatures principals d'una superfície, [Eul60].

De fet, aquest punt 4 és una conseqüència immediata que l'element d'àrea d'una superfície es pot escriure a partir del coneixement, respecte de la seva representació paramètrica, del diferencial de longitud ds d'aquesta; a l'article 17 del *Disquisicions* s'hi troba aquesta expressió.

Però també es dedueix de treballs previs del mateix Euler de 1770 (vegeu [Eul56] , vol 17, pàg. 289-315), un tractat complet sobre integrals iterades; o de Lagrange de 1773 (vegeu [Lag92], vol. 3), on va provar que l'element de volum de l'espai en coordenades esfèriques és $dV = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dr$; i de Laplace, qui el 1772 (vegeu [Lap12], pàg. 369-477), va estudiar el canvi a coordenades esfèriques. Gauss podria haver calculat l'àrea de l'esfera a partir d'aquests coneixements.

Parametritzem $\mathbb{S}(\mathrm{R})$ així:

$$\begin{aligned} x(u,v) &= R\cos u \sin v \\ y(u,v) &= R\sin u \sin v \\ z(u,v) &= R\cos v\,, \end{aligned}$$

on $0 < u < 2\pi$ i $0 < v < \pi$. Si tenim una corba en el pla u, v, donada per $u = u(t), v = v(t)$, amb $a \le t \le b$, la longitud de la corba sobre $\mathbb{S}(\mathrm{R})$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, donada per

$$\begin{aligned} x(t) &= x(u(t), v(t)) \\ y(t) &= y(u(t), v(t)) \\ z(t) &= z(u(t), v(t)), \end{aligned}$$

és igual a la integral de la norma del vector tangent,

$$s = \int_a^b R\sqrt{v'^2(t) + \sin^2 v(t)\, u'^2(t)}\; dt\,.$$

Per tant,

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = R^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + R^2\sin^2 v\,\left(\frac{du}{dt}\right)^2.$$

És a dir, «simplificant» el dt,

$$ds^2 = R^2 dv^2 + R^2 \sin^2 v\, du^2.$$

I per tant, usant ara l'expressió de l'element d'àrea a partir dels coeficients E, F i G de l'element de longitud ($E = R^2$, $F = 0$, $G = R^2 \sin^2 v$, en el nostre cas), tenim

$$dA = \sqrt{EG - F^2}du\,dv = R^2 \sin v\,du\,dv\,.$$

La lluna $L(\alpha)$ d'angle α és qualsevol regió de $\mathbb{S}(\mathrm{R})$ *congruent* amb la regió de $\mathbb{S}(\mathrm{R})$ descrita en coordenades esfèriques per $0 < u < \alpha$, $0 < v < \pi$. Que dues figures siguin congruents vol dir que es poden sobreposar per un moviment rígid de l'esfera.

Observem que la lluna $L(\alpha)$ es pot considerar com un triangle esfèric degenerat, format per dos segments esfèrics de longitud π que uneixen dos punts simètrics A i $A' = -A$, que formen un angle α en A (i, per tant, també en A').

L'àrea $A(\alpha)$ de $L(\alpha)$ és, doncs,

$$A(\alpha) = \int_0^\alpha \left(\int_0^\pi R^2 \sin v dv \right) du = 2\alpha R^2\,.$$

En particular, quan $\alpha = 2\pi$ obtenim l'àrea A de $\mathbb{S}(\mathrm{R})$. Concretament

$$A = 4\pi R^2.$$

Utilitzant aquest resultat, el matemàtic flamenc Girard va demostrar, l'any 1629, que l'àrea d'un triangle esfèric és proporcional al defecte. Però va usar també fórmules de la trigonometria esfèrica i delicats arguments geomètrics que redueixen el problema a una proposició demostrada per Arquimedes en el seu llibre *Sobre l'esfera i el cilindre* (vegeu [Kár87], pàg. 27).

Euler va publicar el 1781 una bella i senzilla prova, atribuïda a Harriot, del 1603, que utilitza només l'àrea de la lluna esfèrica (vegeu [Eul56], vol. 26, pàg. 204-223). Aquesta prova es pot reproduir així.

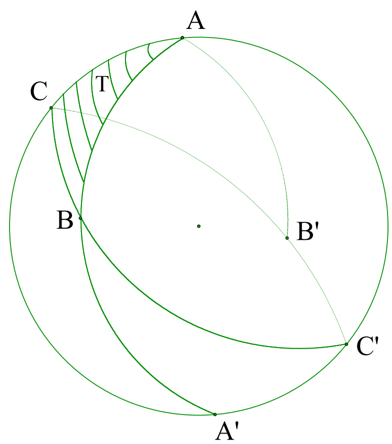
E.4 Àrea del triangle: una prova meravellosa

Sigui[1] $\triangle ABC$ un triangle esfèric, d'angles respectius α, β, γ. Considerant els punts simètrics A', B' i C', tota l'esfera es descompon en vuit triangles

[1] És molt possible que aquesta prova fos coneguda per Lambert a través d'Euler. És fàcil adonar-se que aquesta prova és absoluta: val quasi paraula per paraula a l'espai hiperbòlic! Tota la geometria esfèrica es pot deduir d'aquesta fórmula. Un dels mèrits de les primeres vint-i-sis seccions de l'*Apèndix* de J. Bolyai és que estan desenvolupades sense cap menció al delicat concepte d'àrea hiperbòlica d'una figura.

esfèrics que podem organitzar de la manera següent:

	Triangle	*Triangle*	*Àrea*
1	ABC	$A'B'C'$	T
2	ABC'	$A'B'C$	$2R^2\gamma - T$
3	$AB'C$	$A'BC'$	$2R^2\beta - T$
4	$A'BC$	$AB'C'$	$2R^2\alpha - T$



Com que la transformació $X \to X' = -X$ conserva les longituds dels segments esfèrics, conserva també l'àrea, i, per tant, els triangles de cada fila de l'estructura anterior tenen la mateixa àrea.

Sigui T l'àrea del triangle $\triangle ABC$. La suma de les àrees dels triangles de la primera fila és $2T$.

D'altra banda, la unió dels triangles $\triangle ABC' \cup \triangle ABC$ és la lluna d'angle C, i hem provat anteriorment que l'àrea d'aquesta lluna és $2R^2\gamma$. O sigui, que l'àrea del triangle ABC' és $2R^2\gamma - T$; i l'àrea de la unió dels dos triangles de la segona fila és $4R^2\gamma - 2T$.

De manera semblant, tenim que l'àrea de la unió dels dos triangles de la tercera i quarta fila és $4R^2\beta - 2T$ i $4R^2\alpha - 2T$ respectivament. Sumant les àrees així obtingudes ens ha de donar l'àrea de l'esfera. És a dir,

$$2T + (4R^2\gamma - 2T) + (4R^2\beta - 2T) + (4R^2\alpha - 2T) = 4R^2\pi\,.$$

per tant,

$$T = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi). \quad \square$$

E.5 Trigonometria esfèrica

Tots els resultats de geometria esfèrica que hem estudiat mostren grans diferències amb la geometria euclidiana. Però la geometria esfèrica té bases similars a les de la geometria euclidiana, i es pot desenvolupar paral·lelament a l'euclidiana. El primer estudi sistemàtic de geometria esfèrica és l'*Esfèrica* de Teodosi, que va ser redactat tenint com a model els *Elements* d'Euclides i conté les proposicions de geometria esfèrica intrínseca (no estereomètrics)[2] (vegeu [Ros88], pàg. 2-3).

Per la seva importància en l'astronomia, és raonable pensar que la geometria esfèrica devia estar molt desenvolupada des dels primers temps de la geometria a Grècia, només que va ser primer la geometria plana la que va ser sistematitzada en els *Elements.* No per atzar el primer text matemàtic grec que va arribar fins a la nostra època és un text d'Autòlic anomenat *Sobre l'esfera rotant*[3] que tracta de l'esfera celeste.

La geometria grega va ser una geometria profundament visual. Les proves dels seus teoremes no eren, primer, més que descripcions de bons dibuixos, i després, bones descripcions de com construir bons dibuixos (això explica la importància del regle i del compàs en els orígens de la geometria a Grècia).

Ara bé, la geometria de l'esfera és, en essència, estereomètrica i devia ser molt difícil seguir les discussions estereomètriques dels geòmetres grecs, segurament ja hàbils dibuixants. Havien descobert la manera de dibuixar les tres dimensions sobre un pla, i la geometria esfèrica, com la plana, també estava basada en curosos dibuixos estereomètrics. Avui dia aquesta geometria visual de l'espai és poc coneguda i la que es coneix és la seva versió analítica, desproveïda quasi de qualsevol dibuix. El producte vectorial a $\mathbb{R}^3$ és una eina estupenda per a l'algebrització de la geometria de l'espai.

Teorema E.5.1 *Per a cada quatre punts $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ es compleix la igualtat*

$$\langle \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \times \overrightarrow{D} \rangle \;=\; \langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{C} \rangle \langle \overrightarrow{B}, \overrightarrow{D} \rangle - \langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{D} \rangle \langle \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \rangle\,. \tag{E.1}$$

Demostració. La linealitat dels productes escalar i vectorial redueix la demostració de la fórmula (E.1) al cas en què $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ i $\overrightarrow{D}$ són vectors de la

[2] Estereometria: part de la geometria que tracta de la mesura de sòlids. Però nosaltres interpretem aquesta paraula en el sentit de geometria de l'espai.

[3] *Peri kinoumenés sphairas*, també traduït en alguns llocs com *L'esfera en moviment.*

base canònica; en aquest cas, el càlcul directe demostra que la identitat es compleix.

Però també es pot deduir aquesta igualtat directament del teorema E.1.1, per polaritat. □

Tenim, en conseqüència, que

Corol·lari E.5.2 *La norma del producte vectorial de dos vectors* A *i* B *a* $\mathbb{R}^3$ *està donada per*

$$|\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}| = |\overrightarrow{A}||\overrightarrow{B}| \sin \angle(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) \,.$$

Demostració. Apliquem la fórmula (E.1) amb $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A}$ i $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{B}$. □

És sorprenent, però tota la trigonometria esfèrica està comprimida en la fórmula (E.1). Vegem-ho.

Teorema E.5.3 (teorema *VI*, article 2 del *Disquisicions*) *L'angle orientat* ω *entre els dos segments esfèrics orientats* $\widehat{AB}$ *i* $\widehat{CD}$ *està determinat per la identitat següent*

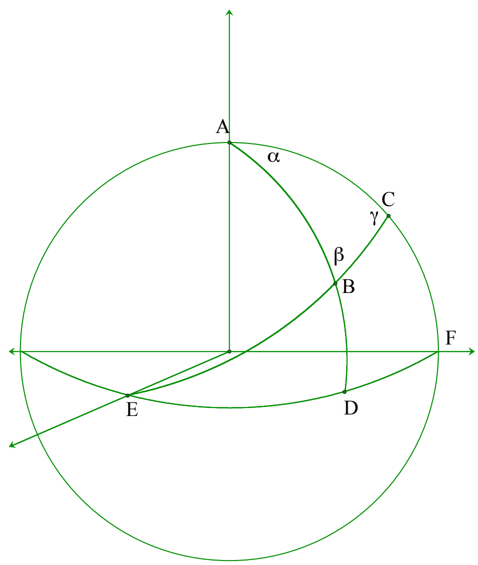
$$\sin \frac{\widehat{AB}}{R} \sin \frac{\widehat{CD}}{R} \cos \omega = \cos \frac{\widehat{AC}}{R} \cos \frac{\widehat{BD}}{R} - \cos \frac{\widehat{AD}}{R} \cos \frac{\widehat{BC}}{R} \,. \tag{E.2}$$

Demostració. La prova és immediata a partir de la fórmula (E.1). Només cal aplicar-la al cas en què $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ i $\overrightarrow{D}$ són vectors unitaris i recordar que $\omega = \angle(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \times \overrightarrow{D})$. □

Vegem ara que aplicant la fórmula (E.2) a la configuració de Menelau obtenim les fórmules bàsiques de la trigonometria esfèrica.

Recordem primerament que la *configuració de Menelau* $(E-D-F, E-B-C; A)$ està definida per:[4]

[4]Aquesta configuració apareix a la seva obra *Sphaerica*. És justament la configuració que tenim quan pensem en la trajectòria aparent del Sol al voltant de la Terra, en el pla de l'eclíptica. El Sol representaria el punt B del nostre triangle i l'arc BD la seva altitud.



a) Dos segments esfèrics $\widehat{EF}$ i $\widehat{EC}$ de longitud $R \cdot \pi/2$ tals que l'angle $\angle(\widehat{EF}, \widehat{FC}) = \pi/2$.

b) Dos punts D i B respectivament en els segments esfèrics $\widehat{EF}$ i $\widehat{EC}$.

c) El punt d'intersecció A de $\widehat{FC}$ i $\widehat{BD}$.

Denotem, en el triangle esfèric $\triangle ABC$, les longituds dels costats per $a = \widehat{BC}$, $b = \widehat{AC}$, $c = \widehat{AB}$, i la mesura dels angles per $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$ i $\gamma = \angle C$.

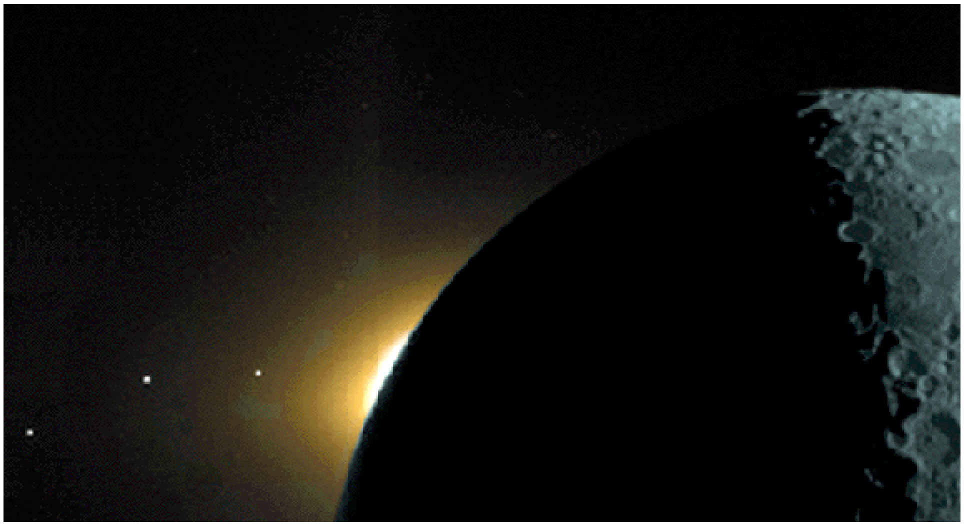
És fàcil veure llavors que, a la configuració de Menelau, es compleixen les relacions següents:

1. $\widehat{ED} + \widehat{DF} = R \cdot \pi/2\,, \qquad \widehat{EB} + \widehat{BC} = R \cdot \pi/2\,.$

2. $\widehat{AB} + \widehat{BD} = R \cdot \pi/2\,, \qquad \widehat{AC} + \widehat{CF} = R \cdot \pi/2\,.$

3. $\beta = \angle(\widehat{EC}, \widehat{AD}), \qquad \alpha = \angle(\widehat{BD}, \widehat{CF}).$

4. $\gamma = \pi/2$.



Saturn, Mart i Mercuri. Foto de l'any 1994 feta per la sonda lunar Clementine.

Apliquem ara la fórmula (E.2), però canviant les lletres A, B, C, D que apareixen allà, respectivament, per C, E, A, D. Obtenim

$$\sin\frac{\overset{\frown}{CE}}{R}\sin\frac{\overset{\frown}{AD}}{R}\cos\omega = \cos\frac{\overset{\frown}{CA}}{R}\cos\frac{\overset{\frown}{ED}}{R} - \cos\frac{\overset{\frown}{CD}}{R}\cos\frac{\overset{\frown}{EA}}{R}\,. \tag{E.3}$$

Però com que estem en el cas de la configuració de Menelau, aquesta fórmula es redueix a

$$\cos\beta = \cos\frac{b}{R}\,\cos\frac{\overset{\frown}{ED}}{R} = \cos\frac{b}{R}\,\sin\alpha\,.$$

Permutant el paper jugat per α i β obtenim:

$$\cos\alpha = \cos\frac{a}{R}\,\sin\beta\,. \tag{E.4}$$

Apliquem la fórmula (E.4) al triangle esfèric $\triangle EBD$ (que és rectangle en D, i està, doncs, en les hipòtesis anteriors) i obtenim $\cos\widehat{E} = \cos\frac{\overset{\frown}{BD}}{R}\,\sin\beta$, que equival (canviant el cosinus d'un angle pel sinus del seu complementari) a:

$$\sin\frac{b}{R} = \sin\frac{c}{R}\,\sin\beta\,.$$

Permutant el paper jugat per α i β obtenim:

$$\sin\frac{a}{R} = \sin\frac{c}{R}\,\sin\alpha\,. \tag{E.5}$$

Finalment apliquem la fórmula (E.2), canviant les lletres A, B, C, D que apareixen allà, respectivament, per, C, A, C, B. Com que, llavors, l'angle $\omega = \angle(\widehat{CA}, \widehat{CB}) = \pi/2$, obtenim:

$$\cos\frac{c}{R} = \cos\frac{a}{R}\,\cos\frac{b}{R}\,. \tag{E.6}$$

Les identitats (E.4), (E.5) i (E.6) són les fórmules de la trigonometria esfèrica per a triangles esfèrics rectangles de catets menors a $\pi/2$.

Per a extendre-les a triangles rectangles amb catets més grans que $\pi/2$, és suficient considerar per a un d'aquests triangles $\triangle ABC$, un dels triangles complementaris $\triangle ABC'$, $\triangle AB'C$ o $\triangle A'BC$, on $A' = -A, B' = -B, C' = -C$; n'hi ha un que té els seus catets menors que $\pi/2$ i les fórmules trigonomètriques vàlides per a aquest impliquen les fórmules trigonomètriques per al triangle original.

Per a trobar i demostrar fórmules generals a les obtingudes per a un triangle esfèric general, no necessàriament rectangle, se'l descompon en dos triangles rectangles esfèrics.

En definitiva, les fórmules generals de la trigonometria esfèrica per a un triangle $\triangle ABC$ de costats de longituds a, b, c i angles respectius α, β, γ, sobre una esfera de radi R, són les següents:

$$\frac{\sin\frac{a}{R}}{\sin\alpha} = \frac{\sin\frac{b}{R}}{\sin\beta} = \frac{\sin\frac{c}{R}}{\sin\gamma} \tag{E.7}$$

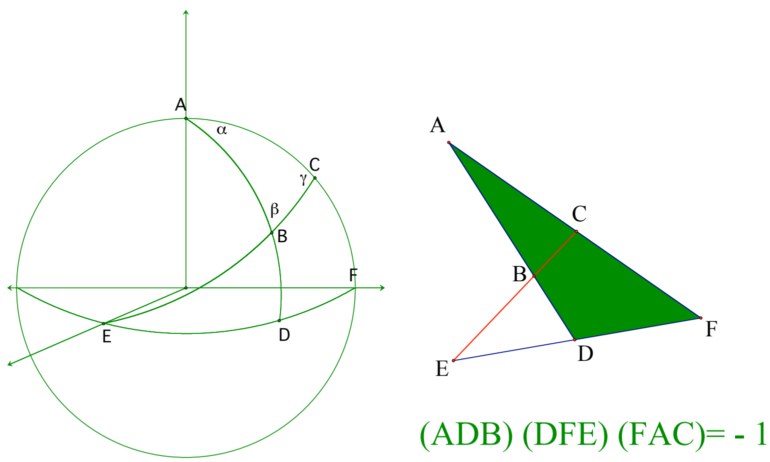
$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos\alpha \tag{E.8}$$

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\frac{a}{R}\,. \tag{E.9}$$

La primera és el teorema del sinus, la segona és el teorema del cosinus i la tercera és la polar de la segona, com veurem a l'observació E.5.5.

Vegeu-ne una demostració directa a l'apèndix I.

Observació E.5.4 (teorema de Menelau esfèric) Considerem la configuració de Menelau.



Observem que si fem una representació plana del triangle esfèric $\triangle ADF$, i dels cercles màxims BC, DF, obtenim un triangle euclidià $\triangle ADF$ tallat per una recta EBC. Es compleix, doncs, la relació entre raons simples, anomenada teorema de Menelau,

$$(A, D, B) \cdot (D, F, E) \cdot (F, A, C) = -1\,,$$

que ja era coneguda a l'època de Menelau, però que porta el seu nom perquè ell la va aplicar, convenientment modificada, al triangle esfèric $\triangle ADF$ tallat pel cercle màxim EBC.

Observem que, si prescindim del signe, que prové de la definició de raó simple, i controla que el punt E estigui o no entre D i F, el teorema de Menelau s'escriu

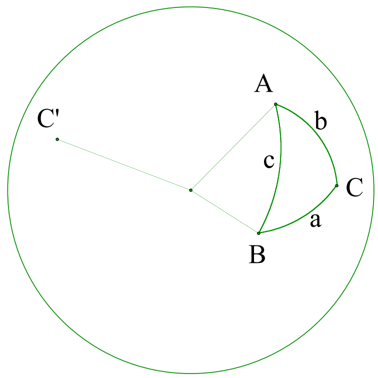
$$\frac{AB}{DB} \cdot \frac{DE}{FE} \cdot \frac{FC}{AC} = 1\,.$$

Menelau va demostrar que sobre el triangle esfèric es compleix la mateixa relació, però amb «sinus». Concretament, va demostrar que

$$\frac{\sin AB}{\sin DB} \cdot \frac{\sin DE}{\sin FE} \cdot \frac{\sin FC}{\sin AC} = 1\,.$$

Aquesta és la relació que hem anomenat teorema de Menelau esfèric.

Observació E.5.5 (triangle polar) Observem que la fórmula (E.9) correspon a la fórmula (E.8) aplicada al triangle polar esfèric corresponent.

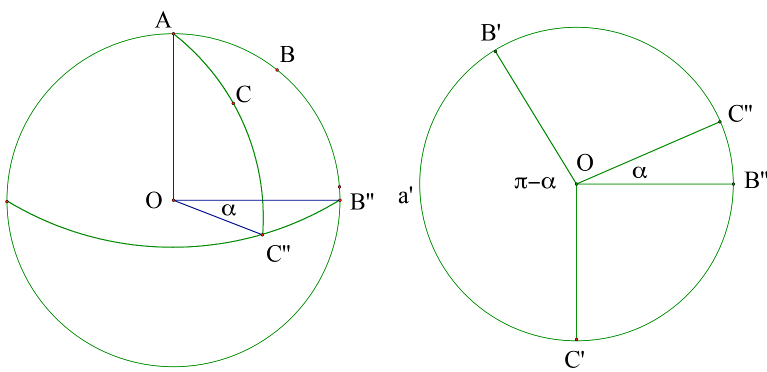


El triangle polar $\triangle A'B'C'$ del triangle esfèric $\triangle ABC$ és el triangle esfèric determinat pels normals unitaris (pols) dels plans OBC, OAC, OAB, on O és el centre de l'esfera. En cada cas s'agafa la normal que deixa el triangle a l'altre costat del pla. Es compleix

$$
\begin{aligned}
\frac{a'}{R} &= \pi - \alpha\,, \quad \alpha' = \pi - \frac{a}{R}\,,\\
\frac{b'}{R} &= \pi - \beta\,, \quad \beta' = \pi - \frac{b}{R}\,,\\
\frac{c'}{R} &= \pi - \gamma\,, \quad \gamma' = \pi - \frac{c}{R}\,,
\end{aligned}
$$

i per tant, aplicant (E.8) al triangle $\triangle A'B'C'$, obtenim (E.9).

Les igualtats anteriors són fàcils de verificar, ja que, per definició, $\alpha = \angle BAC$ és l'angle entre els plans OAB i OAC.



Però l'angle entre plans és l'angle entre les seves normals, i, per tal com s'elegeixen aquestes, tenim $\angle B'OC' = \pi - \alpha$, i per tant $\dfrac{a'}{R} = \pi - \alpha$, com volíem. El mateix argument en els altres angles.

La primera figura representa el triangle sobre l'esfera i l'equador corresponent al punt A (l'equador de l'esfera si suposem que A és el pol nord). Hem representat els punts B'' i C'' que són la intersecció amb aquest equador dels cercles màxims AB i AC respectivament.

La segona figura representa aquest equador i, a sobre, els pols B' i C' (OB' és perpendicular al pla OAC).

De fet, aquestes fórmules es poden verificar analíticament.

Observació E.5.6 (no hi ha triangles semblants) De la fórmula (E.9) es dedueix l'afirmació 6 de la pàgina 135. En efecte, aquesta fórmula ens diu que els costats estan determinats pels angles; i, en conseqüència, la congruència i la semblança coincideixen: sobre l'esfera no hi ha triangles amb els angles respectius iguals i de diferent grandària.

La no existència de triangles semblants es dedueix també dels comentaris que hem fet sobre el triangle polar d'un triangle donat. Això és, de fet, el que va fer NAṢĪR AL-DĪN AL-ṬŪSĪ el segle *XIII*, tot i que no disposava d'aquest concepte explícitament (vegeu [Ros88], pàg. 21).

Concretament, si dos triangles esfèrics tenen els angles corresponents iguals, llavors els triangles polars corresponents tenen els mateixos costats, i per tant, pel criteri costat-costat-costat, també tenen els mateixos angles. Així, els seus triangles polars respectius, *que són els dos triangles donats al principi*, tenen els costats respectivament iguals, i per tant són congruents.

Observació E.5.7 (teorema de Pitàgores) Aplicant la fórmula (E.8) al triangle rectangle d'hipotenusa a i catets b, c, obtenim

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cdot\cos\frac{c}{R},$$

que es coneix com a teorema de Pitàgores esfèric.

Si fem tendir R a infinit, obtenim

$$1-\frac{a^2}{2R^2} \sim (1-\frac{b^2}{2R^2})\cdot(1-\frac{c^2}{2R^2}),$$

que, negligint els termes de quart grau, ens dóna

$$a^2 = b^2 + c^2$$

i recuperem el teorema de Pitàgores per a triangles del pla.

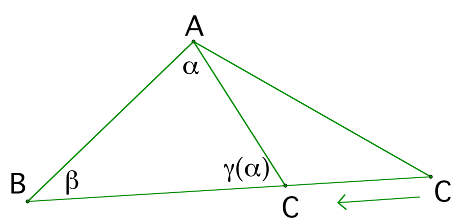
E.6 Angle d'inclinació a l'esfera

Mirem primer què vol dir i quan val la derivada de l'angle d'inclinació en el pla.

Variació de l'angle en el pla

Considerem un triangle $\triangle ABC$ i fem moure el punt C sobre el costat BC en direcció a B. El triangle inicial es transforma en un triangle $\triangle ABC'$, i podem pensar que l'*angle d'inclinació* $\gamma = \angle AC'B$ és funció de l'angle $\alpha = \angle BAC'$.

Observem que $\gamma(\alpha)$ mesura la inclinació de la recta BC respecte de les rectes que surten de A formant un angle α respecte a una recta inicial fixada. Per això es parla d'*angle d'inclinació*.



$\alpha+\beta+\gamma=\pi$; $1+\gamma' =0$

Derivant la fórmula

$$\alpha + \beta + \gamma(\alpha) = \pi$$

respecte a α, obtenim

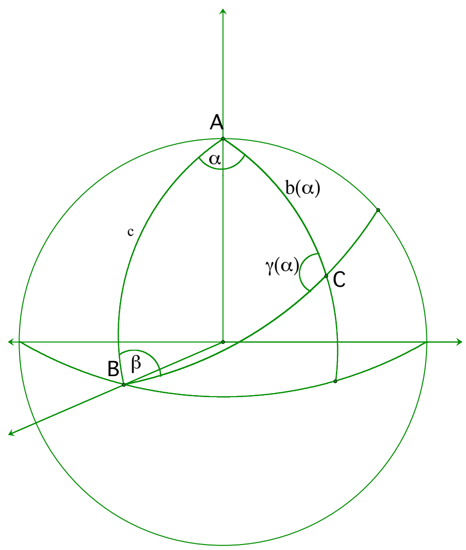
$$\boxed{\frac{d\gamma}{d\alpha} = -1} \tag{E.10}$$

Observem $\gamma(0) = \pi - \beta$, amb $\beta = \angle ABC$.

Variació de l'angle a l'esfera

Repetim, per a l'esfera, els mateixos càlculs que acabem de fer sobre el pla.

Considerem el triangle esfèric $\triangle ABC$ i suposem que el punt C es mou sobre el costat BC en direcció a B. El triangle inicial es transforma en un triangle ABC', i podem pensar que l'angle d'inclinació, $\gamma = \angle AC'B$, és funció de l'angle $\alpha = \angle BAC'$.



Càlcul de $\dfrac{d\gamma}{d\alpha}$. Primer mètode.

Apliquem la fórmula (E.9) al triangle $\triangle ABC$ de la figura, i obtenim

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\,\cos\beta + \sin\beta\,\sin\alpha\,\cos\frac{c}{R}\,.$$

Derivant respecte a α, i tenint en compte que $\gamma = \gamma(\alpha)$, β = constant, i c = constant, tenim

$$-\sin\gamma\cdot\frac{d\gamma}{d\alpha} = \sin\alpha\,\cos\beta + \sin\beta\,\cos\alpha\,\cos\frac{c}{R}\,.$$

Aïllant $\dfrac{d\gamma}{d\alpha}$, i usant la llei del sinus (E.7),

$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = -\frac{\sin\frac{a}{R}}{\sin\frac{c}{R}}\cos\beta - \frac{\sin\frac{r}{R}}{\sin\frac{c}{R}}\cos\alpha\,\cos\frac{c}{R}\,.$$

Substituïm els productes $\sin\dfrac{a}{R}\cos\beta$ i $\sin\dfrac{r}{R}\cos\alpha$ pel valor que deduïm de (E.8) i obtenim

$$
\begin{aligned}
\frac{d\gamma}{d\alpha} &= \frac{1}{\sin\dfrac{c}{R}}\left(\frac{\cos\dfrac{c}{R}\cos\dfrac{r}{R}-\cos\dfrac{a}{R}}{\sin\dfrac{c}{R}}\cos\frac{c}{R}-\frac{-\cos\dfrac{c}{R}\cos\dfrac{a}{R}+\cos\dfrac{r}{R}}{\sin\dfrac{c}{R}}\right)\\
&= \frac{1}{\sin^2\dfrac{c}{R}}\left(\cos\frac{r}{R}\left(\cos^2\frac{c}{R}-1\right)\right)\\
&= -\cos\frac{r}{R}.
\end{aligned}
$$

És a dir

$$
\boxed{\frac{d\gamma}{d\alpha}=-\cos\frac{r(\alpha)}{R}} \tag{E.11}
$$

Càlcul de $\dfrac{d\gamma}{d\alpha}$*. Segon mètode.*

Suposem conegut que l'àrea d'un triangle esfèric és proporcional a l'excés, tal com hem vist a E.4, i calculem aquesta àrea per un altre mètode, concretament integrant l'element d'àrea sobre el triangle.

Per a fer aquesta integral és còmode usar coordenades polars sobre l'esfera. Una anàlisi geomètrica senzilla mostra que aquestes coordenades són (r,θ) amb $r=R\phi$ (on (ϕ,θ) són, respectivament, la colatitud i la longitud sobre $\mathbb{S}(\mathrm{R})$). Són les coordenades anàlogues a les coordenades polars en el pla: r mesura la distància del punt al pol i θ l'angle polar.

Els coeficients de la primera forma fonamental de l'esfera en aquestes coordenades, segons hem vist a la pàgina 136, són $E=R^2$, $F=0$ i $G=R^2\sin^2\dfrac{r}{R}$. Calculem l'àrea S d'un triangle esfèric $\triangle ABC$, donat, en coordenades polars esfèriques, per: $A(0,0)$, $B(r_0,0)$ i $C(r,\alpha)$. Observem que el vèrtex $A(0,0)$ coincideix amb el pol nord $(0,0,1)$, el vèrtex $B(r_0,0)$ és un punt sobre el meridià polar (l'anàleg de l'eix polar en les coordenades polars del pla) i el vèrtex $C(r,\alpha)$ és un punt arbitràri.

L'element d'àrea de $\mathbb{S}(\mathrm{R})$ està donat, en coordenades polars esfèriques, per

$$
dS=\sqrt{EG-F^2}\,dr\,d\theta=R\sin\frac{r}{R}\,dr\,d\theta
$$

i per tant, dient $r(\theta)$ a la longitud del meridià entre A i el costat BC, tenim:

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^\alpha \int_0^{r(\theta)} R \sin \frac{r}{R}\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^\alpha \left(R^2 - R^2 \cos \frac{r(\theta)}{R} \right) d\theta \\
&= R^2 \alpha - \int_0^\alpha R^2 \cos \frac{r(\theta)}{R}\, d\theta\,. \qquad \text{(E.12)}
\end{aligned}
$$

Com que no coneixem explícitament $r(\theta)$ no podem avaluar aquesta integral. Però sabem, pel resultat ja conegut de la proporcionalitat de l'àrea i l'excés angular (vegeu la secció E.4), que

$$S = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi). \qquad \text{(E.13)}$$

Igualant (E.12) i (E.13) obtenim

$$R^2 \alpha - \int_0^\alpha R^2 \cos \frac{r(\theta)}{R}\, d\theta = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi). \qquad \text{(E.14)}$$

Derivant (E.14) respecte de α obtenim que:

$$R^2 - R^2 \cos \frac{r(\alpha)}{R} = R^2 (1 + \frac{d\gamma}{d\alpha})\,.$$

I per tant

$$\boxed{\frac{d\gamma}{d\alpha} = -\cos \frac{r(\alpha)}{R}} \qquad \text{(E.15)}$$

Observem que aquesta fórmula coincideix amb la fórmula (E.11), que havíem obtingut prèviament usant trigonometria esfèrica.[5]

Però la deducció que n'hem fet aquí, usant el segon mètode, la podem generalitzar a qualsevol superfície. Això és el que fa Gauss a l'article 19 del *Disquisicions*. Recordem que, a la versió no publicada del *Disquisicions* de 1825, el càlcul d'aquesta derivada ocupava un lloc central.

En aquest segon mètode per a calcular $\frac{d\gamma}{d\alpha}$ hem usat la proporcionalitat entre l'àrea i l'excés angular. Però ara veiem que, recíprocament, el coneixement d'aquesta fórmula (E.15) ens hauria permès resoldre la integral de (E.12), i obtenir, per tant, una fórmula explícita per a l'àrea d'un triangle esfèric.

[5] De fet, tota la geometria esfèrica es pot deduir d'aquesta fórmula!

Resumint, si tinguéssim una prova analítica de (E.15), tindríem un altra prova de la proporcionalitat de l'àrea i l'excés angular, però aquesta prova, a diferència de la de Harriot, es podria estendre a una superfície qualsevol.

Sembla que Gauss s'hauria pogut plantejar aquest fet. La feina és, doncs, trobar una prova analítica de la fórmula (E.15), que es pugui estendre a superfícies corbes generals.

Apèndix F

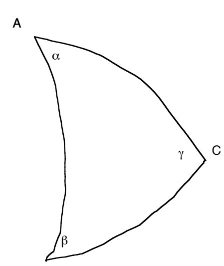
La derivada de l'angle d'inclinació

En aquest capítol refem, suposant conegudes les fórmules d'Euler-Lagrange, els càlculs dels articles 18 i 19 del *Disquisicions* pel que fa a l'angle d'inclinació.

Tal com acabem de dir a la secció anterior E.6, Gauss s'hauria pogut plantejar el problema següent.

> *Donada una superfície Σ i un triangle geodèsic $\triangle ABC$, amb A i B punts fixats d'aquesta superfície, i C variable, trobar la derivada de l'angle $\gamma = \widehat{C}$, quan C es mou sobre una geodèsica fixada que surt de B.*

L'angle $\gamma = \widehat{C}$ és l'angle entre el vector tangent, en el punt C, a la geodèsica que surt de C i arriba a A, i el vector tangent, en el punt C, a la geodèsica que surt de C i arriba a B.



Escriurem $\gamma = \gamma(\alpha)$ ja que l'angle γ depèn de l'angle $\alpha = \widehat{A}$. La derivada que busquem és la derivada de $\gamma(\alpha)$ respecte a α. Observem també que $\beta = \widehat{B}$ és constant.

D'aquest angle $\gamma = \gamma(\alpha)$ en diem *angle d'inclinació* ja que mesura la inclinació de la geodèsica BC respecte de les geodèsiques que surten de A formant un angle α respecte a una recta inicial fixada, en quest cas la geodèsica AB.

Ja sabem que $\dfrac{d\gamma}{d\alpha} = -1$ sobre el pla, fórmula (E.10), i que $\dfrac{d\gamma}{d\alpha} = -\cos\dfrac{r}{R}$ sobre l'esfera de radi R, fórmula (E.11). Aquí r és la longitud de la geodèsica sobre l'esfera que va de A a C.

Estudiem el problema sobre una superfície corba general Σ.

Suposem que podem construir sobre Σ un sistema de coordenades polars (r, α) tal que $A(0,0)$, $B(r_0, 0)$ i $C(r(\alpha), \alpha)$; r denota el paràmetre arc de la geodèsica que neix en el punt A, fixat com a origen de coordenades, i que forma un angle α amb una geodèsica fixada (concretament la geodèsica que va de A a B).

Pel lema de Gauss, tenim que

$$ds^2 = dr^2 + G(r,\alpha)d\alpha^2.$$

Observem que, en el cas del pla, $G(r,\alpha) = r^2$, i en el cas de l'esfera de radi R, $G(r,\alpha) = R^2 \sin^2 \dfrac{r}{R}$. En aquests casos, doncs, G no depèn de α.

En coordenades polars, l'equació de la geodèsica BC serà del tipus $f(t) = (r(t), \alpha(t))$, i l'angle que busquem és

$$\gamma = \angle\left(\frac{\partial}{\partial r}, f'\right),$$

o més precisament

$$\gamma(\alpha(t)) = \angle\left(\frac{\partial}{\partial r}_{|f(t)}, f'(t)\right).$$

Però no podem continuar sense conèixer aquestes funcions.

Afortunadament, per al càlcul de geodèsiques disposem de la teoria que Lagrange havia desenvolupat en el seu treball *Càlcul variacional* (vegeu [Lag92], vol. 1). Les equacions de les geodèsiques són simplement les equacions d'Euler-Lagrange del funcional de longitud (de fet, del seu quadrat).

Les equacions d'Euler-Lagrange de les geodèsiques associades a la mètrica

$$g = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$$

són

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial g}{\partial x^i}\,, \qquad \text{i} = 1{,}2\,.$$

En el nostre cas el funcional g és $(x^1 = r, x^2 = \alpha)$

$$g = \dot{r}^2 + G(r,\alpha)\dot{\alpha}^2.$$

Per tant, les equacions d'Euler-Lagrange són

$$\frac{d}{dt}(2\,\dot{r}) = G_r\,\dot{\alpha}^2$$
$$\frac{d}{dt}(2\,G\,\dot{\alpha}) = G_\alpha\,\dot{\alpha}^2\,.$$

Usant la regla de la cadena obtenim $G_t = \dfrac{d}{dt}G(r(t),\alpha(t)) = G_r\,\dot{r} + G_\alpha\,\dot{\alpha}$ i les anteriors equacions s'escriuen com

$$\begin{aligned} 2\,\ddot{r} &= G_r\,\dot{\alpha}^2 \\ 2\,\ddot{\alpha}\,G + 2\,\dot{\alpha}\,\dot{r}\,G_r + \dot{\alpha}^2\,G_\alpha &= 0\,. \end{aligned}$$

Com que $\gamma = \angle\left(\dfrac{\partial}{\partial r}, f'\right)$, on $f(t) = (r(t),\alpha(t))$ és la geodèsica BC, tenim:

$$\cos\gamma = \frac{\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2 + G\dot{\alpha}^2}}\,.$$

Derivant respecte de t i simplificant obtenim:

$$-\dot{\gamma}\sin\gamma = \frac{\dot{\alpha}^2\,G_r}{2\sqrt{\dot{r}^2 + G\dot{\alpha}^2}}\,.$$

Però, com que

$$\sin\gamma = \frac{\dot{\alpha}\,\sqrt{G}}{\sqrt{\dot{r}^2 + G\dot{\alpha}^2}}\,,$$

tenim que

$$\dot{\gamma} = -\dot{\alpha}\cdot\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\,.$$

Així
$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = -\dot{\alpha} \cdot \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r}$$
i, per tant,
$$\boxed{\frac{d\gamma}{d\alpha} = -\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}} \tag{F.1}$$

Aquesta fórmula apareix en el paràgraf 19 del *Disquisicions* i es pot considerar com la versió infinitesimal del teorema del defecte. De fet, Gauss dedica tot el seu paràgraf 18 a fer exactament aquests mateixos càlculs, redemostrant les fórmules d'Euler-Lagrange.

Ja hem dit que en el pla $G = r^2$, i per tant
$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = -\frac{d\sqrt{r^2}}{dr} = -1,$$
d'acord amb (E.10), i a l'esfera, $G = R^2 \sin^2 \dfrac{r}{R}$, i per tant
$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = -\frac{d}{dr}\sqrt{R^2 \sin^2 \frac{r}{R}} = -\cos\frac{r}{R},$$
d'acord amb (E.11).

Apèndix G

Angle d'inclinació, teorema egregi i teorema del defecte

En aquesta capítol, procedint com a la versió no publicada del *Disquisicions* de 1825, obtindrem el teorema egregi a partir de l'estudi que hem fet de la derivada de l'angle d'inclinació i del teorema del defecte.

Concretament, obtindrem la fórmula de la curvatura en funció dels coeficients de la mètrica en polars (i les seves derivades), i, per tant, el teorema egregi. Suposarem conegut, com Gauss, que el defecte d'un triangle és l'àrea de la seva imatge esfèrica, i. e., el teorema de Gauss-Bonnet per a triangles geodèsics.

Considerem un triangle $T = \triangle ABC$ sobre una superfície. Siguin α, β, γ els angles respectius.

Suposem que el vèrtex A d'aquest triangle és l'origen de les coordenades polars (r, θ), i que el costat AB és la geodèsica inicial. Denotem $r(\theta)$ la longitud del segment geodèsic que surt de A formant un angle θ amb AB fins al punt en què aquesta geodèsica talla el costat BC. Si $C = (r(\alpha), \alpha)$, llavors

$$T = \{(r, \theta) \mid 0 \le \theta \le \alpha;\ 0 \le r \le r(\theta)\}\,.$$

D'altra banda, recordem que de la definició de *curvatura* en un punt P de la superfície donada a l'article 6 del *Disquisicions* es dedueix que

$$k(P) = \lim_{T \to P} \frac{a(T')}{a(T)}\,, \tag{G.1}$$

on T és qualsevol triangle que conté P, $a(T')$ és l'àrea de la imatge T' del triangle T per l'aplicació de Gauss, i $a(T)$ és l'àrea de T.

Aquesta definició, juntament amb la fórmula (F.1) de l'angle d'inclinació, permet fer els següents càlculs en coordenades polars r, θ:

Usant infinitèsims, la fórmula (G.1) es pot llegir com

$$dA' = k \cdot dA = k \cdot \sqrt{G}\, dr\, d\theta\,, \tag{G.2}$$

on dA' és el diferencial d'àrea a l'esfera i dA és el diferencial d'àrea a la superfície, i

$$ds^2 = dr^2 + G(r,\theta)d\theta^2.$$

Integrant (G.2) obtenim[1]

$$\int_0^\alpha \int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr\; d\theta = a(T')\,. \tag{G.3}$$

D'altra banda, integrant la derivada de l'angle d'inclinació (F.1), que ara s'escriu com

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}_{|r=r(\theta)} \sqrt{G(r,\theta)}, \tag{G.4}$$

i recordant que $\gamma(0) = \pi - \beta$, obtenim

$$\int_0^\alpha \frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}\, d\theta = [\gamma(\theta)]_0^\alpha = \gamma(\alpha) - \gamma(0) = \gamma - \pi + \beta\,.$$

Canviant de signe i sumant α als dos costats obtenim

$$\alpha - \int_0^\alpha \frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}\, d\theta = \delta(T), \tag{G.5}$$

on $\delta(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$. Ara bé, GAUSS sabia[2] que

$$\delta(T) = a(T')\,. \tag{G.6}$$

Això és el que hem anomenat teorema del defecte.

[1]Observem que la fórmula (G.3) és una aplicació directa del teorema del canvi de variable, recordant que la curvatura és el Jacobià de l'aplicació de Gauss.

[2]Vegeu l'article 15 del *Disquisicions* de 1825, comentat a l'apèndix B, pàgina 97.

Per tant, els termes de l'esquerra de les igualtats (G.3) i (G.5) són iguals. És a dir,

$$\int_0^\alpha \int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}\, dr\, d\theta = \alpha - \int_0^\alpha \frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}\, d\theta\,. \tag{G.7}$$

Ara suposem que en el triangle donat al començament, $\triangle ABC$, el vèrtex C es mou en direcció a B sobre el costat BC. Les fórmules anteriors G.7 són vàlides per a cada α. Podem, doncs, derivar respecte a α, i obtenim

$$\int_0^{r(\alpha)} k\sqrt{G}\, dr = 1 - \frac{\partial}{\partial r}_{|r=r(\alpha)}\sqrt{G}\,, \tag{G.8}$$

on ara és $G = G(r,\alpha)$ i $k = k(r,\alpha)$.

Com que el punt $C = (r(\alpha),\alpha)$, en el qual hem calculat la curvatura, és arbitrari, també la funció $r = r(\alpha)$ és arbitraria, de manera que (G.8) s'escriu

$$\int_0^t k(r,\alpha)\sqrt{G(r,\alpha)}\, dr = 1 - \frac{\partial}{\partial r}_{|r=t}\sqrt{G(r,\alpha)},$$

que, derivant respecte a t dóna

$$k(t,\alpha)\sqrt{G(t,\alpha)} = -\frac{\partial^2}{\partial r^2}_{|r=t}\sqrt{G(r,\alpha)},$$

que escriurem simplement com

$$k\sqrt{G} = -\frac{\partial^2}{\partial r^2}\sqrt{G}\,,$$

és a dir,

$$\boxed{k = -\frac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}}} \tag{G.9}$$

Aquesta fórmula ens diu que la curvatura es pot calcular a partir de la mètrica, i implica, per tant, el teorema egregi.

Tal com ja hem comentat (vegeu la pàgina 48), Gauss fou conscient que la fórmula anterior depenia de la demostració rigorosa (analítica) de l'existència de les coordenades polars sobre una superfície arbitrària. Ell tan sols tenia l'evidència geomètrica de l'existència d'aquestes coordenades.

Amb aquesta fórmula acaba el *Disquisicions* de 1825 i comença la feina de trobar una fórmula anàloga a l'anterior però en funció del sistema de coordenades en el qual està donada la superfície. GAUSS tenia ja l'enunciat del teorema egregi.

És clar que integrant dos cops la fórmula (G.9) i usant la fórmula (G.4) s'obté el teorema del defecte (vegeu els comentaris a l'article 20 del *Disquisicions* que fem a la pàgina 158). Això és el que fa GAUSS el 1827, i obté, doncs, una demostració rigorosa d'aquest teorema, que no tenia el 1825. Per això l'ordre de la versió de 1825 és diferent de l'ordre de la versió de 1827.

Apèndix H

Geometria hiperbòlica

H.1 Geometria hiperbòlica analítica

LAMBERT va descobrir l'*analogia* molt probablement després d'adonar-se que l'àrea d'un triangle de la geometria de l'angle agut era proporcional al seu defecte angular (vegeu [ES95], art. 82, pàg. 201). Més precisament, si $\triangle ABC$ és un triangle de la geometria de l'angle agut, amb angles respectius α, β, γ, tenim que:

$$S = R^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma), \tag{H.1}$$

on S és l'àrea del triangle $\triangle ABC$ i R una constant.

Si es compara aquesta fórmula amb la fórmula de l'àrea d'un triangle sobre l'esfera $\mathbb{S}(\mathrm{R})$:

$$S = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi), \tag{H.2}$$

es veu clarament, tal com va observar LAMBERT, que (H.1) s'obté de (H.2) canviant *formalment* R per iR.

Ara bé, una esfera de radi imaginari iR seria, formalment, el conjunt de punts de $\mathbb{R}^3$ tals que:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (iR)^2. \tag{H.3}$$

Però aquest conjunt és buit.

Curiosament no hi ha indicis que LAMBERT hagués desenvolupat l'*analogia*, malgrat que ell mateix havia redescobert les funcions hiperbòliques,[1] l'única

[1] RICCATI fou el primer a estudiar les funcions hiperbòliques. Les va usar per a obtenir solucions de les *cúbiques*. Va trobar les fórmules d'addició per a aquestes funcions, les seves derivades i la seva relació amb la funció exponencial. Per a ampliar aquesta informació

cosa que es necesitava per a descobrir la trigonometria de la geometria de l'angle agut.

Qui sí que ho va fer va ser TAURINUS (vegeu [ES95], pàg. 266-283, o [Rod05]). Va suposar l'existència de l'esfera imaginària i va demostrar que, per als punts i rectes d'aquest hipotètic pla $\mathbb{S}(\mathrm{iR})$, valen resultats anàlegs però en cert sentit contraris, als que valen per als punts i rectes de $\mathbb{S}(\mathrm{R})$.

Trigonometria hiperbòlica

Si en les fórmules (E.7), (E.8) i (E.9) de la pàgina 143 es canvia formalment R per iR s'obtenen les fórmules:

$$\frac{\sin\dfrac{a}{iR}}{\sin\alpha} = \frac{\sin\dfrac{b}{iR}}{\sin\beta} = \frac{\sin\dfrac{c}{iR}}{\sin\gamma} \tag{H.4}$$

$$\cos\frac{a}{iR} = \cos\frac{b}{iR}\cos\frac{c}{iR} + \sin\frac{b}{iR}\sin\frac{c}{iR}\cos\alpha \tag{H.5}$$

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\frac{a}{iR}, \tag{H.6}$$

que, amb la definició de les funcions hiperbòliques

$$\cos\left(\frac{x}{iR}\right) = \cosh\left(\frac{x}{R}\right) = \frac{\exp\left(\frac{x}{R}\right) + \exp\left(-\frac{x}{R}\right)}{2}$$

$$\sin\left(\frac{x}{iR}\right) = -i\sinh\left(\frac{x}{R}\right) = -i\,\frac{\exp\left(\frac{x}{R}\right) - \exp\left(-\frac{x}{R}\right)}{2}$$

i, eliminant la unitat imaginària en les fórmules (H.4), (H.5) i (H.6), s'escriuen com,

$$\frac{\sinh\dfrac{a}{R}}{\sin\alpha} = \frac{\sinh\dfrac{b}{R}}{\sin\beta} = \frac{\sinh\dfrac{c}{R}}{\sin\gamma} \tag{H.7}$$

$$\cosh\frac{a}{R} = \cosh\frac{b}{R}\cosh\frac{c}{R} - \sinh\frac{b}{R}\sinh\frac{c}{R}\cos\alpha \tag{H.8}$$

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cosh\frac{a}{R}. \tag{H.9}$$

---

podeu connectar-vos a un interessant lloc de la web sobre història de les matemàtiques, `http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/ history/Mathematicians`, i consulteu Riccati.

Aquestes són, efectivament, les fórmules de la trigonometria de la geometria de l'angle agut. La primera és el teorema del sinus, la segona és el teorema del cosinus i la tercera és la polar de la segona.[2] Per aquestes fórmules, seguirem anomenant aquesta geometria *geometria hiperbòlica*. Vegeu l'apèndix I.

Però, quins són els triangles hiperbòlics $\triangle ABC$ de costats a, b, c i angles α, β i γ als quals les fórmules (H.7), (H.8) i (H.9) s'apliquen?

Si es pogués donar sentit a una esfera de radi imaginari, és a dir, si existís una superfície $\mathbb{S}(\mathrm{iR})$ que fes el paper d'aquesta esfera imaginària, quins serien els triangles d'aquesta superfície?

Taurinus no contesta aquestes preguntes, però obté propietats molt interessants que complirien aquests hipotètics triangles.

Vegem alguns d'aquests resultats, que es deduixen de les fórmules (H.7), (H.8) i (H.9).

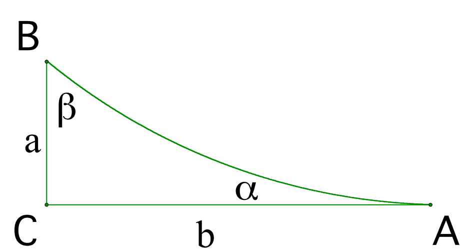
Teorema de Pitàgores

Observem que quan apliquem la fórmula (H.8) amb $\alpha = \pi/2$, és a dir, a un triangle rectangle d'hipotenusa a i catets b, c, obtenim el *teorema de Pitàgores hiperbòlic*:

$$\cosh \frac{a}{R} = \cosh \frac{b}{R} \cdot \cosh \frac{c}{R} \,.$$

Angle de paral·lelisme

Apliquem la fórmula (H.9) al triangle rectangle $\triangle ABC$, amb $\widehat{C} = \gamma = \pi/2$, i obtenim



[2] El concepte de triangle *polar* que hem estudiat detalladament per als triangles esfèrics (vegeu l'observació E.5.5), té un anàleg hiperbòlic, que no desenvolupem aquí.

$$\cos\alpha = \sin\beta \cosh\frac{a}{R}\,. \tag{H.10}$$

Aquesta fórmula continua essent vàlida si canviem α per β i β per α. Obtenim:

$$\cos\beta = \sin\alpha \cosh\frac{b}{R}\,. \tag{H.11}$$

Fixant B i C (que implica a constant) i fent variar A cap a infinit ($b \to \infty$), tenim $\alpha \to 0$, i per tant, en el límit, la fórmula H.10 implica que $\beta \to \beta(a)$ i

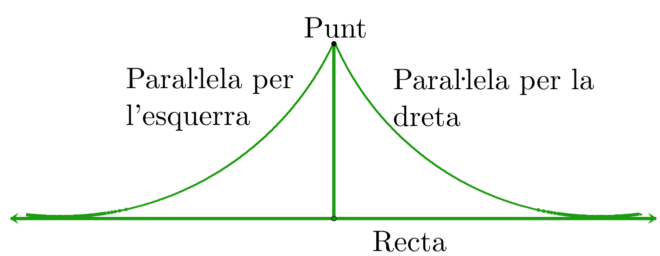
$$1 = \sin\beta(a) \cosh\frac{a}{R}\,. \tag{H.12}$$

L'angle $\beta(a)$, que depèn, doncs, de la distància a del punt B a la recta AC, es diu *angle de paral·lelisme* corresponent a la distància a, i s'acostuma a denotar, seguint Lobatchevski, per $\Pi(a)$. L'expressió (H.12) és equivalent a

$$\boxed{\Pi(a) = 2\arctan e^{-a/R}}$$

Tota recta BD que passa per B i forma un angle agut $\widehat{CBD}$ entre 0 i $\beta(a)$ talla la recta CA del mateix costat que A. Tota recta BD que passa per B i forma un angle agut $\widehat{CBD}$ entre $\beta(a)$ i $\pi/2$ no talla la recta CA. Hi ha infinites rectes per B que no tallen CA. *Aquesta és la forma que adopta el postulat V en aquesta hipotètica geometria hiperbòlica!*

D'aquesta anàlisi podem deduir la figura fonamental de la geometria hiperbòlica:



Sobre aquesta figura, que captura l'essència de les rectes hiperbòliques, J. Bolyai a [Bol31], i Lobatxevski, a [Lob55], van erigir deductivament l'edifici de *la nova geometria*. Vegeu també [Bol02].

Més conseqüències

Vegem ara els resultats anàlegs als de la geometria esfèrica que hem recopilat a la pàgina 135.

1. *Les rectes de $\mathbb{S}(iR)$ tenen longitud infinita.*

2. *Per un punt exterior a una recta passen infinites paral·leles*

3. *La suma dels angles de qualsevol triangle $\triangle ABC$ és menor que π; la diferència $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ és el* defecte angular *del triangle.*

4. *El pla hiperbòlic $\mathbb{S}(iR)$ té àrea infinita.*

5. *L'àrea d'un triangle hiperbòlic $\triangle ABC$ és proporcional al seu defecte angular; més precisament, igual a $R^2(\pi - (\alpha + \beta + \gamma))$.*

6. *No hi ha triangles hiperbòlics semblants; si dos triangles hiperbòlics tenen angles congruents, els seus costats també són congruents.*

Vegem com alguns d'aquests resultats són immediats a partir de les fórmules de la trigonometria hiperbòlica.

1. [Rectes infinites.] Si escrivim la fórmula (H.11) com

$$\cosh \frac{b}{R} = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha} \,, \tag{H.13}$$

i recordem que, quan $\alpha \to 0$, β tendeix a l'angle de paral·lelisme $\beta(a)$, tenim que

$$\lim_{\alpha\to 0} \cosh \frac{b(\alpha)}{R} = \frac{\cos\beta(a)}{\sin 0} = \infty \,,$$

de manera que $b \to \infty$, i per tant les rectes hiperbòliques tenen longitud infinita!

2. [Infinites paral·leles.] Conseqüència de l'angle de paral·lelisme.

3. [Suma d'angles menor que π.] Si apliquem la fórmula (H.9) a un triangle equilàter d'angle α i costat a, obtenim

$$\cos\alpha = \frac{\cosh \dfrac{a}{R}}{1 + \cosh \dfrac{a}{R}} \,.$$

Això implica $\cos\alpha > \dfrac{1}{2}$, i per tant $\alpha < \pi/3$. En particular,

$$\alpha + \alpha + \alpha < \pi\,,$$

és a dir, en aquesta geometria hi ha un triangle amb defecte positiu. Per tant, tots els triangles tenen defecte positiu.

4. [El pla té àrea infinita.] Aquesta afirmació no és una conseqüència immediata de les fórmules de la trigonometria hiperbòlica.

Però l'*analogia* ens permet trobar un camí per a demostrar-la.

Recordem la parametrització de l'esfera $\mathbb{S}(\mathrm{R})$:

$$\begin{aligned} x(\varphi,\theta) &= R\cos\theta\sin\varphi \\ y(\varphi,\theta) &= R\sin\theta\sin\varphi \\ z(\varphi,\theta) &= R\cos\varphi\,, \end{aligned}$$

on $0 < \theta < 2\pi$ i $0 < \varphi < \pi$ representen la longitud i la colatitud respectivament. Si diem r a la longitud del meridià entre el punt de coordenades (θ,φ) i el pol nord $(0,0,1)$, tenim que $r = R\varphi$, i per tant l'equació de $\mathbb{S}(\mathrm{R})$ en coordenades polars θ, r és

$$\begin{aligned} x(r,\theta) &= R\cos\theta\sin\frac{r}{R} \\ y(r,\theta) &= R\sin\theta\sin\frac{r}{R} \\ z(r,\theta) &= R\cos\frac{r}{R}\,, \end{aligned}$$

on $0 < \theta < 2\pi$ i $0 < r < R\pi$.

Apliquem ara estrictament l'*analogia* de Lambert, canviant formalment R per iR, i obtenim:

$$\begin{aligned} x(r,\theta) &= R\cos\theta\sinh\frac{r}{R} \\ y(r,\theta) &= R\sin\theta\sinh\frac{r}{R} \\ z(r,\theta) &= iR\cosh\frac{r}{R}\,. \end{aligned} \tag{H.14}$$

Llavors es compleix

$$x^2 + y^2 + z^2 = -R^2 = (iR)^2,$$

i podem pensar, doncs, que (H.14) és una parametrització de $\mathbb{S}(\mathrm{iR})$. A les expressions de x i y apareix R, i no iR, ja que hem canviat un sinus per un sinus hiperbòlic, i recordem que $\sin ix = i \sinh x$; en canvi, a l'expressió de z apareix iR, ja que $\cos ix = \cosh x$.

Però l'analogia no és total, ja que, així com a l'esfera $\mathbb{S}(\mathrm{R})$ teníem $0 < r < R\pi$, ara tenim $0 < r < \infty$, perquè ja hem vist que les rectes de $\mathbb{S}(\mathrm{iR})$ tenen longitud infinita.

Si tenim una corba en el pla r, θ, donada per $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$, amb $a \leq t \leq b$, la longitud de la corba sobre $\mathbb{S}(\mathrm{iR})$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, donada per

$$\begin{aligned} x(t) &= x(r(t), \theta(t)) \\ y(t) &= y(r(t), \theta(t)) \\ z(t) &= z(r(t), \theta(t)), \end{aligned}$$

és igual a la integral de la norma[3] del vector tangent,

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Per tant,

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

És a dir, «simplificant» el dt,

$$\boxed{ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R}\, d\theta^2}$$

Aquesta expressió és fonamental perquè representa l'element de longitud en polars de l'esfera imaginària.

Per tant, l'element d'àrea val

$$dA = \sqrt{EG - F^2} dr\, d\theta = R \sinh \frac{r}{R}\, dr\, d\theta\,.$$

En particular, l'àrea de $\mathbb{S}(\mathrm{iR})$ és infinita, ja que

$$A(\mathbf{S}_{iR}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} R \sinh \frac{r}{R}\, dr\, d\theta = \infty\,.$$

[3] Aquesta norma la calculem formalment com $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$, però observem que la nostra coordenada z és un imaginari pur; això ens porta, de manera sorprenent, a l'espai de Minkowski (vegeu H.3).

5. [Àrea proporcional al defecte.] L'àrea d'un triangle geodèsic en aquesta hipotètica superfície es calcularia així.

Suposarem el triangle donat per

$$T = \{(r,\theta) \mid 0 \leq \theta \leq \alpha;\ 0 \leq r \leq r(\theta)\}\,,$$

per a una certa funció $r(\theta)$. Tindrem, llavors,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\alpha \int_0^{r(\theta)} R \sinh \frac{r}{R} dr\, d\theta \\ &= \int_0^\alpha \left(R^2 \cosh \frac{r(\theta)}{R} - R^2 \right) d\theta \\ &= \int_0^\alpha R^2 \cosh \frac{r(\theta)}{R} d\theta - R^2 \alpha\,, \end{aligned}$$

però, usant (F.1), tenim

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = -\cosh \frac{r(\theta)}{R}\,,$$

i, per tant,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\alpha R^2 \cosh \frac{r(\theta)}{R} d\theta - R^2 \alpha \\ &= -R^2 \int_0^\alpha \frac{d\gamma}{d\theta}\, d\theta - R^2 \alpha \\ &= -R^2(\gamma(\alpha) - \gamma(0)) - R^2 \alpha \\ &= R^2(\pi - (\alpha + \beta + \gamma)) \end{aligned}$$

ja que $\gamma(0) = \pi - \beta$.

Per tant, en una superfície amb un diferencial de longitud donat per

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R}\, d\theta^2$$

l'àrea dels triangles geodèsics és proporcional al seu defecte.

6. [No hi ha triangles semblants.] La prova del punt 6 de la pàgina 165 és immediata a partir de la fórmula (H.9), ja que aquesta fórmula diu que els angles determinen els costats.

H.2 La pseudoesfera

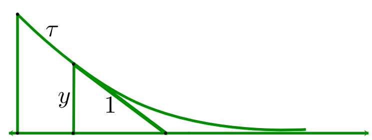
Ara estem a punt per a proposar una superfície candidata a $\mathbb{S}(\mathrm{iR})$. Concretament, una superfície amb un diferencial de longitud donat, en unes certes coordenades, per

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} d\theta^2.$$

És ara completament clar que per a resoldre aquest problema hem d'estudiar el problema general de com canvia el ds^2 d'una superfície de $\mathbb{R}^3$ quan canviem de coordenades. Entrem de ple, així, en els temes fonamentals del *Disquisicions.*

Gauss no va trobar aquesta superfície, però l'any 1839 Minding va construir la superfície anomenada pseudoesfera, que té, localment, aquest element de longitud.[4]

La construcció comença a partir d'una corba anomenada *tractriu*, que la podem pensar com la trajectòria que descriu un cos situat en el punt $(0,1)$ en ser arrossegat des del punt $(0,0)$ sobre l'eix de les $x > 0$.



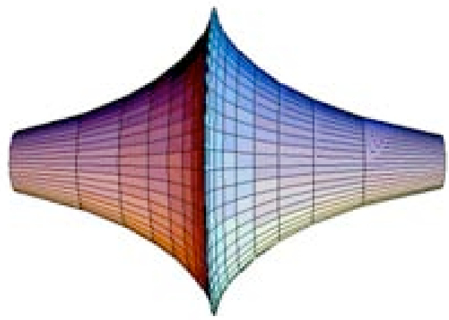
L'estudi d'aquesta corba fou proposat per Perrault, el segle *XVII*, i va ser resolt per Huygens.

És molt fàcil escriure l'equació diferencial de la tractriu, observant que és una corba amb subtangent 1. Per tant,

$$z' = -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\,.$$

La pseudoesfera és la superfície de revolució descrita quan la tractriu gira al voltant de l'eix de les x.

[4] Minding fou el primer estudiós del *Disquisicions* i fundador de l'escola de geometria diferencial russa. Va introduir el concepte de curvatura geodèsica d'una corba sobre una superfície el 1830. La pseudoesfera la va introduir el 1839 a l'article [Min39]. No obstant això, el lligam entre la pseudoesfera i el pla hiperbòlic (és a dir, entre les superfícies de curvatura constant negativa i la geometria hiperbòlica) no es va fer, malgrat que l'any 1837, i a la mateixa revista on va publicar Minding, va aparèixer publicat el treball de Lobatxevski [Lob37]. Aquest lligam el va fer Beltrami, gràcies, precisament, al coneixement dels treballs de Lobatxevski, el 1868 (vegeu pàgina 124).



En aquest dibuix es veu clarament que la pseudoesfera té tota una corba de singularitats, i és que ja hem comentat (pàgina 123) que no hi ha cap superfície de $\mathbb{R}^3$ completa amb curvatura constant negativa. La pseudoesfera és només un model local de superfície de $\mathbb{R}^3$ amb curvatura constant negativa.

És natural agafar sobre la pseudoesfera coordenades α, y, amb $\alpha =$ angle de rotació i $y = e^\tau$, on $\tau =$ distància sobre la tractiu. En aquestes coordenades, l'element de longitud de la pseudoesfera s'escriu com

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(d\alpha^2 + dy^2)\,. \tag{H.15}$$

En aquesta expressió reconeixem, avui dia, la mètrica del semiplà de Poincaré,

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)\,, \tag{H.16}$$

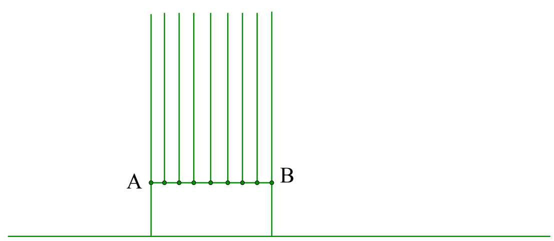
introduïda aproximadament l'any 1881. Però aquí tenim $-\infty < x < \infty$, i $y > 0$, mentre que a l'expressió (H.15) teníem $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $y > 1$.

És una mètrica de Riemann[5] sobre el semiplà, de curvatura constant -1.

La pseudoesfera (menys un meridià) es veuria aquí així:

[5] A la seva famosa memòria *Sobre les hipòtesis que estan a la base de la geometria*, [Rie67], defensada el 10 de juny de 1854 davant d'un tribunal en què hi havia Gauss, Riemann va estendre el *Disquisicions* a dimensions més grans, concretament al que ell va anomenar *varietat multiplement estesa*. El concepte de varietat n-dimensional que avui dia utilitzem va ser definit per Veblen i Whitehead el 1932 (vegeu [VW67]). Però ja el 1913, a [Wey51], apareix la definició actual de varietat bidimensional.

És curiós que Riemann no relacionés les varietats de curvatura constant negativa amb les geometries no euclidianes, malgrat que va donar explícitament la mètrica de les primeres i que segurament coneixia els treballs de Lobatxevski, ja que se sap que uns mesos abans de l'habilitació va consultar el volum del *Crelle* on apareixen els treballs de Lobatxevski. Ens referim al *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, revista fundada per



Observem que AB és un arc d'horocicle. La pseudoesfera és el cilindre no euclidià que s'obté en identificar a la figura els punts de la recta vertical per A amb els punts de la recta vertical per B, que tenen la mateixa ordenada.

Quina relació hi ha, però, entre

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2) \tag{H.17}$$

i

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} d\theta^2 \quad ? \tag{H.18}$$

Pensem la primera expressió en el semiplà $y > 0$, i recordem que el disc és imatge estereogràfica del semiplà.

L'aplicació bijectiva entre el disc i el semiplà, que prové de la projecció estereogràfica, s'anomena aplicació de Cayley. Si D denota el disc de radi R i $\mathbb{H}$ el semiplà $y > 0$, l'aplicació de Cayley està donada per

$$\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ z & \longmapsto & i\,\dfrac{R+z}{R-z}\,. \end{array}$$

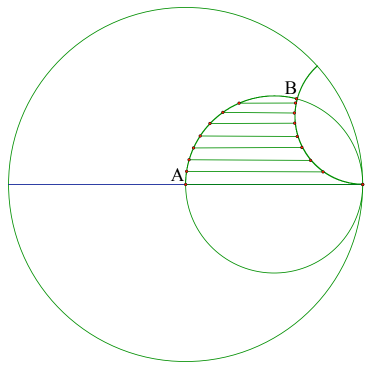
Aquest z és un nombre complex de mòdul $\rho < R$ i argument θ, és a dir, $z = \rho\, e^{i\theta}$.

La pseudoesfera es veuria en el disc així:

August Leopold Crelle el 1826. També és lògic pensar que coneixia els treballs de Gauss i els de Minding sobre superfícies de curvatura constant, aquest últim publicat també en el *Crelle*. L'única fórmula d'aquest treball de Riemann

$$ds^2 = \frac{1}{(1 + \frac{1}{4}\alpha \sum x_i^2)^2} \sum dx_i^2\,,$$

generalitza les fórmules de Minding.



Observem que AB és un arc d'horocicle.

Fem el canvi de variable $x = x(\rho, \theta)$, $y = y(\rho, \theta)$ donat per la part real i la part imaginària de l'aplicació de Cayley,

$$\begin{aligned} x &= Re \left(i \frac{R+z}{R-z} \right) \\ y &= Im \left(i \frac{R+z}{R-z} \right), \end{aligned}$$

que equival a transportar la mètrica del semiplà a una mètrica en el disc.

Calculem ara dx i dy i substituïm els seus valors a (H.15). Obtenim

$$ds^2 = \frac{4R^2}{(R^2 - \rho^2)^2} (d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2),$$

on ρ, θ són coordenades polars euclidianes en el disc.

Fem ara el canvi

$$\rho = R \tanh \frac{r}{2},$$

i obtenim

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} d\theta^2,$$

on ara r, θ juguen el paper de coordenades polars geodèsiques.

Hem vist, doncs, que, llevat d'un canvi de coordenades (certament sofisticat), l'element de longitud de la pseudoesfera (H.17) coincideix amb l'element de longitud (H.18), que, guiats per l'*analogia* de Lambert, estàvem buscant.

H.3 Espai de Minkowski

Situem-nos a $\mathbb{R}^3$ i definim un producte escalar per la fórmula

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = xx' + yy' - zz'.$$

Obtenim així una aplicació bilineal i simètrica de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Certament que no és definida positiva. També es diu que aquest producte escalar és una mètrica de Lorentz a R^3.

Es defineix la norma d'un vector per

$$||(x, y, z)||^2 = x^2 + y^2 - z^2.$$

Hi ha, doncs, vectors no nuls de norma zero. Es diuen vectors tipus llum.

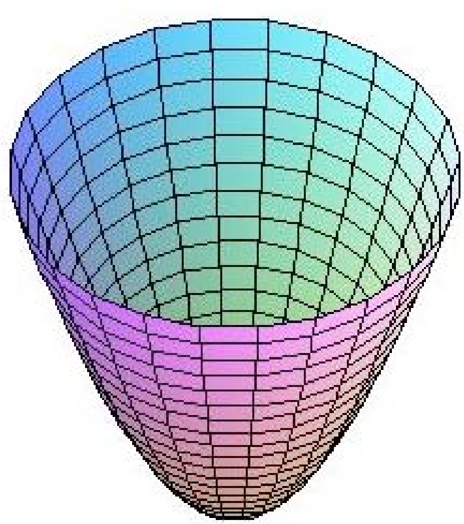
Com que la norma és l'arrel quadrada d'un nombre real, positiu o negatiu, i això donaria lloc a dues solucions, se suposa sempre que la norma d'un vector és zero, real positiu, o imaginari pur positiu (λ i, amb $\lambda > 0$).

En particular, no hi ha cap inconvenient a considerar l'esfera de radi iR:

$$\mathbb{S}(\mathrm{iR}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ||(x, y, z)|| = iR\}.$$

Com a conjunt, aquesta esfera és l'hiperboloide

$$x^2 + y^2 - z^2 = -R^2.$$



La parametrització que hem donat a (H.14) ens suggereix parametritzar $\mathbb{S}(\mathrm{iR})$ així:

$$\begin{aligned} x &= R\cos\theta\sinh\frac{r}{R} \\ y &= R\sin\theta\sinh\frac{r}{R} \\ z &= R\cosh\frac{r}{R}\,. \end{aligned}$$

Per tant,

$$x^2+y^2-z^2 = R^2(\sinh^2\frac{r}{R}-\cosh^2\frac{r}{R}) = -R^2 = (iR)^2.$$

La coordenada z és real, a diferència del que passava a (H.14), però el preu a pagar ha estat submergir-se en un espai de Minkowski. La consideració d'aquests tipus d'objectes matemàtics estava lluny de la manera de pensar de GAUSS, en el *Disquisicions*, on treballava sempre dins de $\mathbb{R}^3$.

La mètrica de Lorentz $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$ restringeix a una mètrica definida positiva sobre $\mathbb{S}(\mathrm{iR})$, i, amb aquesta mètrica, $\mathbb{S}(\mathrm{iR})$ és una varietat de Riemann de curvatura constant $1/(iR)^2 = -1/R^2$. Les geodèsiques són, convenientment parametritzades, les interseccions amb l'hiperboloide dels plans per l'origen. Aquest conjunt de punts i rectes, amb els moviments donats per les isometries d'aquest espai, forma un model de la geometria hiperbòlica, i podem dir amb força propietat que és una vertadera esfera de radi imaginari.

Apèndix I

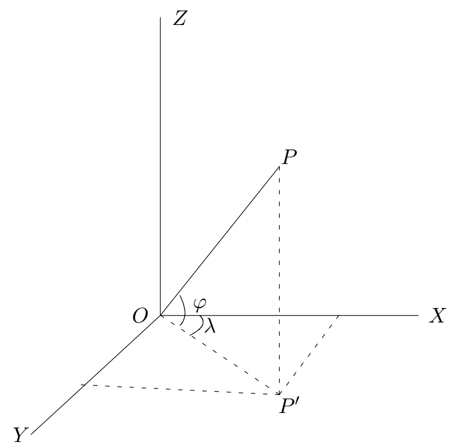
Trigonometria esfèrica i hiperbòlica, *(per Joan Girbau)*

L'objectiu d'aquest apèndix és establir de forma curta i elegant les fórmules fonamentals de la trigonometria esfèrica i de la trigonometria hiperbòlica. La redacció consta, doncs, de dues seccions independents, una dedicada a la trigonometria esfèrica i l'altra, a la hiperbòlica. La primera és elemental, però la segona requereix del lector coneixements rudimentaris de varietats de Riemann.

I.1 Trigonometria esfèrica

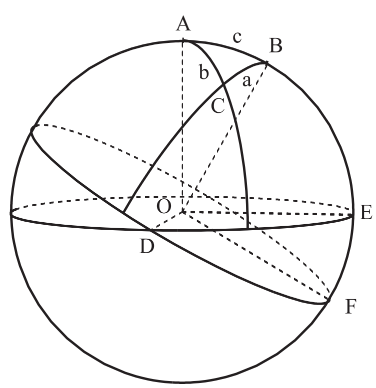
Primer de tot veurem com l'esfera unitat $\mathbb{S}(1)$ es pot parametritzar per la latitud i longitud geogràfiques.

Designem per O l'origen de $\mathbb{R}^3$. Donat un punt P de $\mathbb{S}(1)$ (que no sigui cap dels dos pols $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$), l'angle φ que forma OP amb el pla $z=0$ es denomina *latitud* de P. L'angle φ es considera positiu quan la tercera coordenada de P és positiva, i negatiu, quan és negativa. Així, doncs, φ varia entre $-\pi/2$ i $\pi/2$. Sigui P' la projecció ortogonal de P sobre el pla $z=0$. L'angle λ que forma l'eix de les x amb el segment OP', comptat en el sentit de les agulles del rellotge des del semieix de les x positives, s'anomena *longitud* del punt P.



La longitud del segment OP és 1 perquè P és de l'esfera unitat. La longitud del segment OP' és $\cos\varphi$. La x del punt P' (que també és la x del punt P) serà, doncs, $\cos\varphi\cos\lambda$. La y de P' (que també és la y de P) serà $\cos\varphi\sin\lambda$. Finalment, la z de P serà $\sin\varphi$. Per tant, el punt P serà el punt $P = (\cos\varphi\cos\lambda, \cos\varphi\sin\lambda, \sin\varphi)$.

Anem ara a establir les fórmules fonamentals de la trigonometria esfèrica. Considerem un triangle esfèric qualsevol $\triangle ABC$ d'angles respectius α, β, γ. Anomenem c, a, b les longituds respectives dels tres arcs AB, BC i CA. Agafem els eixos X, Y, Z de manera que el semieix de les z positives vagi des del centre O de l'esfera al punt A (amb la qual cosa A passa a tenir coordenades $(0,0,1)$). Agafem llavors els eixos X i Y de manera que B estigui en el pla $y = 0$, tingui x positiva, i de manera que C tingui la coordenada y positiva. A la figura següent, el semieix de les x positives és OE, i el de les y positives és OD.



Les coordenades de C en aquests eixos són, doncs,

$$\begin{aligned} C &= (\cos(\pi/2 - b)\cos\alpha, \cos(\pi/2 - b)\sin\alpha, \sin(\pi/2 - b)) \\ &= (\sin b\cos\alpha, \sin b\sin\alpha, \cos b)\,. \end{aligned}$$

Prenguem ara uns nous eixos X', Y' Z' de la manera següent: El semieix Z' de les z' positives va des del centre O al punt B, els semieixos X' i Y' els prenem de tal manera que A estigui en el pla $y' = 0$, tingui x' negativa, i de manera que C tingui la coordenada y' positiva. A la figura anterior el semieix X' és OF, el semieix Y' és OD (i coincideix amb el semieix Y d'abans) i el semieix Z' és OB. Les coordenades del punt C respecte als eixos X', Y', Z' són, doncs,

$$\begin{aligned} C &= (\cos(\pi/2 - a)\cos(\pi - \beta), \cos(\pi/2 - a)\sin(\pi - \beta), \sin(\pi/2 - a)) \\ &= (-\sin a\cos\beta, \sin a\sin\beta, \cos a)\,. \end{aligned}$$

És obvi que es passa dels eixos X, Y, Z als eixos X', Y', Z' fent un gir d'angle $-c$ entorn de l'eix $Y = Y'$. En llenguatge matricial:

$$\begin{pmatrix} -\sin a\cos\beta \\ \sin a\sin\beta \\ \cos a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos c & 0 & -\sin c \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin c & 0 & \cos c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin b\cos\alpha \\ \sin b\sin\alpha \\ \cos b \end{pmatrix}.$$

Obtenim d'aquí, sorprenentment, les tres fórmules següents:

$$\begin{aligned} -\sin a\cos\beta &= \cos c\sin b\cos\alpha - \sin c\cos b && \text{(I.1)} \\ \sin a\sin\beta &= \sin b\sin\alpha && \text{(I.2)} \\ \cos a &= \sin c\sin b\cos\alpha + \cos c\cos b\,. && \text{(I.3)} \end{aligned}$$

La segona i la tercera constitueixen les fórmules fonamentals de la trigonometria esfèrica en una esfera de radi 1. Són el teorema del sinus i el teorema del cosinus.

Observació

Aquestes tres fórmules no són independents. Però, en funció de cada situació, ens pot ser més útil l'una que l'altra.

A la pàgina 143 apareixen també tres fórmules generals de la trigonometria esfèrica; les dues primeres, (E.7) i (E.8), coincideixen, per a $R = 1$, amb (I.2) i (I.3). En canvi, la tercera, (E.9), no apareix explícitament aquí. Però es dedueix de (I.3). En efecte, per permutació circular de a, b, c i α, β, γ, tenim que

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c} \\
\cos\beta &= \frac{\cos b - \cos c\cos a}{\sin c\sin a} \\
\cos\gamma &= \frac{\cos c - \cos a\cos b}{\sin a\sin b}\,.
\end{aligned}$$

D'aquí deduïm

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{\sqrt{M}}{\sin b\sin c} \\
\sin\beta &= \frac{\sqrt{M}}{\sin c\sin a} \\
\sin\gamma &= \frac{\sqrt{M}}{\sin a\sin b}\,,
\end{aligned}$$

amb

$$M = \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c + 2\cos a\cos b\cos c - 2\,.$$

A partir d'aquestes expressions és fàcil veure, per càlcul directe, que

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a\,,$$

que és la fórmula (E.9) de la pàgina 143, amb $R = 1$.

Aquests mateixos càlculs permeten demostrar les dues primeres fórmules, (I.1) i (I.2), com a conseqüència immediata de la tercera (I.3).

Observem finalment que també es pot deduir (E.9) observant que és la polar de (I.3) (vegeu l'observació E.5.5).

Trigonometria a $\mathbb{S}$(R)

Sobre l'esfera $\mathbb{S}$(R) de $\mathbb{R}^3$ de centre l'origen O i de radi R, considerem un triangle esfèric qualsevol $\triangle ABC$ d'angles respectius α, β, γ. Anomenem (com sempre) c, a, b les longituds respectives dels tres arcs AB, BC i CA.

Per a cada punt P de l'esfera $\mathbb{S}$(R) de radi R, considerem la intersecció del segment OP amb l'esfera $\mathbb{S}(1)$ de radi 1. Si el punt de partida era P, designarem aquesta intersecció per P'. D'aquesta manera, als tres punts A, B, C de $\mathbb{S}$(R) corresponen tres punts A', B', C' de $\mathbb{S}(1)$, i al triangle esfèric de $\mathbb{S}(\mathrm{R})$, $\triangle ABC$, correspon el triangle esfèric de $\mathbb{S}(1)$, $\triangle A'B'C'$. Òbviament els angles α i α' dels dos triangles són iguals. Anàlogament els angles β i β', i els angles γ i γ'. Quant als costats dels dos triangles, es té $a' = a/R$, $b' = b/R$, $c' = c/R$.

Aplicant les fórmules (I.1), (I.2), (I.3) al triangle $\triangle A'B'C'$ tindrem:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\sin\dfrac{a}{R}\cos\beta & = & \cos\dfrac{c}{R}\sin\dfrac{b}{R}\cos\alpha - \sin\dfrac{c}{R}\cos\dfrac{b}{R} \\[2ex] \sin\dfrac{a}{R}\sin\beta & = & \sin\dfrac{b}{R}\sin\alpha \\[2ex] \cos\dfrac{a}{R} & = & \sin\dfrac{c}{R}\sin\dfrac{b}{R}\cos\alpha + \cos\dfrac{c}{R}\cos\dfrac{b}{R}\,. \end{array}\right.$$

La segona i la tercera constitueixen les fórmules fonamentals de la trigonometria esfèrica en una esfera de radi R. Són el teorema del sinus i el teorema del cosinus, i coincideixen amb les fórmules (E.7) i (E.8) de la pàgina 143.

També, com a l'observació anterior, pàgina 177, deduïm d'aquestes fórmules que

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\frac{a}{R}\,, \tag{I.4}$$

que és la fórmula (E.9) de la pàgina 143.

La trigonometria plana com a límit de l'esfèrica

Suposem ara que sobre l'esfera $\mathbb{S}(\mathrm{R})$ de $\mathbb{R}^3$ de centre l'origen O i de radi R, tenim un triangle esfèric $\triangle ABC$, de manera que les longituds dels arcs AB, BC i CA siguin molt petites en comparació del radi R. Pensem, per exemple, en un triangle sobre l'esfera de la Terra, les longituds dels costats del qual siguin de pocs metres.

Recordem que, per la fórmula de Taylor, es té

$$\begin{array}{l} \sin x = x - (\cos\xi)x^3/3! \\ \cos x = 1 - x^2/2 + (\cos\eta/4!)x^4\ , \end{array}$$

on ξ i η són nombres entre 0 i x. Quan x és molt petit, x^3 i x^4 són pràcticament negligibles, i podem posar $\sin x = x$ i $\cos x = 1 - x^2/2$. En les fórmules anteriors, com que a/R, b/R i c/R són molt petits, podem fer aquestes substitucions. Llavors les fórmules anteriors ens donen:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\dfrac{a}{R}\cos\beta & = & \left(1-\dfrac{c^2}{2R^2}\right)\dfrac{b}{R}\cos\alpha - \dfrac{c}{R}\left(1-\dfrac{b^2}{2R^2}\right) \\ \\ \dfrac{a}{R}\sin\beta & = & \dfrac{b}{R}\sin\alpha \\ \\ \left(1-\dfrac{a^2}{2R^2}\right) & = & \dfrac{cb}{R^2}\cos\alpha + \left(1-\dfrac{c^2}{2R^2}\right)\left(1-\dfrac{b^2}{2R^2}\right). \end{array} \right.$$

Quan fem aquests càlculs, seguint el criteri anterior haurem d'eliminar els termes d'ordre > 2 en a/R, b/R i c/R. Fent això i operant, les tres igualtats anteriors esdevenen

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c & = & a\cos\beta + b\cos\alpha \\ a\sin\beta & = & b\sin\alpha \\ a^2 & = & b^2 + c^2 - 2cb\cos\alpha\,. \end{array} \right. \tag{I.5}$$

Reconeixem en la segona igualtat de (I.5) el teorema del sinus de la trigonometria plana. En la tercera igualtat hi reconeixem el teorema del cosinus. La primera igualtat ens dóna la longitud d'un costat d'un triangle com a suma de les projeccions sobre aquest costat dels altres dos.

Anàlogament, la fórmula (I.4) s'escriu, quan R tendeix a infinit, com

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\,,$$

que és la fórmula del cosinus de la suma, ja que en aquest cas tenim $\cos\alpha = -\cos(\pi-\alpha) = \cos(\beta+\gamma)$.

En resum, les fórmules de la trigonometria plana s'obtenen per una aproximació quadràtica (fins a l'ordre 2) de les fórmules de la trigonometria esfèrica, aplicades a una esfera de radi R gran respecte a les longituds a, b, c dels costats.

I.2 Trigonometria hiperbòlica

Pla hiperbòlic: model de l'hiperboloide

El pla hiperbòlic, $\mathbb{H}_2$, és l'única varietat de Riemann de dimensió 2, completa, simplement connexa i de curvatura constant -1. Hi ha diversos models

—tots equivalents— per a introduir aquesta varietat. El model més adient per a donar les fórmules de la trigonometria hiperbòlica és el model de l'hiperboloide, del qual recordarem aquí els trets fonamentals.

Considerem $\mathbb{R}^3$ dotat del producte escalar η que definim a continuació. Si $u = (u_x, u_y, u_z)$, $v = (v_x, v_y, v_z)$ són dos vectors,

$$\eta(u, v) = u_x v_x + u_y v_y - u_z v_z \ .$$

En el cas de $\mathbb{R}^4$, aquest producte escalar és el de Minkowski (de la relativitat especial). Recordem que u s'anomena temporal si $\eta(u, u) < 0$, que u s'anomena espacial si $\eta(u, u) > 0$, i que u s'anomena lluminós si $\eta(u, u) = 0$. Es pot demostrar que si u i v són perpendiculars (pel producte escalar η), llavors si l'un és temporal, l'altre és espacial.

Considerem la superfície $\mathbb{H}$ de $\mathbb{R}^3$ definida per

$$\mathbb{H} = \{p \in \mathbb{R}^3,\ \ p = (p_x, p_y, p_z),\ \text{tals que } \eta(p, p) = -1 \text{ i } p_z > 0\} \ .$$

$\mathbb{H}$ és una component connexa de l'hiperboloide de dos fulls d'equació $x^2 + y^2 - z^2 = -1$. Per tal de parametritzar $\mathbb{H}$, cosiderem en el pla de coordenades (r, z) la branca d'hipèrbola donada per

$$\begin{cases} r = \sinh\varphi \\ z = \cosh\varphi \, . \end{cases}$$

Considerem ara, a $\mathbb{R}^3$, una semirecta s que surti de l'origen i estigui continguda en el pla determinat pels eixos X, Y. Sigui π el pla de $\mathbb{R}^3$ engendrat per l'eix Z i la semirecta s. En aquest pla considerem la branca d'hipèrbola anterior. Fem ara girar el pla π entorn de l'eix Z i la branca d'hipèrbola de π engendra la superfície de revolució $\mathbb{H}$, que es parametritza, doncs, així:

$$\begin{cases} x = & r\cos\lambda = & \sinh\varphi\cos\lambda \\ y = & r\sin\lambda = & \sinh\varphi\sin\lambda \\ z = & & \cosh\varphi \, . \end{cases}$$

Fixem-nos que en aquesta parametrització λ representa l'angle entre la semirecta s que gira i l'eix de les x.

Si $p \in \mathbb{H}$, l'espai tangent $T_p(\mathbb{H})$ es pot identificar amb $< p >^{\perp}$ (ortogonal del subespai $< p >$ pel producte escalar η, dintre de $\mathbb{R}^3$). Si $u \in T_p(\mathbb{H}) =< p >^{\perp}$, com que p és temporal, u és espacial. Per tant, $\eta(u, u) > 0$. Això prova que la restricció de η a l'espai tangent $T_p(\mathbb{H})$ és definida positiva. La restricció de η a cada espai tangent dóna, doncs, un producte escalar definit positiu i converteix $\mathbb{H}$ en una varietat de Riemann (que és l'espai hiperbòlic de dimensió 2).

És ben conegut —i no gaire difícil de demostrar— que si $p \in \mathbb{H}$ i $u \in T_p(\mathbb{H})$, u unitari, llavors la geodèsica que surt de p amb vector tangent u ve donada pel vector de $\mathbb{R}^3$

$$\vec{x}(t) = \cosh t\ \vec{p} + \sinh t\ \vec{u}\ .$$

Observem que

$$\eta(\vec{x}(t), \vec{x}(t)) = \eta(\cosh t\ \vec{p} + \sinh t\ \vec{u}\ ,\ \cosh t\ \vec{p} + \sinh t\ \vec{u}) =$$

$$= \cosh^2 t\ \eta(p,p) + \sinh^2 t\ \eta(u,u)$$

(ja que p i u són ortogonals). Per tant,

$$\eta(x(t), x(t)) = -\cosh^2 t + \sinh^2 t = -1\ .$$

Per tant, $x(t) \in \mathbb{H}$, $\forall\ t$.

El punt $(0,0,1)$ pertany a $\mathbb{H}$. Igual que fèiem en el cas esfèric, denominarem pol nord aquest punt i el designarem per N. L'espai tangent $T_N(\mathbb{H}) =< (0,0,1) >^{\perp}$ és el subespai de vectors $u = (u_x, u_y, 0)$ amb tercera coordenada nul·la. Un vector unitari de $T_N(\mathbb{H})$ serà, doncs, de la forma $u = (\cos\lambda, \sin\lambda, 0)$. La geodèsica que surt de N amb vector tangent u és

$$x(\varphi) = \cosh\varphi\ \vec{N} + \sinh\varphi\ \vec{u} = (\sinh\varphi\cos\lambda, \sinh\varphi\sin\lambda, \cosh\varphi)\ .$$

Veiem, doncs, que els meridians de $\mathbb{H}$ d'equació $\lambda =$ constant són geodèsiques. Però, el que és important, també, és que sobre cada un d'aquests meridians φ és la distància geodèsica al pol nord (que correspon a $\varphi = 0$).

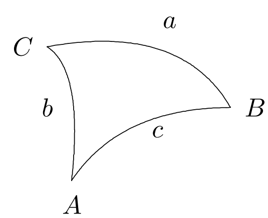
Si f és una isometria de $\mathbb{R}^3$ respecte al producte escalar η, llavors f preserva l'hiperboloide de dos fulls $S = \{p \in \mathbb{R}^3$ tals que $\eta(p,p) = -1\}$. En efecte, si $\eta(p,p) = -1$, també $\eta(f(p), f(p)) = -1$. Sigui $\mathcal{I}$ el conjunt d'isometries de $\mathbb{R}^3$ respecte al producte η tals que preserven el component connex $\mathbb{H}$ de S. Llavors tot $f \in \mathcal{I}$ induirà una isometria de la varietat de Riemann $\mathbb{H}$. Es pot demostrar (però ara no ens cal) que aquestes són totes les isometries de $\mathbb{H}$. En particular, les aplicacions lineals de $\mathbb{R}^3$ que tenen una matriu de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ 0 & \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cosh\varphi & 0 & \sinh\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh\varphi & 0 & \cosh\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donen lloc a isometries de $\mathbb{H}$. Les dues primeres matrius corresponen a girs hiperbòlics entorn de l'eix X i de l'eix Y, mentre que la tercera correspon a un gir euclidià entorn de l'eix Z.

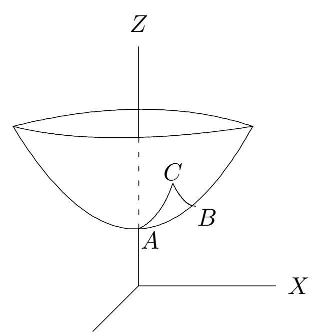
Fórmules de la trigonometria hiperbòlica

Considerem un triangle geodèsic $\triangle ABC$ del pla hiperbòlic $\mathbb{H}$, d'angles respectius α, β, γ.

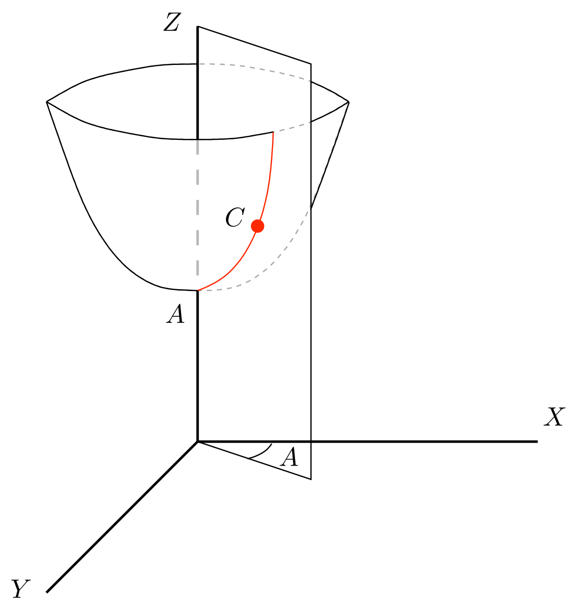


Designarem per a, b i c, tant els arcs geodèsics BC, CA i AB respectivament, com les seves longituds.

Com que les fórmules que volem obtenir relacionen costats i angles d'un tal triangle, les mateixes fórmules seran vàlides per a qualsevol transformat d'aquest triangle per una isometria. Tenint present això, utilitzant un gir euclidià convenient entorn de l'eix Z podem portar el vèrtex A sobre un punt A' del meridià intersecció de $\mathbb{H}$ amb el pla $y = 0$. Després, per un gir hiperbòlic entorn de l'eix Y podem transformar A' en el pol nord $N = (0, 0, 1)$. Per tant, sense pèrdua de la generalitat, podem suposar que el vèrtex A inicial que ens han donat és el pol nord N. Amb un gir euclidià entorn de l'eix Z (que preservarà A), podem portar B sobre el pla $y = 0$ de manera que tingui, a més, coordenada x positiva. Fem-ho i suposem que el B inicial ja compleix això. Ens queda un triangle com el representat a la figura següent.



Per veure com es mesura l'angle en A del triangle geodèsic, observem que C està sobre el meridià obtingut per intersecció de $\mathbb{H}$ i d'un pla π que passa per l'eix de les Z (de fet l'arc b del triangle és un arc d'aquest meridià).



En aquesta figura es veu bé que l'angle en A coincideix amb l'angle que forma la intersecció de π amb el pla $z = 0$ i l'eix X. Aquest angle és el que denominàvem λ en la parametrització de $\mathbb{H}$. Per tant, queda clar que les coordenades del vèrtex C són

$$C = (\sinh b \cos \alpha, \sinh b \sin \alpha, \cosh b) \ .$$

Igual que fèiem en el cas de la trigonometria esfèrica, prenem uns nous eixos, X', Y', Z', obtinguts dels eixos X, Y, Z, fent un gir hiperbólic (en el cas esfèric era un gir euclidià) d'angle $-c$ entorn de l'eix Y (que passa a coincidir amb Y'). Les coordenades de C en aquests nous eixos (com passava en el cas esfèric) seran

$$C = (\sinh a \cos(\pi - \beta), \sinh a \sin(\pi - \beta), \cosh a) \ .$$

Per tant, tindrem

$$\begin{pmatrix} -\sinh a \cos \beta \\ \sinh a \sin \beta \\ \cosh a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh c & 0 & -\sinh c \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh c & 0 & \cosh c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sinh b \cos \alpha \\ \sinh b \sin \alpha \\ \cosh b \end{pmatrix} .$$

Això ens dóna:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\sinh a \cos\beta & = & \cosh c \sinh b \cos\alpha - \sinh c \cosh b \\ \sinh a \sin\beta & = & \sinh b \sin\alpha \\ \cosh a & = & -\sinh c \sinh b \cos\alpha + \cosh c \cosh b\,. \end{array} \right.$$

La segona i la tercera constitueixen les fórmules fonamentals de la trigonometria hiperbòlica quan la curvatura és -1. Són el teorema del sinus i el teorema del cosinus.

Si la curvatura és $-1/R^2$ el mateix procediment anterior ens porta a

$$-\sinh\frac{a}{R}\cos\beta = \cosh\frac{c}{R}\sinh\frac{b}{R}\cos\alpha - \sinh\frac{c}{R}\cosh\frac{b}{R} \tag{I.6}$$

$$\sinh\frac{a}{R}\sin\beta = \sinh\frac{b}{R}\sin\alpha \tag{I.7}$$

$$\cosh\frac{a}{R} = -\sinh\frac{c}{R}\sinh\frac{b}{R}\cos\alpha + \cosh\frac{c}{R}\cosh\frac{b}{R}\,. \tag{I.8}$$

La segona i la tercera constitueixen les fórmules fonamentals de la trigonometria hiperbòlica quan la curvatura és $-1/R^2$. Són el teorema del sinus i el teorema del cosinus, i coincideixen amb les fórmules (H.7) i (H.8) de la pàgina 162.

En canvi, l'equació (H.9) de la pàgina 162,

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cosh\frac{a}{R}\,,$$

no apareix explícitament aquí. Però es dedueix de (I.8) per un càlcul anàleg al que hem fet a l'observació de la pàgina 177.

Bibliografia

[AZ67] Aleksandr D. Aleksandrov i Viktor A. Zalgaller, *Intrinsic geometry of surfaces*, vol. 15, Translations of Mathematical Monographs, AMS, 1967, traduït del rus per J. M. Danskin. 63

[Bat67] Giuseppe Battaglini, *Sulla geometria immaginaria di Lobatschewsky*, Giornale di Matematica (Nàpols), **5** (1867), 217-231. 123

[Bel66] Eugenio Beltrami, *Risoluzione del problema di riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette*, Ann. di Mat., **VII** (1866), 185-204. 124

[Bel68] ———, *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea*, Giornale di Matematica, **6** (1868), 248-312, traduït al francès el 1869 en els Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, t. 6, 215-286, Gauthier-Villars, París. 9, 50, 124

[Ber67] Johanes Bernouilli, *Opera Omnia*, vol. 1, Lausana, 1767. 95

[Boi91] Luciano Boi, *Le probleme mathematique de l'espace. Une quête de l'intelligible*, Springer, 1991. 110

[Bol31] János Bolyai, *The science of absolute space*, suplement a [Bon55], traduït per George Bruce Halsted; el treball de Bolyai és de 1831. 56, 109, 164

[Bol02] ———, *Scientiam spatii absolute veram exhibens; a veritate aut falsitate axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica*, Polygon, Szeged, 2002, conté una traducció a l'hongarès de Rados Ignàcz, 1897, i una a l'anglès de George Bruce Halsted, 1897. 109, 164

[Bon55] Roberto Bonola, *Non euclidean geometry. A Critical and Historical Study of its Development*, Dover, 1955, primera edició de 1912. Conté la traducció de l'*Apèndix* de J. Bolyai, i de *La teoria de les paral·leles* de N. I. Lobatxevski. 9, 16, 101, 124, 187, 191, 193

[Bre84] Ernst Breitenberger, *Gauss's geodesy and the axiom of parallels*, Arch. Hist. Exact Sci., **31** (1984), 273-289. 93

[dC76] Manfredo P. do Carmo, *Geometría diferencial de curvas y supefícies*, vol. AUT/135, Alianza Editorial, 1976. 50

[DLt03] Jaume Domenech Larraz (traductor), *Els Elements d'Euclides*, <http://www.xtec.es/∼jdomen28/indexeuclides.htm>, 2003; la versió original de la pàgina és a: <http://aleph0.clarku.edu /∼djoyce/java/elements/ elements.html>, D. E. Joyce, Clark University. 9

[Dom79] Peter Dombrowski, 150 *years after Gauss'"Disquisitiones generales circa superficies curvas"*, Astérisque, **62** (1979), 97-153, conté la versió original de Gauss en llatí: *Disquisitiones generales circa superficies curvas.* 18, 20, 22, 28, 88, 98, 133

[Dou70] Alberto Dou, *Logical and historical remarks on Saccheri's Geometry*, Notre Dame Journal of Formal Logic, **XI** (1970), no. 4, 385-415. 13, 16, 17

[Dun04] Waldo G. Dunnington, *Carl Friederich Gauss. Titan of Science*, The Mathematical Association of America, 2004, amb material addicional de J. Gray i Fritz-Egbert Dohse. 17, 22

[ES95] Friedrich Engels i Paul Stäckel, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*, Teubner, Leipzig, 1895, referència 168 de [Ros88]. 14, 15, 16, 17, 20, 61, 161, 162, 191

[Euc56] Euclides, *The thirteen books of Euclid's Elements*, vol. 1, Dover, 1956, traducció comentada per Sir Thomas L. Heath. 9

[Eul28] Leonhard Euler, *De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente*, Comentarii Academiae Scientiarum Imperials Petropolitanae (Sant Petersburg), **3** (1728), 110-123. 51, 95

[Eul60] ———, *Recherches sur la courbure des surfaces*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences (Berlín), **16** (1760), 119-143, *Opera Omnia* I, 28. 84, 95, 136

[Eul72] ———, *De Solidis quorum superficiem in planum explicare licet*, Novi Comentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae (Sant Petersburg), **XVI** (1772), 3-34, *Opera Omnia* I, 28. 49, 95

[Eul56] ———, *Opera omnia(1). Opera mathematica*, vol. 1-29, Leipzig, Berlín, Zürich, 1911-1956. 49, 53, 129, 136, 137

[Gau01] Carl Friedrich Gauss, *Disquisitiones arithmeticae*, Lipsiae, Gerh. Fleischer, 1801; vegeu la traducció al català feta i prologada per *Griselda Pascual*, editada per la Societat Catalana de Matemàtiques (filial de l'Institut d'Estudis Catalans), 1996. 91

[Gau28] ———, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Commentationes Societatis Regiae Scientarum Gottingensis Recentiores Classis Mathematicae, **VI** (1828), 99-146, presentat el 8 d'octubre de 1827. Vegeu també [Gau27], vol *IV*, p. 217-258. 25

[Gau70] ———, *Recherches générales sur les surfaces courbes*, 2a ed., Imprimerie de Prudhome, rue Lafayette, 14, Grenoble, 1870, traduïda, anotada i comentada per *M. E. Roger*. 22, 49

[Gau27] ———, *Werke*, vol. 1-12, Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, B. G. Teubner, Leipzig, 1870-1927, es poden consultar també a <http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/cache /toc/D38910.html>. 18, 19, 20, 28, 86, 93, 98, 100, 101, 106, 107, 119, 189

[Gau68] ———, *General investigations of curved sufaces of 1827 and 1825*, Nova York, Readex Microprint, 1968, traduït, amb notes i bibliografia, per James Caddall Morehead i Adam Miller Hiltebeitel. Microforma. 95

[Gir73] Joan Girbau, *Memoria sobre el concepto, método y fuentes de la geometría diferencial*, Barcelona, [s. n.], 1973. 95

[Gir84] ———, *La geometria diferencial, de Gauss a Riemann*, El desenvolupament de les matemàtiques al segle XIX, Barcelona, Institut d'Estudis Catalans (1984). Arxius de la secció de Ciències, LXXV, p. 40-53. Edició a cura de *Manuel Castellet*. 95

[Gra79a] Jeremy Gray, *Ideas of Space. Euclidean, Non-Euclidean and Relativistic*, Clarendon Press, Oxford, 1979. 17

[Gra79b] ______, *Non-Euclidean Geometry, a reinterpretation*, Hist. Math., **6** (1979), 236-258. 17

[Gra87] ______, *Non-Euclidean Geometry*, The Open University, Unit 13, 1987, reeditat el 1990 i 1995. 124, 125

[Gra04] ______, *János Bolyai. Non-Euclidean Geometry and the Nature of Space*, Burndy Library Publications, New Series, núm. I, 2004. 23, 109

[Hil01] David Hilbert, *Über Flächen von konstanter Gausscher Krümung*, Trans. Amer. Math. Soc., **2** (1901), 87-99. 123, 126

[Hil91] ______, *Fundamentos de la geometría*, 7a ed., Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Textos Universitarios, vol. 5, Madrid, 1991. Primera edició: *Grundlagen der Geometrie*, 1899. 17

[Ita84] Jean Itard, *Essais d'histoire des mathématiques*, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, París, 1984. 77

[Kli72] Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972. 18, 57

[Kli78] Wilhelm Klingenberg, *Curso de geometría diferencial*, Alhambra, 1978. Edició original: *Eine vorlesung über differentialgeometrie*, 1973. 50

[Klü63] Georg Simon Klügel, *Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio*, Göttingen, 1763, tesi dirigida per Abraham Kaestner. 18

[Kui55] Nicolas H. Kuiper, *On C^1-isometric imbeddings, I, II*, Indag. Math., **17** (1955), 545-556, 683-689. 126

[KY96] Andrei Niolaevich Kolmogorov i Andre P. Yushkevich, *Mathematics of the 19th Century. Geometry. Analytic Function Theory*, Birkhäuser Verlag, 1996. 51, 84

[Kár87] Ferenc Kárteszi, *Bolyai, János. Appendix. The theory of space*, vol. 138, North-Holland Mathematics Studies, 1987, amb un suplement a càrrec de Barna Szénássy. 109, 115, 116, 118, 137

[Lag92] Joseph Louis Lagrange, *Oeuvres de Lagrange*, Gauthier-Villars, París, 1867-1892. 95, 136, 154

[Lam86] Johann Heinrich Lambert, *Theorie der Parallellinien*, Mag. Reine Angew. Math., (1786), 137-164, 325-358, vegeu [ES95], pàg. 152-207. El treball fou escrit el 1766 i publicat pòstumament per J. Bernouilli i C. F. Hindenburg. 12, 13

[Lap12] Pierre Laplace, *Oeuvres completes*, vol. 8, Academy of Sciences of Paris, Gauthier-Villars, 1878-1912. 136

[Lau99] Detlef Laugwitz, *Bernhard Riemann 1826-1866. Turning Points in the Conception of Mathematics*, Birhäuser, 1999. 17, 104

[Leg87] Adrien-Marie Legendre, *Mémoire sur les opérations trigonométriques dont les résultats dépendent de la figure de la terre*, Mémoires de l'Academie des Sciences de Paris (1787), 352. 77, 92

[Lob37] Nicolaï Ivanovitch Lobatxevski, *Géométrie imaginaire*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **17** (1837), 295-320. 110, 169

[Lob55] ______, *Geometrical researches on the theory of parallels*, Dover, 1955, suplement *II* de [Bon55], traduït per George B. Halsted. Versió original en alemany de 1840. 110, 164

[Lüt90] Jespers Lützen, *Joseph Liouville 1809-1882. Master of Pure and Applied Mathematics*, Springer Verlag, 1990. 86

[Meu85] Jean-Baptiste Marie Meusnier, *Mémoire sur la courbure des surfaces*, Mémoires de Mathématiques et de Phsique. Mémoires des Savants Étrangers (París), **10** (1785), 477-510. 40, 95

[Mil72] Arthur Miller, *The Myth of Gauss' Experiment on the Euclidean Nature of Physical Space*, Isis, **63** (1972), 345-348. 93

[Min39] Ferdinand Minding, *Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind, oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmaasse*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **19** (1839), 370-387, «Com decidir si dues superfícies són mútuament desenvolupables; incloent remarques sobre superfícies de curvatura constant negativa». 50, 169

[Mon80] Gaspard Monge, *Mémoire sur les propiétés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulèrement sur celles des surfaces développables, avec une applicaction à la théorie des ombres et des pénombres*, Mémoires de Mathématiques et de Phsique. Mémoires des Savants Étrangers (París), **9** (1780), 382-440. 49, 95, 98

[Mon94] José María Montesinos, *La cuestión de la consistencia de la geometría hiperbólica*, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid (1994), 213-232. 124, 125

[Nol06] Ramon Nolla, *Estudis i activitats sobre problemes clau de la Història de la Matemàtica*, Publicacions de la Societat Catalana de Matemàtiques, vol. 2, 2006. 13

[Oss90] Robert Osserman, *Curvature in the Eighties*, The American Mathematical Monthly **97**, núm. 8 (1990), 731-756. 40, 84

[Rev02] Agustí Reventós, *Geometria Integral Hiperbòlica*, Diversitas (Universitat de Girona) **34** (2002), 113-130, homenatge al professor Lluís Santaló i Sors. 122

[Rev04] ______, *Un nou món creat del no-res, un món on es pot quadrar el cercle!*, Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques **19**, núm. 2 (2004), 47-83. També: Conferència de Sant Albert, Facultat de Ciències de la UAB, 17 de novembre de 2004. Dipòsit legal B.44.926-2004. 10, 117

[Rie67] Georg Friedrich Bernhard Riemann, *Über die Hypothesen welche der Geometrie zugrunde liegen,* (habilitationsvortrag), Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, **13** (1867), 133-152. El treball va ser exposat el 10 de juny de 1854; podeu trobar la versió anglesa comentada al volum *II* de [Spi79]. 170

[Rod15a] Olinde Rodrigues, *Recherches sur la théorie analytique des lignes et des rayons de courbure des surfaces, et sur la transformation d'une class d'intégrales doubles, qui ont un rapport direct avec les formules de cette théorie*, Correspondance sur l'Ecole Polytechnique, **3** (1815), 162-182. 40, 84, 97

[Rod15b] ______, *Sur quelques propriétés des intégrales doubles et des rayons de courbure des surfaces*, Bull. Soc. Philomatique, **2** (1815), 34-36. 84

[Rod05] Carlos J. Rodriguez, *La esfera imaginaria*, Publicacions del Departament de Matemàtiques, UAB, 2005, 1-33. 20, 104, 109, 162

[Ros88] Boris A. Rosenfeld, *A History of Non-Euclidean Geometry. Evolution of the Concept of a Geometric Space*, Springer-Verlag, 1988. 12, 15, 16, 53, 106, 139, 146, 188

[Sac20] Giovanni Girolano Saccheri, *Euclides ab omni naevo vindicatus*, G. B. Halsted, Chicago, Londres, 1920. 12, 14

[San61] Lluís Antoni Santaló, *Geometrías no euclidianas*, Eudeba, Buenos Aires, 1961. 124

[Spi79] Michael Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, Inc. Berkeley, 1979, 2a ed., 5 v. 46, 48, 60, 192

[Str70] Dirk J. Struik, *Geometría Diferencial clásica*, Aguilar, 1970. 50, 60

[Stä01] Paul Stäckel, *Friedrich Ludwig Wachter, ein Beitrag zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie*, Math. Ann. **LIV** (1901), 49-85. En aquest article estan reimpreses cartes de Wachter sobre el tema, i el seu tractat *Demostratio axiomatis geometrici in Euclideis undecimi*, de 1817; vegeu [Bon55], pàg. 62-63. 16

[VW67] Oswald Veblen i John Henry Whitehead, *The foundations of differential geometry*, Cambridge University Press, 1967, primera edició el 1932. 170

[Wey51] Hermannn Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Chelsea, 1951, reimprès de l'obra publicada a Leipzig el 1923, primera edició de 1913. 170

Índex terminològic

Índex onomàstic

Apéndice C

What Did Gauss Read in the Appendix


HISTORIA MATHEMATICA
Vol. 39, Issue 3, pp. 265-386/August 2012
International journal of history of mathematics

Available online at www.sciencedirect.com

SciVerse ScienceDirect

Historia Mathematica 39 (2012) 292–323

HISTORIA MATHEMATICA

www.elsevier.com/locate/yhmat

What did Gauss read in the *Appendix*?

Judit Abardia [a,*], Agustí Reventós [b], Carlos J. Rodríguez [b,c]

[a] *Institut für Mathematik, Goethe-Universität Frankfurt, Frankfurt, Germany*
[b] *Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra (Barcelona), Spain*
[c] *Universidad del Valle, Cali, Colombia*

Available online 4 May 2012

Abstract

In a clear analogy with spherical geometry, Lambert states that in an "imaginary sphere" the sum of the angles of a triangle would be less than π. In this paper we analyze the role played by this imaginary sphere in the development of non-Euclidean geometry, and how it served Gauss as a guide. More precisely, we analyze Gauss's reading of Bolyai's *Appendix* in 1832, five years after the publication of *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, on the assumption that his investigations into the foundations of geometry were aimed at finding, among the surfaces in space, Lambert's hypothetical imaginary sphere. We also wish to show that the close relation between differential geometry and non-Euclidean geometry is already present in János Bolyai's *Appendix*, that is, well before its appearance in Beltrami's *Saggio*. From this point of view, one is able to answer certain natural questions about the history of non-Euclidean geometry; for instance, why Gauss decided not to write further on the subject after reading the *Appendix.*

Zusammenfassung

In einer deutlichen Analogie mit der Kugelgeometrie behauptet Lambert, dass in einer "imaginären Kugelfläche" die Summe der Winkel eines Dreiecks kleiner als π sein würde. In diesem Artikel analysieren wir die Rolle, die diese imaginäre Kugelfläche in der Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie gespielt hat, und wie Gauss sie als Orientierungshilfe benutzte. Insbesondere analysieren wir die Lektüre, die Gauss 1832—fünf Jahren nach der Veröffentlichung der *Disquisitiones generales circa superficies curvas*—zu Bolyais *Appendix* gemacht hat, unter der Annahme, dass seine Forschung über die Grundlagen der Geometrie darauf gezielt hat, Lamberts hypothetische imaginäre Kugelfläche unter den Flächen im Raum zu finden. Wir möchten hiermit auch zeigen, dass der enge Zusammenhang zwischen der Differentialgeometrie und der nichteuklidischen Geometrie schon mit János Bolyais *Appendix* vorkommt, deutlich früher als Beltramis *Saggio*. In dieser Hinsicht können gewisse natürlich Fragen der Geschichte der nichteuklidischen Geometrie beantwortet werden; zum Beispiel: Warum entschloss sich Gauss nach der Lesung des *Appendix* dazu, nicht mehr über die nichteuklidische Geometrie zu schreiben?

MSC: 01A55; 51-03

Keywords: Non-Euclidean geometry; Imaginary sphere; Gauss; Lambert; Bolyai

* Corresponding author.
E-mail address: abardia@math.uni-frankfurt.de (J. Abardia).

http://dx.doi.org/10.1016/j.hm.2012.03.004

1. The classical problem

The Greek geometer Euclid began his *Elements*[1] with a list of 23 definitions, 5 logical rules, and 5 postulates. The fifth postulate refers to parallel lines, which are defined as those "straight lines which, being in the same plane and being produced indefinitely in both directions, do not meet one another in either direction."[2] The fifth postulate states that: "If a straight line falling on two straight lines makes the interior angles on the same side less than two right angles, then the two straight lines, if produced indefinitely, meet on that side on which the angles are less than two right angles."

The 'problem of the fifth postulate' consists of demonstrating that this postulate is a consequence of the other four postulates of the *Elements*. Since this postulate is equivalent to the existence and uniqueness of a straight line parallel to a given straight line through a given point, research in this direction is called 'theory of parallels.'

Since Euclid, many mathematicians have tried to prove the fifth postulate. Posidonius attempted to solve the problem in the first century B.C., when he confused parallel straight lines with equidistant straight lines [Bonola, 1955, 2]. We can also mention Ptolemy (second century A.D.), Proclus (410–485), Nasîr-Eddîn (1201–1274), Giordano Vitali (1633–1711), John Wallis (1616–1703), and Adrien-Marie Legendre (1752–1833), among others.[3]

One of the most important works on the topic was Giovanni G. Saccheri's *Euclides ab omni naevo vindicatus*, published in 1733 [Saccheri, 1733]. He introduced what is nowadays called 'Saccheri's quadrilateral'—a quadrilateral in which two opposite sides are equal in length and perpendicular to the base. First he proved, using only the first four postulates (absolute geometry), that the summit angles of his quadrilateral are equal. Hence they can be right (Euclidean case), obtuse (Saccheri arrives at a contradiction), or acute. This third case is known as the 'hypothesis of the acute angle' or the 'third hypothesis.' We shall call 'new plane' a plane verifying the four first postulates of Euclid and, instead of the fifth, the hypothesis of the acute angle.

Saccheri's aim was to find a contradiction in this new plane and hence prove that the fifth postulate is, in fact, a theorem of Euclidean geometry. He proved, for example, the remarkable fact that under the hypothesis of the acute angle there are asymptotic straight lines (the word asymptotic is not used by Saccheri). At the end of [Saccheri, 1733], he claims that he had the contradiction he was looking for. Concretely, Proposition XXXIII says, "the hypothesis of the acute angle is absolutely false; because it is repugnant to the nature of the straight line."[4] The only error he committed was to consider points at infinity as ordinary points of the new plane, see [Dou, 1970, 391]. This was motivated by the fact that he disliked some of the results he had obtained because they went against his Euclidean intuition.

Johann H. Lambert in his *Theorie der Parallellinien* [1786] developed the theory of parallels in a way similar to that of Saccheri, but without claiming that he had arrived at a contradiction. Lambert used what is today called a 'Lambert quadrilateral'—a quadrilateral with three of its angles right angles. The fourth angle can be right (the Euclidean case), obtuse (Lambert arrives at a contradiction), or acute. He also obtained many interesting

1 See, for instance, [Euclid, 1956, 154–155].
2 Definition XXIII of Book I.
3 For further details, see [Rosenfeld, 1988; Bonola, 1955].
4 "Hypothesis anguli acuti est absolute falsa; quia repugnans naturae liniae rectae."

results, but his conclusion was, "I am tempted to conclude that the third hypothesis[5] holds for some imaginary sphere."[6]

The idea of considering a sphere of imaginary radius and its analogy with an ordinary sphere turned out to be the most important tool for the discovery of non-Euclidean geometry. We shall use the term 'Analogy' to denote the method by which, using formal substitution, R is replaced by the imaginary number Ri in all formulas that appear in the study of the geometry of a sphere of radius R, recalling that $\sin ix = i \sinh x$, and $\cos ix = \cosh x$.[7] The formulas thus obtained will be valid in the new plane.

However, the slow acceptance of complex numbers during the 18th and the early 19th century meant that the method of the Analogy was little discussed. Carl F. Gauss, however, was one of the exceptions. In [1831] he argued that complex numbers describe the plane (the basic example of a doubly extended quantity) in the same way that real numbers describe the line (the basic example of a simply extended quantity). In his famous letter on non-Euclidean geometry to Farkas Bolyai of 6 March 1832, Gauss suggested to Farkas that he should study complex numbers, thus relating non-Euclidean geometry and complex numbers (see Section 7, Letter 8).

The problem of the fifth postulate was resolved in the negative at the end of the 19th century. The definitive proof is attributed to Eugenio Beltrami (1835–1900) in his work *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea* [1868].[8] In this work he studies a "surface" given by the unit disc endowed with a length element, which he gives explicitly, with respect to which the curvature is constant and negative.[9] The *Saggio* can be read as the construction of a model of the new plane: its points are the points inside a circle in the Euclidean plane, the distances between these points are calculated from a length element defined by analogy with the length element of the real sphere, its straight lines are the chords, and parallel straight lines are chords meeting at a point on the circumference of the circle. In this way one obtains a geometry satisfying all of Euclid's postulates except the fifth. This geometry is the so-called non-Euclidean geometry.

[5] The third hypotheses of Lambert and Saccheri are, in fact, equivalent.

[6] "Ich sollte daraus fast den Schlufs machen, die dritte Hypothese komme bey einer imaginären Kugelfläche vor" [Lambert, 1786, 354]. Although he does not say so explicitly, it is possible that this observation comes from the comparison of the formulas for the area of a triangle (spherical and non-Euclidean)

$$A = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi),$$
$$A = R^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma).$$

Lambert included a statement of the second formula in [1786, Section 82]. See Footnote 22. In 1980 Boris L. Laptev stated that Lambert also arrived at a contradiction; see [Rosenfeld, 1988, 101; Rodríguez, 2006].

[7] We have developed the importance of the Analogy in the discovery of non-Euclidean geometry in [Reventós and Rodríguez, 2005; Rodríguez, 2006].

[8] As Jeremy Gray remarked [1987b, 29], Beltrami was not aware of this, and it was Roberto Bonola who in fact noticed it when reading Beltrami. See [Bonola, 1955, 138, 177, 234]. The first to announce that Beltrami had shown the impossibility of proving the fifth postulate was Guillaume-Jules Hoüel (1823–1886) [1870], but his proof was incomplete, see [Voelke, 2005].

[9] The observation that metric relations are independent of coordinates, important in Beltrami's work, appears clearly in Riemann's Habilitatsionsschrift [1867] and in Liouville's manuscripts of 1851; see [Lützen, 1990, 751]. But the *Saggio* was written before Beltrami read Riemann's work, posthumously published in 1868.

Many articles have been written about the history of non-Euclidean geometry. However, we believe that the close relation between classical and differential geometry and the key role played by the imaginary sphere in the discovery of non-Euclidean geometry have not been sufficiently emphasized.[10]

2. Lambert

Lambert, in section 11 of [1786], says,[11]

> The question is, can it [the fifth axiom] be correctly deduced from the Euclidean postulates together with the other axioms? Or, if these were not sufficient, can other postulates or axioms or both be given such that they have the same evidence as the Euclidean ones and from which the eleventh [fifth] axiom could be proved?
>
> For the first part of this question one can abstract from all that I have previously called *representation of the matter*. And since Euclid's postulates and remaining axioms are already expressed in words, it can and must be required that in the proof one never leans on the matter itself, but carries forward the proof in an absolutely symbolic way. In this respect Euclid's postulates are as so many algebraic equations, that one already has as previously given, and that must be solved for $x, y, z, \ldots$, without looking back to the matter itself.

We shall use the term 'Analytical Program' to refer to this idea by Lambert: the proof of the fifth postulate should not rely on any representation of the matter.

In our opinion, Gauss knew Lambert's work very well. One of the best experts on Lambert's work was Georg S. Klügel,[12] a close friend of Gauss's advisor Johann F. Pfaff (1765–1825). Some correspondence between Lambert and Klügel exists [Engels and Stäckel, 1895, 323]. Klügel was 11 years older than Lambert and his thesis, *Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio* (*Review of the main attempts to prove the theory of parallels*) [Klügel, 1763], which he defended on 20 August 1763, was supervised by Abraham G. Kaestner.[13] In his thesis, Klügel analyzes critically the

[10] Gray, in [1979, 236], says, "The hyperbolic trigonometry of Lobachevskii and J. Bolyai was not generally taken as a conclusive demonstration of the existence of non-Euclidean geometry until it was given a foundation in the study of intrinsic Riemannian geometry."

[11] A reprint of [Lambert, 1786] can be found in [Engels and Stäckel, 1895, 152–207]. The English translation, from which this extract is taken, is due to Albert Dou [1970, 401].

[12] Georg S. Klügel (Hamburg 1739–Halle 1812). In 1760 he entered the University of Göttingen to study theology; but he soon came under the influence of Abraham G. Kaestner (see next footnote), who interested him in mathematics and encouraged him to write his thesis on the parallel postulate. Klügel was at the University of Göttingen until 1765 when he moved to Hannover, Helmstedt and finally to Halle. Therefore, at the time of his correspondence with Lambert he was still in Göttingen. See [Folta, 1973] and the Note of Klaus Thomas Volkert [2006] presenting the German translation of Klügel's thesis. The URL with the German translation is given in Footnote 15.

[13] Abraham G. Kaestner (Leipzig 1719–Göttingen 1800). In 1756 he was appointed professor of mathematics and physics at the University of Göttingen, where he taught Gauss and Farkas Bolyai. Another of his students, Johann C. M. Bartels (1769–1836), taught Nikolai I. Lobachevsky (1792–1856). See [Goe, 1973].

experiments made so far to prove the parallel postulate. He believed in the independence of the fifth postulate and stated that Saccheri's results contradicted experience but not the axioms [Kline, 1972, 867–868].[14] For instance, when referring to equidistant straight lines, Klügel says, "It is quite clear that we use here that a line, which is at the same distance from a straight line, is itself a straight line. This can be concluded by experience and from the judgment of the eyes, not from the nature of the straight line" [Klügel, 1763, Section II].[15]

Pfaff's thesis was also supervised by Kaestner, and Gauss even stayed at Pfaff's house for several months [Dunnington, 2004, 415].

Thus, given these circumstances in Göttingen,[16] it seems unlikely that Gauss would have been unaware of Lambert's work[17] on the theory of parallels. The text was available to Gauss at the Göttingen University Library, although the records seem to show that Gauss did not withdraw it from the library.[18]

In his note of December 1818 on non-Euclidean geometry,[19] Ferdinand K. Schweikart (1780–1857) said, "That this sum [the sum of the three angles in a non-Euclidean triangle] becomes ever smaller, the more content the triangle encloses."[20] In his answer to Gerling (March 1819), Gauss said, "The defect of the angle sum in the plane triangle

---

[14] Perhaps Saccheri's work came into Gauss's hands via Klügel.

[15] "Satis apparet, sumi hic, lineam, quae a recta aequaliter semper distat, ipsam rectam esse, quod experientia et ex oculorum iudicio, non ex natura lineae rectae colligitur." The English translation is our own, made from the German translation due to Martin Hellmann accessible at http://www.uni-koeln.de/math-nat-fak/didaktiken/mathe/volkert/titel.htm.

[16] Dunnington [2004, 176] says, "When Gauss went to Göttingen, J. Wildt (1770–1844) gave a trial lecture on the theory of parallels (1795) ... and in 1801 Seyffer, the professor of astronomy, published two reviews of attempts to prove the parallel axiom. ... Gauss was very close to Seyffer, and their correspondence continued until the latter's death. Their conversations frequently touched on the theory of parallels."

[17] The famous entry [72] in his diary, "Plani possibilitatem demonstravi," is dated 28 July 1797, Göttingen.

[18] *Die Theorie der Parallellinie* [Lambert, 1786] was published posthumously as a paper in two parts in the first volume of the journal *Leipziger Magazin für die reine und angewandte Mathematik* in 1786. This journal appeared after the death of Christlieb B. Funck (1736–1786), who together with Nathanael G. Leske (1751–1786) and Carl F. Hindenburg (1741–1808), was editor for the journal *Leipziger Magazin für Naturkunde, Mathematik und Oekonomie.* Hindenburg, together with Johann Bernoulli (1667–1748), continued with the mathematical part of this journal (changing the second part of the title from *für Naturkunde, Oekonomie und Mathematik* to *für die reine und angewandte Mathematik*). The records show that Gauss withdrew three volumes of the journal *Leipziger Magazin für Naturkunde* in December 1795. Two months earlier, in October 1795 Gauss had also withdrawn Lambert's books *Beiträge zum Gebrauch der Mathematik (3 vols., Berlin, 1765–1772)* and in 1797 he withdrew the Lambert's book *Photometria* (see [Dunnington, 2004, 398–404] for the list of all books withdrawn by Gauss). Unfortunately the records for the beginning of 1796 are lost. We cannot know if Gauss withdrew exactly the volume of the journal in which we are interested, but we know that he was aware of the existence of the journal and many other works by Lambert.

[19] This note was sent to Gauss by Christian L. Gerling (1788–1864).

[20] "dass die Summen immer kleiner werden, je mehr Inhalt das Dreieck umfasst." [Halsted, 1900].

from 180° becomes, for example, not just greater as the area becomes greater, but it is exactly proportional to it."[21] It is possible that Gauss learned of this result through Lambert.[22]

3. The *Disquisitiones*

The relationship between the *Disquisitiones generales circa superficies curvas*[23] and non-Euclidean geometry can be analyzed according to the two following hypotheses, which enable certain natural questions to be answered.

1. Gauss was aware that definitive solution to the problem of the independence of the hypothesis of the acute angle was not possible with the material representation of points, lines, and planes given by diagrams. For this reason Gauss adopted Lambert's Analytical Program as the correct method for solving this problem definitively.
2. Gauss was determined to find a surface that could play the role of the imaginary sphere introduced by Lambert.[24]

Before the methods and results obtained from Lambert's Analytical Program can be generalized and applied to the study of any curved surface, an analytic treatment of spherical

[21] "Der Defect der Winkelsumme im ebenen Dreieck gegen 180° ist z.B. nicht bloss desto grösser, je grösser der Flächeninhalt ist, sondern ihm genau proportional." [Gauss, 1870–1927, vol. VIII, 182].

[22] Lambert states, "If the third hypothesis is true, ... then for each triangle the excess of 180° over the sum of its three angles is proportional to the area." ("Wenn es bey der dritten Hypothese möglich wäre, ... dass bey jedem Triangel der Ueberschuss von 180 Gr. über die Summe seiner drey Winkel dem Flächenraume des Triangles proportional wäre." [Lambert, 1786, Section 82].) Nevertheless Lambert's proof is far from rigorous. In fact, Gauss gave a synthetic proof of this in 1832 (Section 7, letter 8) assuming that the area of an ideal triangle is finite. A proof using differential methods had already been given in the *Disquisitiones*; see Footnote 23.

[23] Henceforth referred to simply as the *Disquisitiones*. It can be found in [Gauss, 1828; Dombrowski, 1979]. In this work, the Egregium theorem (cf. Footnote 27), the defect theorem (which relates the total curvature and the angles of a geodesic triangle), and the intrinsic theory of surfaces, which was the germ of Riemannian geometry, all appear for the first time.

[24] Among Gauss's manuscripts written between 1823 and 1827 there is the explicit formula for the pseudosphere,

$$y = R\sin\varphi$$
$$x = R\cos\varphi + \log\tan\frac{1}{2}\varphi$$
$$s = R\log\frac{1}{\sin\varphi},$$

preceded by the words, "For the curves whose revolution generates the opposite of the sphere, it is satisfied" ("Für die Curve, durch deren Revolution das Gegenstück der Kugel entsteht, ist:") [Gauss, 1870–1927, vol. VIII, 265]. From this expression it is clear that the curvature is $-\frac{1}{R^2}$, since the curvature of the surface of revolution obtained by rotating the curve $(x(s), y(s))$ about the x-axis, where s is the arc length, is given by

$$K = -\frac{1}{y}\frac{d^2y}{ds^2}.$$

Observe that this note on the "opposite of the sphere" was written while the *Disquisitiones* were being prepared.

geometry is required. The *Disquisitiones* constitute an attempt by Gauss in this direction, and for this reason Sections 1 and 2 are devoted to the sphere. The main result is Theorem VI of article 2 in the *Disquisitiones*.[25] This theorem, which seems unimportant in the 1827 version, plays an important role in the unpublished version of 1825.[26] In fact, the whole of spherical trigonometry can be analytically deduced from it.

The possibility of obtaining the results of spherical geometry without the use of diagrams strengthens even further the idea of looking for a surface analogous to the sphere but on which the hypothesis of the acute angle holds: the Lambert imaginary sphere. However, which surface does this imaginary sphere represent? How are triangles represented on it and what is the sum of their angles?

Perhaps the hope of finding such a surface was one of the reasons that led Gauss to write the *Disquisitiones*. Moreover, at the same time, his discoveries on the theory of surfaces, especially those relating to the possibility of developing one surface onto another, could be applied to geodesy, so that the *Disquisitiones* can also be considered as a first chapter on "advanced geodesy," as Gauss stated in his letter to Heinrich C. Schumacher (1780–1850), dated 21 November 1825.

If Gauss had understood, as Riemann did, that the plane can be 'curved' on itself, without being embedded in ordinary space, he could have developed the geometry corresponding to the hyperbolic length element. By applying the Analogy, we obtain this length element directly from the length element of the sphere.

Franz Taurinus (1794–1874) had made much progress in this direction, as can be seen from his writings of 1825 and 1826 on *logarithmic-spherical geometry* [Engels and Stäckel, 1895, 255–286; Rodríguez, 2006]. But Taurinus did not realize that the triangles he was considering were the geodesic triangles of the geometry of the hyperbolic length element.

Why did Gauss not take this step either? We believe that the most natural explanation is that Gauss was looking for this surface, the Lambert imaginary sphere, within ordinary space. We shall develop this idea in Section 8.

During his attempt to find the imaginary sphere, Gauss found the intrinsic geometry of surfaces. This brilliant discovery was included in the *Disquisitiones*, mainly in Section 12 in the Egregium theorem: "If a curved surface is developed upon any other surface whatever, the measure of curvature in each point remains unchanged."[27]

[25] The theorem is stated as follows: If L, L', L'', L''' denote four points on the sphere, and A the angle which the arcs LL', $L''L'''$ make at their point of intersection, then

$$\cos LL'' \cdot \cos L'L''' - \cos LL''' \cdot \cos L'L'' = \sin LL' \cdot \sin L''L''' \cdot \cos A.$$

[26] Gauss wrote in the 1825 version, "We shall add here another theorem, which has appeared nowhere else, as far we know, and which can often be used with advantage." ("Wir fügen noch ein anderes Theorem bei, welches unseres Wissens sonst nirgends vorkommt und öfters mit Nutzen gebraucht werden kann.") See [Gauss, 1870–1927, vol. VIII, 416] or [Gauss, 1902, 88] for the English version.

[27] "Si superficies curva in quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet." English translation from [Dombrowski, 1979, 38].

4. Gauss's isolation

In 1794, Legendre published his *Eléments de géomètrie*. In this work, and in later editions, he gave several proofs of the fifth postulate [Legendre, 1794, 1833; Bonola, 1955, 55–60]. Irrespective of whether these proofs were correct or not, it is clear that Legendre was convinced not only of the certainty of this postulate, but also that "he had finally removed the serious difficulties surrounding the foundations of geometry" [Bonola, 1955, 60]. Due to Legendre's great influence, mainly on French mathematicians, we believe that the problem of the theory of parallels was not sufficiently considered.[28] Gauss did really believe in the importance of this problem, as evidenced by his correspondence with Friedrich Bessel (1784–1846), Friedrich L. Wachter[29] (1792–1817), Farkas Bolyai, Gerling, Heinrich W. Olbers (1758–1840), and Schumacher. It was thanks to them that he received news of the important works by Schweikart, Taurinus, and János Bolyai, all of whom were either outsiders or amateur mathematicians. Lobachevsky, the other important person in this story,[30] was a professor of mathematics at the peripheral University of Kazan. Although in 1829 he had already published a text about the theory of parallels in Russian, it was not until 1840 (perhaps because his ideas on the theory of parallels were ridiculed by his Russian colleagues) that his book *Geometrischen Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* [Lobachevsky, 1955] appeared, which was read and immediately appreciated by Gauss.

5. The three ds^2 of Bolyai's *Appendix*

In this section we analyze the reading Gauss may have made of Bolyai's *Appendix* [2002] in 1832, taking into account that this was done 5 years after the publication of *Disquisitiones* and 10 years after Gauss wrote the formula for the curvature of a surface with respect to some conformally Euclidean chart. This formula appears in his personal notes with the

[28] Lützen in [1990, 739], mentioning Karin Reich, says that it was principally due to Joseph Liouville (1809–1882) that Gauss's ideas on differential geometry became known in France: "To be sure, Sophie Germain had read Gauss's *Disquisitiones generales circa superficies curvas* [1828], but during the following 15 years Lamé's theories of systems of orthogonal surfaces dominated the French scene, and Gauss's work was forgotten. In 1843, in a paper in Liouville's Journal on this subject, Bertrand admitted that 'After having written this memoir, I have learned about a memoir by Mr. Gauss entitled *Disquisitiones generales...*' [Bertrand, 1843]. The following year, Bonnet also referred to Gauss. It is not impossible that Liouville himself had called the attention of these two young talents to the *Disquisitiones*, and it is certain that when the interest in Gauss's ideas spread in France after 1847 it was due to Liouville." This happened 20 years after the publication of *Disquisitiones*.

[29] Wachter was a student of Gauss. In 1816 Wachter suggested to Gauss that a sphere of infinite radius in non-Euclidean space has Euclidean geometry; see [Gauss, 1870–1927, vol. VIII, 175–176]. Nevertheless, Wachter's explanations were quite obscure—for instance, when saying, "Then came the discomfort that the parts of this surface [sphere of infinite radius] are merely symmetric but not, as with the plane, congruent; which means the radius towards one side is infinite but towards the other imaginary." ("Es entsteht zwar die eine Unbequemlichkeit daraus, dass die Theile dieser Fläche bloss symmetrisch, nicht, wie bei der Ebene, congruent sind; oder dass der Radius nach der einen Seite hin unendlich, nach der andern imaginär ist.")

However, as Gray says, in [Dunnington, 2004, 463], "Gauss did not claim to possess knowledge of a new geometry, which surely means that even the ideas he was discussing with Wachter he considered to be hypothetical, and capable of turning out to be false."

[30] The question of priority has been widely studied; see for instance [Gray, 1989, 111].

title "The state of my investigations on the transformation of surfaces";[31] that is, after he had acquired a deep knowledge of the role played by the line element *ds* in geometry.

As is well known, when Gauss wrote to Schumacher on 17 May 1831 about the theory of parallels, and more particularly about one equivalent formulation of the fifth postulate, he said,[32] "In the last few weeks I have begun to put down a few of my own meditations, which are already to some extent nearly 40 years old. These I have never put in writing, so that I have been compelled 3 or 4 times to go over the whole matter afresh in my head. I did not wish it to perish with me."[33]

Nevertheless, some months later, in February 1832, Gauss read Bolyai's *Appendix* and decided to write nothing further on the subject. In a letter to Gerling (14 February 1832), he said, "In addition, I note that in recent days I have received a short work from Hungary on non-Euclidean geometry in which I find all of my ideas and results developed with great elegance, although in a concentrated form that is difficult for one to follow who is not familiar with the subject. The author is a very young Austrian officer, the son of a friend of my youth with whom I had often discussed the subject in 1798, although my ideas at that time were much less developed and mature than those obtained by this young man through his own reflections. I consider this young geometer, v. Bolyai, to be a genius of the first class."[34] Would Gauss have said this if he had thought that the work of Bolyai was a mere formal manipulation of concepts, along the lines of Taurinus,[35] without consistency?

Would Gauss have stopped writing his notes if he had not considered the problem completely solved?

Moreover, in the above letter to Farkas Bolyai (6 March 1832), he said,

> Now something about the work of your son. If I commenced by saying that I am unable to praise this work, you would certainly be surprised for a moment. But I cannot say otherwise. To praise it, would be to praise myself. Indeed the whole contents of the work, the path taken by your son, the results to which he is led, coincide almost entirely with my meditations, which have occupied my mind partly for the last thirty or thirty-five years. So I remained quite stupefied. So far as my own work is concerned, of which up till now I have put little on paper, my intention was not to let it be published during my lifetime. Indeed the majority of people have not clear ideas upon the question of

[31] "Stand meiner Untersuchung über der Flächen." [Gauss, 1870–1927, vol. VIII, 374–384].

[32] Gauss's letters on non-Euclidean geometry are discussed, using the Analogy, in [Reventós and Rodríguez, 2005]. See also [Reventós, 2004].

[33] "Von meinen eigenen Meditationen, die zum Theil schon gegen 40 Jahr alt sind, wovon ich aber nie etwas aufgeschrieben habe, und daher manches 3 oder 4 mal von neuem auszusinnen genöthigt gewesen bin, habe ich vor einigen Wochen doch einiges aufzuschreiben angefangen. Ich wünschte doch, dass es nicht mit mir unterginge." [Gauss, 1870–1927, vol. VIII, 220].

[34] "Noch bemerke ich, dass ich dieser Tage eine Schrift aus Ungarn über die Nicht-Euklidische Geometrie erhalten habe, worin ich alle meine eigenen Ideen und Resultate wiederfinde, mit grosser Eleganz entwicklet, obwohl in einer für jemand, dem die Sache fremd ist, wegen der Concentrirung etwas schwer zu folgenden Form. Der Verfasser ist ein sehr junger österreichischer Officier, Sohn eines Jugendfreundes von mir, mit dem ich 1798 mich oft über die Sache unterhalten hatte, wiewohl damals meine Ideen noch viel weiter von der Ausbildung und Reife entfernt waren, die sie durch das eigene Nachdenken dieses jungen Mannes erhalten haben. Ich halte diesen jungen Geometer v. Bolyai für ein Genie erster Grösse." [Gauss, 1870–1927, vol. VIII, 221].

[35] Taurinus developed non-Euclidean geometry formally using the imaginary sphere. The results were correct, but it was first necessary to prove that the imaginary sphere really existed. This work was commented on extensively by Gauss in his letter to Taurinus (see Section 7, letter 4).

which we are speaking, and I have found very few people who could regard with any special interest what I communicated to them on this subject. To be able to take such an interest it is first of all necessary to have devoted careful thought to the real nature of what is wanted and upon this matter almost all are most uncertain. On the other hand it was my idea to write down all this later so that at least it should not perish with me. It is therefore a pleasant surprise for me that I am spared this trouble, and I am very glad that it is just the son of my old friend, who takes the precedence of me in such a remarkable manner.[36]

It is in this letter that Gauss suggests the name "parasphere" for the surface called only F by János Bolyai and "horosphere" by Lobachevsky. He says, "For instance, the surface and the line your son calls F and L might be named parasphere and paracycle, respectively: they are, in essence, the sphere and circle of infinite radii. One might call hypercycle the collection of all points at equal distance from a straight line with which they lie in the same plane; similarly for hypersphere."[37] Bolyai introduces the surface F, cited in Gauss's letter above, in Section 11 of the *Appendix*.

5.1. The first ds^2

In later sections of the *Appendix*, specifically in Section 24, Bolyai proves that the relation between the length z of the paracycle (horocycle) cd, the length y of the paracycle ab, and the length x of the straight line ac (see Figure 1) is given by

$$z = ye^{-x/R},$$

where R is the constant denoted i by Bolyai (the radius of the imaginary sphere for us).

From this it is easy to see that[38]

[36] "Jetzt einiges über die Arbeit Deines Sohnes. Wenn ich damit anfange, "dass ich solche nicht loben darf": so wirst Du wohl einen Augenblick stutzen: aber ich kann nicht anders; sie loben hiesse mich selbst loben: denn der ganze Inhalt der Schrift, der Weg, den Dein Sohn eingeschlagen hat, und die Resultate, zu denen geführt ist, kommen fast durchgehends mit meinen eigenen, zum Theile schon seit 30–35 Jahren angestellten Meditationen überein. In der That bin ich dadurch auf das Äusserste überrascht. Mein Vorsatz war, von meiner eigenen Arbeit, von der übrigens bis jetzt wenig zu Papier gebracht war, bei meinen Lebzeiten gar nichts bekannt werden zu lassen. Die meisten Menschen haben gar nicht den rechten Sinn für das, worauf es dabei ankommt, und ich habe nur wenige Menschen gefunden, die das, was ich ihnen mittheilte, mit besonderm Interesse aufnahmen. Um das zu können, muss man erst recht lebendig gefühlt haben, was eigentlich fehlt, und darüber sind die meisten Menschen ganz unklar. Dagegen war meine Absicht, mit der Zeit alles so zu Papier zu bringen, dass es wenigstens mit mir dereinst nicht unterginge.

Sehr bin ich also überrascht, dass diese Bemühung mir nun erspart werden kann und höchst erfreulich ist es mir, dass gerade der Sohn meines alten Freundes es ist, der mir auf eine so merkwürdige Art zuvorgekommen ist." [Gauss, 1870–1927, vol. VIII, 220–221]. English translation from [Gray, 2004, 53–54].

[37] "So könnte z. B. die Fläche, die Dein Sohn F nennt, eine Parasphäre, die Linie L ein Paracykel genannt werden: es ist im Grunde Kugelfläche, oder Kreislinie von unendlichem Radius. Hypercykel könnte der Complexus aller Punkte heissen, die von einer Geraden, mit der sie in Einer Ebene liegen, gleiche Distanz haben; eben so Hypersphäre." [Gauss, 1870–1927, vol. VIII, 221]. English translation from [Kárteszi, 1987, 35].

[38] Observe that this metric, with the change $u = e^{x/R}, v = y/R$, is the metric of the Poincaré half-plane. This could be the "extra work" mentioned by Gray in his comments to the *Appendix*, referred to earlier [Gray, 2004, 123]. Could Gauss have done this "extra work"?

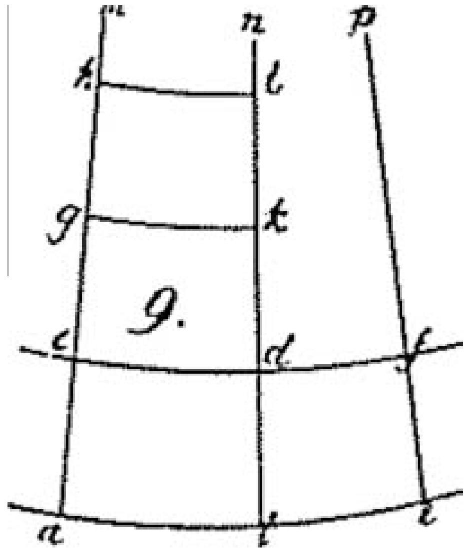


Figure 1. Figure 9 in Bolyai's *Appendix*.

$$ds^2 = dx^2 + e^{-2x/R}dy^2. \tag{1}$$

This computation, given later, could have been performed by a person with Gauss's knowledge. It is also important to point out that this expression is obtained without trigonometry and without resorting to three dimensions.

Moreover, it hardly seems possible to look at Bolyai's Figure 9 without seeing a system of local coordinates (see Figure 1).[39]

In fact, it is clear that the length element, in the sense used by Gauss, can be written in x, y coordinates as

$$ds^2 = dx^2 + f^2(x)dy^2$$

for a certain function $f(x)$, since

- this coordinate system is orthogonal[40] (so the term $dxdy$ does not appear),
- the lines $y =$ constant are geodesics parametrized by the arc length (so the coefficient of dx is 1), and
- it is invariant under translation in the y direction (so $f(x, y) = f(x)$).

To find $f(x)$, one takes the curve $\gamma(t) = (x, t)$, for a constant value of x, with $0 \leqslant t \leqslant y$ (a portion of a horocycle). The length L of γ is given by

$$L = \int_0^y |\gamma'(t)|dt = \int_0^y f(x)dt = yf(x).$$

However, since $L = ye^{-x/R}$, we have $f(x) = e^{-x/R}$.

[39] See Figure 4 for all 23 figures in the *Appendix*.
[40] The paracycles are orthogonal to the family of parallel straight lines.

5.2. The second ds^2

In Section 30, Bolyai gives the length of a circle in terms of its radius r. This relation is[41]

$$L(r) = 2\pi R \sinh \frac{r}{R}.$$

Nevertheless, calculations similar to those done to obtain (1) imply[42] that the metric in cyclic coordinates (r, θ) is given by

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} d\theta^2. \tag{2}$$

Indeed, it is clear that

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r) d\theta^2$$

for a certain function $f(r)$, since this coordinate system is orthogonal[43] (so the term $drd\theta$ does not appear), $\theta =$ constant are geodesics parametrized by the arc length (so the coefficient of dr is 1), and it is invariant under rotation (so $f(r, \theta) = f(r)$).

To find $f(r)$, one takes the curve $\gamma(t) = (r, t)$, for a constant value of r, with $a \leqslant t \leqslant b$ (a portion of the circle). The length L of $\gamma(t)$ is given by

$$L = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b f(r) dt = (b - a) f(r).$$

However, since $L(r) = 2\pi R \sinh \frac{r}{R}$, the length of γ is

$$L = (b - a) R \sinh \frac{r}{R}.$$

Hence, $f(r) = R \sinh \frac{r}{R}$, and the metric of the Bolyai plane in cyclic coordinates is the metric of the imaginary sphere.

Note that the metric of the sphere in cyclic coordinates is given by

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} d\theta^2.$$

Applying here the Analogy, we obtain expression (2).

Did Gauss see this in Section 30 of the *Appendix*? Although we are unable to prove it, we are convinced that the answer to this question is affirmative, since Gauss had all the

---

[41] This formula is given without proof by Gauss in his letter to Schumacher in 1831; see [Gauss, 1870–1927, vol. VIII, 218]. We suggest that the approach adopted by Gauss to prove the formula was the inverse of that taken by Bolyai: Gauss obtained the length of the circumference of the circle from the line element of the imaginary sphere. How Gauss arrived at this formula, so easy to explain according to our hypothesis, has not been sufficiently explained in the literature. Less influence between differential geometry and the discovery of non-Euclidean geometry than we suppose is admitted in much of the literature. For example, Gray in Gray [2006, 63] says, "there is no evidence that Gauss derived the relevant trigonometric formulas from the profound study of differential geometry that occupied him in the 1820s." See also the section *Differential geometric foundations of non-Euclidean Geometry* in [Gray, 1987a, 2007, Chapter 20]. For a slightly different point of view on this topic see [Scholz, 2004] in German or its Spanish translation by José Ferreirós in [Scholz, 2005]. The relation between non-Euclidean and differential geometry is usually believed to have first appeared in Beltrami's work [1868].

[42] This computation does not appear in the *Appendix*; but Gauss would have found it easy to do.

[43] Gauss's lemma, proved in [Gauss, 1828].

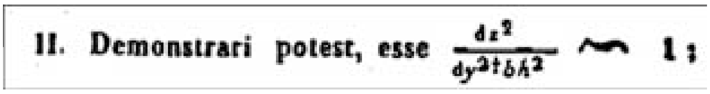

II. Demonstrari potest, esse $\frac{dz^2}{dy^2+bh^2} \sim 1$;

Figure 2. The metric of the *Appendix*.

necessary knowledge of differential geometry to perform these computations, and also because he stopped writing his notes on non-Euclidean geometry after reading Bolyai's work.

We remark that expressions (1) and (2) do not appear explicitly in Bolyai's work.

5.3. *The third* ds^2

In Section 32 of the *Appendix* a metric appears explicitly; see Figure 2.

Bolyai says,

$$\text{It can be proved that} \quad \frac{dz^2}{dy^2 + bh^2} \sim 1;$$

which, using the computation of bh given in Section 27 of the *Appendix*, is equivalent to

$$\frac{ds^2}{dy^2 + \cosh^2 \frac{y}{R} dx^2} = 1;$$

that is

$$ds^2 = dy^2 + \cosh^2 \frac{y}{R} dx^2, \tag{3}$$

which is the expression of the metric in hypercyclic coordinates.[44]

In fact, expression (3) would be apparent to anyone (Gauss, for instance) who knew the local theory of surfaces well.[45]

Specifically, it is clear that

$$ds^2 = dy^2 + f^2(y)dx^2$$

for a certain function $f(y)$, independent of x, since, by Gauss's lemma, this coordinate system is orthogonal (so the term $dxdy$ does not appear), the lines $x =$ constant are geodesics (so the coefficient of dy is 1), and it is invariant under translation in the x direction (so $f(x, y) = f(y)$).

To find $f(y)$, one takes the curve $\gamma(t) = (t, y)$ for a constant value of y, with $a \leqslant t \leqslant b$ (a portion of an equidistant line). The length of $\gamma(t)$ is

$$L = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b f(y) dt = f(y)(b - a).$$

[44] See Appendix A for details of hypercyclic coordinates.

[45] Unfortunately János Bolyai never knew Gauss's work on the theory of surfaces: Kárteszi, in [1987, 32], says, "Even of Gauss' results only a small proportion was known to him; for example, he has not heard of the investigations of Gauss in surface theory contained in the work *Disquisitiones generales circa superficies curvas* throughout his life." This fact may explain how Gauss might have recognized that Bolyai had solved the problem of the theory of parallels, while Bolyai himself did not, and so Gauss gave up writing his notes on the subject. One can only assume that it would have been clear to Gauss that expression (3) is a length element corresponding to a surface of constant negative curvature.

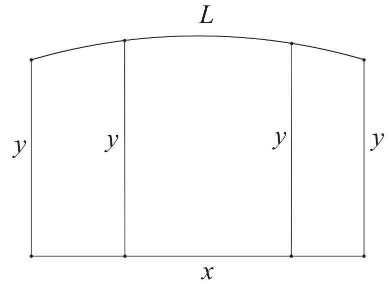


Figure 3. Mixed quadrilateral of base x and height y.

However, in Section 27 of the *Appendix*, Bolyai gives the formula for the length L of the equidistant in terms of the length x of the base and the length y of the height of the mixed quadrilateral (Figure 3). This relation is

$$L = x \cosh \frac{y}{R}.$$

Hence, $f(y) = \cosh \frac{y}{R}$, as we wished to demonstrate.

Note that the metric of the sphere in hypercyclic coordinates is given by $ds^2 = dy^2 + \cos^2 \frac{y}{R} dx^2$. Applying here the Analogy, we obtain expression (3).

Bolyai realizes the importance of the "third ds^2" and finishes Section 32, III, with these words: "The surfaces of bodies may also be determined in S,[46] as well as the *curvatures, the involutes, and evolutes* of any lines, etc."[47]

5.4. Curvature

The curvature formula

$$k = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial^2 r},$$

known by Gauss since his first version of the *Disquisitiones* in 1825, can be applied to the expressions (1), (2), and (3), with $G = e^{-2x/R}$, $G = R^2 \sinh^2 \frac{y}{R}$, and $G = \cosh^2 \frac{y}{R}$, respectively, to prove that Bolyai's plane is represented by a surface of constant negative curvature $-1/R^2$.

Gauss may have seen that Bolyai's expressions for the metric, equations (2) and (3), could be directly obtained by Analogy from the metric on the sphere written with regard to the cyclic and hypercyclic coordinates, respectively; especially (2), which gives the length of the circle directly, a formula well known to Gauss (letter to Schumacher, 17 May 1831). However, the expression for the metric in paracyclic coordinates, Eq. (1), cannot be obtained by Analogy, since the concept of paracycle is characteristic of hyperbolic geometry. However, Gauss's manuscripts on the theory of parallels of 1831 may be the beginning of a synthetic approach to finding this paracyclic metric; see [Gauss, 1870–1927, vol. VIII, 202–209].

In Appendix A, we make the change between cyclic, paracyclic, and hypercyclic coordinates explicit.

46 S is the notation used by Bolyai to refer to the new plane.

47 "Superficies quoque corporum in S determinari possunt, nec non *curvaturae, evolutae, evolventesque* linearum qualiumvis etc."

5.5. Relation with consistency

Did Gauss see that the hypercyclic coordinates on the new plane were global, unlike on the sphere, where they are not? In particular, did he see that the imaginary sphere can be covered with only one chart? Did Gauss see a proof of consistency in the *Appendix*? The letters to Gerling and Farkas Bolyai referred to above lead us to conjecture that he did. But did he have a clear concept of the problem of consistency?

Gauss, who could have done the computations that we perform in this article, did not realize that the problem of consistency had been solved, perhaps because he was trying to answer the question, 'Which surface in ordinary space has one of these metrics?' However, there does not exist such a surface in ordinary space. Although Gauss was the founder of the intrinsic geometry of surfaces, all the length elements (metrics) he used came from the Euclidean metric of ordinary space.

This epistemological mistake is very understandable: he was discovering a new world, and like many other pioneers he happened to overlook something very important. For instance, Beltrami also made the same mistake (see Footnote 8).

If one assumes that Gauss used the Analogy to find the ds^2 of the imaginary sphere, it is easy to explain all the results of the new geometry that Gauss in his letters showed that he knew. It also explains why he did not include proofs: the use of imaginary numbers was not sufficiently accepted. If Gauss had had any doubt about the consistency problem, given that he had used the Analogy and, therefore, complex numbers, it would have disappeared after he read the *Appendix*, because he found there all the necessary results deduced axiomatically and without any reference to imaginary numbers.

6. The diagrams in the *Appendix*: revision of some of Gray's comments

While we agree with Gray's comments on Bolyai's "Section 32" [Gray, 2004, 123–127],[48] we would nevertheless like to make some further remarks, which we trust will contribute to extending the recognition of Bolyai's work, which has already been acknowledged by Gray.

First of all, the coordinates used by Bolyai are the hypercyclic coordinates (the lines $x =$ constant are straight lines, while the lines $y =$ constant are equidistant lines). Thus, the expression "usual system of Cartesian (x, y) coordinates," used by [Gray [2004, 123] to denote the system of coordinates used by Bolyai, should not be misinterpreted by the reader.

Some of Gray's remarks can be considered as a moderate criticism of Bolyai's work; for instance:

— "Without as much as a hint in the direction just outlined, Bolyai supposed that his readers would recognise these arguments" [Gray, 2004, 124].
— "but it requires an interpretation that Bolyai was unwilling to provide" [Gray, 2004, 124].
— "Bolyai escaped the pedagogic problem, not for the first or only time in the *Appendix* by saying: "It can be demonstrated"" [Gray, 2004, 126].

[48] In this chapter, Gray comments on Section 32 of Bolyai's *Appendix*, stating that "János Bolyai made a series of observations whose significance seems to have escaped him and most of his commentators." [Gray, 2004, 123]. These observations are related to the method of resolving problems in the new geometry.

These comments are perfectly understandable if we accept the hypothesis that the *Appendix* was written with Gauss himself in mind. In fact, the *Appendix* was sent to Gauss in 1831[49] and the *Tentamen* was published in 1832. János Bolyai sent a first version of his work to his former professor Herr Johann Walter von Eckwehr in 1825,[50] and "on the prompting of his father" he translated it from German into Latin for publication in *Tentamen*, which was issued in Latin.[51] Given the friendship between Gauss and Farkas, it is logical to assume that Farkas had already[52] decided to send a copy to Gauss.

The writing in the *Appendix* is very concise. We do not know whether this was a result of financial difficulties[53] or whether it was for mathematical reasons. In his letter to Gerling (see above), Gauss says, "[the results of the *Appendix* are developed] in a concentrated form that is difficult for one to follow who is not familiar with the subject."

The 23 diagrams in the *Appendix*, with the caption "Tabula Appendicis" at the top on the right, reproduced here from [Bolyai, 2002, 29] in Figure 4, should not be interpreted as diagrams in the Euclidean plane, as might be erroneously inferred from Gray's remark in [2004, 124]: "He drew a picture of a curve *ABC* in the familiar Cartesian plane with x- and y-axes and outlined an interpretation of it as a picture of non-Euclidean geometry drawn in a Euclidean plane."

These figures play the same role as the figures that appear in the majority of versions of Euclid's *Elements*: they are guides for the proofs. In fact, Bolyai does not use the Euclidean plane at all. Note that in his few notes on the subject Gauss uses similar diagrams.

Nevertheless, a valid objection to Bolyai's diagrams is that he represents non-Euclidean segments in the same way that we usually represent Euclidean segments. This problem was skillfully solved by Battaglini,[54] and was the basis for the proof of consistency given by Beltrami, using a model where non-Euclidean segments are represented by Euclidean ones.

As Gray says [2004, 123], it is a pity that Bolyai did not find the hyperbolic half-plane model: "With a bit of extra work, he could have shown that the entire picture of non-Euclidean two-dimensional geometry could appear in the right half-plane (the region defined by $x > 0$), and that in his new space straight lines were curves of a certain appearance."

However, to prove consistency, it is not necessary to have this specific model of hyperbolic geometry. It suffices to have a 'plane' with an appropriate metric, as Bolyai had. But this presupposes the idea of an abstract Riemannian manifold, which was Riemann's great contribution many years later.

[49] It seems that this copy never arrived; see for instance, [Bonola, 1955, 100; Gray, 1989, 97; 1987b, 18].

[50] This manuscript has not been found. It seems that it was not returned to János. Perhaps for this reason it was not sent to Gauss until 1831.

[51] See [Bonola, 1955, XXVIII of Halsted's introduction].

[52] Perhaps as early as 3 November 1823, when he received a letter from his son in which János said, "I am determined to publish a work on parallels as soon as I can put it in order. ... All I can say now is that I have created a new and different world out of nothing." English translation from [Gray, 2004, 52].

[53] Halsted in [Bonola, 1955, XXVIII of Halsted's introduction] remarks that János contributed 104 florins and 50 kreuzers to the printing of the *Appendix*. (The yearly salary of a university professor was about 1300 florins; 60 krazers were equivalent to 1 florin.) In the opinion of Barna Szénássy, although the two Bolyais had financial difficulties throughout their lives, economy was not the main reason for the conciseness of the *Appendix*, see [Kárteszi, 1987, 224].

[54] See [Battaglini, 1867; Montesinos, 1994].

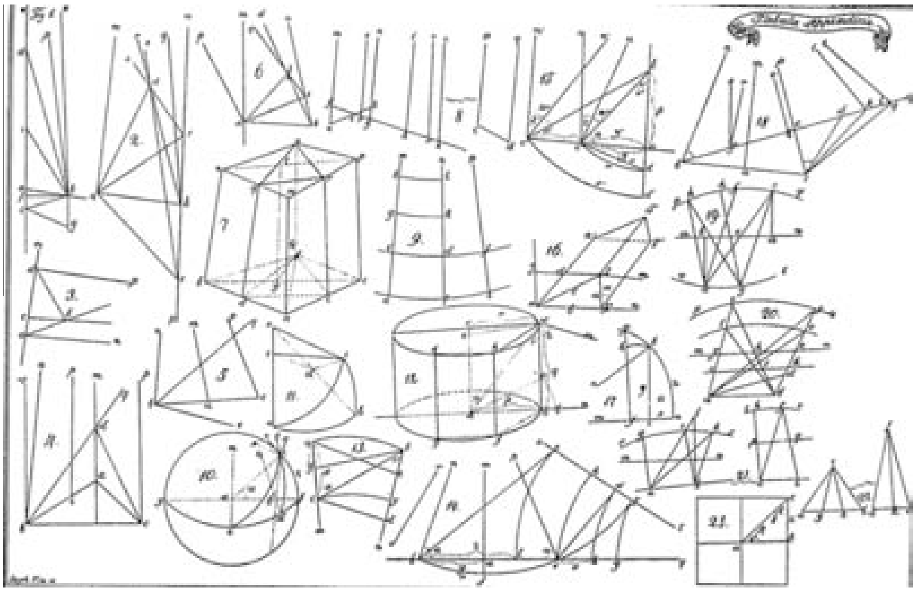


Figure 4. The diagrams in the *Appendix*.

Finally, we completely agree with Gray [2004, 126] when he says, "But the fact that Bolyai got as close as he did to formulating the elements of his new geometry in terms of the calculus is striking testimony to his insight, and seems not to have been appreciated sufficiently in his day or since."

7. The problem of the independence of the fifth postulate

In Gauss's time the consistency of Euclidean geometry was accepted without discussion. But this was not the case with the geometry arising from the negation of the fifth postulate. Perhaps because of the surprising results, a proof of the consistency of this new geometry was needed.

There are some letters written or received by Gauss in which "astral" geometry or "non-Euclidean" geometry is discussed,[55] and from which we can deduce that Gauss was convinced of the consistency of this new geometry. We mention the following:

1. Gauss to Olbers. Göttingen, 28 April 1817. "Wachter has written a short note on the foundations of the geometry. … I am becoming more and more convinced that the necessity of our geometry cannot be proved, at least not by human reason nor for human reason. Perhaps in another life we will be able to obtain insight into the nature of space, which is now unattainable. Until then we must place geometry not in the same class with arithmetic, which is purely a priori, but with mechanics." [56]

[55] See [Gauss, 1870–1927, vol. VIII, 159–225], Grundlagen der Geometrie, Nachträge zu Band IV, for Gauss's complete correspondence on the subject.

[56] "Wachter hat eine kleine Piece drucken lassen über die ersten Gründe der Geometrie. … Ich komme immer mehr zu der Überzeugung, dass die Nothwendigkeit unserer Geometrie nicht bewiesen werden kann, wenigstens nicht vom menschlichen Verstande noch für den menschlichen Verstand. Vielleicht kommen wir in einem andern Leben zu andern Einsichten in das Wesen das Raums, die uns jetzt unerreichbar sind. Bis dahin müsste man die Geometrie nicht mit der Arithmetik, die rein a priori steht, sondern etwa mit der Mechanik in gleichen Rang setzen." [Gauss, 1870–1927, vol. VIII, 177]. English translation from [Gray, 2007, 91].

2. Schweikart's Note to Gauss. Marburg, December 1818. "There are two kinds of geometry: a geometry in the strict sense—the Euclidean; and an astral geometry." [57]
3. Gauss to Gerling. Marburg, 16 March 1819. "The letter of Herr Professor Schweikart has given me extraordinary pleasure, ... because although I can really imagine that the Euclidean geometry is not correct, ..."[58]
4. Gauss to Taurinus. Göttingen, 8 November 1824. "The assumption that the sum of the three angles (of a triangle) is less than 180° leads to a special geometry, quite different from ours (Euclidean), which is absolutely consistent and which I have developed quite satisfactorily for myself, so that I can solve every problem in it, with the exception of the determination of a constant which cannot be found out a priori. ... All of my efforts to find a contradiction, an inconsistency in this non-Euclidean geometry have been fruitless."[59]
5. Gauss to Bessel. Göttingen, 27 January 1829. "My conviction that we cannot base geometry completely a priori has, if anything, become even stronger."[60]
6. Bessel to Gauss. Königsberg, 10 February 1829. "Through that which Lambert said, and what Schweikart disclosed orally, it has become clear to me, that our geometry is incomplete, and should receive a correction, which is hypothetical and, if the sum of the angles of the plane triangle is equal to a hundred and eighty degrees, vanishes."[61]
7. Gauss to Bessel. Göttingen, 9 April 1830. "According to my most intimate conviction, the theory of space has a completely different position with regards to our knowledge a priori, than the pure theory of magnitudes. Our knowledge of the former lacks completely that absolute conviction of its necessity (and therefore of its absolute truth) which is characteristic of the latter."[62]

---

[57] "Es gibt eine zweifache Geometrie,—eine Geometrie im engern Sinn—die Euklidische; und eine astralische Grössenlehre." [Gauss, 1870–1927, vol. VIII, 180]. English translation from [Gray, 2007, 92].

[58] "Die Notiz von Hrn. Prof. Schweikart hat mir ungemein viel Vergnügen gemacht, ... denn obgleich ich mir recht gut die Unrichtigkeit der Euklidischen Geometrie denken kann, ..." [Gauss, 1870–1927, vol. VIII, 181]. English translation partly from [Gray, 1989].

[59] "Die Annahme, dass die Summe der 3 Winkel kleiner sei als 180°, führt auf eine eigene, von der unsrigen (Euklidischen) ganz verschiedene Geometrie, die in sich selbst durchaus consequent ist, und die ich für mich selbst ganz befriedigend ausgebildet habe, so dass ich jede Aufgabe in derselben auflösen kann mit Ausnahme der Bestimmung einer Constante, die sich a priori nicht ausmitteln lässt. ... Alle meine Bemühungen, einen Widerspruch, eine Inconsequenz in dieser Nicht-Euklidischen Geometrie zu finden, sind fruchtlos gewesen." [Gauss, 1870–1927, vol. VIII, 187]. English translation partly from [Dunnington, 2004, 181].

[60] "Meine Überzeugung, dass wir die Geometrie nicht vollständig a priori begründen können, ist, wo möglich, noch fester geworden." [Gauss, 1870–1927, vol. VIII, 200]. English translation from [Gray, 2007, 95].

[61] "Durch das, was Lambert gesagt hat, und was Schweikart mündlich äusserte, ist mir klar geworden, dass unsere Geometrie unvollständig ist, und eine Correction erhalten sollte, welche hypothetisch ist und, wenn die Summe der Winkel des ebenen Dreiecks = 180° ist, verschwindet." [Gauss, 1870–1927, vol. VIII, 201]. English translation from [Halsted, 1900, 252].

[62] "Nach meiner innigsten Überzeugung hat die Raumlehre in unserm Wissen a priori eine ganz andere Stellung, wie die reine Grössenlehre; es geht unserer Kenntniss von jener durchaus diejenige vollständige Überzeugung von ihrer Nothwendigkeit (also auch von ihrer absoluten Wahrheit) ab, die der letztern eigen ist." [Gauss, 1870–1927, vol. VIII, 201]. English translation from [Ferreirós, 2007b, 209–210].

8. Gauss to Farkas Bolyai.[63] Göttingen, 6 March 1832. "That it is impossible to decide a priori between Σ and *S* is the clearest evidence of the mistake Kant had made when stating that space was merely the form of our looking at things. I pointed out another, equally strong, reason in a short paper to be found in the year 1831 volume of the Göttingischen Gelehrten Anzeigen as item 64 on p. 625.[64] Perhaps it will not be a disappointment if you try to procure that volume of the G.G.A. (which may be accomplished through any bookseller in Vienna or Buda[65]), as you also find there, developed in a few pages, the essence of my views concerning imaginary quantities."[66]

The arguments put forward by Gauss in these letters for the belief in the consistency of non-Euclidean geometry were of an inductive and physical type. Inductive: no matter how much he had searched for an inconsistency with the hypothesis of the acute angle, he had been unable to find it. Physical: although Euclidean geometry was a very good candidate for the geometry of physical space, a "non-Euclidean" geometry with a small negative curvature could also provide the answer.

Did Gauss have the concept of a mathematical model? Probably not, but it is not unrealistic to think that he may have entertained the idea that a surface in the space of three dimensions, with constant negative curvature and without singularities (the "opposite of the sphere"[67] mentioned in Footnote 24 had singularities), could be a proof of the possibility of a new plane. We completely agree with [Burago et al., 2001, 158] on this point.[68]

In the above-mentioned letter of 1832 to Farkas Bolyai, Gauss says that he had obtained the same results as Farkas's son and in similar ways. Nevertheless, in his letter to

[63] This letter is commented on in Sections 1 and 5 of this paper. See also Footnote 73.
[64] See [Gauss, 1831]. In this paper Gauss gives the geometrical interpretation of complex numbers.
[65] The German name for Buda is Ofen. Budapest became a single city with the unification in 1873 of Buda and Óbuda (Old Buda) together with Pest.
[66] "Gerade in der Unmöglichkeit, zwischen Σ und *S* a priori zu entscheiden, liegt der klarste Beweis, dass Kant Unrecht hatte zu behaupten, der Raum sei nur Form unserer Anschauung. Einen andern ebenso starken Grund habe ich in einem kleinen Aufsatze angedeutet, der in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen 1831 steht Stück 64, pag. 625. Vielleicht wird es Dich nicht gereuen, wenn Du Dich bemühest Dir diesen Band der G.G.A. zu verschaffen (was jeder Buchhändler in Wien oder Ofen leicht bewirken kann), da darin unter andern auch die Quintessenz meiner Ansicht von den imaginären Grössen auf ein Paar Seiten dargelegt ist." [Gauss, 1870–1927, vol. VIII, 224]. English translation from [Kárteszi, 1987, 35].
[67] "Gegenstück der Kugel."
[68] In his letters, Gauss did express his personal belief that there is no contradiction in the axioms of non-Euclidean geometry. He had an ill-fated, though extremely wise idea of how to construct a model: he wanted to realize non-Euclidean geometry as the intrinsic geometry of some surface in ordinary space—the same way the geometry of the 'obtuse angle' is realized by Euclidean spheres. Gauss even found small embedded regions with the desired properties (so-called pseudo-spheres), but he was unable to realize the whole plane. This led him to suspect that a contradiction was still hidden somewhere.

Schumacher, dated 1846, he says that Lobachevsky had obtained the same results but in a different way:[69] “in the work of Lobachevsky I did not find new results, but the development follows a different approach to the one I took, and indeed Lobachevsky carried out the task in a masterly fashion and in a truly geometric spirit”[70] [Reventós and Rodríguez, 2005, 106]. Perhaps this “different approach” refers to the use of the length element of the imaginary sphere, which he obtained by Analogy (whereas János Bolyai had deduced one of these length elements explicitly, and the other two implicitly). However, as Gauss was unable to show a complete surface[71] in a space of three dimensions with this length element, he did not publish anything. The synthetic rewriting of the theory of parallels, which Gauss began in 1831, was far surpassed by the *Appendix*, a complete and masterly synthetic deduction of hyperbolic arc length.

Perhaps Gauss thought that non-Euclidean geometry could emerge by using the geometrical interpretation of complex numbers;[72] that would explain the suggestion made to Farkas Bolyai at the end of the letter. János indeed read Gauss’s paper,[73] and developed independently a conception of complex numbers that applied to number theory. As far as we know, János Bolyai did not relate the new geometrical conception of complex numbers to the problem of consistency of the new geometry.

It is also possible that Gauss made the same suggestion to Riemann; but Riemann was by this time occupied with other mathematical and physical problems that would lead him to the discovery of Riemann surfaces (the first example of what today is called an abstract manifold: a topological manifold which is not a submanifold of an Euclidean space!) as well as to a conception of physical space as a perfectly elastic and massless medium formed by an elastic fluid, affected by the energy–momentum of the physical fields within it. Klein compared Riemann with Faraday, who had described the electromagnetic field with the idea of “lines of force.” With Riemann, geometry became a physical geometry.

8. Looking for an imaginary sphere in ordinary space

Perhaps the most crucial mistake committed by Gauss in this matter was to look for an imaginary sphere in ordinary space. In fact, there exists no imaginary sphere, in the sense of

[69] Gauss refers to the German version [Lobachevsky, 1955], which does not use differential calculus.

[70] “Materiell für mich Neues habe ich also im Lobatschewskyschen Werke nicht gefunden, aber die Entwickelung ist auf anderm Wege gemacht, als ich selbst eingeschlagen habe, und zwar von Lobatschewsky auf eine meisterhafte Art in ächt geometrischem Geiste.” [Gauss, 1870–1927, vol. VIII, 239].

[71] A surface without singularities, where the straight lines can be extended indefinitely.

[72] In Appendix B we sketch an elementary proof of consistency using complex numbers.

[73] In his letter of 6 March 1832, Gauss recommended Farkas to read his note [Gauss, 1831] on imaginary quantities, but he does not mention [Gauss, 1832], “despite the fact that Farkas had asked him many times for his detailed work on imaginary quantities.” [Kiss, 1999, 73]. János read [Gauss, 1831] and quoted it in many places, but he was unaware of Gauss’s more important work [Gauss, 1832].

a surface of constant negative curvature, in ordinary space.[74] Therefore, the search for an imaginary sphere proved to be a futile struggle.[75] It is possible that in 1831 Gauss was aware that he would come to a dead end, and decided to take the deductive point of view. But it was too late: János Bolyai had already followed this path in the *Appendix*. The impossibility of finding a complete surface of constant negative curvature in ordinary space could have caused Gauss to doubt his belief in the consistency of non-Euclidean Geometry, and may be the main reason that he made no effort to publicize the *Appendix*.

The *Appendix* proves that the problem of consistency is almost the same in both geometries: the parasphere (a surface of non-Euclidean space) has Euclidean geometry (see Footnote 29). Hence, for symmetry, it seems reasonable to look for an imaginary sphere in ordinary space.

It would be interesting to answer the following question: Why did Gauss only look at surfaces in three-dimensional space?

A possible answer is that numbers and geometry were understood on different levels, in the sense that the identification of the real numbers $\mathbb{R}$, and the sets $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$ as geometrical objects had yet to be clearly made. Gauss and other contemporary mathematicians did not identify the set of pairs of real numbers with the points of the plane, as is done today. It was necessary to wait for Dedekind for the foundation of real numbers; he probably learned from Riemann the importance of thinking about mathematics conceptually, in order to take the definitive step towards the geometrization of $\mathbb{R}^n$.

As Ferreirós has observed, it is precisely with Riemann that the idea of a conceptual mathematics arises: a mathematics that studies manifolds and their mappings [Ferreirós, 2000, 93–95; 2007a]. Riemann took this giant step because he needed to extend geometric intuition to areas of mathematics different from geometry. However, at the same time, he also found the study of multiply extended quantities useful for thinking about geometry without any spatial intuition [Ferreirós, 2000, 94]; Riemann coincides on this point with Lambert and his Analytical Program, which was introduced with the hope of solving the classical problem of the Euclidean theory of parallels [Reventós and Rodríguez, 2005, 16]. This program was completed by Hilbert in his fundamental work on the foundations of geometry, using set theory introduced by Cantor [Hilbert, 1899]. As Hilbert said: "No one shall expel us from the paradise that Cantor has created for us."[76]

[74] The interpretation of Gaussian curvature as the product of principal curvatures, and hence equal to $1/R^2$ for a sphere of radius R, appears in the first version of *Disquisitiones* in 1825. In fact, Olinde Rodrigues essentially proved it in 1815 when he proved what today we know as the Gauss–Bonnet theorem, see [Rodrigues, 1815]. Indeed, Rodrigues in his study of the integral of the product of the principal curvatures says, "Let us imagine a sphere with radius equal to the unit; and let us move the radius of this sphere in a way such that it will be parallel to all the normals of the piece of the surface which we want to integrate. The area described by the endpoint of this radius will coincide with the value of the desired integral." ("Concevons une sphère d'un rayon égal à l'unité; puis faisons mouvoir le rayon de cette sphère, de manière qu'il soit successivement parallèle à toutes les normales de la portion de surface sur laquelle on veut prendre l'intégrale, l'aire sphérique décrite par l'extrémité de ce rayon, sera la valeur de l'intégrale cherchée.")

[75] Hilbert [1901] proved that there exists no complete regular surface of constant negative curvature immersed in $\mathbb{R}^3$. Fifty-four years later, Kuiper [1955] proved that such a surface does exist if we change regular to $\mathcal{C}^1$.

[76] "Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können." [Hilbert, 1926, 170].

9. Non-Euclidean geometry as absolute Euclidean geometry on a reduced scale

A note by Gauss dated about 1840–1846 [Gauss, 1870–1927, vol. VIII, 255–257] was found in his copy of Lobachevsky's work *Geometrischen Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* [1955]. This note is quite short and Gauss did not give it a title.[77] However, it is referred to as "The spherical and the non-Euclidean geometry"[78] by Stäckel, who carefully commented on it. It is also commented upon in [Reichardt, 1985, Section 2.3].

Although this note was written many years after the Gauss–Bolyai relation discussed in the previous sections, we draw attention to it because it gives a clue as to how Gauss used differential geometry in order to consider problems of non-Euclidean geometry. Perhaps Gauss was trying to arrive at the same conclusions as Lobaschevsky, but by his own method.

Before continuing, we would like to point out that the formulas that head this note (p. 255) relating the angles and the sides of a triangle with two unknown functions f, g, and from which f and g are computed,[79] hold for absolute geometry. Indeed they can be deduced solely from absolute geometry—where the side–angle–side criterion holds—, under the hypothesis that in this absolute geometry trigonometric formulas exist that relate the sides and the angles of a triangle, and assuming that this absolute geometry is Euclidean on a reduced scale.

These two hypotheses, together with the relations between the sides of a Saccheri quadrilateral, imply the rectificability of equidistants and the rectificability of a circle (which are true in absolute geometry and were well known by Gauss at that time).[80] Using these hypotheses and relations, Gauss's note can be understood without any great difficulty. Although Stäckel's explanations in [Gauss, 1870–1927, vol. VIII, 257–264] are totally clear and can be followed easily, we give here, for the benefit of the reader, the deduction of the first formula, adapted to our approach.

Let $\triangle ABC$ be a right-angle triangle with sides a, b, c, and assume that it is changing with time in such a way that the right angle C remains constant. Because of the SAS Theorem (side–angle–side), every trigonometric relation between A, B, C, a, b, c can be reduced to a relation between b, c, A. Thus we can assume that the relation $F(b(t), c(t), A(t)) = 0$ holds for each t. Hence, differentiating, we obtain

$$F_b \frac{db}{dt} + F_c \frac{dc}{dt} + F_A \frac{dA}{dt} = 0.$$

From the first diagram (Figure 5) we deduce

[77] In this note, not written for publication, Gauss reveals a part of his method for doing differential geometry: he applies classical geometry to a small variation of a diagram.

[78] "Die Sphärische und die Nicht-Euklidische Geometrie."

[79] The formulas are

$$\begin{aligned} ga.\partial b - \sin B.\partial c + fc.\cos B.\partial A &= 0 \\ gb.\partial a - \sin A.\partial c + fc.\cos A.\partial B &= 0 \\ \sin B.\partial a - ga.\cos B.\partial b - fc.\partial A &= 0 \\ gb.\cos A.\partial a - \sin A.\partial b + fc.\partial B &= 0. \end{aligned}$$

[80] The upper side of a Saccheri quadrilateral of equal sides a and base b is equal to $g(a)b$ for some function g, and the length of a circular sector of α radians and radius r is $f(r)\alpha$ for some function f.

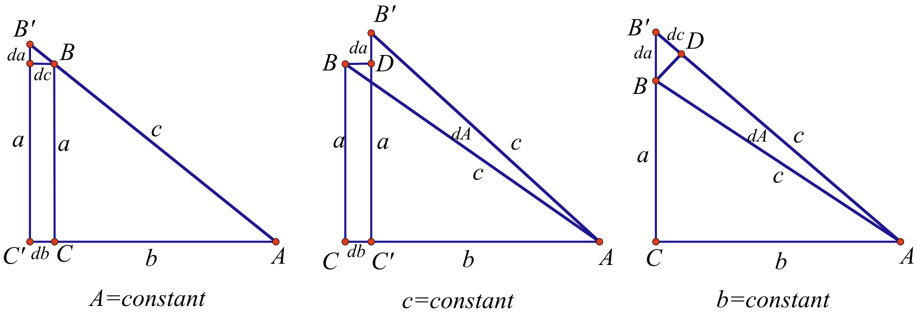


Figure 5. Stäckel's diagram redrawn, [Gauss, 1870–1927, vol. VIII, 259].

$$\sin B = \frac{g(a)db}{dc},$$

since the small triangle with hypotenuse dc can be considered as Euclidean, and one of the catheti is the top side of a Saccheri quadrilateral with base db and height a.

From the second diagram we deduce

$$\cos B = \frac{BD}{BB'} = \frac{-g(a)db}{f(c)dA},$$

since the small triangle $\triangle BB'D$ can be considered as Euclidean and BB' as the arc length of a circular sector of radius c and angle dA. The minus sign comes from the relative position between C and C'.

From the third diagram we deduce

$$\tan B = \frac{BD}{dc} = \frac{f(c)dA}{dc},$$

since the small triangle $\triangle BB'D$ can be considered as Euclidean, and BD as the arc length of a circular sector of radius c and angle dA.

From these three relations we easily compute the partial derivatives F_a, F_b, F_c (up to a constant) and obtain the first Gauss formula in [Gauss, 1870–1927, vol. VIII, 255]:

$$g(a)db - \sin Bdc + f(c)\cos BdA = 0. \tag{4}$$

In fact, these three steps, followed by Stäckel, can be viewed together in the diagram in Figure 6, since formula (4) says only that

$$FD = FE + ED.$$

From (4) and similar expressions, Gauss with his characteristic genius arrives at a second-order differential equation, which allows the functions $f(c)$ and $g(a)$ to be computed easily. Gauss assumes that the integration constant is negative ($-kk$ in Gauss's notation), thereby obtaining

$$f(x) = \frac{\alpha}{k}\sin kx,$$
$$g(x) = \cos kx,$$

and, in particular, the spherical trigonometric formulas for a sphere of radius $1/k$. Nevertheless, if we assume that the integration constant is positive, we obtain, without the introduction of imaginary numbers, the non-Euclidean trigonometric formulas (those corresponding to a sphere of radius i/k). We also remark that by arriving at these formulas Gauss obtains two of the ds^2 in the *Appendix* : expressions (2) and (3).

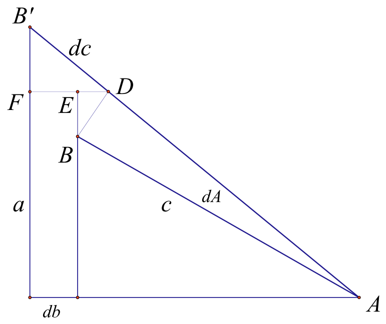


Figure 6. Representation of the three differentials.

In Section 19 of the *Disquisitiones*, Gauss computes $f'(0)$, obtaining $f'(0) = 1$; i.e., the constant α introduced by Gauss in the preceding computations is 1 if there is a tangent plane in A. In fact $\alpha \neq 1$ only if A is a singular point, such as the vertex of a cone.

In fact Gauss says [1828, Section 19]: "Generally speaking, $m[m = \sqrt{G}]$[81] will be a function of p, q and mdq the expression for the element of any line whatever of the second system. But in the particular case where all the lines p go out from the same point ... for an infinitely small value of p the element of a line of the second system (which can be regarded as a circle described with radius p) is equal to pdq, we shall have for an infinitely small value of p, $m = p$, and consequently, for $p = 0$, $m = 0$ at the same time, and $\frac{\partial m}{\partial p} = 1$."[82,83]

Why was it clear to Gauss in 1827 that the "element of any line" of the second system is pdq, while in 1840 this element is αpdq? The reason could be that in the *Disquisitiones* the argument used is that the metric is defined in the singular point $p = 0$, which is guaranteed because the metrics on the surfaces considered in the *Disquisitiones* come from the ambient metric of ordinary space.[84]

10. Conclusion

In this paper we analyze a crucial moment in the history of the discovery of non-Euclidean geometry: Gauss's reading of Bolyai's *Appendix* in 1832. We assume what we believe to be the plausible hypothesis that Gauss was following Lambert's Analytical Program and that he was looking, among surfaces in ordinary space, for Lambert's hypothetical imaginary sphere.

[81] Note that, under the hypothesis of radial symmetry, we are assuming $m = f$.

[82] Spivak, in his comments on the *Disquisitiones*, gives a more complete proof of this fact; see [Spivak, 1979, vol. 2, 84 and 120].

[83] "Generaliter loquendo m erit functio ipsarum p, q atque mdq expressio elementi cuiusvis lineae systematis. In casu speciali autem, ubi omnes lineae p ab eodem puncto proficiscuntur, manifesto pro $p = 0$ esse debet $m = 0$; porro si in hoc casu pro q adoptamus angulum ipsum, quem elementum primum cuiusvis lineae primi systematis facit cum elemento alicuius ex ipsis ad arbitrium electae, quum pro valore infinite parvo ipsius p, elementum lineae secundi systematis (quae considerari potest tamquam circulus radio p descriptus), sit $= pdq$, erit pro valore infinite parvo ipsius p, $m = p$, adeoque, pro $p = 0$ simul $m = 0$ et $\frac{dm}{dp} = 1$."

[84] Many years later, the introduction of conical singularities into the study of hyperbolic manifolds led to the introduction of metrics of the type $ds^2 = dp^2 + \alpha^2 R^2 \sin^2 \frac{p}{R} dq^2$, which verify $f'(0) = \alpha$. All these metrics, for different values of α, have the same curvature, but the length of the element of a line $p =$ constant is αpdq.

Gauss placed this reading on record in two letters; one to Gerling in February 1832 and another longer letter to Bolyai's father in March 1832.

In the letter to Farkas, Gauss says,

1. "The way followed by your son, and the results he obtained agree almost from beginning to end with the meditations I had been engaged in partly for 30–35 years already."
2. "I had planned to write down everything in the course of time ... now I can save myself this trouble."
3. "Perhaps it will not be a disappointment if you try to procure that volume ... as you also find there, developed in a few pages, the essence of my views concerning imaginary quantities."

We answer some natural questions arising from these statements by Gauss:

1. What approach was adopted by Gauss in his meditations? Was it the same as that adopted by Bolyai?
2. Why did Gauss feel that there was no longer any need to write anything more about it?
3. What is the relation between imaginary quantities and the problem of the theory of parallels?

In Section 5 we saw how Bolyai axiomatically deduces a formula for ds^2 in the hypercyclic coordinate system, which is the system most similar to that of rectangular coordinates in Euclidean geometry. This shows that he wanted to follow the method of the differential geometry of his time: he was looking for an arc length element in the new plane. Gauss says in his letter that the approach adopted by Bolyai is the same as his. However, Bolyai was not familiar with the *Disquisitiones* and did not recognize the two first ds^2. Nevertheless, it seems clear that they were indeed recognized by Gauss.

In 1831, Gauss gave up searching for Lambert's imaginary sphere in ordinary space and opted for the deductive method: after studying the transitivity of parallelism, he described synthetically the paracycle [Gauss, 1870–1927, vol. VIII, 202–209; Bonola, 1955, 67–74]. However, in January 1832, after reading the *Appendix*, he gave up writing about such a difficult subject: the son of his old friend Farkas had "wonderfully outmatched him."

In the *Appendix*, Bolyai gives the rectification of the paracycle. This should have allowed him to deduce the first ds^2, but he failed to notice it. The new geometry can be deduced from this arc length element with the methods of the *Disquisitiones*; Bolyai had to deduce the third ds^2 to arrive at this conclusion.

The problem of consistency still remained to be solved. This would have been possible had Lambert's imaginary sphere been found. However, this depended on the consistency of imaginary quantities, a question resolved by Gauss in his note of 1831 (that he recommended for reading to F. Bolyai). Gauss was right: in Appendix B we see how the Analogy and the complex plane as conceived by Gauss lead naturally to the Poincaré disc model of the hyperbolic plane. This shows that non-Euclidean geometry is as consistent as Euclidean geometry.

Why did Gauss not publish a review of the *Appendix*? This would have attracted the attention of the mathematical community to this important work. His fear of the Kantians, who were led by his colleague Lotze, is not a convincing reason. We provide another possible reason: Gauss hoped to find the imaginary sphere. He knew the pseudosphere, but this surface was not geodesically complete.[85] If the singularities were in some sense inevitable, Bolyai's plane would also be inconsistent. Furthermore, the *Appendix* fails to satisfy Lambert's Analytical Program: it contains 23 diagrams (see Section 6), which is far from the idea that in the proof "we should never rely on any representation of the matter."

Gauss made the mistake of expecting the imaginary sphere to be immersed in ordinary space. In 1901, Hilbert proved that there exists no complete regular surface of constant negative curvature immersed in ordinary space. For Gauss, the length element ds is always the length element of a surface in the space. The notion of an abstract surface had yet to appear.

Finally, for completeness, we showed how Gauss uses differential geometry in considering problems of non-Euclidean geometry. We also showed how Gauss again addresses singularities and eventually finds the last two ds^2 of the *Appendix*.

Acknowledgments

We are grateful to Professor Jeremy Gray for his valuable comments after a reading of a first draft of this paper and for drawing our attention to the references [Reichardt, 1985] and [Gauss, 1870–1927, vol. VIII, 175–178 and 250–265]. We are indebted to the anonymous reviewers and to the editor, June Barrow-Green, for all their interesting and enriching comments and suggestions. We thank also Doris Potosí for helpful comments and suggestions. This research was partially supported by FEDER/Micinn through Grant MTM2009-0759.

Appendix A. Coordinate systems

In the hyperbolic plane, apart from the polar or "cyclic" coordinates and the cartesian or "hypercyclic" coordinates, there are also the "paracyclic" or "horocyclic" coordinates in which one of the distances is measured on paracycles. See Figure 7.

Cyclic (r, α). Here, r is the distance between the point P and the origin O; and α is the angle between the straight line PO and a given straight line through O. Observe that $r =$ constant is a hyperbolic circle.

Hypercyclic $(\bar{x}, \bar{y})$. Here, $\bar{x}$ is the distance between the origin O and the point Q, the intersection of the straight line through P orthogonal to a given straight line through O; and $\bar{y}$ is the distance between the point P and Q. Observe that $\bar{y} =$ constant is a hypercycle (equidistant).

Both cyclic and hypercyclic coordinates were introduced and widely used by Gauss in the *Disquisitiones*.

Paracyclic (x, y). Here, x is the distance between the origin O and the point Q, given as the intersection of a given straight line through O and the horocycle through P with axis this line; and y is the length of the horocycle OR, where R is the intersection of the axis through P with the horocycle of this family through O. Observe that $x =$ constant is a paracycle (horocycle).

Recall that three points of the hyperbolic plane determine a straight line, a circle, a hypercycle or a paracycle. The assumption that three points not on a line determine a circle is equivalent to the fifth postulate. In fact, this was the mistake made by Farkas Bolyai in his proof of this postulate.

[85] A surface is geodesically complete when the geodesics are defined for all values of the arc-length parameter.

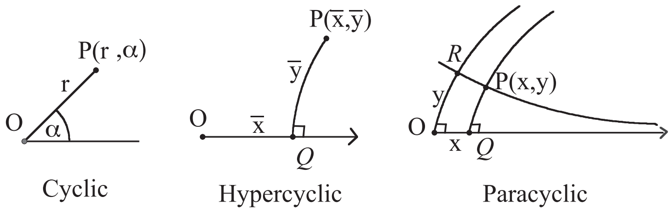


Figure 7. Three coordinate systems.

A.1. Hypercyclic–cyclic

The change of coordinates cyclic–hypercyclic is immediate by applying trigonometry to a right triangle of sides $\bar{x}, \bar{y}$ and hypotenuse r (see [Reventós and Rodríguez, 2005, 120]):

$$\cosh\frac{r}{R} = \cosh\frac{\bar{x}}{R}\cosh\frac{\bar{y}}{R},$$
$$\sinh\frac{\bar{y}}{R} = \sinh\frac{r}{R}\sin\theta.$$

From this system we can write $x = x(r,\theta)$, $y = y(r,\theta)$. In particular,

$$d\bar{y}^2 + \cosh^2\frac{\bar{y}}{R}d\bar{x}^2 = dr^2 + R^2\sinh^2\frac{r}{R}d\theta^2.$$

A.2. Hypercyclic–paracyclic

Let us assume that the point P has hypercyclic coordinates $(\bar{x}, \bar{y})$, and paracyclic coordinates (x, y).

In Figure 8, CO and PA are arcs of horocycles orthogonal to the parallel straight lines CP, OA. The hypercyclic coordinates are given by $\bar{x} = OB$, $\bar{y} = PB$; the paracyclic coordinates are given by $x = OA$, $y = CO$.

The relation between the length z of the horocycle PA and the length $\bar{y}$ of the straight line PB is

$$z = ye^{-x}. \tag{A.1}$$

Also

$$z = \sinh\bar{y} \tag{A.2}$$

and

$$e^a = \cosh\bar{y}, \tag{A.3}$$

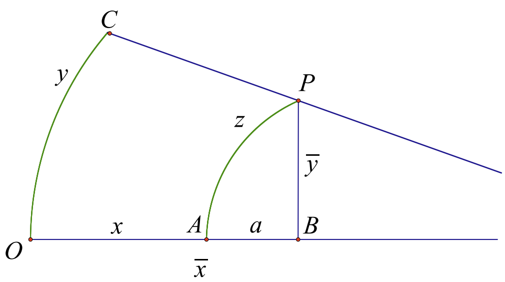


Figure 8. Relation between hypercyclic and paracyclic coordinates.

where $a = AB$. We remark that Eqs. (A.1), (A.2), and (A.3) are given directly in the *Appendix*: Eq. (A.1) in Section 24 and Eqs. (A.2) and (A.3) in Section 32. Bolyai writes $z = i \cot CBN$, which in our notation is $z = \cot \Pi(\bar{y})$, (we are assuming curvature $= -1$, i.e., $i = 1$), but it is easy to see that $\cot \Pi(\bar{y}) = \sinh \bar{y}$, and thus we have Eq. (A.2).

From these equations we can make the change of coordinates explicit:

$$\bar{x} = x + \frac{1}{2}\ln(1 + y^2 e^{-2x}),$$

$$\bar{y} = \ln(ye^{-x} + \sqrt{y^2 e^{-2x} + 1}).$$

In particular,

$$d\bar{y}^2 + \cosh^2 \bar{y} d\bar{x}^2 = dx^2 + e^{-2x} dy^2.$$

Appendix B. A wasted opportunity

As we commented in Section 2, as a result of Legendre's influence, the French mathematicians were not interested in the classical problem of the theory of parallels. Moreover, Lagrange's analytical point of view spread rapidly throughout the European mathematical community and the synthetical approach remained buried until Poincaré unearthed it again.

The wasted opportunity is revealed in the following argument which provides a construction of the Poincaré disc model of non-Euclidean geometry. The construction uses only the stereographic projection and the Analogy. So it could easily have been performed by Monge or his school in the École Polytechnique, 30 years before the *Appendix*, but they did not do it. This school had as its leitmotif the translation of geometric properties using geometric transformations; in particular, stereographic projections of quadrics over the plane. For instance, Michel F. Chasles (1793–1880) in [1937, 191] says, "From then on, Monge's students successfully cultivated Geometry of a really new kind, which has often been rightly referred to as the 'Monge School', which as we have said consists in introducing into plane Geometry considerations of three dimensional Geometry."[86]

The stereographic projection between the sphere S_R of radius R and the plane that contains the equator is given by

$$p = \frac{Rx}{R - z},$$

$$q = \frac{Ry}{R - z},$$

with $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Equivalently, the image of the point $(x, y, z) \in S_R$ is the complex number $w = p + iq$.

Let us translate the geometry of S_R to the extended complex plane $\mathbb{C}$ via this stereographic projection. First we note that the equator is given by

$$w\bar{w} = R^2.$$

Moreover, if w, w' are the images under the stereographic projection of antipodal points, then

[86] "Depuis, les élèves de Monge cultivèrent avec succès cette Géométrie, d'un genre vraiment nouveau, et à laquelle on a souvent donné, avec raison, le nom d'école de Monge, et qui consiste, comme nous venons de dire, à introduire dans la Géométrie plane des considerations de Géométrie à trois dimensions."

$$w' = -\frac{R^2}{\bar{w}}. \tag{B.1}$$

Since stereographic projection takes circles to circles, the image of a meridian is a circle in the complex plane. Hence, if $P, Q \in \mathbb{C}$, the 'straight line' PQ is the circle determined by the three points $P, Q, -P^*$, where P^* is the inverse point of P with respect to the circle $w\bar{w} = R^2$.

The 'angles' of this geometry on $\mathbb{C}$ are the angles in S_R. 'Congruent' relations can also be derived in this way. It is the geometry of the sphere considered as $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

If we now apply the Analogy by formally replacing R by Ri in (B.1), we obtain

$$w' = \frac{R^2}{\bar{w}}.$$

What are the straight lines of this new geometry? If $P, Q \in \mathbb{C}$, the new straight line PQ is the circle determined by the three points P, Q, P^*. Since this circle is orthogonal to the circle $w\bar{w} = R^2$, the new straight lines are circles orthogonal to the boundary of the disc of radius R.

Note that we are obliged to exclude the case $P = P^*$ because the three points must be different. However, the set of points P with $P = P^*$ is the boundary of the disc. Therefore, this boundary does not belong to the new geometry.

Thus we have the open disc and its complement, which are 'equal' through inversion. If we consider the open disc with the straight lines defined above, and further assume that 'movements' are generated by inversions, we have the classical Poincaré disc. In other words, we have a model of non-Euclidean geometry, and the problem of consistency is solved. In fact, an inconsistency in non-Euclidean geometry would be translated into an inconsistency in inversion geometry, and hence into an inconsistency in Euclidean geometry. Non-Euclidean geometry is thus as consistent as Euclidean geometry.

References

Battaglini, G., 1867. Sulla geometria immaginaria di Lobatschewsky. Giornale di Matematica, Napoli 5, 217–231.

Beltrami, E., 1868. Saggio di interpretazione della geometria non euclidea. Giornale di Matematica 6, 284–312, French translation: Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, t. 6 (1869) 251–288, Gauthier-Villars, Paris.

Bertrand, J., 1843. Démonstration de quelques théorèmes sur les surfaces orthogonales. Journal de l'Ècole Polytechnique 17, 157–173.

Bolyai, J., 2002. Scientiam spatii absolute veram exhibens; a veritate aut falsitate axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica. Polygon, Szeged, Hungarian translation by Rados Ignàcz, 1897, and English translation by George Bruce Halsted, 1897.

Bonola, R., 1955. Non-Euclidean geometry, a critical and historical study of its developments, Dover Publications Inc., New York, translation with additional appendices by H.S. Carslaw. Supplement containing translations by G.B. Halsted of "The science of absolute space" by John Bolyai and "The theory of parallels" by Nicholas Lobachevski.

Burago, D., Burago, Y., Ivanov, S., 2001. A course in metric geometry. In: Graduate Studies in Mathematics, vol. 33. American Mathematical Society, Providence, RI.

Chasles, M., 1837. Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, M. Hayez, imprimeur de l'Académie Royale, Bruxelles.

Dombrowski, P., 1979. 150 years after Gauss' "Disquisitiones generales circa superficies curvas". Astérisque 62, 97–153, with the Gauss's original Latin text.

Dou, A., 1970. Logical and historical remarks on Saccheri's Geometry. Notre Dame Journal of Formal Logic XI (4), 385–415.

Dunnington, W.G., 2004. Carl Friederich Gauss: Titan of Science, second ed. The Mathematical Association of America, with additional material by Jeremy Gray and Fritz-Egbert Dohse.

Engels, F., Stäckel, P., 1895. Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Teubner, Leipzig.

Euclid, 1956. In: The thirteen books of Euclid's Elements, vol. 1. Dover, translated with commentary by Sir Thomas L. Heath.

Ferreirós, J., 2000. Riemanniana Selecta, Colección Clásicos del Pensamiento, CSIC.

Ferreirós, J., 2007a. Labyrinth of thought. A history of set theory and its role in modern mathematics, second ed. Birkhäuser Verlag, Basel, ISBN 978-3-7643-8349-7.

Ferreirós, J., 2007b. 'O θεὸς αριθμητίζει: The rise of pure mathematics as arithmetic with Gauss. The Shaping of Arithmetic after C.F. Gauss's Disquisitiones arithmeticae. Springer, Berlin, pp. 206–240.

Folta, J., 1973. Klügel, Georg Simon. In: Dictionary of Scientific Biography, vol. 7. Charles Scribner's Sons, New York, pp. 404–405.

Gauss, C.F., 1828. Disquisitiones generales circa superficies curvas. Commentationes Societatis Regiae Scientarum Gottingensis Recentiores Classis Mathematicae VI, 99–146, submitted on 8 October 1827. See also [Gauss, 1870–1927, vol. IV, 217–258].

Gauss, C.F., 1831. Theoria residuorum biquadraticorum: Commentatio secunda. Göttingische gelehrte Anzeigen, 625–638.

Gauss, C.F., 1832. Theoria residuorum biquadraticorum: Commentatio secunda. Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiores 7, 89–148, reprinted in [Gauss, 1870–1927, vol. II, 93–148].

Gauss, C.F., 1870–1927. Werke, Band 1–12, Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, B.G. Teubner, Leipzig, also <http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/cache/toc/D38910.html>.

Gauss, C.F., 1902. Neue Allgemeine Untersuchungen über die Krümmen Flächen [1825], The Princeton University Library, English translation with notes and bibliography, by James Caddall Morehead and Adam Miller Hiltebeitel.

Goe, G., 1973. Kaestner, Abraham Gotthelf. In: Dictionary of Scientific Biography, vol. 7. Charles Scribner's Sons, New York, pp. 206–207.

Gray, J., 1979. Non-Euclidean Geometry. A Re-interpretation. Historia Mathematica 6, 236–258.

Gray, J., 1987a. The discovery of non-Euclidean geometry. Studies in the History of Mathematics. In: MAA Studies in Mathematics, vol. 26. Mathematical Association of America, Washington, DC, pp. 37–60.

Gray, J., 1987b. Non-Euclidean Geometry, Unit 13, The Open University, Great Britain, first published 1987, reprinted 1990, 1995, ISBN 0-335-14257-5.

Gray, J., 1989. Ideas of Space: Euclidean, non-Euclidean, and Relativistic, second ed. Oxford University Press, New York, ISBN 0-19-853935-5.

Gray, J., 2004. János Bolyai. Non-Euclidean Geometry and the Nature of Space. Burndy Library Publications, New Series, No. I.

Gray, J., 2006. Gauss and non-Euclidean geometry. In: Prékopa, A., Molnár, E. (Eds.), Non-Euclidean Geometries. Janos Bolyai Memorial Volume. Springer, New York, pp. 61–80.

Gray, J., 2007. Worlds out of nothing. A course in the history of geometry in the 19th century, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer-Verlag London Ltd., London, ISBN 978-1-84628-632-2; 1-84628-632-8.

Halsted, G.B., 1900. Gauss and the Non-Euclidean Geometry. American Mathematical Monthly 7 (11), 247–252.

Hilbert, D., 1899. Grundlagen der Geometrie. B.G. Teubner, Leipzig.

Hilbert, D., 1901. Ueber Flächen von constanter Gaussscher Krümmung. Transactions of the American Mathematical Society 2 (1), 87–99.
Hilbert, D., 1926. Über das Unendliche. Mathematische Annalen 95 (1), 161–190. http://dx.doi.org/10.1007/BF01206605, ISSN 0025-5831.
Hoüel, G.J., 1870. Sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe de la théorie des paralléles, dit postulatum d'Euclid. Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux 8, XI–XIX, séance 30 decembre.
Kárteszi, F., 1987. Bolyai, János. Appendix. The Theory of Space, vol. 138. North-Holland Mathematics Studies, with a supplement by Barna Szénássy.
Kiss, E., 1999. Notes on János Bolyai's Researches in Number Theory. Historia Mathematica 26 (1), 68–76.
Kline, M., 1972. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Oxford University Press.
Klügel, G.S., 1763. Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio, Göttingen, thesis directed by Abraham Kästner.
Kuiper, N.H., 1955. On C^1-isometric imbeddings, I, II. Indagationes Mathematicae 17, 545–556, 683–689.
Lambert, J.H., 1786. Die Theorie der Parallellinien. Leipziger Magazine für die reine und angewandte Mathematik, 137–164, 325–35. See [Engels and Stäckel, 1895, 152–207]. The work was written in 1766 and published posthumously by J. Bernoulli and C.F. Hindenburg.
Legendre, A.-M., 1794. Élements de Géométrie. Firmin Didot, Paris.
Legendre, A.-M., 1833. Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles d'un triangle. Mémoires de l'Academie des Sciences de Paris XIII, 213–220.
Lobachevsky, N.I., 1955. Geometrical researches on the theory of parallels. Dover, Supplement II of [Bonola, 1955], translated by G.B. Halsted from the original German edition of 1840.
Lützen, J., 1990. Joseph Liouville 1809–1882: Master of Pure and Applied Mathematics. Springer-Verlag, New York.
Montesinos, J.M., 1994. La cuestión de la consistencia de la geometría hiperbólica, Real Academia de Ciencias Exactas. Físicas y Naturales, Madrid, 213–232.
Reichardt, H., 1985. Gauß und die Anfänge der nicht-euklidischen Geometrie, vol. 4 of Teubner-Archiv zur Mathematik, BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, with reprints of papers by J. Bolyai, N.I. Lobachevskiĭ and F. Klein. With English, French and Russian summaries.
Reventós, A., 2004. Un nou món creat del no-res, un món on es pot quadrar el cercle! Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques 19, 47–83.
Reventós, A., Rodríguez, C.J., 2005. Una lectura del Disquisitiones generales circa superficies curvas de Gauss. Societat Catalana de Matemàtiques, contains the translation to Catalan of the *Disquisitiones*.
Riemann, G.F.B., 1867. Über die Hypothesen welche der Geometrie zugrunde liegen, (Habilitationsvortrag). Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 13, 133–152, lecture delivered on 10 June 1854; English translation [Spivak, 1979, vol. II].
Rodrigues, O., 1815. Recherches sur la théorie analytique des lignes et des rayons de courbure des surfaces, et sur la transformation d'une class d'intégrales doubles, qui ont un rapport direct avec les formules de cette théorie. Correspondance sur l'École Polytechnique 3, 162–182.
Rodríguez, C.J., 2006. La importancia de la 'Analogía' con una esfera de radio imaginario en el descubrimiento de las geometrías no-euclidianas. Prepublicacions del Departament de Matemàtiques, UAB 30, 1–48.
Rosenfeld, B.A., 1988. A History of Non-Euclidean Geometry. Evolution of the Concept of a Geometric Space. Springer-Verlag.
Saccheri, G.G., 1733. Euclides ab Omni Naevo Vindicatus, Milan, translated by G.B. Halsted, Chicago, 1920.
Scholz, E., 2004. C.F. Gauß' Präzisionsmessungen terrestrischer Dreiecke und seine Überlegungen zur empirischen Fundierung der Geometrie in den 1820er Jahren. In: Form, Zahl, Ordnung.

Boethius: Texte und Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften, vol. 48. Steiner, Stuttgart, pp. 355–380.

Scholz, E., 2005. Carl F. Gauss, el "gran triángulo" y los fundamentos de la geometría. La Gaceta de la RSME 8.3, 638–712, translated by J. Ferreirós.

Spivak, M., 1979. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, second ed. Publish or Perish, Inc., Berkeley.

Voelke, J.-D., 2005. Renaissance de la géométrie non euclidienne entre 1860 et 1900. Peter Lang, Bern, ISBN 3-03910-464-0.

Volkert, K., 2006. Georg Klügel's dissertation (1763), now accessible on the Worldwide Web. Historia Mathematica 33 (3), 357–358, ISSN 0315-0860.