Universitat Autònoma de Barcelona

FACULTAD DE CIÈNCIES

DEPARTAMENT D'ESTADÍSTICA APLICADA

Valoració d'opcions mitjançant el mètode de Montecarlo

Treball final de grau

Eduard Borrega Fernández

Tutoritzat per:

Alejandra Cabaña

TREBALL FINAL DE GRAU
GRAU D'ESTADÍSTICA APLICADA 2014-15

Títol:
Valoració d'opcions mitjançant el mètode Montecarlo

Autor: **Eduard Borrega Fernández**

Tutor: **Alejandra Cabaña**

Resum:
En l'àmbit dels mercats financers, les transaccions d'opcions són de gran importància degut a que permeten reduir el risc a l'hora d'invertir, pel fet de ser contractes on es paga una petita quantitat (prima) al rebre el dret a comprar o vendre accions (o altres derivats) en un futur, donant la possibilitat al posseïdor de l'opció a exercir el contracte només si el beneficia o perdent la prima si no exerceix l'opció.

El 1973, en el *Chicago Board Options Exchange* es comercialitzen les opcions per primera vegada. Aquest mateix any ja es publiquen referències al que seria el primer model de valoració d'opcions, Black-Scholes, el qual oferia una fórmula per a la valoració d'opcions estàndard. Amb l'aparició de nous tipus d'opcions, s'havia de buscar nous mètodes que s'ajustessin a les característiques d'aquestes. Van aparèixer altres mètodes com l'arbre binomial (Cox, Ross i Rubinstein, 1979) per a les opcions americanes, però per a la valoració d'opcions exòtiques, degut a les seves peculiaritats en el càlcul del preu de l'opció, no existeix una fórmula tancada per a fer-ho.

Llavors Boyle (1977) introdueix la possibilitat d'utilitzar el mètode Montecarlo per a la valoració d'opcions. Aquest mètode es basa en la simulació de possibles escenaris que poden ocórrer en un futur amb el preu de l'opció i a partir d'aquí estimar-lo. L'avantatge del mètode és que es pot simular qualsevol tipus d'opció, tot i que en algunes, la velocitat de computació es torna un problema, es ressol amb aproximacions numèriques al mètode. El present treball intenta donar una visió global de que són les opcions i quins tipus hi ha. L'objectiu principal és explicar en que consisteix el mètode Montecarlo, com s'arriba a ell i perquè es tant important, mitjançant uns exemples de simulació.

Paraules clau: Valoració d'opcions, simulació, mètode Montecarlo, fòrmula Black-Scholes.

Title:
Monte Carlo methods for option pricing

Abstract:

In the area of financial markets, option transactions are very important because they can reduce the risk when investing. Such contracts, where a small amount is being paid (premium), share a property which gives the option holder to receive the right to buy or sell stocks (or other derivatives) in the future, also giving the possibility to exercise the contract only if it benefits him. In case the option holder doesn't exercise this option he will eventually lose the premium.

The options are traded for the first time in 1973 in the Chicago Board Options Exchange. In the same year some references are being published in relation with the first valuation option model (Black-Scholes), which offered a formula for valuing standard options. With the emergence of new types of options, new methods had to be seek so as to fit properly the characteristics of these. Furthermore, others methods appeared such as the binomial tree (Cox, Ross, Rubinstein 1979) for American options. However, for valuing exotic options there is no closed formula for this due to its peculiarities in the calculation of the price of the option. In 1977 Boyle introduces the possibility to use the Montecarlo method for the option valuation. This method is based on the simulation to estimate the option price by the simulation of the possible scenarios in the future.

The advantage of this method is that it can simulate any type of option. Despite the fact that there are cases when the computational speed is a problem, a solution can be found with numerical approximations to the method. This work tries to give the big picture of what are the option characteristics. The main goal is to explain Montecarlo's background, as well as its method properties and how to obtain them, and finally the reason of its importance by using some simulation examples.

Key words: Option valuation, simulation, Montecarlo method, Black-Scholes formula.

Título:
Valoración de opciones mediante el método Montecarlo

Resumen:

En el ámbito de los mercados financieros, las transacciones de opciones son de suma importancia debido a que permiten reducir el riesgo al invertir, por ser contratos donde se paga una pequeña cantidad (prima) al recibir el derecho a comprar o vender acciones(u otros derivados) en un futuro, dando la posibilidad al tenedor de la opción de ejercer el contrato sólo si le es beneficiario o perdiendo la prima si no ejerce dicha opción.

En 1973, en el *Chicago Board Options Exchange* se comercializan las opciones por primera vez. Ese mismo año ya se publican referencias al que sería el primer modelo de valoración de opciones, Black-Scholes, el cual ofrecía una fórmula para la valoración de opciones estándar. Con la aparición de nuevos tipos de opciones, se tenía qué buscar nuevos métodos que se ajustaran a las características de estas. Aparecieron otros métodos como el árbol binomial (Cox, Ross i Rubinstein, 1979) para opciones americanas, pero para la valoración de opciones exóticas, debido a sus peculiaridades en el cálculo del precio de la opción, no existe una fórmula cerrada para ello.

Es ahí cuando Boyle (1977) introduce la posibilidad de utilizar el método Montecarlo para la valoración de opciones. Este método se basa en la simulación de posibles escenarios que pueden ocurrir en un futuro con el precio de la opción y a partir de ahí estimarlo. La ventaja del método es que puede simular cualquier tipo de opción, aunque en algunas se antoja la velocidad de computación como un problema, se resuelve con aproximaciones numéricas al método. El presente trabajo intenta dar una visión global de qué son las opciones y qué tipos hay. El objetivo principal es explicar en qué consiste el método Montecarlo, como se llega a él y porque es tan importante, mediante unos ejemplos de simulación.

Palabras clave: Valoración opciones, simulación, método Montecarlo, fórmula Black-Scholes.

Agraïments

A tots i cada un dels professors que he tingut i m'han aportat els coneixements adquirits durant la meva formació.

A tots els meus companys, amics i família.

I en especial, als meus pares, al meu germà i al David per la seva paciència i per donar-me sempre el suport necessari per continuar.

Índex

Introducció

En les últimes dues dècades les transaccions amb productes derivats han crescut de forma exponencial. Els mercats financers han augmentat el seu volum de forma massiva i a través de la globalització es realitzen milions d'operacions diàries. Dins el conjunt de derivats, les opcions són les més populars. El primer mercat d'opcions modern sorgeix a Chicago el 1973 (*Chicago Board Options Exchange*). A l'inici només s'admetien opcions de compra (call), les opcions de venda (put) es van començar a comercialitzar el 1977 i les exòtiques 5 anys més tard, el 1982.

El 1973 ja es van publicar les primeres referències al primer model de valoració d'opcions, creat per F. Black i M. Scholes, el qual va passar a denominar-se model de Black-Scholes (R.C. Merton va fer aportacions importants al model i per això, a vegades es coneix amb el nom dels tres). El model era capaç de valorar el preu de mercat d'una opció europea (nom que van rebre les primeres opcions), on l'actiu subjacent fos una acció.

Tot i la fiabilitat del model de Black-Scholes per a la valoració d'opcions sobre el preu d'una acció, el model té certes limitacions. La limitació més important és que no permet valorar opcions amb altres tipus d'actius subjacents diferents a les opcions europees.

Per a resoldre aquest problema i poder valorar tots els tipus d'opcions s'introdueixen els mètodes numèrics dins la teoria de valoració d'opcions, ja que permeten donar solució a situacions on els models desenvolupats arrel del proposat per Black, Scholes i Merton no poden adaptar-se.

Els mètodes numèrics més importants són el mètode binomial, publicat el 1979 per John Cox, Stephen Ross y Mark Rubinstein a l'artícle *Option Pricing: A Simplified Approach*, i el mètode de Montecarlo proposat en el món de les finances per a la valoració d'opcions per primer cop el 1977 per P.P. Boyle a l'article *Options: A Montecarlo Approach*. En aquest treball es plantegen les bases d'aquest segon mètode.

La importància actual del mètode Montecarlo es basa en l'existència de problemes de difícil solució per mètodes analítics o numèrics, però que depenen de factors aleatoris o que s'associen a un model determinista. En el cas de la valoració d'opcions, el problema es redueix a aproximar l'esperança de la variable preu, mitjançant el càlcul de la mitjana d'una mostra de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes a través de la simulació.

L'avantatge d'aquest procediment és la seva versatilitat, ja que permet adaptar-se per a la valoració de qualsevol tipus d'opció europea, americana o exòtica, ja sigui de compra o venda i sobre actius subjacents que reparteixen dividends o no. L'inconvenient més gran que té el mètode és el de la necessitat de realitzar nombrosos càlculs, amb el temps i la potència de càlcul dels ordinadors que això suposa. S'ha de dir que amb la velocitat amb la que avança la tecnologia, aquest problema és cada vegada menys important.

El treball s'estructurarà tal com segueix. Primerament es farà una introducció a les opcions, on s'explicarà què són, quins tipus hi ha, quins factors en determinen el seu preu i de quines mesures de sensibilitat depenen (Capítol 1). En el Capítol 2 es descriu el moviment brownià o procés de Wiener, ja que aquest explica com es comporten els preus de les accions. En el Capítol 3 s'explica les bases de la fórmula de Black-Scholes que és amb la que s'origina tot el procés de la valoració d'opcions. En el següent apartat (Capítol 4) es comenta com i on es va originar el mètode Montecarlo, i se'n formula els procediments en els quals es basa el mètode. En el Capítol 5 es descriu breument els mètodes (Euler-Maruyama i Milstein) per a aproximar una solució per al mètode Montecarlo. Al Capítol 6 es proposen uns exemple pràctics en els quals es calcula mitjançant algoritmes programats en R (veure codi a l'annex), el preu de diferents tipus d'opcions.

Capítol 1

Introducció a les opcions

1.1 Opcions

En finances, una opció financera és un instrument derivat que s'estableix en un contracte pel qual el comprador adquireix el dret, que no l'obligació, de comprar o vendre un actiu (denominat actiu subjacent, el qual pot ser una acció, un bo, un índex borsari, etc.) a un preu determinat (preu d'exercici) i en una data futura determinada (si es tracta d'una opció europea) o fins una data futura determinada (cas de les opcions americanes). Quan el comprador de l'opció exerceix el seu dret, si es que ho fa, el venedor està obligat a complir amb la seva part del contracte.

Existeixen dos tipus d'opcions:

- **Call**: opció de compra sobre un actiu subjacent a un preu determinat i en una data futura o fins una data futura.
- **Put**: opció de venda sobre un actiu subjacent a un preu determinat i en una data futura o fins una data futura.

Al comprar una opció s'ha de pagar una quantitat que es denomina prima. La prima és doncs, el preu del contracte i és el què rep el venedor.

Les pèrdues de qui compra una opció són limitades (la prima pagada), mentre que els beneficis són ilimitats, ja que els compradors d'opcions només tenen drets i no obligacions. És a dir, si un comprador veu que no li surt rendible acabar comprant l'opció, només haurà perdut la prima. Per altra banda, les pèrdues del venedor d'una opció poden ser il·limitades, ja que els venedors d'opcions només tenen obligacions.

Les opcions es poden classificar segons diferents criteris, com poden ser:

- Segons la seva configuració:

- Opció de compra (*Call*)
- Opció de venda (*Put*)

- Segons l'actiu subjacent:

- Opcions sobre tipus d'interès a curt i llarg termini
- Opcions sobre accions
- Opcions sobre índexs borsaris
- Opcions sobre divises
- Opcions sobre *commodities*

A part es poden classificar de forma molt genèrica en dos grups:

- **Opcions vainilla**: Són les opcions més bàsiques i conegudes per la seva simplicitat. Poden ser opcions de compra (*call*) i opcions de venda (put), i poden ser exercides tan sols en una data determinada (opcions europees) o en qualsevol moment durant el temps d'exercici (opcions americanes).

- **Opcions exòtiques**: Són un tipus d'opcions més complexes que les vainilla, ja que incorporen exoticitats (d'aquí el nom) en el pagament, en la data d'exercici o en funció de la divisa o subjacent. A diferència de les opcions vainilla, aquestes es negocien en els mercats over the counter (OTC), que són els mercats on es negocien els instruments financers directament entre dues parts, és a dir, no són mercats organitzats i per tant no poseeixen institucions reguladores de les operacions i mecanismes o organismes de compensació i liquidació. Aquest tipus d'opcions neixen per adapatar-se a les necessitats dels clients pel que fa al rendiment exigit, els riscos disposats a assumir o les cobertures requerides.

D'opcions exòtiques n'hi ha de molts tipus i molt variades. Seguidament s'explicarà una idea general de què consisteix cada una d'elles per a tenir una comprensió global de la diversitat i complexitat (si es comparen amb les opcions clàssiques), que hi arriba a haver. En la part de simulació només es tindrà en compte aquelles que es consideren de major interès, per a no estendre's en excés.

1.2 Tipus d'opcions exòtiques

- **Opciones Exóticas**
  - Path-Dependet
    - Asiáticas
    - Extremun dependent
      - Barreras
      - *Lookback*
    - Formas de escalera
      - *Ladder*
      - *Shout*
      - *Cliquet*
    - Bermudas
    - *Chooser*
  - Opciones compuestas
    - *Call* sobre *call*
    - *Call* sobre *put*
    - *Put* sobre *call*
    - *Put* sobre *put*
  - Opciones apalancadas
    - Polinomiales
    - Potenciales
  - Opciones con pago singular
    - Binarias o Digitales
    - *Pay-later*
  - Opciones Rainbow
    - Correlación primer orden
    - Correlación segundo orden
      - *Quanto*
      - *Compo*

Figura 1.1: Tipus d'opcions exòtiques

1.2.1 Opcions *path-dependent*

Aquest tipus d'opcions dóna el dret, però no l'obligació, de comprar o vendre un actiu subjacent a un preu determinat i en una data determinada, on el preu es basa en les fluctuacions del valor del subjacent durant tot o part del període contractual. És a dir, el valor de l'opció al venciment no depèn només del valor del subjacent al venciment, sinó també de l'evolució històrica dels preus del subjacent. Se'n diu que depenen de la trajectòria.

D'aquest tipus d'opcions es troben les següents:

1. **Asiàtiques**

   El valor final d'aquest tipus d'opcions es determina mitjançant la mitjana aritmètica o geomètrica del preu del subjacent durant un període determinat, abans del venciment de l'opció. La mitjana es sol calcular amb els preus diaris de tancament del subjacent, des del moment en que es crea l'opció fins el seu venciment, tot i que també és possible utilitzar altres fòrmules, com ara agafar el preu mitjà del mes, del trimestre, etc., anterior al venciment.

D'opcions asiàtiques n'hi ha de dos tipus:

(a) **Opcions asiàtiques amb valor promig del subjacent (APO).** El preu d'exercici resta invariable, mentre que el preu del subjacent es calcula mitjançant la mitjana aritmètica o geomètrica dels valors assolits per aquest, durant la vida de l'opció o un altre període de temps determinat (com a mínim una part de la vida de l'opció).

- El *payoff* d'una opció *call* asiàtica APO és: $\text{máx}(S^* - X; 0)$ en la data de venciment.
- El *payoff* d'una opció *put* asiàtica APO és: $\text{máx}(X - S^*; 0)$ en la data de venciment.
- S^* és la mitjana (aritmètica o geomètrica) del preu del subjacent durant un període de temps determinat abans de la data de venciment.

(b) **Opcions asiàtiques amb preu d'exercici promig (ASO).** El preu d'exercici és la mitjana dels valors assolits pel subjacent durant la vida de l'opció o durant un altre període de temps determinat (com a mínim una part de la vida de l'opció).

- El *payoff* d'una opció *call* asiàtica ASO és: $\text{máx}(X^* - X; 0)$.
- El *payoff* d'una opció *put* asiàtica ASO és: $\text{máx}(X - X^*; 0)$.
- X^* és la mitjana del preu d'exercici durant un període de temps determinat.

L'objectiu principal de les opcions asiàtiques és que en les dates pròximes al venciment, les possibilitats que el preu del subjacent faci un gran canvi siguin escasses. També són útils quan es realitzen trasaccions freqüents sobre el mateix actiu en un espai de temps determinat; és més barat comprar una opció asiàtica amb venciment al final del període que comprar n opcions amb diferents dates de venciment.

2. ***Extremum dependent***

En aquest tipus d'opcions es determina el valor intrínsec de cada opció segons determinats valors assolits pel subjacent i no per una mitjana.

Se'n diferencien dos tipus:

(a) **Opcions barrera.** Són opcions condicionals que si el preu de l'actiu assoleix un determinat valor H (nivell de barrera) durant la vida de l'opció, passarà a ser una opció de compra o de venda simple (*knock-in*) o deixarà d'existir (*knock-out*). En alguns casos, si l'opció es desactiva o no s'activa, es compensa al comprador de l'opció amb una quantitat R *(rebate)*.

També existeixen les denominades opcions doble barrera, que són opcions que es desactiven si el subjacent no es manté dins d'un rang predeterminat, establert per una barrera superior (U) i una barrera inferior (L).

Existeixen quatre tipus:

Call up and out-down and out. Si la cotització del subjacent en spot toca la barrera superior o inferior es desactiva.

Call up and in-down and in. Si la cotització del subjacent en spot toca la barrera superior o inferior l'opció s'activa.

Put up and out-down and out. Si la cotització del subjacent en spot toca la barrera superior o inferior es desactiva.

Put up and in-down and in. Si la cotització del subjacent en spot toca la barrera superior o inferior l'opció s'activa.

(b) **Opcions *Lookback.*** Aquest tipus d'opcions ofereixen al seu titular, la situació més favorable possible, de manera que el valor de l'opció depèn del preu màxim o mínim assolit pel subjacent en un període de temps determinat. Així el titular de l'opció pot beneficiar-se de la cotització passada que li sigui més favorable.

Existeixen dos tipus d'opcions lookback:

Opcions *lookback* amb preu d'exercici flotant. El preu d'exercici es determina tenint en compte el preu més favorable del subjacent durant la vida de l'opció. El titular d'una opció *call* d'aquest tipus, té dret a comprar l'actiu subjacent al preu d'exercici més baix observat durant la vida de l'opció, mentre que el titular d'una opció *put*, té dret a vendre l'actiu subjacent al preu d'exercici més alt observat.

Payoff call: $\text{màx}[0, S - S_{mn}]$
Payoff put: $\text{màx}[0, S_{mx} - S]$

Opcions *lookback* amb preu d'exercici fixe. En aquest cas, l'*strike* es manté invariable i el valor final del subjacent es determina tenint en compte el preu més favorable del subjacent observat al llarg de la vida de l'opció. Pel titular d'una opció *call* d'aquest tipus, s'agafa el preu del subjacent més alt observat durant la vida de l'opció, mentre que pel titular d'una opció *put*, el valor del subjacent, és el més baix observat.

Payoff call: $\text{màx}\ [0, S_{mx} - X]$
Payoff put: $\text{màx}\ [0, X - S_{mn}]$

3. **Formes d'escala**

El valor final de l'opció depèn d'una sèrie de valors prèviament fixats o que s'han anat formant durant la vida de l'opció.

Existeixen tres tipus:

(a) **Opcions *ladder*.** Aquest tipus d'opció permet assegurar cert nivell de beneficis una vegada l'actiu assoleix un nivell predeterminat, garantitzant algun benefici inclús si el subjacent cau per sota dels nivells predeterminats abans del venciment de l'opció. S'estableixen una sèrie de valors, i si en algun moment la cotització del subjacent supera algun o diversos d'ells, arribat el venciment, el seu preu no podrà ser inferior ni superior al millor "esglaó" assolit. Per exemple, si es té un *call ladder* amb un *strike* de 100$ i "esglaons" a 105, 110 i 115, si la cotització del subjacent assoleix en algun moment 107, el benefici quedaria congelat i com a mínim seria de 5$(105-100). Si la cotització del subjacent assoleix el valor de 117, el benefici seria de 15$, inclús si la cotització del subjacent cau un nivell per sota abans del venciment de l'opció.

(b) **Opcions *shout*.** El titular de l'opció pot redefinir el preu d'exercici si el subjacent assoleix, o no, uns valors predeterminats. Es pot fer quan es desitji però el nombre de cops que es pot fer és limitat. Quan el titular de l'opció decideix redefinir el preu d'exercici, assegura el valor intrínsec de l'opció (diferència entre el preu d'exercici i el preu en *spot* del derivat en el moment en que s'executa el reajustament), podent a més a més obtenir beneficis adicionals si al venciment, el valor del subjacent supera el preu d'exercici fixat, és a dir, el guany per al comprador serà el major valor entre el valor assegurat i el valor al venciment.

(c) **Opcions *cliquet*.** En aquest tipus d'opcions, el preu d'exercici canvia en unes dates determinades, reemplaçant-se pel valor de tancament que assoleix el subjacent en aquestes dates. Els valors intrínsecs aconseguits amb les variacions en l'*strike* queden garantitzats per al titular de l'opció, aconseguint així acumular les rendibilitats durant la vida de l'opció.

4. **Bermudes**

   Són una alternativa intermèdia entre les opcions europees i les americanes. Poden ser exercides de manera anticipada abans del venciment però només en determinades dates. El preu d'exercici d'aquestes opcions pot augmentar amb el pas del temps. Si es cotitzen en els mercats organitzats, se'n denominen opcions japonesses.

5. ***Chooser*** El comprador escull en una data predeterminada si l'opció que ha adquirit és una opció de compra o de venda. D'opcions *chooser* hi ha les simples, on el comprador de l'opció escull en una data determinada entre una opció *call* i una *put*, tenint les dues les mateixes característiques, és a dir, mateixa data de venciment i mateix preu d'exercici. També hi ha les complexes, on a diferència de les simples, les dates de venciment i el preu d'exercici són diferents entre l'opció *call* i l'opció *put*.

1.2.2 Opcions compostes

El subjacent d'aquestes opcions és una altra opció. Es coneixen com *Split fee options* perquè hi ha un pagament per l'opció en sí i un altre per l'opció del subjacent.

N'hi ha quatre tipus:

1. ***Call* sobre *call***

   El titular de l'opció té dret a la compra d'una opció *call* sobre un actiu subjacent. En la data de venciment de la primera *call*, si es decideix exercir el dret a comprar la segona *call*, el titular de la primera *call* pagarà el primer preu d'exercici i serà titular de la segona *call*, que li donarà dret a comprar l'actiu subjacent en la segona data de venciment i a un segon preu d'exercici. El titular de l'opció composta decidirà, en la primera data de venciment, exercitar el dret a comprar la segona *call* només si el valor de la segona *call* en aquest moment és superior al preu d'exercici que es correspon amb la primera *call*.

   Payoff: $\text{màx}[call(S, X_1, \sigma, r, q, T_2) - X_2; 0]$

   S: preu de l'actiu subjacent
   X_1: *strike* de l'opció call subjacent
   X_2: *strike* de l'opció sobre l'opció
   r: tipus d'interès lliure de risc
   σ: volatilitat del subjacent
   q: taxa de dividends del subjacent

2. ***Call* sobre *put***

   El titular d'aquesta opció té dret a la compra d'una opció *put* sobre un actiu subjacent. En la data de venciment de la *call*, si es decideix a exercir el dret a comprar la *put*, el titular de la *call* pagarà el primer preu d'exercici i serà titular de la *put*, que li donarà dret a vendre l'actiu subjacent en un segona data de venciment i a un segon preu d'exercici. El titular de l'opció composta decidirà, en la primera data de venciment, exercitar el dret a comprar la *put* només si el valor de la segona *put* en aquest moment és superior al preu d'exercici que es correspon amb la *call*.

   Payoff: $\text{màx}[put(S, X_1, \sigma, r, q, T_2) - X_2; 0]$

3. ***Put* sobre *call***

   El titular té dret a venda d'una opció *call* sobre un actiu subjacent en la data de venciment de la *put*.

   Payoff: $\text{màx}[X_2 - call(S, X_1, \sigma, r, q, T_2); 0]$

4. ***Put* sobre *put***

   El titular té dret a la venda d'una opció *put* sobre un actiu subjacent en la data de venciment de la primera *put*.

Payoff: $\text{màx}[X_2 - put(S, X_1, \sigma, r, q, T_2); 0]$

1.2.3 Opcions apalancades

El valor intrínsec es calcula amb una funció polinòmica o potencial, fet que implica un alt grau d'apalancament segons la funció establerta.

1.2.4 Opcions amb pagament singular

En aquest tipus d'opcions es diferencien dos tipus:

1. **Opcions digitals o binàries**

   En l'actualitat s'han posat de moda per la seva simplicitat. El comprador d'una *call* rep al venciment, una quantitat pactada, si el preu del subjacent supera el preu d'exercici. El preu de la prima que paga el comprador depèn de la possibilitat de que el preu del subjacent quedi per sobre o per sota del preu d'exercici.

   Existeixen diferents tipus d'opcions binàries:

   (a) **Opcions *gap*.** Són opcions que fan èmfasi en el paper exercit pel preu d'exercici d'una opció vainilla. El preu d'exercici de les opcions *gap* no només determina si l'opció està *in the money* o no al venciment, sinó que també la magnitud del guany resultant. Per exemple, una opció *call gap* que paga 10$ si el preu del subjacent està 10$ per sobre del preu d'exercici i el *gap* és 5$. Si el preu del subjacent menys l'*strike* és menor que el *gap* no es realitza el *payoff*.

   Payoff call gap: 0 si $S \leq X_1$ i $S - X_2$ si $S > X_1$
   Payoff put gap: 0 si $S \geq X_1$ i $X_2 - S$ si $S < X_1$

   (b) **Opcions *cash or nothing*.** Es paga una quantitat prèviament determinada en la data de venciment si l'opció acaba dins del diner. Quan l'opció és *call*, es paga una quantitat K si el valor del subjacent és superior al preu d'exercici, i quan es *put*, es paga una quantitat K si el valor del subjacent és inferior al preu d'exercici.

   Payoff call: 0 si $S \leq X$ i K si $S > X$
   Payoff put: 0 si $S \geq X$ i K si $S < X$

   (c) **Opcions *asset or nothing*.** Aquestes opcions funcionen igual que les anteriors, amb la diferència que si el preu del subjacent al venciment és superior al preu d'exercici per una opió *call* d'aquest tipus, o inferior al preu d'exercici per una opció *put*, el venedor de l'opció paga una quantitat igual al preu de l'actiu subjacent en el mercat. En cas contrari, el venedor no paga res.

   Payoff call: 0 si $S \leq X$ i S si $S > X$
   Payoff put: 0 si $S \geq X$ i S si $S < X$

(d) **Opcions *cash or nothing* sobre dos actius** Hi ha quatre tipus:

***Cash or nothing call* sobre dos atius:** Es paga una quantitat fixa K si l'actiu subjacent de l'actiu 1 (S_1) està per sobre de l'*strike* 1 (X_1) i el subjacent de l'actiu 2 (S_2) està també per sobre de l'*strike* 2 (X_2) en la data de venciment.

***Cash or nothing put* sobre dos atius:** Es paga una quantitat fixa K si l'actiu subjacent de l'actiu 1 (S_1) està per sota de l'*strike* 1 (X_1) i el subjacent de l'actiu 2 (S_2) està també per sota de l'*strike* 2 (X_2) en la data de venciment.

***Cash or nothing up-down* sobre dos atius:** Es paga una quantitat fixa K si l'actiu subjacent de l'actiu 1 (S_1) està per sobre de l'*strike* 1 (X_1) i el subjacent de l'actiu 2 (S_2) està per sota de l'*strike* 2 (X_2) en la data de venciment.

***Cash or nothing down-up* sobre dos atius:** Es paga una quantitat fixa K si l'actiu subjacent de l'actiu 1 (S_1) està per sota de l'*strike* 1 (X_1) i el subjacent de l'actiu 2 (S_2) està per sobre de l'*strike* 2 (X_2) en la data de venciment.

2. **Opcions *pay later***

   Si al venciment la opció està *in the money*, el comprador està obligat a exercir l'opció i a pagar la prima. En canvi, si al venciment la opció està *out of the money*, el comprador no haurà de pagar res.

1.2.5 Opcions *rainbow*

Són opcions amb més d'una actiu subjacent.

Existeixen dos tipus:

1. **Opcions rainbow amb correlació de primer ordre.**

   En aquest tipus d'opcions no intervé el tipus de canvi de les divises. Es distingeixen:

   (a) **Opcions *exchange*.** El titular de l'opció pot intercanviar un actiu per un altre.

   (b) **Opcions "el millor dels dos".** El titular de l'opció rep al venciment l'actiu de més valor.

   Payoff call: màx $[0, mx(S_{n1}, S_{n2}) - X]$
   Payoff put: màx $[0, X - mx(S_{n1}, S_{n2})]$

   (c) **Opcions "el pitjor dels dos".** El titular de l'opció rep al venciment l'actiu de menys valor. Per compensar-ho, la prima que s'ha de pagar en aquest cas es menor.

   Payoff call: màx $[0, mn(S_{n1}, S_{n2}) - X]$
   Payoff put: màx $[0, X - mn(S_{n1}, S_{n2})]$

(d) **Opcions "el millor de dos actius o diners".** El titular rep el millor actiu entre dos o una quantitat monetària fixa. El *payoff* és el valor més alt assolit per qualsevol d'aquest tres elements.

(e) **Opcions *spread*.** El valor d'aquestes opcions ve donat per la diferència entre el preu, la rendibilitat o qualsevol altre paràmetre de dos o més actius subjacents, que poden ser bons, accions, fons, *swaps* o índexs.

Payoff call: màx $[0, mx(S_{n1}, S_{n2}) - X]$
Payoff put: màx $[0, X - mx(S_{n1}, S_{n2})]$

(f) **Opcions *dual-strike*.** En aquest tipus d'opcions es té en compte el valor intrínsec més alt entre dos actius, tenint cada un d'ells una data de venciment i un preu d'exercici diferents.

Payoff call: màx $[0, (S_{n1} - X_1), (S_{n2} - X_2)]$
Payoff put: màx $[0, (X_1 - S_{n1}), (X_2 - S_{n2})]$

(g) ***Basquet opitions*.** El titular d'aquestes opcions té dret a comprar o vendre una cistella fixa de diverses monedes contra una divisa base. Al venciment, el valor de les que estan *in the money* es compensa amb les que estan *out of the money*, per això aquestes opcions són més barates que les estàndard. A més a més del fet que existeix un risc associat al tipus de canvi de diverses divises en lloc d'una sola divisa.

2. **Opcions rainbow amb correlació de segon ordre**

A aquest grup hi pertanyen les opcions *quanto*, les quals permeten reduir el risc associat al tipus de canvi. Generen rendiment en una divisa diferent a la divisa en la que està denominat el subjacent. Per exemple, si una opció *call* estàndar sobre un actiu subjacent determinat genera resultats en euros, una opció *quanto* sobre el mateix actiu denominat en euros podria generar el resultat en dòlars.

Es poden diferenciar tres tipus:

(a) **Opció *quanto* amb tipus de canvi variable.** El subjacent i l'*strike* estan denominats en una divisa extrangera però el pagament al venciment es realitza en la divisa domèstica al tipus de canvi vigent en el moment.

(b) **Opció *quanto* amb tipus de canvi fixe.** El tipus de canvi que s'aplica al venciment es fixa en el moment de l'emissió.

(c) **Opció *compo*:** Són opcions *quanto* sobre un actiu subjacent extranger denominat en la divisa domèstica corresponent. Al venciment es converteix a la moneda domèstica nacional al tipus de canvi vigent en el moment.

1.3 Descripció opcions i factors que determinen el seu preu

Els contractes d'opcions contenen la següent informació:

- **Preu del subjacent (S):** És el preu de l'actiu sobre el qual s'exerceix l'opció. Qualsevol fluctuació en el preu del subjacent té un gran impacte en la prima d'un contracte d'opcions. Un augment del preu incrementa la prima d'una opció *call* i disminueix la prima d'una opció *put*.

- **Temps d'expiració (T):** És la data de venciment de l'opció. Qui poseeix l'opció de compra o de venda, pot exercir el seu dret, no exercir-lo deixant passar així la data de venciment o vendre-la abans del temps d'expiració de l'opció. Aquestes condicions són segons el tipus d'opció que es té. La prima d'una opció és major com més llarg sigui el temps que resta fins al venciment, ja que el titular conserva el dret durant més temps. El valor de la prima es va apropant al valor intrínsec segons s'apropa la data de venciment, en la qual el valor temporal de l'opció és zero.

- **Preu d'exercici o *strike* (X):** És el preu al qual s'estableix l'opció de compra o venda de l'actiu subjacent. Quan el preu d'exercici de l'opció és inferior al preu de mercat de l'actiu al moment d'emetre-la, es diu que està *in the money*, en cas contrari *out of the money*. Si el preu d'exercici de la opció és igual o molt proper al preu de mercat de l'actiu, és demomina *at the money*.

Factors que determinen el valor d'una opció

El preu d'una opció, és a dir la prima, es determina segons diferents factors:

- **El valor intrínsec i extrínsec de l'actiu subjacent**

  El valor d'una opció es pot descompondre en la suma de dues parts, les denominades intrínseca i extrínseca. La primera es defineix com el valor que tindria l'opció en un moment determinat al exercir-la immediatament. Per a una opció de tipus *call* seria:

  $$V_c = \text{máx}[0, S - X] \tag{1.1}$$

  i per a una opció *put*:

  $$V_p = \text{máx}[0, X - S] \tag{1.2}$$

  On S és el preu del subjacent i X el preu d'exercici. La part extrínseca és el que agrega el venedor per cobrir-se de les alteracions dels preus que puguin ocasionar-li una pèrdua major quan el comprador exerceix el seu dret. Quan el preu del subjacent augmenta, el valor intrínsec de les opcions de compra també augmenta, mentre que el valor de l'opció de venda disminueix.

- **La volatilitat del mercat(σ)**

  La volatilitat és una mesura estadística que quantifica la variabilitat del preu de l'actiu subjacent basant-se en la dispersió de les variacions dels preus (rendiments) de l'actiu. L'efecte que té la volatilitat en les opcions és que un increment de la volatilitat produeix un augment en la prima tant per les opcions *call* com per les*put*, degut a que com major és la volatilitat del subjacent, major serà també el rang de preus al venciment de l'opció i el risc al que s'exposen els venedors d'opcions, podent obtenir més beneficis els compradors. El risc de les operacions es mesura amb la volatilitat, de fet, és l'únic factor dels que condicionen el preu d'una opció que és desconegut.

- **Els dividends**

  Els dividends són la part del benefici que es reparteix entre els accionistes d'una companyia, és a dir, és la remuneració que reben per ser propietaris de la societat. El càlcul dels dividends és variable i va en funció dels resultats anuals que l'empresa en qüestió ha obtingut. Si s'espera que el pagament dels dividends sigui alt, la prima de l'opció *call* disminueix, i augmenta la de l'opció *put*, degut a que el preu de les accions disminueix després del pagament dels dividends.

- **Tipus d'interès sense risc (r)**

  Un augment en el tipus d'interès augmenta la prima de l'opció *call* i disminueix la de l'opció *put*.

1.4 Sensibilitat del preu d'una opció

Existeixen certes variables exògenes que afecten al preu de les opcions. Aquestes variables s'analitzen mitjançant coeficients representatius de les relacions entre elles. Els següents coeficients són eines essencials en la gestió del risc.

Coeficient Delta

Aquest coeficient es defineix com la variació produïda en el preu d'una opció per unitat de canvi en el preu de l'acció subjacent. El coeficient delta s'expressa en la seva forma discreta com:

$$Delta = \frac{\Delta \text{preu de l'opció}}{\Delta \text{preu de l'acció}} = \frac{\Delta \nu}{\Delta s}$$

i en la seva forma contínua com:

$$\Delta_c = \frac{\partial V_c}{\partial S} = N(d1) \qquad\qquad \Delta_p = \frac{\partial V_p}{\partial V_c} = N(d1) - 1$$

Els coeficients Delta que també es coneixen com els ràtios de cobertura, indiquen el nombre d'accions necessàries per cobrir una posició en opcions.

Si es mesura el porcentatge de variació del preu de l'opció, quan el preu de l'actiu subjacent varia un 1%, s'obté l'elasticitat de la prima.

$$Elasticitat = \frac{\partial V_c}{\partial S}\frac{S}{V_c}$$

L'elasticitat és una mesura d'apalancament obtinguda amb una opció. En relació a l'elasticitat sorgeix el concepte *beta* de l'opció. La *beta* es considera una mesura del risc i s'expressa de la següent forma:

$$\beta \text{ de l'opció} = \beta \text{ de l'acció } \cdot \text{ Elasticitat de l'opció}$$

Coeficient Gamma

La gamma d'una opció mesura la taxa de canvi de delta quan el preu de l'acció varia una unitat. Aquest coeficient es veu afectat per la volatilitat i també pel temps fins al venciment de l'opció.

$$Gamma = \frac{\Delta_{Delta}}{\Delta S} \Rightarrow \gamma = \frac{\partial^2 V_c}{\partial S^2} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{t}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp^{-0.5d_1^2}}{S\sigma\sqrt{t}}$$

Coeficient Theta

Es sap que el preu de l'opció depèn directament del temps restant fins al venciment d'aquesta. Com més temps queda major és el seu cost i amb el pas del temps, la prima de l'opció anirà minvant degut a la proximitat de la data de venciment.

El coeficient Theta és una mesura de deteriorament temporal, ja que mostra la variació en el preu d'una opció com a conseqüència d'una variació en el temps que resta fins la data de venciment.

$$Theta = \frac{\Delta_{V_c}}{\Delta T} \Rightarrow \theta = \frac{\partial V_c}{\partial T} = \frac{S\sigma}{2\sqrt{t}}N'(d_1) + Xexp^{-rT}rN(d_2)$$

Coeficient Rho

El coeficient rho mesura la sensibilitat del preu de l'opció degut a canvis en el tipus d'interès lliure de risc. El coeficient és positiu per opcions sobre accions, però és negatiu per altres tiups de derivats com el cas dels futurs. Rho és la derivada parcial del preu de l'opció respecte el tipus d'interès.

$$Rho = \frac{\Delta V_c}{\Delta r} \Rightarrow \rho = \frac{\partial V_c}{\partial r} = TXexp^{-rT}N(d_2)$$

Coeficient Vega

També es coneix com kappa, omega o tau. El coeficient vega mesura el canvi en el preu d'una opció respecte a una variació produïda en la volatilitat de l'acció.

$$Vega = \frac{\Delta V_c}{\Delta \sigma} \Rightarrow \nu = \frac{\partial V_c}{\partial \sigma} = S\sqrt{T}N'(d_1)$$

Si un inversor té una posisció vega positiva, es diu que té una posició llarga en volatilitat. Si la volatilitat augmenta també ho farà el valor de la seva posició. Pel contrari tindrà una posició curta quan el coeficient sigui negatiu.

Capítol 2

Moviment Brownià

2.1 Procés de Wiener o moviment Brownià

El moviment brownià o procés de Wiener deu el seu nom a Robert Brown [1] i posteriorment a N. Wiener [2]. Tot i que s'intercanvien el nom per a definir el mateix procés, en sentit estricte, el moviment brownià es considera el fenòmen físic del qual es va originar la idea i el procès de Wiener el model matemàtic que va ser l'inici de la teoria economico-matemàtica que va arribar més tard (Fòrmula de Black-Scholes).

Entre aquests dos autors n'hi va haver d'altres que van ser importants en la consecució de la teoria definitiva, com van ser Einstein (1905) amb el seu artícle *Sobre el moviment postulat per la teoria cinètica molecular del calor de petites partícules suspeses en un líquid estacionari.* Però va ser L. Bachelier el 1900, amb *Théorie de la spéculation* [3] qui va introduir per primer cop el moviement brownià per a modelar les fluctuacions financeres, més concretament les de la borsa de París.

Des de llavors les contribucions teòriques i aplicacions a altres àrees de la ciència no han parat de sorgir i actualment aquest procés estocàstic és utilitzat entre d'altres, tant per modelar el preu dels actius financers, per exemple el de les opcions, com per modelar els sorolls tèrmics en circuits elèctrics o altres comportaments en sistemes de cues i inventaris.

Definició

Un procés estocàstic $W = \{W_t\}_{t\geq 0}$ és un moviment brownià amb variància $\sigma^2 > 0$ si compleix les següents condicions:

- $W_0 = 0$ amb probabilitat 1, $E[W_0] = 0$ i $Var[W_0] = 0$

[1] El botànic R. Brown (1773-1858) va descobrir el 1827 el moviment aleatori a l'estudiar el moviment que les partícules de polen realitzaven sobre l'aigua. Es va donar compte que partícules d'altres minerals també seguien el mateix moviment irregular.

[2] El matemàtic Norbert Wiener (1894-1964) fundador de la cibernètica, va aplicar el 1923 el moviment brownià per a aconseguir un model precís i rigurós per a les trajectòries irregulars de les partícules. Va definir el moviment brownià com un procés estocàstic i en va demostrar la seva existència.

[3] Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier (1870-1946) va ser un matemàtic francès. Se'l considera el pioner en l'estudi de les matemàtiques financeres i del procés estocastic. La seva tesi, *Théorie de la spéculation*, va ser l'inici de la discussió del moviment brownià per a l'evaluació de les opcions financeres, tot i que en l'actualitat se sap que els preus no segueixen una distribució normal com ell augurava.

- $Cov(W_s, W_t) = \text{mín}\,(s,t) = s \wedge t$
- La distribució de W_t és Normal $(\mu = 0, \sigma^2 = t)$ per a tot $t \geq 0$

  Recordem que una variable aleatòria X és Normal $(X \sim N(\mu, \sigma^2))$ quan la seva distribució de probabilitat és:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} exp^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du$$

- Tots els increments $\Delta W_t = W_{t+\Delta t} - W_t$ són estacionaris i independents, és a dir, els desplaçaments $W_{t2} - W_{t1}$ i $W_{t5} - W_{t3}$ són independents per a tot $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_5$.
- Si $s < t$ l'increment $W_t - Ws$ té una distribució $N(0, t-s)$
- W_t depèn contínuament de t. Les trajectòries són contínues amb probabilitat 1.
- El procés no és diferenciable en cap punt.

Si $\sigma = 1$ se'n diu que és un Moviment brownià estàndard.

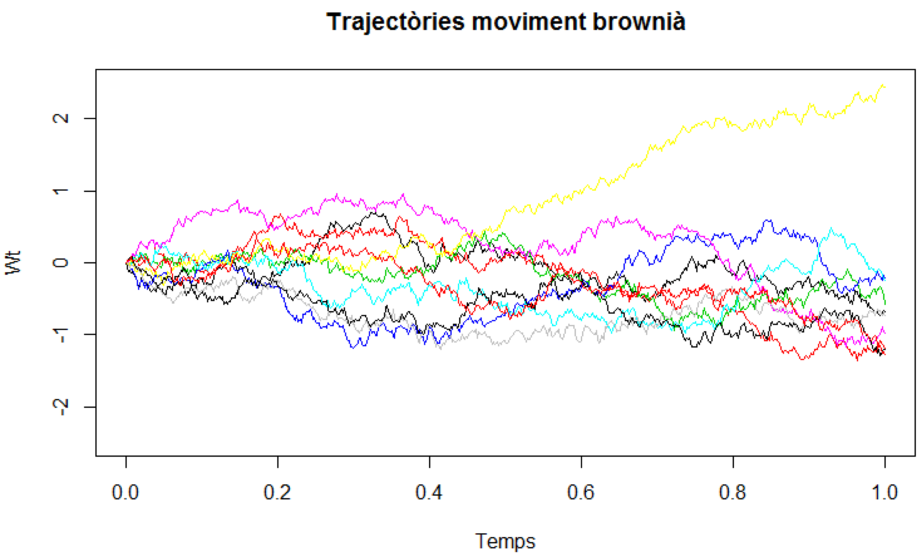

Figura 2.1: 10 trajectòries d'un moviment brownià estàndard

Bachelier va proposar que els preus evolucionaven segons:

$$P_t = P_0 + \sigma W_t + \nu t \tag{2.1}$$

on W_t es un moviment brownià, P_t és el preu en l'instant t i P_0 el preu en l'instant 0.

Al ser una variable gaussiana (normal), P_t pot pendre valors negatius. Aquest fet s'ha de corregir ja que el preu d'un actiu no pot ser mai un valor negatiu.

El 1965 P. Samuelson va proposar que el preu de les accions fos:

$$G_t = G_0 exp(\sigma W_t + \nu_t) \tag{2.2}$$

G es converteix doncs en un moviment brownià geomètric (MBG), on al prendre logaritmes no hi ha valors negatius. G segueix una distribució log-normal. Un altre factor a tenir en compte és que en el moviment brownià la variabilitat depèn del preu de l'acció. Per a corregir això no s'han de modelar els preus sinó que s'ha de fer segons els *returns* ($\frac{\Delta P}{P}$).

El model resultant en el cas continu és:

$$\frac{dP}{P} = \mu dt + \sigma dW(t) \tag{2.3}$$

Llavors si es té en compte que els preus es consideren segons un distribució log-normal i que es calculen en funció dels *returns*, es defineixen els *log-returns* com:

$$r_t = ln\Big(\frac{P(t)}{P(t-1)}\Big) = X(t) - X(t-1) \tag{2.4}$$

El model continu $P(t) = e^{X(t)}$ amb $X(t)$ un moviment brownià, és el que s'anomena moviment brownià geomètric.

Com a conclusió es pot dir que el moviment brownià geomètric és la "generalització" natural d'agregar soroll a l'evolució d'un actiu sense risc.

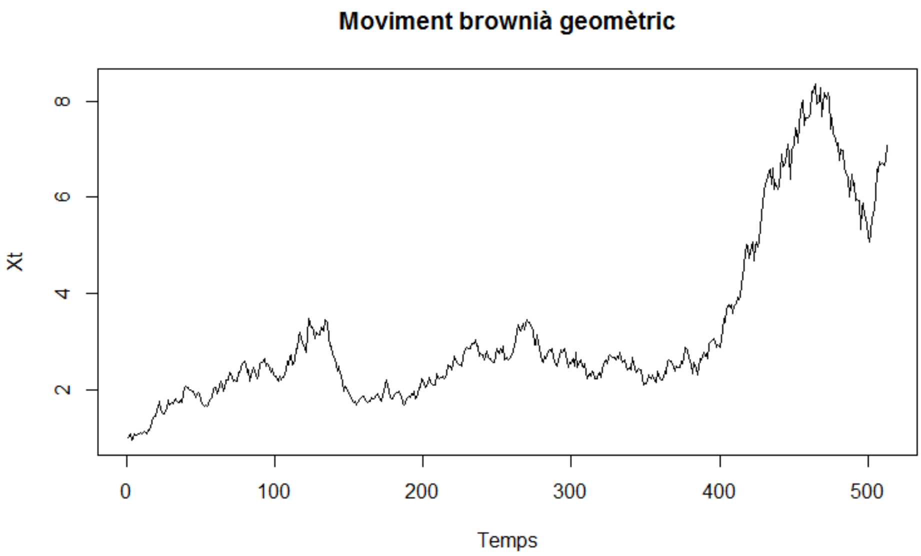

Figura 2.2: Una trajectòrias d'un moviment brownià geomètric

Es pot simular a partir de la seva relació amb el procés de Wiener, o també utilitzant aproximacions com les de Milstein, el mètode Euler-Maruyama, etc. Per entendre la relació entre el procés de Wiener (o moviment brownià) i el moviment brownià geomètric cal explicar la metodologia que va introduir Itô sobre la integració estocàstica. Les aproximacions del mètode s'explicaran en el capítol 5.

2.2 Fòrmula d'Itô

Històricament el concepte d'integral en el cas que l'integrador és un moviment brownià quan l'integrant és un conjunt de funcions aleatòries amb determinades propietats, se li reconeix a K. Itô [4] el 1944, tot i que ell mateix afirmava que el primer a definir la integral estocàstica va ser Wiener el 1934.

L'integral estocàstica es pot definir com el límit, en cert sentit, d'una suma de variables aleatòries. L'integral estocàstica, una vegada definida, és una integral que conserva les propietats d'una integral ordinària. S'ha d'esmentar també que els resultats d'una integral estocàstica són processos estocàstics.

Segons Itô, si $X(t)$ és un procés estocàstic a temps continu que satisfà:

$$dX(t) = a(X)dt + b(X)dW(t) \tag{2.5}$$

on $W(t)$ es un moviment brownià, i $G = G(X,t)$ és una funció diferenciable de $X(t)$ i t, llavors:

$$dG = \left(a(X)\frac{\partial G}{\partial X} + \frac{\partial G}{\partial t} + b(X)^2 \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial X^2} \right) dt + b(X)\frac{\partial G}{\partial X} dW(t) \tag{2.6}$$

L'equació diferencial (2.5) s'extén del moviment brownià aritmètic i permet que el *drift* esperat (canvi del valor mitjà) i la variància ($a(X)$ i $b(X)$) depenguin d'X. El moviment brownià $X(t)$ és un procés d'Itô (procés que satisfà Eq.(2.5)), el qual satisfà $dX = \alpha dt + \sigma dW$ i tenint en compte que $P(t) = e^X(t)$ com una funció diferenciable $G(X,t)$ segons el Lema d'Itò, llavors es té que:

$$\frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} = P \qquad i \qquad \frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

si es desenvolupa tenim que:

$$dP = \left(\alpha\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial P}{\partial t} + \sigma^2 \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial X^2} \right) dt + \sigma\frac{\partial P}{\partial X} dW$$

$$= \alpha P dt + \sigma^2 \frac{1}{2} P dt + \sigma P dW = \left(\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) P dt + \sigma P dW$$

Així el moviment brownià geomètric per al preu $P(t) = exp^{X(t)}$ satisfà les condicions de l'equació diferencial estocàstica:

$$dP = \mu P dt + \sigma P dW \tag{2.7}$$

[4]Kiyoshi Itô (1915-2008) va ser un matemàtic japonès el qual va aportar amb el seu treball *On Stochastic Differencial Equations* (1951), en que s'introduïa com a tema principal el càlcul de la integral d'Itô (estocàstica), eines per a la comprensió matemàtica de successos aleatoris. Avui dia, les seves teories tenen moltes aplicacions, entre les quals hi destaquen les aplicades en les matemàtiques finaneres.

on $\mu = \alpha + \frac{1}{2}\sigma^2$, i el logaritme de $P(t)$, és a dir $lnP(t) = X(t)$, segueix un moviment brownià aritmètic

$$dlnP = dX = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW \tag{2.8}$$

L'equació per al preu (2.7) es pot escriure de la forma:

$$\frac{dP}{P} = \mu dt + \sigma dW \tag{2.9}$$

i es veu clarament com és de la forma d'un moviment brownià. Si ara es té en compte una versió discreta de l'equació anterior (2.9),

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{P_{t+\Delta t} - P_t}{P_t} = \mu\Delta t + \sigma\varepsilon_t\sqrt{\Delta t}, \qquad \varepsilon_t \sim N(0,1) \tag{2.10}$$

llavors, $E\left(\frac{\Delta P}{P}\right) = \mu\Delta t$ i $Var\left(\frac{\Delta P}{P}\right) = \sigma^2\Delta t.$

El paràmetre μ es pot considerar com la taxa de rendiment esperada per unitat de temps, i σ com la desviació estàndard dels *returns* per unitat de temps, que és la definició de volatilitat.

Si es considera l'expressió Eq.(2.8 de la forma discreta següent:

$$\Delta lnP = ln\left(\frac{P_t + \Delta t}{P_t}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\varepsilon_t\sqrt{\Delta t}, \qquad \varepsilon_t \sim N(0,1) \tag{2.11}$$

Per aquesta expressió es veu que ΔlnP segueix una distribució normal, per tant, els *returns* són log-normals, amb mitjana $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t$, i variància $\sigma^2\Delta t$.

Si es considera $t = 0$ l'inici i $t + \Delta t = T$ un temps futur, llavors es té que:

$$lnP_t \sim N\left(lnP_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right) \tag{2.12}$$

per tant, P_t té com a mitjana $lnP_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T$ i com a desviació estàndard $\sigma\sqrt{T}$.

Gràcies al teorema central del límit TCL es poden establir intervals de confiança per als preus P_t amb, per exemple, 95% de confiança. Aquests intervals de confiança venen donats per l'expressió següent:

$$P_0 exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T - 1.96\sigma\sqrt{T}\right) < P_t < P_0 exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + 1.96\sigma\sqrt{T}\right) \tag{2.13}$$

Capítol 3

Model de Black-Scholes

El model de Black-Scholes va ser publicat per Merton [5] el 1973 fent referència al model matemàtic desenvolupat per F. Black i M. Scholes [6], el qual va suposar rebre el premi Nobel d'economia el 1997 per a Merton i Scholes (Black va morir dos anys abans de l'entrega del premi). Amb aquest model es pot estimar el valor actual d'una opció *call* o *put* europea sobre accions en un data futura a partir d'una fòrmula que s'obté sota el principi de construir una estratègia de cobertura de risc (hedging) inherent a l'opció en la data d'exercici.

El model es basa en tot un seguit d'hipòtesis:

- El preu de l'actiu es distribueix segons un moviment brownià geomètric.
- No es contemplen costos de transacció, ni comissions ni impostos. Això no significa que no existeixin, sinó que aquests afecten d'igual forma al rendiment de les accions que al deute.
- Es pot demanar diners prestats per invertir en renda fixe al mateix tipus d'interès i sense restriccions. A més a més es poden comprar i vendre accions contínuament sense restriccions.
- La taxa d'interès lliure de risc és constant i coneguda en l'interval $T = 0$ i $T = t$.
- No es tenen en compte el pagament de dividends.
- El benefici esperat és el d'un actiu lliure de risc (no hi ha possibilitat d'arbitratge).

Amb aquestes hipòtesis, Black i Scholes van demostrar que es pot construir una cartera de valors (cartera rèplica) amb accions i bons, de manera que el rendiment de la cartera rèplica sigui exactament igual al rendiment d'una opció de compra en un interval de temps curt. Fent canvis constants en la composició de la cartera rèplica (amb el transcurs del temps i quan canvia el preu de l'acció), és possible aconseguir que la cartera rèplica tingui un comportament idèntic al de l'opció.

[5] Robert C. Merton (1944-?), fill d'un dels millors sociòlegs del segle XX (Robert K. Merton), és un economista nord-americà que va rebre juntament amb Scholes el premi Nobel d'economia el 1997. Va introduir la teoria en que es basen els hedge funds (fons especulatius).

[6] Fisher Black (1938-1995) i Myron Scholes (1942-?) economistes nord-americans van publicar conjuntament el 1973 a *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* la famosa equació que dona nom a aquest model per a la valoració d'opcions.

Per tant, el preu de l'opció serà en $T = 0$ igual al preu de la cartera rèplica.

En aquest treball no s'aprofundirà en el tema de carteres rèplica ni de cobertura de riscos, per a més informació és pot consultar la bibliografia adient.[7]

La fòrmula de Black-Scholes per a la valoració del preu de les opcions europees de compra o venda sobre accions que no paguen dividends és:

$$Call = S_0 N(d_1) - X exp^{-rT} N(d_2) \tag{3.1}$$

$$Put = X exp^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \tag{3.2}$$

on,

$$d_1 = \frac{ln(\frac{S_0}{X}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{3.3}$$

$$d_2 = \frac{ln(\frac{S_0}{X}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{3.4}$$

- S_0 és el preu de l'actiu en el moment $T = 0$.
- X és el preu d'exercici.
- r és tipus d'interès lliure de risc.
- T és el temps fins el venciment.
- σ és la volatilitat de les accions.
- $N(x)$ és la funció de distribució de probablitat per a una variable normal N(0,1).

Donat que el preu d'una opció americana de compra (*call*) és igual al preu d'una opció europea de compra, per a unes accions que no paguen dividends, es pot utilitzar la mateixa fòrmula (3.1) per a una opció americana de compra. Per a les opcions americanes que no paguen dividends no s'ha trobat cap fòrmula exacta.

Si es considera que les opcions paguen dividends hi ha altres mètodes per valorar el preu. Un procediment seria utilitzar la mateixa fòrmula de Black-Scholes però ajustant el preu S; en lloc d'introduir el preu de l'acció, s'introdueix el preu de l'acció menys el valor actual net dels dividends que s'espera que es paguin durant el procés de vida de l'opció. Una altre opció més exacta seria emplear el mètode binomial. [8] Es proposa un exemple per una major comprensió del mètode.

[7] Per a una definició ràpida es pot consultar: Hedge funds
Per a aprofundir més: *"Hedge Funds and Financial Market Dynamics", Eichengreen, B.J. and D.J. Mathieson (1998).*

[8] Per a més informació sobre el mètode binomial es pot consultar *"Option Pricing: A Simplified Approach", Cox, John C., Stephen A. Ross, and Mark Rubinstein (1979)*, entre d'altres.

Exemple

Sis mesos abans del venciment d'una opció, el preu d'unes accions és de 82 Euros. El tipus d'interès lliure de risc és del 10% anual i la volatilitat del 20%, també anual. El preu d'exercici és de 80 Euros. Amb aquestes dades es pot calcular sense problemes quin és el preu a pagar per l'opció. Considerant que l'opció és europea es té:

$$d_1 = \frac{ln(\frac{82}{80}) + (0.1 + \frac{0.2^2}{2})0.5}{0.2\sqrt{0.5}} = 0.5989$$

$$d_2 = \frac{ln(\frac{82}{80}) + (0.1 - \frac{0.2^2}{2})0.5}{0.2\sqrt{0.5}} = 0.4574$$

Abans de calcular el preu del *call* i el *put* es necessita calcular:

$$Xexp^{rT} = 80 * exp^{-0.1*0.5} = 76.0984$$

$$call = 82N(0.5989) - 76.0984N(0.4574) = 8.02$$

$$put = 76.0984N(-0.4574) - 82N(-0.5989) = 2.11$$

Els resultats indiquen que per a que el comprador d'una opció de compra es quedi igual (no guanyi res, sense tenir en compte que el preu del diner té fluctuacions, etc.), el preu de les accions ha de pujar 6.02 Euros. I per a que el comprador d'una opció de venda estigui en la mateixa situació, el preu ha de baixar 4.11 Euros.

Capítol 4

El mètode de Montecarlo

4.1 Introducció

El 1949 és la data que es considera com l'origen del mètode de Montecarlo, any en que apareix l'article *The Monte Carlo method* [9], tot i que les idees en que es fonamenta el mètode és d'uns anys anteriors, quan S. Ulam [10] i J. von Neumann [11] treballaven en el desenvolupament de la bomba atòmica durant la Segona Guerra Mundial. Va ser Ulam a qui se li va ocòrrer la idea mentre jugava un solitari. Es va donar compte que era més sencill tenir una idea del resultat general del joc si feia diverses proves amb les cartes i en comptava les proporcions dels resultats, que haver de comptar totes les possibles combinacions de resultats possibles.

Curiosament la base teòrica del mètode era ben coneguda des de feia temps. Alguns problemes d'estadística es resolien a vegades empleant mostres aleatòries, és a dir, aplicant el mètode de Montecarlo. Tot i això, fins l'aparició de les màquines calculadores electròniques *(MCE)*, aquest mètode no trobava aplicacions suficientment àmplies ja que la simulació a mà de variables aleatòries és un procés molt laboriós. Gràcies a la creació de les *MCE* es va poder millorar el mètode més fàcilment.

El mètode rep el nom de Montecarlo en referència al Casino de Montecarlo, ciutat del Principat de Mònaco coneguda en gran part per ser la capital dels jocs d'atzar (fins l'arrivada de *Las Vegas*). Resulta que un dels aparells mecànics més senzills que permet obtenir variables aleatòries és la ruleta.

El mètode de Montecarlo s'utilitza per aproximar expressions matemàtiques complexes i difícils d'evaluar amb exactitud. Bàsicament es tracta d'un mètode de simulació que consisteix en generar nombres aleatoris (o pseudoaletoris) per a convertir-los més tard en observacions de la variable aleatòria model.

[9] The Monte Carlo method, Metropolis N., Ulam., J. Amer. statistical assoc., 1949.

[10] Stanislaw Marcin Ulam (1909-1984) va ser un matemàtic polac-nord-americà que va treballar en la construcció d'armes termonuclears durant la II Guerra Mundial i va participar en el projecte Manhattan. És conegut pel repertori d'eines matemàtiques que va desenvolupar (diverses teories: de conjunts, de nombres, ergòdica, etc.), entre les quals destaca pel Mètode de Montecarlo.

[11] John von Neumann (1903-1957) va ser un matemàtic húngaro-nord-americà que va realitzar diversos treballs importants en molts camps de la ciència, com són la física quàntica, teoria de jocs, ciència de la computació, anàlisi numèric, entre molts d'altres. És considerat un dels matemàtics més importants de la història moderna.

En el món de les finances, el mètode va ser introduït per P.P. Boyle[12] el 1977 i es pot utilitzar per a la valoració tant d'opcions europees com d'opcions exòtiques. Es sol utilitzar el mètode quan no existeixen fòrmules tancades, mitjançant el qual al final de cada trajectòria simulada es determina l'estratègia d'inversió òptima i es calcula el retorn.

Per a les opcions americanes és més complicat aplicar el mètode ja que l'opció pot ser exercida en qualsevol moment i per tant la simulació ha de ser dissenyada ajustant la vida de l'opció de forma que coincideixi amb cada data d'exercici possible. Aquesta tasca és de gran dificultat si es té en compte que cada decisió possible duu a una nova trajectòria possible. Actualment existeixen una gran gran quantitat de metodologies dissenyades per evaluar opcions americanes.[13]

4.2 Mètode de Montecarlo

El procediment en que consisteix la valoració d'opcions mitjançant el mètode de Montecarlo és molt sezill. Donat el preu d'un subjacent S_t consisteix en generar diverses trajectòries d'un moviment brownià geomètric que trobi diferents preus per a S_T (preu de l'actiu en la data de venciment). Per a cada valor de S_T es calcula el pagament de l'opció i s'estima el valor mitjà d'aquesta variable aleatòria. En les opcions vainilla, no interessa conservar tota la trajectòria (només el preu al venciment), en les exòtiques si.

La hipòtesi més important del model és que el logaritme natural de l'actiu subjacent segueix un MBG:

$$S + dS = S * exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dw\right] \tag{4.1}$$

on es recorda que S és el preu de mercat de l'actiu subjacent, μ és la taxa de retorn esperada de l'actiu, σ és la volatilitat de l'actiu i dw és un procés de Wiener amb mitjana 0 i desviació típica 1.

Per a simular el procés s'ha de discretitzar l'equació anterior dividint el temps en intervals Δt, de tal forma s'obté

$$S + \Delta S = S * exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma \epsilon_t \sqrt{\Delta_t}\right] \tag{4.2}$$

on ΔS és la variació en el temps discret per a S en l'interval de temps escollit Δt, μ és la taxa de retorn esperada lliure de risc de l'actiu subjacent, σ és la volatilitat de l'actiu i ϵ és un nombre aleatori que es distribueix segons una distribució normal estàndard $N(0, 1)$.

[12]Phelim P. Boyle (1941-?), és un economista i professor distingit. Nascut a Irlanda, va ser un dels pioners de les finances quantitatives. Se'l coneix per ser la persona qui introdueix el mètode Montecarlo en la valoració d'opcions.

[13]Veure els treballs: Longstaff i Schwartz (2001); Broadie, Glasserman i Zachary (2000); Rogers (2002); Stentoft (2005); Villeneuve i Zanette (2002); Kou i Wang (2004); Ju (1998); Jin-Chuan i Jean-Guy (2001); Ikonen i Toivanen (2008); Huyên (1997); Fu et al. (2001); i Clément, Lamberton y Protter (2002).

El preu de l'opció estimat $\hat{\theta}$ ve donat per l'expressió (4.3):

$$\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{m} \frac{e^{-rT} * payoff_i}{m} \tag{4.3}$$

on m és el nombre de simulacions.

El resultat de la simulació de Montecarlo es sol presentar en intervals de confiança, amb un nivell de confiança de $1 - \alpha$.

$$IC = \left[\hat{\theta} \pm Z_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma_\theta}}{\sqrt{m}} \right] \tag{4.4}$$

on $\hat{\sigma_\theta}$ és la variància estimada de S_T i $Z_{1-\alpha/2}$ és el percentil de una distribució normal estàndard.

Amb el mètode de Montecarlo, a mesura que augmenta el nombre de simulacions m, el valor de l'opció estimat ha de convergir a la solució de la fòrmula de Black-Scholes ja que l'error estimat pel mètode va decreixent gràcies al teorema central del límit de la forma:

$$\frac{1}{\sqrt{m}}$$

El nombre de simulacions dependrà del nivell d'exactitud que es desitgi obtenir amb el model. El principal inconvenient d'aquest tipus de simulació és el temps que els programes requereixen per realitzr-la, i per aquest motiu és que s'utilitzen les aproximacions del mètode que s'explicaran a continuació.

Capítol 5

Aproximacions del mètode

Per a valorar opcions vainilla hi ha fòrmules explícites com ara la fòrmula de Black-Scholes, exposada en el Capítol 4. Però pel que fa a les opcions exòtiques on la majoria d'elles són *path-dependent*, és a dir que depenen de la trajectòria que té el preu durant la vida de les opcions, no hi ha una fòrmula tancada, i per això s'ha d'aproximar mitjançant el mètode de Montecarlo, empleant mètodes numèrics per a equacions diferencials estocàstiques com són els mètodes d'Euler-Maruyama i el de Milstein. Inclús les aproximacions que s'obtenen per a les opcions vainilla, on existeixen mètodes més senzills de valoració, són aproximacions bones i fiables. Per a les opcions asiàtiques per exemple hi ha el mètode aproximat de Turnbull-Wakeman, entre d'altres (Vorst, Levy [14]) tot i que aquest és el més precís.

5.1 Euler-Maruyama

L'objectiu és simular trajectòries de processos que resolguin l'equació:

$$dS_t = f(S_t)dt + g(S_t)dW_t, \qquad S_0 = s_0, 0 \geq t \geq T$$

Es suposa que $f_t = f(S_t)$ i $g_t = g(S_t)$ només depenen de S_t (i no de t).

Sigui $\Delta t = T/n = t_j - t_{j-1}$ l'increment del procés en un interval petit de temps i ϵ una variable aleatòria normal estàndard, l'expressió del mètode d'Euler-Maruyama ve donada per:

$$S_t = S_{t-1} + f_{t-1}\Delta t + g_{t-1}\sqrt{\Delta t}\epsilon_t \tag{5.1}$$

5.2 Milstein

El mètode de Milstein és un refinament del mètode anterior que es justifica aplicant la fórmula d'Itô per millorar la segona aproximació, i amb el qual es millora l'ordre de convergència $(1/n^2)$. L'expressió del mètode Milstein ve donada per:

$$S_t = S_{t-1} + f(S_{t-1})\Delta t + g(S_{t-1})\sqrt{\Delta t}\epsilon + \frac{1}{2}g(S_{t-1})g'(S_{t-1})\big(\Delta t\epsilon^2 - \Delta t\big) \tag{5.2}$$

[14]Per més informació del mètode de Vorst consultar: *Vorst, T. (1992), "Prices and hedge ratios of average exchange rate options", International review of financial analysis.* I pel mètode de Levy consultar: *Levy, E. (1992), "The valuation of average rate currency options", Journal of international money and finance.*

Comparació mètodes aproximació

Per a valorar la precisió dels mètodes es procedeix a simular una trajectòria d'un moviment brownià geomètric en els punts $t_i = idt$ amb $dt = T/n$, i es simula també trajectòries amb els mètodes d'aproximació. El resultat és el que segueix:

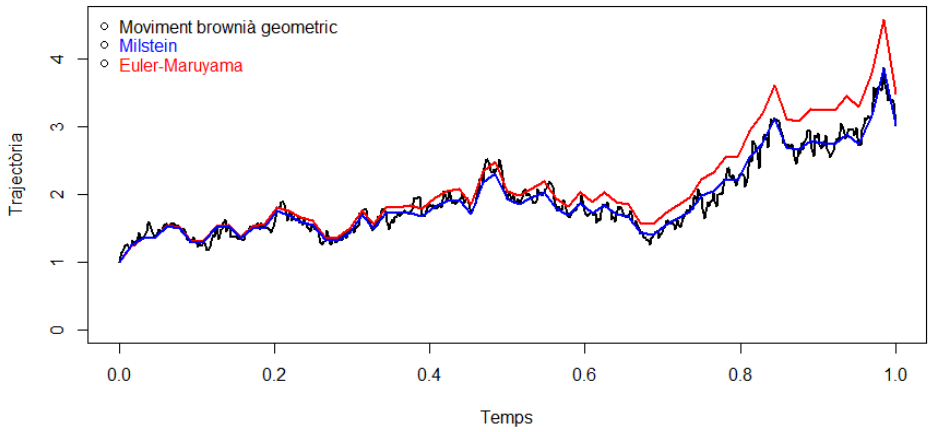

Figura 5.1: Comparació mètodes d'aproximació Euler-Maruyama i Milstein

Com es pot apreciar el mètode de Milstein (línia blava) s'aproxima més a la trajectòria real (línia negra). Es pot considerar que és més precís que el d'Euler-Maruyama.

5.3 Turnbull-Wakeman

El fet que no hi ha una fòrmula tancada per al promig aritmètic degut a que la distribució d'aquest no és coneguda fa que requereixi una aproximació. El mètode de Turnbull i Wakeman (1991) utilitza el fet que la distribució de la mitjana aritmètica és aproximadament logaritmica-normal fent servir els moments de primer i segon ordre (mitjana i variància) per aproximar la funció de densitat de la mitjana aritmètica f^*.

Si anomenem $a(x)$ a la distribució aproximada alternativa, es pot demostrar que f^* s'expressa de la següent forma:

$$f^*(x) = a(x) - C_1 a^{(1)}(x) + \frac{1}{2!}C_2 a^{(2)}(x) - \frac{1}{3!}C_3 a^{(3)}(x) + \frac{1}{4!}C_4 a^{(4)}(x) + e(x) \tag{5.3}$$

on, $a^{(i)}(x)$ és la derivada i-èssima de $a(x)$; C_i són constant (acumulants) que depenen dels moments de fins a ordre i i de les distribucions de $f^*(x)$ i $a(x)$; $e(x)$ és l'error de l'aproximació.

Turnbull-Wakeman suposa que al prendre $a(x)$ com funció de densitat de la distribució logarítmico-normal amb idèntiques mitjana i variància que $A(T_n)$[15] i iguals a les de $f^*(x)$, llavors l'error $e(x)$ és despreciable. Per a calcular els mètodes de tercer i quart ordre d'$A(T_n)$ s'utilitza un procediment recursiu. [16]

[15] $A(T_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(T_n)$

[16] Veure: Sèries de Edgeworth. Consultar també: Turnbull, S. M. i L. M. Wakeman (1991), "Quick algorithm for pricing european average rate options", Journal of financial and quantitative analysis.

Capítol 6

Valuació d'opciones mitjançant simulació

Una vegada exposada la teoria de valoració d'opcions per a aquest treball, es proposa un exemple amb dades reals extretes de la web *yahoo.finance* per entendre millor els procediments. S'han escollit les dades de la multinacional Apple.

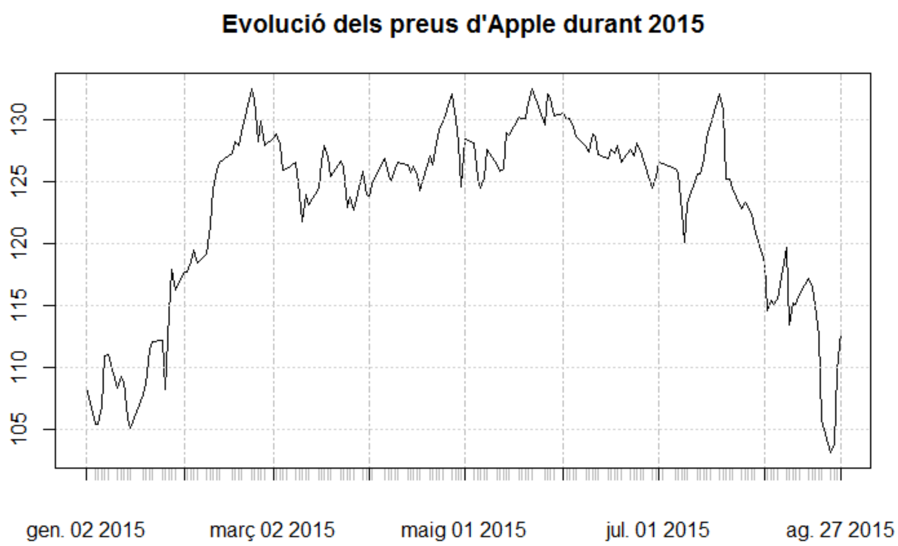

Figura 6.1: Evolució dels preus d'Apple durant 2015 (fins 27 agost)

L'evolució del preu de les accions de l'empresa corresponen des de principis d'any (2015) fins l'actualitat (27 d'agost). La volatilitat de les accions s'ha calculat en base a aquest període.

Les dades del contracte de l'opció són les següents:

Preu del subjacent (S)**:** 112.92$

Strike (X)**:** 115$

Temps d'expiració (T)**:** 25 de setembre (Un mes = 1/12)

Taxa d'interès (r)**:** 2%

Volatilitat de les accions (σ)**:** 21.74%

Put opció europea

Per les opcions europees es pot utilitzar la fòrmula de Black-Scholes. Mitjançant R i seguint (3.2) es calcula el preu per a l'opció *put* de forma "manual".

$$Put = 115 \cdot exp^{-0.02 \cdot 0.083} N(0.3) - 112.92 \cdot N(0.23) = 3.893021$$

També es pot calcular el preu per al *put* amb la fòrmula de Black-Scholes fent sevir la instrucció *GBSOption* de la llibreria d'R *fOptions* i el resultat és el mateix.

```
GBSOption(TypeFlag = "p", S = 112.92, X = 115, Time = 1/12, r = 0.02,
    b = r, sigma = sigma)
```

```
[1] 3.893018
```

Tot i que per a les opcions vainilla existeix el càlcul exacte del preu de l'opció (fòrmula Black-Scholes), es pot calcular també mitjançant el mètode de simulació de Montecarlo, on quan s'augmenta el nombre de simulacions, la solució d'aquestes convergeix al resultat de la fòrmula de Black-Scholes. Per tal de mostrar que aquesta afirmació és certa, s'ha executat la funció *EulerMC* (veure codi R en l'annex 6), que introduint els valors correponents al contracte i el nombre de simulacions calcula el preu *put* i *call* de l'opció.

En la taula (6.1) es presenten els resultats obtinguts per a la simulació del preu *put* per a diferents valors m de simulacions. Es pot comprovar que a l'augmentar el nombre de simulacions el valor del preu es va aproximant al valor obtingut amb la fòrmula de Black-Scholes (3.893). Tots els valors es troben dins l'interval de confiança i la mida d'aquest, es va aproximant a 0 a mesura que augmenta m. En l'annex es poden consultar el gràfic de les possibles trajectòries del preu de l'acció mitjançant un moviment brownià 2 i el gràfic dels diferents preus de l'opció *put*. 3

m	*Put*	IC_{inf}	IC_{sup}	Mida interval
100	4.1995	4.1962	4.2028	0.0066
1000	4.1437	4.1427	4.1448	0.0021
10000	3.9326	3.9323	3.9330	0.0007
100000	3.9062	3.9061	3.9063	0.0002
1000000	3.89735	3.89732	3.89739	6.61e-05

Taula 6.1: Intervals de confiança per a simulacions Montecarlo

Put opció asiàtica

Per a les opcions exòtiques la simulació de Montecarlo té més sentit que per a les vainilla, ja que no exiteix una fòrmula tancada amb la que s'obtingui el resultat del preu de l'opció. En aquest tipus d'opcions es necessita simular les possibles trajectòries ja que el preu de l'opció en molts dels tipus d'opcions exòtiques, depèn de la trajectòria dels preus assolits durant la vida de l'opció.

Es considerarà el preu per a un *put* d'una opció asiàtica. Recordar que el *payoff* d'aquest tipus d'opcions ve donat pel preu mitjà del subjacent durant el temps de vida de l'opció. Més formalment: $payoff = max(A_S(T_0, T) - X, 0)$ on $A_S(T_0, T)$ és la mitjana del preu fins la data de venciment $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} S_{tj}$

En la taula (6.2) es presenten els resultats obtinguts per a la simulació del preu *put* de l'opció asiàtica amb diferents valors m. Tots els valors es troben dins l'interval de confiança. La mida de l'interval s'aproxima a 0 a mesura que augmenta el nombre de simulacions. En l'annex es pot consultar el gràfic dels diferents preus de l'opció asiàtica.4 Es poden comparar els resultats obtinguts en la simulació amb el que s'obté de

m	*Put*	IC_{inf}	IC_{sup}	Mida interval
100	2.6532	2.6499	2.6565	0.0066
1000	2.7190	2.7180	2.7201	0.0021
10000	2.8153	2.8150	2.8156	0.0007
100000	2.8253	2.8252	2.8254	0.0002
1000000	2.82491	2.8250	2.82488	6.72e-05

Taula 6.2: Intervals de confiança per a simulacions Montecarlo

l'aproximació de Turnbull-Wakeman explicada en l'apartat 5.3 i que en R es troba dins la llibreria *fExoticOptions*. El resultat és el següent:

```
[1] "Turnbull Wakeman Asian Approximated Option"

[1] 2.823463
```

Es pot observar que l'aproximació de Turnbull-Wakeman i la de Montecarlo quan aquesta té un nombre de simulacions m elevat s'aproximen molt.

Tot i que no s'han explicat, es pot aprofitar el que fet que estiguin implementades dins la mateixa llibreria *fExoticOptions*, per a mostrar el preu per a les aproximacions de Levy i de la mitjana geomètrica.

```
[1] "Geometric Average Rate Option"

[1] 2.848096

[1] "Levy Asian Approximated Option"

[1] 2.823463
```

En el cas de Levy és el matiex resultat que per a Turnbull-Wakeman. L'altre mètode s'allunya més.

Conclusions

El present treball és només una pinzellada sobre el món que envolta la valoració d'opcions financeres. S'ha descrit els tipus d'opcions que existeixen i quina és la problemàtica a l'hora de calcular-ne el preu.

S'ha vist com tot i que el model proposat per Black-Scholes per a la valoració d'opcions és àmpliament utilitzat en els mercats financers, existeixen alguns actius i també diferents tipus d'opcions que no es comporten segons els supòsits d'aquest model. Les opcions exòtiques en són un exemple.

El fet que no existeixi una fórmula tancada de càlcul sumat a que a l'actualitat les opcions exòtiques estan en expansió degut a la seva diversitat; on es pot escollir una gran varietat de característiques diferents (mètode de pagament, temps de maduració, diferents divises, etc.) que les fan molt particulars atraient segons aquestes característiques a diferents tipus d'inversors; fa que s'hagin de trobar mètodes diferents per a la seva valoració.

En aquest context apareix el mètode Montecarlo, on anys enrere no s'utilitzava gaire degut a que la velocitat de càlcul estava lluny de la desitjada, però que en l'actualitat es considera una eina computacional molt important per a les finances, ja que permet calcular els preus d'opcions de les quals no es coneix la seva distribució, mitjançant la simulació de variables aleatòries.

En el Capítol 6, s'han obtingut les dades de la companyia Apple i se'n ha calculat el preu per a una opció Put de tipus europeu i també de tipus asiàtica, mitjançant diferents algoritmes programats en el llenguatge R.

Per a l'opció europea, s'ha comparat el resultat obtingut mitjançant el mètode Montecarlo amb l'obtingut per la fórmula de Black-Scholes. Si es pren el preu de la fórmula de Black-Scholes com el correcte, l'error que es produeix quan el nombre de simulacions de Montecarlo augmenta és gairebé menyspreable (4 milůlèsimes amb 1000000 simulacions).

Per a les opcions exòtiques (asiàtica en aquest cas), al no poder-se comparar amb Black-Scholes s'ha comparat amb el mètode Turnbull-Wakeman, aproximació numèrica que dóna el resultat per a les opcions asiàtiques. El resultats difereixen en una milůlèsima amb 1000000 simulacions.

El mètode Montecarlo ha resultat molt precís en la valoració del preu de les opcions. El fet de necessitar un nombre gran de simulacions per aconseguir aquesta precisió pot decantar la balança per la utilització dels mètodes d'aproximació, els resultats dels quals són molt semblants.

S'ha elaborat també un algoritme en R per a la valoració d'opcions binàries cash or nothing, que pel contingut ja existent en el treball no s'han exposat resultats. El codi R es pot trobar a l'annex.

Futures línies d'investigació

Possible línies d'investigació pendents podrien ser:

La comparació del mètode Montecarlo per a diferents volatilitats per veure quin és l'efecte sobre el preu estimat i els seus intervals de confiança.

Aprofundir en els mètodes numèrics d'aproximació i en el mètode binomial per al càlcul de les opcions americanes.

Elaboració d'algoritmes per al càlcul de les opcions exòtiques restants.

Bibliografia

[1] Alejandra Cabaña (2015): *Introducció a l'Enginyeria Financera (apunts de clase)*

[2] I.M. Sóbol (1983):*Método de Montecarlo*, Moscú, Editorial MIR

[3] John C. Cox, Mark Rubinstein (1985): *Option Markets*, New Jersey, Editorial Prentice-Hall

[4] Stephen Figlewski, William L. Silber, Marti G. Subrahmanyam (1990): *Financial Options: From theory to practice*, New York, New York University Salomon Center

[5] José L. Sánchez Fernández de Valderrama (1996): *Curso de bolsa y mercados financieros*, Barcelona, Editorial Ariel

[6] John C. Hull (2002): *Introducción a los mercados de futuros y opciones*, Madrid, Editorial Prentice-Hall

[7] Argimiro Arratia (2014): *Computational Finance: An Introductory Course with R*, Barcelona, Atlantis Press

[8] Tomás Bautista, Tobias Oetiker, Hubert Partl, Irene Hyna y Elisabeth Schlegl (1998): *Una descripción de Latex*2ϵ, Las Palmas de Gran Canaria, Manual del Centro de Microelectónica Aplicada de la Universidad de Las Palmas de G.C.

[9] N. Metropolis (1987): *The beginning of the Monte Carlo method*, Los Alamos Science (Special Issue dedicated to Stanislaw Ulam).

[10] Christian Bayer,Antonis Papapantoleon (versió 2004): *Computational Finance*

[11] Turnbull, S. M. i L. M. Wakeman (1991): *Quick algorithm for pricing european average rate options*, Journal of financial and quantitative analysis.

Gràfics

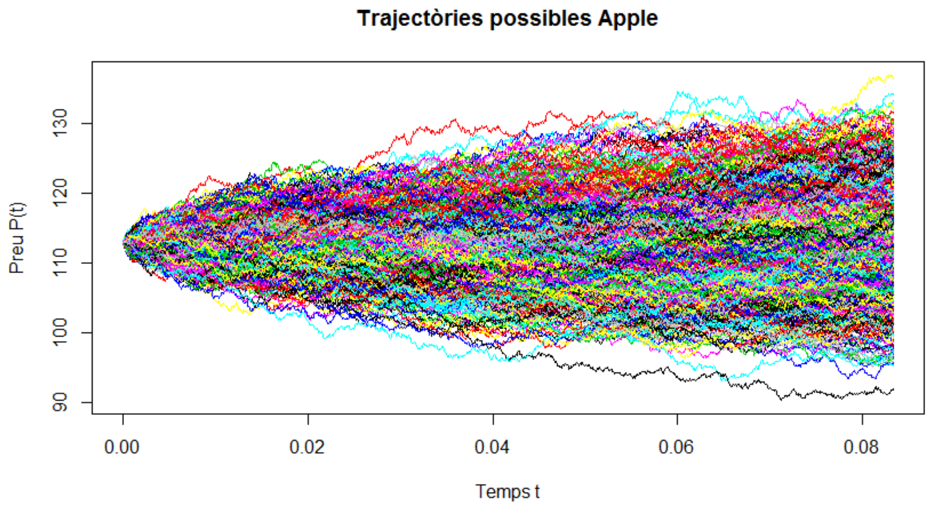

Figura 2: Generació 1000 trajectòries possibles pel preu de l'acció a un mes.

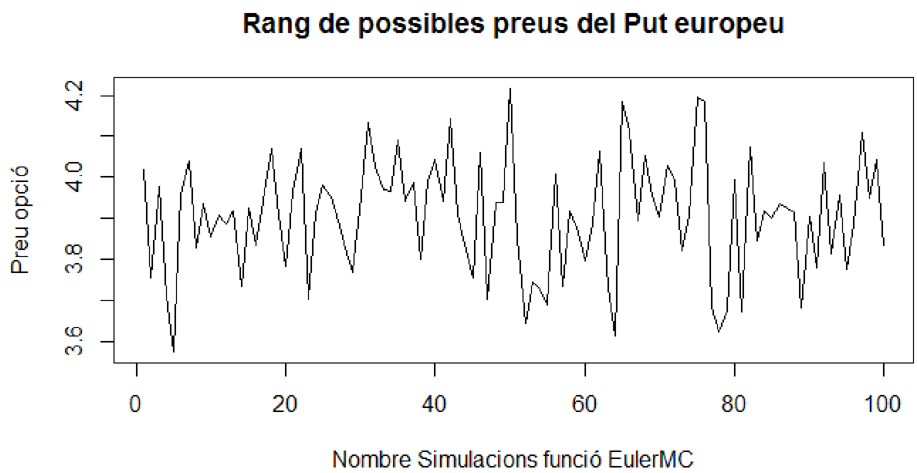

Figura 3: Generació 100 simulacions EulerMC pel preu del put d'una opció europea.

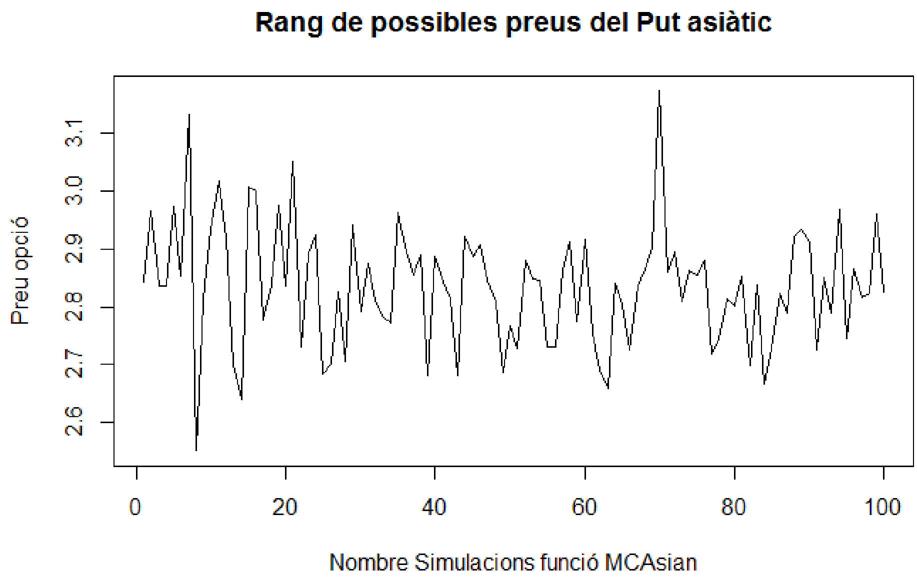

Figura 4: Generació 100 simulacions MCAsian pel preu del put d'una opció asiàtica.

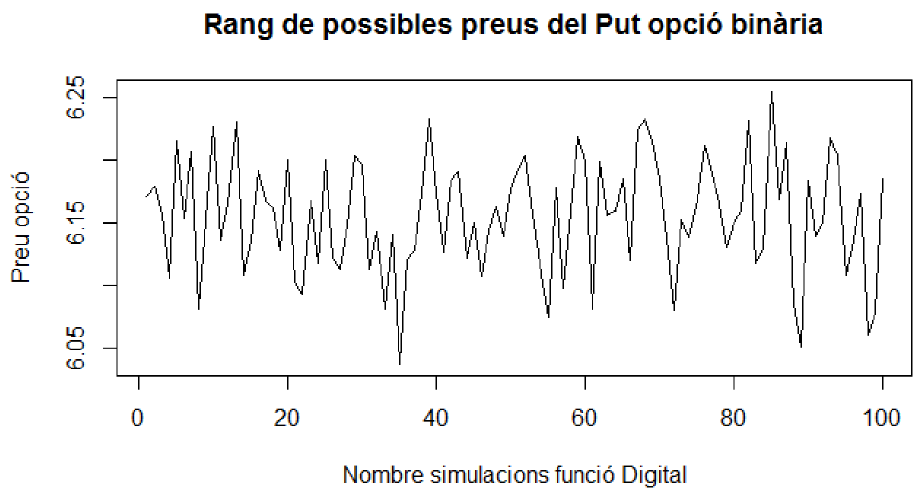

Figura 5: Generació 100 simulacions Digital pel preu del put d'una opció binària cash or nothing.

Codi R

```
> ####################################
> ####################################
> ##
> ## TRAJECTORIES MOVIMENT BROWNIÀ
> ##
> #####################################
> #####################################
>
> # Parámetres
> mu = 2
> sigma = 1
> Xcero = 1
> dt = 2^(-9)
> T = 1
> n = T/dt
> t = seq(0, T, by = dt)
> # Moviment brownià geomètric
> dw = sqrt(dt) * rnorm(n)
> w = c(0, cumsum(dw))
> wgeom = Xcero * exp((mu - sigma^2/2) * t + sigma * w)
> ####################################
> ####################################
> ##
> ## Aproximació Euler-Maruyama
> ##
> #####################################
> #####################################
>
> R = 8
> Dt = R * dt
> tR = seq(0, 1, by = Dt)
> k = T/Dt
> EM = numeric(k + 1)
> EM[1] = Xcero
> for (i in 2:{
+   k + 1
+ }) {
+   dwEM = sum(dw[{
+     (i - 2) * R + 1
```

```
+   }:{
+     (i - 1) * R
+   }])
+   EM[i] = EM[i - 1] + mu * EM[i - 1] * Dt + sigma * EM[i - 1] * dwEM
+ }
> ####################################
> ####################################
> ##
> ## Aproximació Milstein
> ##
> #####################################
> #####################################
>
> M = numeric(k + 1)
> M[1] = Xcero
> for (i in 2:{
+   k + 1
+ }) {
+   dwEM = sum(dw[{
+     (i - 2) * R + 1
+   }:{
+     (i - 1) * R
+   }])
+   M[i] = M[i - 1] + mu * M[i - 1] * Dt + sigma * M[i - 1] *
+     dwEM + 0.5 * sigma^2 * M[i - 1] * (dwEM^2 - Dt)
+ }
> ####################################
> ####################################
> ##
> ## Gràfic comparació mètodes aproximació
> ##
> #####################################
> #####################################
>
> maxy <- max(c(wgeom, EM, M))
> plot(t, wgeom, t = "l", ylim = c(0, maxy), lwd = 2, xlab="Temps",
+      ylab="Trajectòria")
> lines(tR, EM, col = "red", lwd = 2)
> lines(tR, M, t = "l", col = "blue", lwd = 2)
> legend("topleft", c("Moviment brownià geometric","Milstein",
>
```

```
> ##################################
> ##################################
> ##
> ## LECTURA PREUS ACCIONS D'APPLE
> ##
> ##################################
> ##################################
>
> #install.packages("quantmod")
> library(quantmod)
> #install.packages("fOptions")
> library(fOptions)
> #install.packages("gbm")
> library(gbm)
> a=getSymbols("AAPL",from = as.Date("2015-01-01"),
+               to = as.Date("2015-08-27"))
> adjusted=AAPL$AAPL.Adjusted[from = as.Date("2015-01-01"),
+              to = as.Date("2015-08-27")]
> f=log(dailyReturn(adjusted)+1)
> mitjana=mean(f)
> sd=sd(f)
> del=1/length(f)
> sigma=sd/sqrt(del)
> mu=mitjana/del+sigma^2/2
> # mu*100; sigma*100 ## benefici mitjà y sd anualitzats
>
> ##################################
> ##################################
> ##
> ## PUT OPCIO EUROPEA APPLE A 1 MES (CÀLCUL MANUAL Black-Scholes)
> ##
> ##################################
> ##################################
>
> S=112.92    # Preu avui
> X=115       # Strike
> delt=1/12   # 1/12 -> un mes
> sigma=sigma # Volatilitat
> r=0.02      # Taxa lliure de risc
> hmas= (log(S/X)+ (r+sigma^2/2)*delt)/(sigma*sqrt(delt)) # Càlcul d_1
> hmenos=(log(S/X)+ (r-sigma^2/2)*delt)/(sigma*sqrt(delt)) # Càlcul d_2
> put=X*exp(-r*delt)*pnorm(-hmenos)-S*pnorm(-hmas) # Preu del put

> plot(adjusted,main="Evolució dels preus d'Apple durant 2015")
```

```
> ####################################
> ####################################
> ##
> ## PUT OPCIO EUROPEA APPLE A 1 MES (CALCUL AMB GBSOPTION Black-Scholes)
> ##
> #####################################
> #####################################
> # FOptions el calcula posant Type= "c" (call) o "p" (put) S=pt=security price,
> # X=strike (=K), b=cost-of-carry anualitzat (en aqeust cas r)
> GBSOption(S=112.92,X=115,Time=1/12,r=0.02,sigma=sigma,b=r,Type="p")@call
> GBSOption(S=112.92,X=115,Time=1/12,r=0.02,sigma=sigma,b=r,Type="p")@price

> ####################################
> ####################################
> ##
> ## PUT OPCIO EUROPEA APPLE A 1 MES (CALCUL AMB MONTECARLO)
> ##
> #####################################
> #####################################
> EulerMC=function(Type="p", S0=112.92,K=115,T=1/12,r=0.02,
+                  sigma=0.2174,n=2^9,m=100,dt=T/n){
+   sum=0
+   for (i in 1:m) {# m= número de trajectories
+     S=S0
+     for (j in 1:n) {# n= longitud de cada trajectòria}
+       E=rnorm(1)
+       S=S+r*S*dt+sigma*S*sqrt(dt)*E
+     }
+     if(Type=="c"){payoff=max(S-K,0)}
+     else if (Type=="p"){payoff=max(K-S,0)}
+     else{payoff=max(S-K,0)}
+     sum=sum+payoff}
+   OptionValue=(sum*exp(-r*T))/m
+   OptionValue
+ }

> #####################################
> ####################################
> ##
> ## PUT OPCIÓ ASIÀTICA APPLE A 1 MES (CÀLCUL AMB MONTECARLO: FUNCIÓ MCAsian)
> ##
> #####################################
> #####################################
>
> ## Type = Call, Put
> ## S = Preu activu en t0
> ## K = Preu exercici
> ## r = Taxa lliure de risc
> ## T = Temps de maduració
```

```
> ## sigma = Volatilitat actiu
> ## m = Número de simulacions
>
> MCAsian = function( Type = "p", S0 = 112.92, K = 115, T = 1/12,
+                   r = 0.02, sigma = 0.2174, n = 2^9, m = 1000, dt = T/n ){
+   sum = 0;
+   for (i in 1 : m) { ## Numero de trajectories simulades
+     S=S0;
+     Asum = 0; ## Suma acumulada durant la trajectòria
+     for (j in 1 : n) { ## Durada trajectoria
+       E = rnorm(1); ## Simulem números aleatoris
+       S = S + r * S * dt + sigma * S * sqrt(dt) * E; ## Valor de l'actiu
+       Asum = Asum + S; }
+     if (Type == "c" ){ payoff = max((1/n) * Asum - K, 0) }
+     else if (Type == "p" ){ payoff = max(K - (1/n) * Asum, 0) }
+     else { payoff = max(K - (1/n) * Asum, 0) } ## Por defecte
+     sum = sum + payoff }
+   OptionValue = (sum * exp(-r * T))/m;
+   OptionValue}
> pa100 = MCAsian(m=100);pa100 # Preu put
> supa100 = pa100 + (1.96*sd)/sqrt(100);supa100 # IC superior
> infa100 = pa100 - (1.96*sd)/sqrt(100);infa100 # IC inferior
> infa100<pa100&&pa100<supa100 # Per evaluar si es troba dins l'interval
> longa100=supa100-infa100;longa100 # Longitud IC
> ########################################################################
> pa1000 = MCAsian(m=1000);pa1000 # Preu put
> supa1000 = pa1000 + (1.96*sd)/sqrt(1000);supa1000 # IC superior
> infa1000 = pa1000 - (1.96*sd)/sqrt(1000);infa1000 # IC inferior
> infa1000<pa1000&&pa1000<supa1000 # Per evaluar si es troba dins l'interval
> longa1000=supa1000-infa1000;longa1000 # Longitud IC
> ########################################################################
> pa10000 = MCAsian(m=10000);pa10000 # Preu put
> supa10000 = pa10000 + (1.96*sd)/sqrt(10000);supa10000 # IC superior
> infa10000 = pa10000 - (1.96*sd)/sqrt(10000);infa10000 # IC inferior
> infa10000<pa10000&&pa10000<supa10000 # Per evaluar si es troba dins l'interval
> longa10000=supa10000-infa10000;longa10000 # Longitud IC
> ########################################################################
> pa100000 = MCAsian(m=100000);pa100000 # Preu put
> supa100000 = pa100000 + (1.96*sd)/sqrt(100000);supa100000 # IC superior
> infa100000 = pa100000 - (1.96*sd)/sqrt(100000);infa100000 # IC inferior
> infa100000<pa100000&&pa100000<supa100000 # Dins l'interval?
> longa100000=supa100000-infa100000;longa100000 # Longitud IC
> ########################################################################
> pa1000000 = MCAsian(m=1000000);pa1000000 # Preu put
> supa1000000 = pa1000000 + (1.96*sd)/sqrt(1000000);supa1000000 # IC superior
> infa1000000 = pa1000000 - (1.96*sd)/sqrt(1000000);infa1000000 # IC inferior
> infa1000000<pa1000000&&pa1000000<supa1000000 # Dins l'interval?
> longa1000000=supa1000000-infa1000000;longa1000000 # Longitud IC
```

```
> #####################################
> ####################################
> ##
> ## APROXIMACIÓ TURNBULL-WAKEMAN
> ##
> #####################################
> #####################################
>
> #install.packages("fExoticOptions")
> library("fExoticOptions")
> ## Turnbull Wakeman Approximation:
> TW=TurnbullWakemanAsianApproxOption(TypeFlag = "p", S = 112.92,
+        r = 0.02, b = 0.02, sigma = 0.2174)
> TW@title
> TW@price

> #####################################
> ####################################
> ##
> ##  GEOMETETRC AVERAGE RATE OPTION
> ##
> #####################################
> #####################################
> GeometricAverageRateOption(TypeFlag = "p", S = 112.92, X = 115,
+      Time = 1/12, r = 0.02, b = 0.02, sigma = 0.2174)@title
> GeometricAverageRateOption(TypeFlag = "p", S = 112.92, X = 115,
+      Time = 1/12, r = 0.02, b = 0.02, sigma = 0.2174)@price
> #####################################
> ####################################
> ##
> ## APROXIMACIÓ DE LEVY
> ##
> #####################################
> #####################################
> LevyAsianApproxOption(TypeFlag = "p", S = 112.92, SA = 112.92, X = 115,
+     Time = 1/12, time = 1/12, r = 0.02, b = 0.02, sigma = 0.2174)@title
> LevyAsianApproxOption(TypeFlag = "p", S = 112.92, SA = 112.92, X = 115,
+     Time = 1/12, time = 1/12, r = 0.02, b = 0.02, sigma = 0.2174)@price

> ####################################
> ####################################
> ##
> ## Comprovació rangs de preu del PUT EUROPEU
> ##
> #####################################
> #####################################
> x=numeric(100)
> for (i in 1:100){
+   p=EulerMC();
```

```
+   x[i]=p;
+ }
> x
> plot(x,type="l",main="Rang de possibles preus del Put europeu",
+      ylab="Preu opció",xlab="Nombre Simulacions funció EulerMC")
> mean(x)

> ####################################
> ####################################
> ##
> ## Comprovació rangs de preu del PUT ASIÀTIC
> ##
> #####################################
> #####################################
>
> y=numeric(100)
> for (i in 1:100){
+   q=MCAsian();
+   y[i]=q;
+ }
> mean(y)
> plot(y,type="l",main="Rang de possibles preus del Put asiàtic",
+      ylab="Preu opció",xlab="Nombre Simulacions funció MCAsian")
> mean(y)

> ##################################
> ##################################
> ##
> ## GRAFIC TRAJECTÒRIES APPLE
> ##
> ##################################
> ##################################
> library(sde)
> mu=mu; sigma=sigma; P0=112.92; T = 1/12 ##1 month
> nt=1000; n=1000
> ############Genera nt trajectòries
> dt=T/n; t=seq(0,T,by=dt)
> X=matrix(rep(0,length(t)*nt), nrow=nt)
> for (i in 1:nt) {X[i,]= GBM(x=P0,r=mu,sigma=sigma,T=T,N=n)}
> ##Plot
> ymax=max(X); ymin=min(X) #bounds for simulated prices
> plot(t,X[1,],t='l',ylim=c(ymin, ymax), col=1, ylab="Preu P(t)",
+      xlab="Temps t",main="Trajectòries possibles Apple")
> for(i in 2:nt){lines(t,X[i,], t='l',ylim=c(ymin, ymax),col=i)}
>
```

```
> ##################################
> ##################################
> ##
> ## CODI PER A GENERAR EL PREU OPCIONS BINÀRIES: CASH OR NOTHING
> ##
> ##################################
> ##################################
> digital = function( Type = "p", S0 = 112.92, K = 115, T = 1/12, X=10,
+                     r = 0.02, sigma = 0.2174, n = 2^9, m = 10000, dt = T/n ){
+   # X és el que es paga per l'opció
+   sum = 0;
+   for (i in 1 : m) { ## Numero de trajectories simuladas
+     S=S0;
+      for (j in 1 : n) { ## Durada trajectoria
+       E = rnorm(1);
+       S = S + r * S * dt + sigma * S * sqrt(dt) * E; ## Valor del actiu
+         }
+     if (Type == "c" ){ if(S<=K){payoff=0} else if(S>K){payoff=X}}
+     else if (Type == "p" ){ if(S>=K){payoff=0} else if(S<K){payoff=X} }
+     else {if(S>=K){payoff=0} else if(S<K){payoff=X} } ## Por defecte
+     sum = sum + payoff }
+   OptionValue = (sum * exp(-r * T))/m;
+   OptionValue}
> digital()
> z=numeric(100)
> for (i in 1:100){
+   v=digital();
+   z[i]=v;
+ }
> mean(z)
> plot(z,type="l",main="Rang de possibles preus del Put opció binària",
+      ylab="Preu opció",xlab="Nombre simulacions funció Digital")
>
```