ANÀLISI DE LA CONTROVÈRSIA L'HÔPITAL – BERNOULLI

Mónica Blanco Abellán

Tutor: Dr. Josep Pla i Carrera (UB)

Dept. Història de la Ciència, UAB

Setembre, 1999

(117 pàgines)

ÍNDEX

PREÀMBUL

PREÀMBUL

INTRODUCCIÓ

La ciència progressa gràcies als problemes i dificultats que no es poden resoldre amb mètodes coneguts en un moment determinat. Aquestes "pedres" en el camí de la ciència són l'impuls que la fa avançar, que origina nous descobriments.

El càlcul diferencial va néixer degut a la necessitat de resoldre problemes de tangents i de màxims i mínims. Però no podem parlar de càlcul diferencial fins al segle XVII, mentre que els orígens del càlcul integral es remunten a la Grècia antiga. Això no vol dir que no s'haguessin plantejat aquest tipus de problemes abans.

Els grecs ja traçaven tangents a cercles i seccions còniques. Apol·loni, a les seves *Seccions còniques*, troba les normals de còniques calculant els segments màxims/mínims dibuixats des d'un punt a la corba.

Però s'introdueixen elements nous, com el moviment. Ara les corbes seran tractades com a trajectòries, mentre que per als grecs representaven llocs geomètrics.

També s'intenta superar l'"horror a l'infinit" dels grecs. La concepció clàssica de la constitució de la matèria i la qüestió del continu van generar diverses opinions. Uns, com Cavalieri, mantenien que la descomposició de la matèria era limitada, arribant a unes partícules "indivisibles" o àtoms, de naturalesa diferent a l'original. Els altres, com Fermat, Pascal o Wallis, defensaven la idea de matèria infinitament divisible en "infinitesimals", que conservaven les propietats bàsiques de la matèria inicial. Els "indivisibles" de Roberval es poden considerar com la transició d'un grup a l'altre.

Malgrat la falta de rigor, l'ús (i abús) intuïtiu de l'infinit va representar un progrés sorprenent.

Gilles Personne de Roberval considera la corba com a composició de dos moviments. La resultant dels vectors velocitat és la tangent. Aquesta idea la compartia Evangelista Torricelli. Però ambdós mètodes presentaven limitacions.

René Descartes, en la segona part de *La Géométrie*, dóna un mètode per traçar les tangents però restringit a les corbes algèbriques i a vegades treballant amb un àlgebra prohibida en la seva època.

Cap d'aquests mètodes no té aplicació general ni conté diferenciació. No és fins a Pierre Fermat que podem parlar de la primera aparició de la diferenciació. Johannes Kepler havia observat que l'increment d'una funció s'esvaeix a l'entorn d'un extrem ordinari. Fermat tradueix aquest fet en un procés per determinar màxims i mínims. El mètode de Fermat, encara que incomplet, equival a:

$$f'(x) = \left. \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right|_{h=0}$$

Isaac Barrow també va anticipar el càlcul diferencial. Amb ell apareix el triangle diferencial. El seu mètode es torna rigorós si féssim servir teoria de límits.

Els veritables creadors del càlcul són Isaac Newton i Gottfried W. Leibniz que, per vies independents i diferents, arribaren a les mateixes conclusions. Newton i, de manera més important, Leibniz, van crear un simbolisme general amb un conjunt sistemàtic de regles analítiques formals.

Encara falta fonamentar de manera rigorosa i consistent la nova matèria, però haurem d'esperar fins que ho facin Cauchy i els seus successors del segle XIX.

Donada la poca claredat dels fonaments de la matèria que acabava de néixer, el càlcul va rebre diversos atacs, distribuïts en tres debats. El primer és la crítica de Nieuwentijdt a Leibniz (1695-96). El segon es situa a l'Académie des Sciences de París, on els "moderns" (com Varignon i Saurin) s'enfronten als "antics" (com Rolle i l'Abbé Galois). I el tercer és el de *The Analyst* contra el càlcul de Newton (1734-35).

Entre 1691 i 1692 el marquès de L'Hôpital, atret pel nou càlcul, rep lliçons del brillant físic i matemàtic suís, Johann Bernoulli. El 1696 el marquès publicarà el primer llibre de text del càlcul diferencial, l'*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Dins la foscor en què es troba el càlcul, l'*Analyse* és un intent de "normalitzar-lo", en termes khunians, donant-ne una visió segura i completa i ajudant a la seva popularització.

La publicació de l'*Analyse* va ser motiu de controvèrsia. Johann, especialment després de la mort de L'Hôpital, va reclamar l'autoria d'aquest text. Quan el 1922 es van publicar les lliçons de Bernoulli a L'Hôpital (les *Lectiones de calculo differentialium*) i el 1955 la correspondència del suís, va quedar resolt el problema de l'autoria de les quatre primeres seccions de l'*Analyse*, a favor de Bernoulli.

El Dr. Josep Pla em va proposar analitzar i comparar els dos textos, l'*Analyse* de L'Hôpital i les *Lectiones* de Johann Bernoulli, buscant les semblances i diferències entre els dos, estudiant els avantatges i desavantatges de cadascun d'ells, ensumant possibles influències d'altres autors.

El meu treball està dividit en set seccions. En la primera exposo la biografia de L'Hôpital i comento la controvèrsia entre el marquès i el seu mestre Bernoulli.

En la segona part remarco la importància de l'*Analyse* com a (primer) llibre de text sobre càlcul diferencial.

La tercera part està dedicada a la història de les corbes que estudien ambdós autors,[1] ordenades segons el text de Bernoulli:

1.- Cicloide (problema VI)
2.- Concoide (problema VII)
3.- Cissoide (problema VIII)
4.- Quadratriu (problema IX)
5.- Espiral d'Arquimedes (problema XI)

A continuació (quarta part) exposo diferents mètodes per trobar la tangent a les corbes estudiades en la secció anterior. Només considero mètodes anteriors a Newton i a Leibniz, doncs amb aquests dos grans matemàtics ja neix el càlcul i el problema de la tangent es transforma en un algorisme. Analitzaré com tracten aquest problema Torricelli, Roberval, Fermat, Descartes i Barrow.

La comparació pròpiament dita, capítol a capítol, la duc a terme en les tres darreres seccions.[2] La primera columna mostra el mètode emprat per Bernoulli, la segona l'utilitzat per L'Hôpital. Un cop vist com exposen ambdós autors les definicions i axiomes pertinents, primer analitzo el problema de la tangent a les corbes esmentades més amunt (cinquena part).

La sisena part està dedicada a la comparació del capítol sobre càlcul d'extrems. Estudio dos dels exemples comuns a tots dos: el de la refracció i el de la posició més baixa que assoleix un pes en un sistema de dues politges.

[1] Com que l'estudi que fan L'Hôpital i Johann Bernoulli de la paràbola, l'el·lipse i la hipèrbola és pràcticament idèntic no esmento aquestes corbes en aquesta breu història.

[2] Al final del meu treball adjunto una llista amb la notació que utilitzo i la correspondència amb l'emprada per L'Hôpital i Bernoulli.

I, finalment, la darrera secció tracta el problema dels punts d'inflexió i de retrocés.[3] En particular, aquí comparo com tracten aquest problema en el cas de la concoide, fent servir diferents camins.

[3] L'Hôpital parla en general de diferencials d'ordre superior, Bernoulli no.

1. BIOGRAFIA DE L'HÔPITAL

Al llarg de la història de les matemàtiques trobem teoremes i regles amb noms d'autors que, en la major part dels casos, no n'han estat els descobridors. Normalment aquests resultats porten el nom d'aquells que n'han facilitat la seva comprensió, la seva publicació, l'intent de demostració.

Per exemple, ens és familiar el "teorema de Pitàgores" però els babilonis (i, fins i tot, abans) ja coneixien aquest resultat. El "triangle de Pascal" ja era conegut per Yang Hui al segle XIII i es retroba en els treballs de Stifel, Tartaglia, Stevin i Herigone.

Generalment associem L'Hôpital amb la regla que resol les indeterminacions del tipus 0/0.

Però el que s'amaga darrera la "regla de L'Hôpital" és una sèrie de pactes, intercanvis epistolars i controvèrsies a l' estil matemàtic més pur del segle XVII.

Guillaume François Antoine de L'Hôpital,[1] Marquès de Sainte-Mesme, Comte d'Entremont, Senyor d'Ouques,... va néixer a París el 1661.

Aviat mostrà interès per la geometria. Als quinze anys ja va resoldre uns problemes ben difícils sobre la cicloide proposats per Pascal.

Com corresponia al fill d'una família noble va servir a l'exèrcit. De fet, assolí el rang de capità de cavalleria. Va haver de deixar la seva carrera militar a causa de la seva miopia. Podria ser que hagués fet servir aquesta excusa per dedicar-se a l'estudi de les matemàtiques.

De seguida el va atreure el nou càlcul de Leibniz, encara que no es veié amb cor d'estudiar-lo tot sol. Així que, quan Johann Bernoulli, el brillant i jove físic i matemàtic suís, visita París el 1691, el marquès el convida primer a casa seva i després a la seva propietat d'Ouques. Durant alguns mesos, entre el 1691 i el 1692, Bernoulli ensenyarà la nova matèria al marquès.

Quan Bernoulli deixa París les lliçons continuen per correu.

A partir d'aquest moment L'Hôpital entra a formar part de l'*élite* matemàtica i esdevé un gran exponent del càlcul a França, no només pels seus treballs científics, sinó també pels contactes que manté amb Leibniz, Bernoulli i Huygens. Serà membre de l'Académie des Sciences des de 1690 fins a la seva mort.

Donada la manca de tractats elementals, L'Hôpital expressa a Bernoulli en una carta (1695) la intenció de publicar un text sobre seccions còniques per més tard afegir-li un petit tractat sobre càlcul diferencial. Vol que sigui la introducció de *De scientia infiniti*, tractat sobre el càlcul integral

[1] Es pot trobar el seu nom escrit L'Hospital. La família també l'escrivia Lhospital i, més tard, L'Hôpital.

que Leibniz pensava escriure.

El seu *Traité des sections coniques* no es publicarà fins al 1707, tres anys després de la mort de l'autor.

En canvi, l'any 1696 es publica el seu tractat sobre càlcul diferencial, l'*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*.

L'Hôpital reconeix com a propis els fonaments, tot i que Johann també els reivindica. També de forma explícita els podem trobar en Leibniz, tot i que no accepta "la visió platònica de L'Hôpital sobre la realitat de les quantitats infinitament petites i infinitament grans."[2]

L'Hôpital envia una còpia del llibre a Johann el 1697, el qual li agraeix que, en el prefaci, reconegui les seves aportacions i promet retornar el compliment en la seva propera publicació. Bernoulli lloa la distribució sòlida de les proposicions i l'exposició intel·ligible de l'*Analyse*.

El 1698, però, Bernoulli escriu a Leibniz queixant-se que el marquès ha plagiat les seves lliçons de càlcul.

Després de la mort de L'Hôpital (1704) també escriu a Brook Taylor lamentant-se.

Aleshores fa públic que la regla que apareix a l'article 163, secció X, de l'*Analyse* (coneguda des de llavors com a "regla de L'Hôpital") en realitat la va descobrir ell.[3]

Aquí comença la controvèrsia. Durant molt de temps es va dubtar de qui era l'autor del llibre. L'Hôpital, al seu prefaci, deixa oberta la porta a les reivindicacions que vulguin fer Leibniz i Bernoulli:

> (...) reconec que dec molt a les idees dels senyors Bernoulli, sobretot a les del jove, actualment professor a Groninga. M'he servit lliurement de les seves descobertes i de les del senyor Leibniz. És per aquesta raó que poden reivindicar tot el que els hi plagui, em contento amb el que em vulguin deixar.[4]

A més a més, el mal caràcter de Johann més aviat el va perjudicar en aquesta qüestió.[5]

El 1922 P. Schafheitlin va editar les *Lectiones de calculo differentialium* de Johann Bernoulli, és a dir, les lliçons que va donar a L'Hôpital entre 1691 i 1692.[6] Comparant els dos textos s'observen massa coincidències.

La qüestió sobre la prioritat quedà resolta quan, el 1955, O. Spiess va publicar la

---

[2] *DSB*, VIII, pp. 304-305.

[3] De fet, L'Hôpital mai no va afirmar que l'hagués descoberta. Però quan Saurin va adjudicar l'autoria a Leibniz, Johann va reclamar-la com a pròpia.

[4] Prefaci de l'*Analyse*, p.12.

[5] Sembla que, pel contrari, L'Hôpital posseïa una personalitat atractiva; era modest i generós, qualitats no gaire freqüents entre els matemàtics de l'època.

[6] Donat que Leibniz no es decidia a fer-ho, el marquès va suggerir Bernoulli de publicar un text sobre càlcul integral. Aquest no va aparèixer fins al 1742, inclós dins la seva *Opera Omnia*, II.

correspondència de Johann Bernoulli. En una carta (17 març de 1694) L'Hôpital va proposar a Johann un tracte. El marquès li oferia una renda anual de tres-centes lliures (que incrementaria més endavant) a canvi que Bernoulli li comuniqués a ell, i només a ell, les seves descobertes.

No s'ha trobat la resposta a aquesta carta, però en una altra amb data el 22 de juliol del mateix any es veu que Bernoulli ha acceptat, cosa bastant normal, donada la delicada posició econòmica del jove matemàtic. De fet, l'any següent, a través de L'Hôpital, Bernoulli obté una plaça de professor a la Universitat de Groninga (Holanda).

Òbviament, mentre L'Hôpital era viu Bernoulli no gosà acusar-lo públicament de plagi. És quan el marquès mor que es decideix a afirmar obertament que ell és l'autor de la major part de l'*Analyse*.

La posició dels historiadors davant la controvèrsia

Encara que des del 1955 quedà demostrat que L'Hôpital s'havia basat en les lliçons de Johann Bernoulli, s'ha de reconèixer el gran paper que va jugar l'*Analyse* en la popularització del càlcul. A més a més, hi ha contribucions originals del marquès.

Jo faria una classificació dels historiadors de la matemàtica en dos grups: simpatitzants o no de L'Hôpital.[7]

Entre els primers inclouria a:

- J. L. Coolidge, que el destaca com a autor de llibres de text. És de l'opinió que el marquès peca de negligència en el prefaci, encara que no de forma intencionada. A més a més, les lliçons de Bernoulli són quatre, mentre que l'*Analyse* té deu seccions. Coolidge és l'únic autor dels que he consultat que menciona que Johann obtingué la plaça de professor a Groninga gràcies a L'Hôpital.

- D. J. Struik, que reconeix que L'Hôpital va publicar la "seva" regla amb propietat i per tant té dret a que conservi aquest nom.

- C. B. Boyer, que en una nota afirma:

> Part del material era sense cap dubte el resultat dels treballs propis de L'Hôpital, ja que era un matemàtic competent. La rectificació de la corba logarítmica, per exemple, apareix per primer cop, segons tots els indicis, en 1692, en una carta de L'Hôpital a Leibniz.[8]

[7] Segons Coolidge, la qüestió radica en quant va prendre L'Hôpital directament del seu mestre.
[8] C. B. BOYER. *History of Mathematics*, p. 529 de la traducció castellana.

- Fontenelle, que, com era d'esperar, en els *Éloges* de l'Académie des Sciences de París fa el retrat d'un veritable heroi.[9] Ni tan sols fa menció de la relació entre L'Hôpital i Johann Bernoulli. Però sí diu que va ser L'Hôpital qui va introduir Huygens en el nou càlcul.

Al segon grup pertanyen:

- N. Bourbaki, segons el qual "el primer tractat de càlcul diferencial i integral va ser escrit en 1691 i 1692 per Johann Bernoulli per a ús d'un marquès que va resultar ser un bon alumne."[10] En una nota al final de la mateixa pàgina afegeix que "L'Hôpital l'havia publicat en francès, lleugerament modificat, amb el seu propi nom."[11]
- V. J. Katz, que diu:

> Cap al 1696 L'Hôpital decidí que entenia el Càlcul Diferencial prou bé com per publicar un text sobre aquesta matèria, i com que havia pagat bé el treball de Bernoulli, no va tenir cap remordiment a l'hora de fer-se servir de l'organització i descobertes d'aquest últim en la nova matemàtica.[12]

- P. Schafheitlein, que afirma que el material de l'*Analyse* prové de Bernoulli, tant de les seves lliçons com de la seva correspondència.

Trobo que el cas de Montucla és, si més no, curiós. Coolidge l'inclou entre els que estan a favor del suís. En la *Histoire des mathématiques,* però, lloa extensament l'*Analyse* i considera que L'Hôpital és un geòmetra de primera línia. En canvi, li retreu que no deixi prou clar, en el prefaci, tot el que deu al seu mestre.

Contribucions originals de L'Hôpital

El marquès de L'Hôpital va publicar la solució d'alguns problemes en les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, *Acta Eruditorum* i *Journal des Sçavans*. Entre d'altres, el problema de la braquistocrona proposat per Johann Bernoulli.[13]

Ell (1670) i Maclaurin (1748) van determinar la forma de les paràboles d'ordre superior

[9] B. FONTENELLE. *Histoires et mémoires* de l'Académie des Sciences de París, II, pp. 47-63.
[10] N. BOURBAKI. *Élements d'histoire des mathématiques*, p. 269 de la traducció castellana.
[11] Ibid.
[12] V. J. KATZ. *A History of Mathematics (an Introduction),* p. 482.
[13] Aquest problema l'estudià amb el propi Bernoulli, donant lloc a una lleu disputa. Jakob Bernoulli, Newton i

$y^n = p^{n-1}x$, distingint-les segons que la *n* fos un enter positiu o negatiu.

Però, en general, les seves contribucions són problemes plantejats i resolts per altres autors. Per exemple, resol de manera simple i natural, això sí, un problema dels *Principia.* La resolució de Newton ocupava cinc fulls.

L'Hôpital va ser un amateur, no es pot dir que creés cap teoria matemàtica remarcable. On sí va destacar va ser en l'elaboració de llibres de text, deixant dues obres clàssiques del segle XVIII.

***Analyse des infiniment petits* (1696)**

Com que més endavant m'estenc en l'estudi d'aquest llibre de text, ara només comentaré breument les seccions en què està dividit:

- Secció I: dóna les definicions, els axiomes i les regles bàsiques de la diferenciació.

- Secció II: aplica aquestes regles per calcular la tangent a una corba en un punt. Dóna resultats generals que, després, aplica a corbes arbitràries o a la relació entre dues corbes arbitràries. Ofereix molts exemples.

- Secció III: tracta els màxims i mínims i inclou problemes mecànics i de geografia.

- Secció IV: tracta els punts d'inflexió i les cúspides (o punts de retrocés). S'introdueix en els diferencials d'ordre superior.

- Secció V: s'analitzen les evolutes i evolvents. S'hi defineix el "radi de curvatura d'una evoluta" com $\frac{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}{-dxddy}$, on *y* és funció de *x*, que és equivalent a l'actual. És la secció més llarga.

- Seccions VI-VII: aquestes dues seccions tracten les càustiques per reflexió i refracció que, encara que no són tòpics tradicionals en el càlcul modern, sí que ho eren a finals del XVII. Precisament van ser L'Hôpital i Bernoulli, junt amb Tschirnhaus, els encarregats de desenvolupar la teoria de càustiques.

- Secció VIII: estudia el tema de les envolupants a una família de rectes. És aquí on introdueix el mètode de Leibniz de diferenciació respecte d'un paràmetre.

- Secció IX: segons el títol, està dedicada a la resolució de diversos problemes, fent servir els mètodes precedents. De fet, però, tracta el que actualment es coneix com a indeterminacions.

Leibniz també van presentar solucions a aquest problema.

Conté l’anomenada regla de L'Hôpital.

- Secció X: compara l'elegància del nou càlcul amb els mètodes no tan àgils de Descartes i Hudde per trobar màxims i mínims.

Traité des sections coniques (1707)

El *Traité des sections coniques*, publicat pòstumament el 1707, és a la geometria analítica com l'*Analyse* al càlcul diferencial.

Tot i que té molts problemes en comú amb *Nouveaux élémens des sections coniques* de La Hire, queda descartat el plagi ja que L'Hôpital barreja els mètodes algèbrics i geomètrics, mentre que La Hire els separa.

Si hagués fet servir la trigonometria (que tampoc no utilitza en l'*Analyse*) i el càlcul (perquè didàcticament "va després" de la geometria analítica) s'hagués estalviat problemes.

Aquest llibre de text va estar de moda durant gairebé un segle. A més a més de la primera edició (1707), es va tornar a editar els anys 1720, 1723 (traduït a l'anglès per Stone), 1770 (Venècia) i 1776.

2. L'*ANALYSE* COM A PRIMER LLIBRE DE TEXT DE CÀLCUL DIFERENCIAL

"[as a text-book writer] Here he was supreme, a worthy member of the great French School which included Monge and Lacroix."[1]

J. L. COOLIDGE

Primeres exposicions

Leibniz representa el naixement oficial del càlcul. Malgrat això, no publicà treballs sobre la nova matèria, només petits articles a l'*Acta Eruditorum*. Moltes de les seves descobertes les coneixem a través de cartes que enviava a altres matemàtics. El 1684 publicà en l'*Acta Eruditorum* un article de sis pàgines, on definia les diferències i les regles de diferenciació de les operacions elementals i donava aplicacions a problemes de tangents i punts crítics. L'avantatge d'aquest nou mètode és que l'ús d'expressions fraccionàries i irracionals no representa una limitació.

És, però, un text curt, mal imprimit i difícil d'entendre. Per exemple, la seva definició de dx és "una línia recta escollida arbitràriament."[2] I una mica més endavant, fa servir la següent proporció: la diferència de l'ordenada (dy) és a la diferència de l'abcissa (dx) com l'ordenada (y) és al segment de la tangent comprès entre el punt de contacte amb la corda i l'eix de les abcisses. Tampoc no es pot dir que sigui un text didàctic: "La demostració de totes [aquestes coses] serà fàcil per algú versat en aquestes qüestions (...)."[3]

Tot i això, no hem d'oblidar que és a ell a qui li devem la invenció d'un simbolisme adient, dels algorismes i del mètode invers de les tangents.

D'altra banda, entre el 1669 i el 1676 Newton va escriure tractats de fluxions, no publicats fins al 1704. Trobem la base del mètode als seus *Principia* (1687), molts anys després de descobrir el seu càlcul. Però també és curt i críptic.

El 1685 i el 1693 John Craig publicà dos treballs basats en el càlcul leibnizià. No serveixen, però, com a introducció a la matèria, donada la seva dificultat a causa del llenguatge geomètric en què estan escrits.

Així doncs, abans del 1696 no era fàcil començar a estudiar el càlcul. Johann Bernoulli va composar dos petits llibres de text entre el 1691 i el 1692, un d'ells sobre càlcul integral (publicat el

[1] J. L. COOLIDGE. *The Mathematics of Great Amateurs*, p. 154.

[2] G. W. LEIBNIZ. "Nova methodus pro maximis & minimis,..." (extret de D.E. SMITH. *A Source Book in Mathematics*, p. 620)

[3] Ibid., p. 623.

1742) i l'altre sobre càlcul diferencial, les *Lectiones* (publicat gairebé dos-cents anys més tard).

Amb aquest panorama, quan Huygens va voler aprendre càlcul ho va tenir difícil. Va ser L'Hôpital qui el va introduir en la matèria, després de rebre les lliçons del mestre Bernoulli.

Èxit de l'*Analyse*

La manca de treballs elementals sobre el càlcul va impulsar L'Hôpital a escriure el seu tractat. L'*Analyse*, el primer tractat sistemàtic del càlcul, va ser molt ben rebut pels *savants* ja que obria la porta a aquesta disciplina al lector mitjà, abans només accessible a uns quants. El mateix Johann el va lloar per l'exposició i disposició de les seves proposicions.[4]

La influència de l'*Analyse* va superar els límits del món matemàtic. A París es va representar un *vaudeville* titulat *Infiniment petits*, on es feia broma sobre la fràgil salut del marquès i la poca inclinació de la marquesa envers la nova geometria.

L'*Analyse* ens permet conèixer el nivell de càlcul de l'època. Diu Kuhn que "els llibres de text són vehicles pedagògics per a la perpetuació de la ciència normal."[5] Les diferències entre la ciència normal a la Gran Bretanya i la ciència normal al Continent queden plasmades en els seus respectius llibres de text, fet que corrobora aquesta afirmació. Els llibres de text també són vehicles de transmissió del vocabulari i la sintaxi científica emprats en un moment donat. El llenguatge i notació utilitzats per L'Hôpital són semblants als actuals (llevat de l'anacronisme entre "raó" i "proporció"), de manera que, actualment, el seu llibre es pot seguir sense dificultats.

Segons Kuhn, els llibres de text exposen els resultats establerts després d'una revolució, donant maduresa a la ciència normal. L'Hôpital no discuteix els fonaments de la nova ciència, simplement els accepta. Per exemple, en el prefaci diu que els dos postulats que apareixen en la primera secció de l'*Analyse* són evidents, que els podria haver demostrat a la manera dels antics però que, aleshores, el llibre s'allargaria massa en coses ja conegudes. Aquest fet, junt amb la seva claredat i el seu esperit didàctic, confereix seguretat al càlcul. L'*Analyse* presenta el càlcul com una ciència acabada, completa, "normalitzada" .

Tot i això, mirat des de la perspectiva actual l'*Analyse* presenta certes mancances:

---

[4] Tot i això, l'Académie des Sciences es va dividir a causa de l'*Analyse*. D'una banda estaven els defensors de L'Hôpital (els "moderns"), com Varignon i Saurin, i d'una altra els seus detractors (els "antics"), com Rolle i l'Abbé Gallois. Finalment van guanyar els defensors, quan L'Hôpital ja era mort. Aquest és el segon dels tres atacs contra el càlcul. El primer va ser el de Nieuwentijdt contra Leibniz (1695-96). El tercer va ser el de *The Analyst* (1734-35) contra el càlcul de Newton.

[5] T. S. KUHN. *The Structure of Scientific Revolutions*, p. 214 de la traducció castellana.

- No apareix la noció ni de funció ni de límit.[6]

- L'Hôpital no fa servir sèries de Taylor.[7]

- Tot i que la dinàmica del segle XVII proporcionava oportunitats d'aplicar el càlcul nou, no trobem aplicacions científiques. S'ha de dir, però, que la malaltia impedí L'Hôpital dur a terme aquest apartat.

- No fa traçat de corbes.[8]

Edicions i traduccions

L'*Analyse* va estar de moda durant el segle XVIII. Encara que L'Hôpital no discuteix la naturalesa del càlcul, va donar un gran impuls a aquesta nova matèria, popularitzant-la tant mitjançant la seva influència en el *Journal des savants* com a través de les diverses edicions que es van fer del seu llibre. A París es va tornar a editar els anys 1715, 1716, 1720, 1758 i 1781. També hi ha un edició feta a Avignon el 1768.[9]

D'altra banda, Stone va traduir l'*Analyse* a l'anglès (1730).[10] Per respecte a Newton de vegades va alterar el llenguatge.[11] Va afegir-li nou material (funcions logarítmiques, exponencials i trigonomètriques) i, a més a més, el va completar amb un apèndix sobre càlcul integral, que va ser traduït al francès i publicat el 1735.

També es van fer dues traduccions llatines a Viena (1764, 1790).

Crousaz (1721) i Varignon (1725) van publicar els seus respectius comentaris sobre l'*Analyse*.

[6] La funció serà popularitzada cinquanta anys més tard, gràcies a Euler i en l'*Introductio in analysim infinitorum*. La idea general de límit, intuïda per Newton i defensada per D'Alembert, no va esdevenir bàsica fins a Cauchy.

[7] Tot i que ja eren conegudes per James Gregory i Johann Bernoulli, van ser formalitzades després de l'època de L'Hôpital pels treballs de Brook Taylor sobre diferències finites i infinitèsimes. També les trobem en Colin Maclaurin.

[8] El segle XVII inventa les eines però és el XVIII qui les aplica a l'estudi de corbes.

[9] Les edicions de 1758, 1768 i 1781 van ser revisades i ampliades. Es poden trobar més edicions de l'*Analyse* als catàlegs del British Museum i de la Bibliotèque Nationale i també a Poggendorff.

[10] Deu anys més tard Buffon tradueix al francès el *Methodus fluxionum* de Newton. Aquests dos fets mostren que hi havia un cert apropament entre la Gran Bretanya i el Continent.

[11] Per exemple, fa servir el terme "fluxió" en lloc de "diferencial", "$\dot{x}$" en lloc de "*dx*", "ordenada" en lloc d' "aplicada", etc.

Altres llibres de text sobre el càlcul

El 1704 es publica *A Treatise of Fluxions* de Hayes i el 1706 *An Institution of Fluxions* de Ditton, que exposen una aproximació fluxional (newtoniana) del tema. Les diferències més destacables amb el text de L'Hôpital són que Ditton i Hayes sí que estudien el logaritme i la funció exponencial, probablement a partir del text de Bernoulli.[12]

D'altra banda, els autors britànics també fan un estudi del càlcul integral, cosa que no havia pogut arribar a fer L'Hôpital.

Però ni Ditton, ni Hayes, ni L'Hôpital no estudien el càlcul del sinus ni el del cosinus.[13] Aquest estudi el farà Euler l'any 1730.

El *Methodus incrementorum directa e inversa* de Brook Taylor (1715) va tenir un cert renom, malgrat la complicada notació i l'estil obscur de l'autor. El 1742 es publica el *Treatise of Fluxions* de Colin Maclaurin, amb el qual les matemàtiques a l'Anglaterra del segle XVIII assoleixen el cim de la precisió lògica.

La darrera meitat de segle XVIII al llibre de L'Hôpital li surt un bon rival: l'*Instituzioni analitiche* de Maria Agnesi (1748). Aquest mateix any, Leonhard Euler publica l'*Introductio in analysim infinitorum*.

Però és el *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral* de Lacroix (París, 1802) qui, finalment, pren el lloc a l'*Analyse*.

[12] Per exemple, el problema V de les *Lectiones* de Johann Bernoulli tracta el logaritme.

[13] Utilitzen algunes relacions trigonomètriques en problemes concrets. Vegeu, per exemple, els articles 59 i 61 de l'*Analyse*.

PRIMERA PART : RECULL HISTÒRIC

3. BREU HISTÒRIA DE LES CORBES ANALITZADES

Llevat d'algunes aplicacions artístiques, poc va avançar la geometria des de Pappos fins al 1600.

Les publicacions de les *Seccions còniques* d'Apol·loni (especialment la traducció llatina de Commandino (1509-75)) van fer créixer l'interès per la geometria.

Un altre factor que contribuí al renaixement de la geometria foren els nous problemes científics i les noves necessitats pràctiques. Johannes Kepler va utilitzar les seccions còniques en un treball de l'any 1609, la qual cosa va provocar la revisió d'aquestes corbes i la cerca de propietats útils a l'astronomia. Altres exemples són la importància creixent de l'òptica (especialment després de la invenció del telescopi i del microscopi a principis del XVII), el disseny de lents, les exploracions geogràfiques (que van fer necessari dibuixar camins sobre l'esfera i sobre el mapa), l'estudi dels projectils ...

El problema pràctic de trobar àrees i volums va començar a atreure l'atenció. Amb la *Nova stereometria doliorum vinariorum* (1615) de Kepler començà una etapa de molta activitat en aquesta disciplina.

Els matemàtics s'adonaren que, als mètodes grecs de demostració, els mancava generalitat: gairebé per a cada teorema els grecs buscaven un mètode especial.

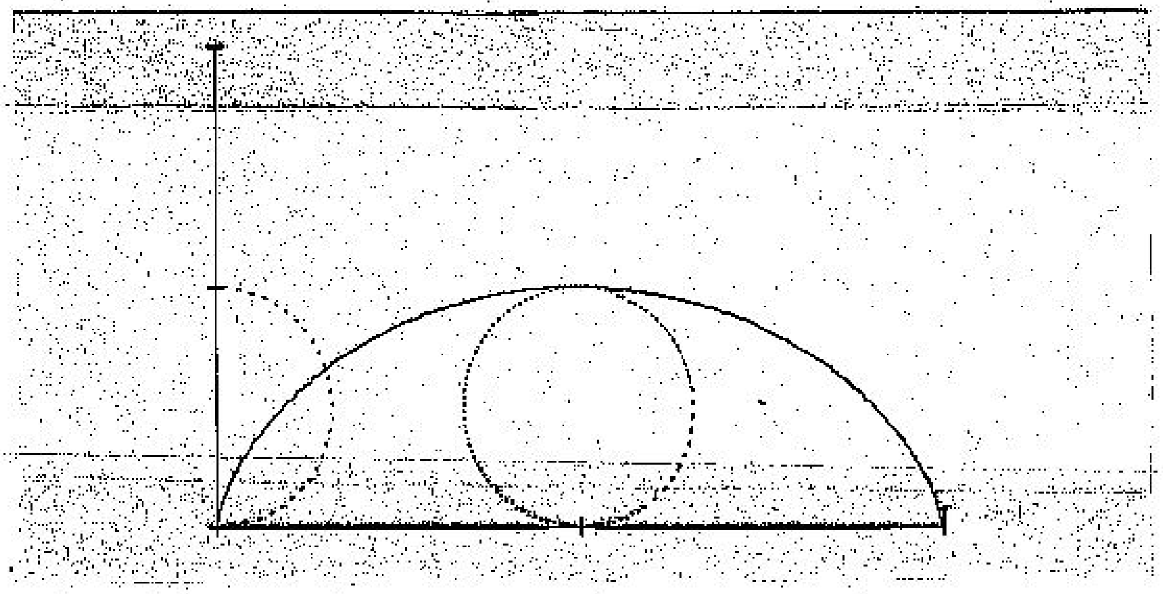
Les contribucions medievals no van suposar una extensió dels desenvolupaments clàssics, sinó, més aviat, una exploració de nous camins en la Matemàtica. Els resultats obtinguts en el camp de la Cinemàtica, el tractament de sèries infinites i la consideració intuïtiva del concepte de funció foren innovadors i originals.

Aleshores, les corbes es van definir com a trajectòries en lloc de com a seccions còniques, com havia fet Apol·loni. Les còniques, així com d'altres corbes gregues (la concoide de Nicomedes, la cissoide de Diocles, l'espiral d'Arquimedes, la quadratriu d'Hippias), van ser reestudiades. A més a més, es van introduir noves corbes, com ara la cicloide.

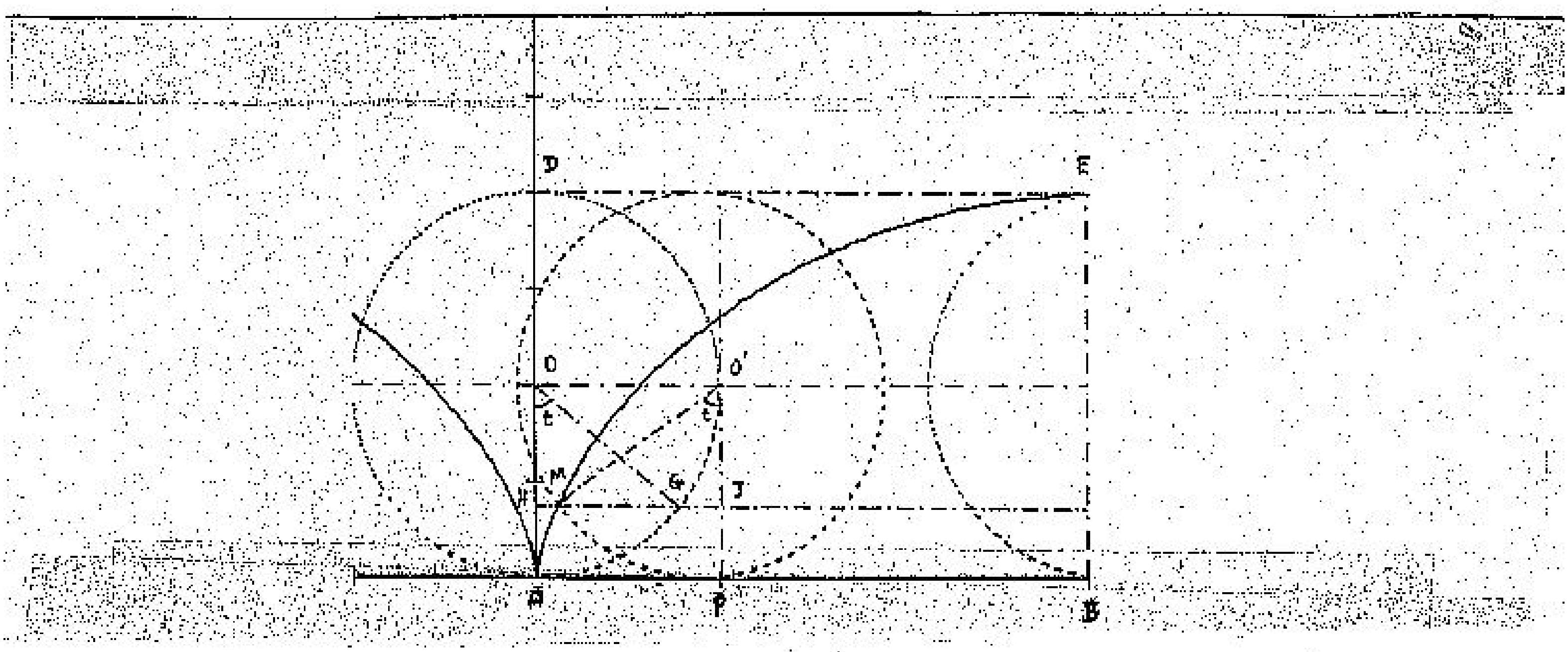
Els matemàtics del XVII van determinar les tangents, els extrems, el radi de curvatura, els punts d'inflexió, l'àrea i la longitud d'aquestes corbes. Cadascun d'ells amb el seu mètode característic: Roberval considerant la corba com a composició de dos moviments, Newton aplicant les sèries de potències de funcions trigonomètriques, Fermat amb el mètode d'"adigualació", ...

HISTÒRIA DE LA CICLOIDE

La cicloide és una corba plana descrita per un punt d'un cercle que roda sense lliscar sobre una recta en el pla. Roberval, en el seu *Traité des indivisibles* (1634) la defineix com "la corba traçada per un punt que es mou uniformement sobre la circumferència d'un cercle mentre el cercle és portat en la mateixa raó uniforme al llarg d'una recta tangent perpendicular a un diàmetre donat."[1]



Equació paramètrica de la corba:



[1] E. WALKER, *A Study of the Traité des Indivisibles of Roberval*, p. 55

Sigui $\{A;x,y\}$ un sistema cartesià; AB l'eix; A un punt cuspidal; E un vèrtex.

Quan G passa a ser P:

$$r = OA,$$

$$t = \angle AOG,$$

$$AP = \text{arc}(AG),$$

aleshores A esdevé M:

$$r = O'M,$$

$$t = \angle PO'M.$$

Llavors:

$$x = HM = HJ - JM = r(t - \sin t),$$
$$y = AH = PO' - JO' = r(1 - \cos t).$$

que són les equacions paramètriques de la cicloide.

<u>Equació de la corba en coordenades cartesianes:</u>

$$x + \sqrt{y(2r-y)} = r\ \arccos\frac{r-y}{r}.$$

Per tant, és una corba transcendent.

No es coneix cap document de l'època grega que permeti afirmar que coneixien la cicloide. Tot i això, sembla que l'interès per aquesta corba prové de la paradoxa d'Aristòtil: dues circumferències concèntriques (amb diàmetres diferents) recorren una distància igual si giren segons una circumferència i, en canvi, un cop separades recorren distàncies proporcionals als seus diàmetres.

Incorrectament atribuïda a Nicholas Cusa (1450), sembla que el primer en estudiar-la va ser Charles Bouvelles (1501). També va atreure l'atenció de Galileu, qui parlà de la corba de més ràpid descens (1632), encara que no amb un plantejament general i sense obtenir-ne cap resultat. Viviani, deixeble de Galileu, va trobar-ne la tangent.

Els resultats més importants els obtingueren Torricelli i Roberval.

Gilles Personne de Roberval (1602-1675)

Bé independentment, bé a través de Galileu, Mersenne va tenir coneixement de l'existència de la cicloide i el 1615 va proposar altres matemàtics l'estudi de la corba.

Per indicació de Mersenne, Roberval va intentar estudiar la corba que ell va anomenar "trocoide" (de roda), però encara no tenia les eines adequades. Va ser desprès d'inventar el seu mètode dels infinitesimals (recollit en el seu *Traité des indivisibles*, 1634) que va poder:

. calcular la quadratura de la corba (l'àrea entre la corba i la seva base és tres vegades l'àrea del cercle generador)

. traçar-li la tangent

. calcular el volum generat per la rotació d'un arc al voltant de la base (que és cinc vuitens del volum del cilindre circumscrit)

. inventar la "companya de la trocoide" (que és la sinusoide)

. explicar com construir la corba amb punts

Evangelista Torricelli (1608-1647)

Torricelli es va interessar pel problema de la cicloide tant a través del seu mestre Galileu com a partir de les cartes de Mersenne.

L'any 1643 Torricelli envia a Mersenne la quadratura de la cicloide. Aquest resultat i la construcció de les tangents van ser publicats en les seves *Opere* el 1644.

Entorn del volum generat per la revolució de la cicloide al voltant del seu eix, així com de l'estudi dels centres de gravetat, va sorgir una qüestió de prioritats entre Roberval i Torricelli. Bé que Torricelli va publicar abans el seu mètode mecànic per calcular les tangents, Roberval l'havia descobert primer.

Pierre Fermat (1601-1665) i René Descartes (1596-1650)

Quan, a través de Mersenne, Fermat i Descartes van saber dels resultats de Roberval, van donar les seves pròpies solucions a la quadratura de l'arc de cicloide.

El seu mètode per traçar la tangent a la cicloide (1638) era algèbric, mentre que el de Roberval era mecànic.

Blaise Pascal (1623-1662)

El 1658 Pascal va proposar a la resta dels matemàtics sis qüestions sobre la cicloide o, com ell l'anomenava, "ruleta". El premi quedà desert. És per aquesta raó que el desembre del mateix any i sota el nom d'Amos Dettonville publicà els seus mètodes i resultats, considerats com la part més brillant del seu quefer matemàtic.

Molts matemàtics del segle XVII es van interessar pel problema de la rectificació de corbes. Tot i no ser un dels problemes proposats per Pascal, l'arquitecte Sir Christopher Wren (1632-1723) li va enviar, sense demostració, la rectificació de la cicloide. Quan Roberval en fou informat, immediatament en donà la prova, tot dient que ell ja feia anys que havia rectificat la corba. Aquesta afirmació és bastant plausible, doncs una demostració d'aquest tipus no es pot elaborar tan precipitadament.

JohnWallis (1616-1703)

L'any 1659 Wallis escriu una breu història de la cicloide en el prefaci del seu *Tractatus duo, prior de cycloide, posterior de cissoide.*

Christaan Huygens (1629-1695)

Huygens va descobrir que la cicloide era la tautocrona que ell buscava, és a dir, la corba que el pèndol simple descriu en moure's amb període constant (independentment de l'amplitud).

A partir del pèndol cicloidal, Huygens descobrí que l'evoluta de la cicloide és un parell de semi-cicloides i així va poder deduir un mètode simple de rectificació.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

En la *De geometria recondita et analysi indivibilium atque infinitarum* de Leibniz trobem l'equació de la cicloide sota la forma:

$$y=\sqrt{2x-x^2}+\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

Leibniz va quadrar el segment general de la cicloide fent servir el teorema de la transmutació.[2]

Sir Isaac Newton (1642-1727)

Newton calculà l'àrea sota la cicloide aplicant, com era usual en ell, les sèries de potències de les funcions trigonomètriques.[3]

La qüestió de la braquistocrona

En l'*Acta Eruditorum* de juny de 1696, Johann Bernoulli va proposar determinar la corba de més ràpid descens. En altres paraules, donat un punt A i un punt B no situat directament sota A, es demana trobar la trajectòria que havia de seguir un mòbil per anar de A a B en el mínim temps possible. Johann va mostrar que la solució era la cicloide. Newton, Leibniz, Jakob Bernoulli i L'Hôpital també van resoldre el problema.

Leonhard Euler (1707-1783)

El desenvolupament del càlcul variacional té el seu origen en el desafiament llançat per Johann Bernoulli a propòsit de la braquistocrona. Johann va utilitzar el principi variacional per concloure que la solució era la cicloide. El seu germà Jakob va fer servir un mètode on ja apareixien alguns dels principis del mètode de màxims i mínims d'Euler. Per tant, no és d'estranyar que Euler sovint cités la cicloide en el seu tractat.

---

[2] Vegeu C. H. EDWARDS. *The Historical Development of the Calculus*, pp. 250-251.

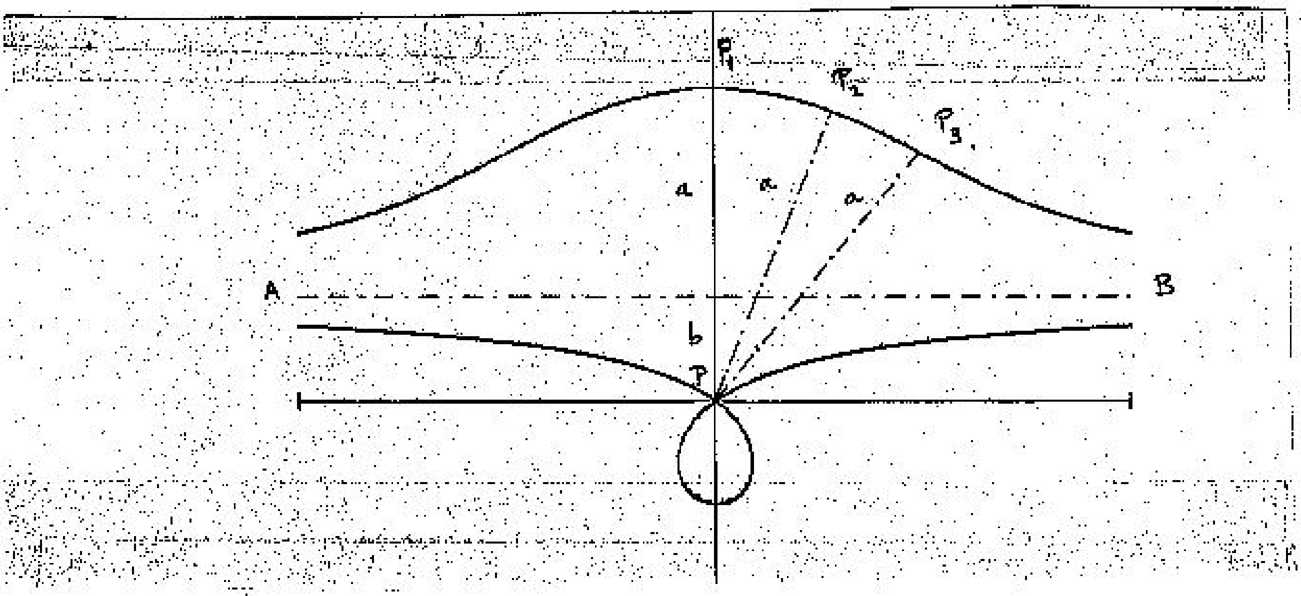
[3] Ibid., p. 207.

HISTÒRIA DE LA CONCOIDE

Grècia

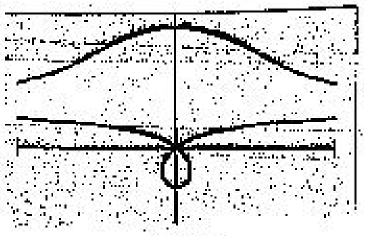
Nicomedes (200 aC) va definir la concoide i la va utilitzar per trisecar un angle i duplicar el cub. Nicomedes va idear un enginy amb el qual va construir la seva corba. La invenció d'aquest mecanisme exemplifica l'interès dels matemàtics de l'època per la construcció de corbes de manera mecànica.

Definició:

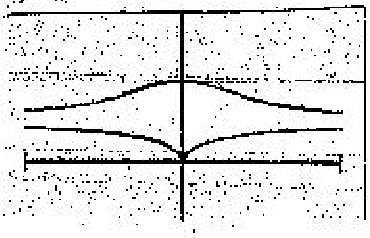


Sigui AB una recta i P un punt exterior. Tracem rectes (radis) des de P que intersectin AB. Sobre aquestes, i des del punt d'intersecció, prenem una longitud a. Els extrems P_1, P_2, P_3,... així determinats descriuen la concoide.[4]

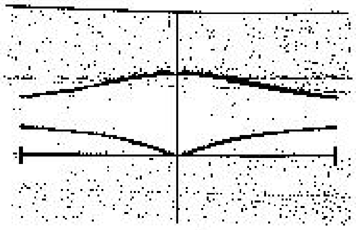
Si b és la distància de P a AB i si la longitud a s'agafa des de la recta en direcció P, s'obtenen tres corbes segons si $a<b$, $a=b$ o $a>b$.



$a>b$



$a=b$



$a<b$

[4] De fet, els grecs només consideraven la branca superior. L'ordinador, però, en dibuixa les dues.

Equació de la corba en coordenades polars:

Si t és l'angle que forma un radi amb la perpendicular per P, aleshores:

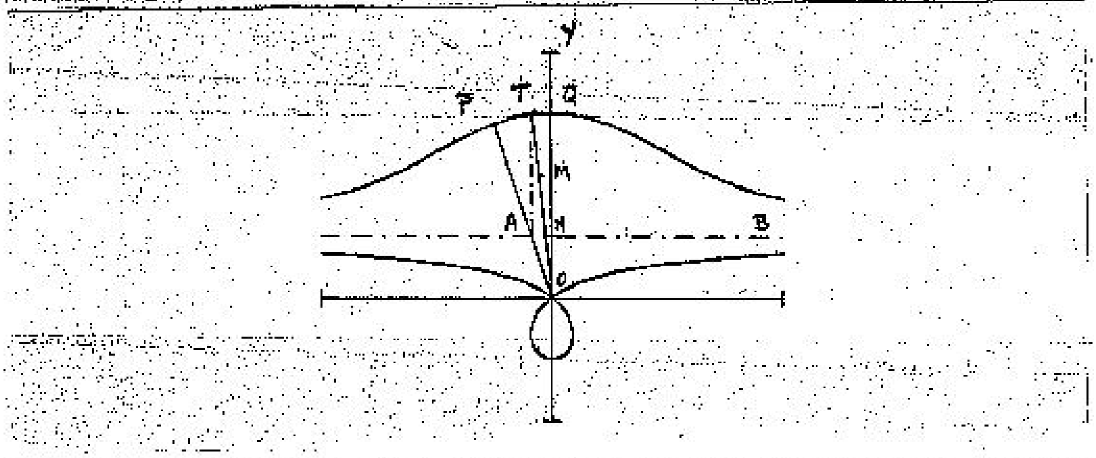
$$r = a + b\sec(t).$$

Equació de la corba en coordenades cartesianes:

$$(x^2+y^2)(x-b)^2-a^2x^2=0.$$

És, doncs, una corba algèbrica.

[illegible][5]



Volem trisecar l'angle $\angle YOA$. Des de A tracem AB perpendicular a OY. Dibuixem la concoide amb pol O, directriu AB i distància constant igual a $2AO$. Sigui P el punt d'intersecció entre AO i la concoide i Q el d'intersecció entre OY i la concoide. Per A tracem una perpendicular a AB que talla la concoide en T. Tracem OT que talla AB en N. Sigui M el punt mig de NT.

Per construcció, $NT=2AO$. Atés que ΔANT és un triangle rectangle, $MT=MN=MA$. Aleshores, $MA=AO$. Per tant, $\angle AOM=\angle AMO=2\angle ATM=2\angle TOQ$. És a dir, $\angle AOM=2/3\angle YOA$ i $\angle TOQ=1/3\angle YOA$, amb la qual cosa queda trisecat l'angle $\angle YOA$.[6]

Duplicació del cub:[7]

El problema de la duplicació del cub és equivalent a trobar dues mitjanes proporcionals

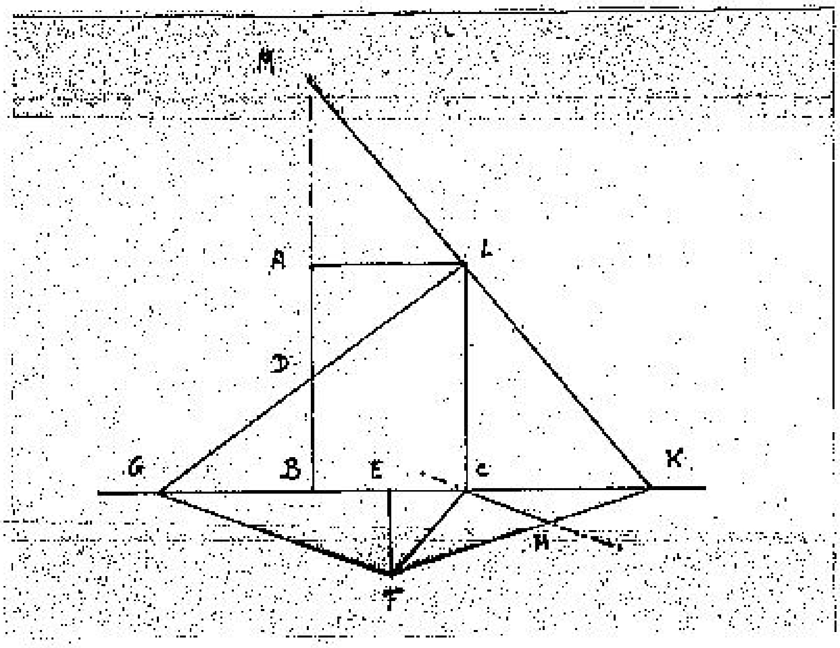
---

[5] Vegeu T. HEATH *A History of Greek Mathematics*, I, p. 236.

[6] A Bagdad, cap al 870, els "tres germans" també van fer servir la concoide per resoldre el problema de la trisecció de l'angle. Aquesta resolució es pot trobar al seu llibre, *Liber trium fratrum de geometria* traduït al llatí per Gerard de Cremona (vegeu D. E. SMITH, *History of Mathematics*, I, p. 171)

[7] Vegeu T. HEATH, op. cit., I, pp. 261-262.

entre dues rectes. Vegem-ne la solució proposada per Nicomedes.



Siguin AB, BC les dues rectes entre les quals s'han de trobar les dues mitjanes. Completem el paral·lelogram $ABCL$. Bisequem AB, BC en D i E. Unim L amb D i allarguem de tal manera que LD talli CB en G. Dibuixem EF perpendicular a BC i tal que $CF=AD$. Unim G amb F i dibuixem CH paral·lela a GF. Des de F tracem FHK que talla CH i EC en H i K respectivament, de manera que $HK=CF=AD$. Construïm la concoide amb pol F, directriu CH i "distància" AD o CF. Aquesta concoide troba EC en K. Unim FK i per la propietat de la concoide, $HK=$ "distància". Unim K amb L i fem que KL trobi BA en M. Aleshores, CK i MA són les mitjanes proporcionals demanades.

<u>Demostració</u>:

E és el punt mig de BC. Allarguem BC fins a K. Aleshores, aplicant Euclides II, tenim que:

$$BK \cdot KC + CE^2 = EK^2 .$$

Afegim EF^2 a ambdós costats:

$$\begin{aligned} &BK \cdot KC + CE^2 + EF^2 = BK \cdot KC + CF^2 = \\ &= EK^2 + EF^2 = FK^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Per paral·lelisme:

$$\frac{MA}{AB} = \frac{ML}{LK} = \frac{BC}{CK},$$

però $AB = 2AD$ i $BC = \frac{1}{2}GC$. Així doncs:

$$\frac{MA}{AD} = \frac{GC}{CK} = \frac{FH}{HK}$$

i, *componendo*, $\frac{MD}{AD}=\frac{FK}{HK}$. (2)

Per construcció, $AD = HK$. Per tant, per (2):

$$MD = FK \Rightarrow MD^2 = FK^2.$$

Ara:

$$MD^2 = (MA + AD)^2 = BM \cdot MA + DA^2,$$

i per (1):

$$FK^2 = BK \cdot KC + CF^2.$$

Així doncs:

$$BM \cdot MA + DA^2 = BK \cdot KC + CF^2.$$

Però com que $DA = CF$, aleshores:

$$BM \cdot MA = BK \cdot KC \Rightarrow \frac{CK}{MA} = \frac{BM}{BK} = \frac{LC}{CK},$$

i també:

$$\frac{BM}{BK} = \frac{MA}{AL}.$$

Per tant:

$$\frac{LC}{CK} = \frac{CK}{MA} = \frac{MA}{AL},$$

o bé:

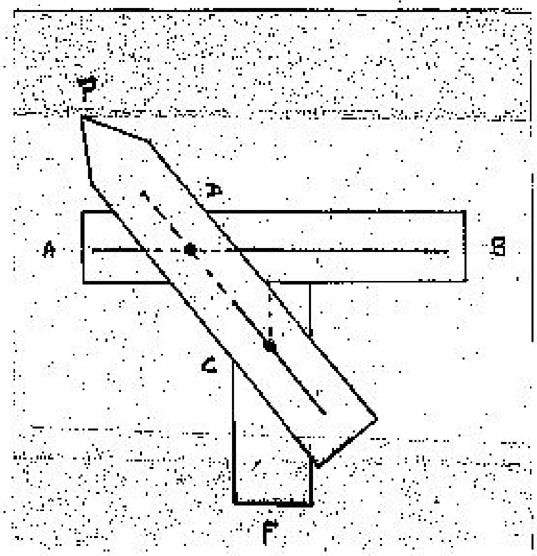
$$\frac{AB}{CK} = \frac{CK}{MA} = \frac{MA}{BC}$$

com volíem demostrar.

Enginy de Nicomedes:[8]

La directriu *AB* és un regle amb una ranura paral·lela a la seva longitud. *FE* és un altre regle, fix, perpendicular al primer, amb un clau *C* fixat sobre ell (el pol). *PC* és un tercer regle, acabat en punta (*P*), amb una ranura paral·lela a la seva longitud, on queda encaixat *C*. *D* és un clau fix sobre *PC*, en línia recta amb la ranura. *D* es pot moure lliurement al llarg de la ranura en *AB* a cada costat de *F*. La distància *PD* és constant. En moure's el regle *PC*, *P* descriurà la concoide.

[8] Vegeu T. HEATH, op. cit., I, pp. 238-239.



Les concoides de Nicomedes, juntament amb la recta i la circumferència, són les corbes mecànicament construïbles més antigues sobre les que tenim informació satisfactòria. Però, malgrat la "limitació platònica"[9] de resoldre un problema només amb regle i compàs, aquestes corbes no són construïbles amb aquests estris.

El segle XVII

Precisament va ser la determinació de la tangent de la concoide el motiu que va portar Roberval a plantejar la qüestió del punt d'inflexió, doncs havia detectat dos punts pels quals no és podia traçar la tangent. Això va ser el tema d'una carta que dirigí a Fermat el 22 de novembre de 1636.

Fermat i Descartes van traçar la tangent a la concoide seguint els seus respectius mètodes.

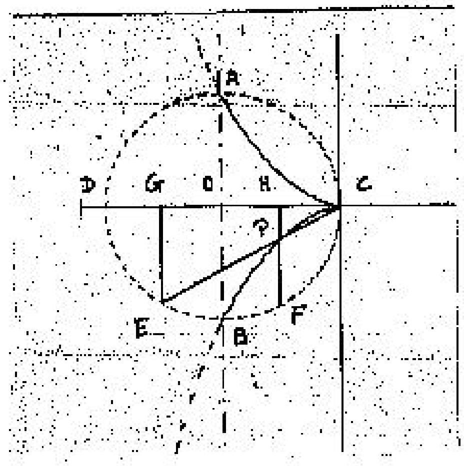
[9] J. PLA. "Arquimedes i Descartes; el mètode com un canvi de llenguatge", p. 45.

HISTÒRIA DE LA CISSOIDE

Grècia

Diocles (finals del segle II aC - principis del segle I aC) va inventar la cissoide i la va utilitzar per resoldre el problema Delià, és a dir, el problema de la duplicació del cub o, equivalentment, el de trobar dues mitjanes proporcionals. Aquesta resolució apareix en el seu llibre *Miralls ustoris*.

Definició: La corba queda definida de la següent manera:



Siguin AB i DC dos diàmetres perpendiculars d'un cercle. Siguin E, F punts dels quadrants BD, BC respectivament, de manera que arc(BE)=arc(BF). Tracem EG, FH perpendiculars a DC. Unim E amb C, donant lloc a EC, que talla HF en el punt P. La cissoide és el lloc geomètric dels punts P que s'obtenen de les diferents posicions de E sobre el quadrant BD i de F a la mateixa distància de B sobre el quadrant BC.

Equació de la corba en coordenades cartesianes:

Sigui a el radi de la circumferència, $x=OH$, $y=HP$ (és a dir, prenem eixos de coordenades OC, OB).

Com que

$$\frac{DH}{HF}=\frac{HF}{HC},$$

llavors:

$$(a+x)y = \sqrt{a^2 - x^2}(a-x),$$

o bé:

$$(a+x)\,y^2 = (a-x)^3.$$

És, també, una corba algèbrica.

Aquesta equació inclou la línia discontínua, que Diocles no considera. Té una cúspide en C i la tangent en D és una asímptota de la corba.

La cissoide, a l'igual que la concoide, no és construïble amb regle i compàs.

<u>Duplicació del cub</u>:[10]

Aquest punt P verifica:

$$\frac{DH}{HF} = \frac{HF}{HC} = \frac{HC}{HP},$$

és a dir, HF i HC són dues mitjanes proporcionals en proporció contínua entre DH i HP.

<u>Demostració</u>:

De la construcció de la corba podem deduir que $EG=FH$, $DG=HC$, per tant:

$$\frac{CG}{GE} = \frac{DH}{HF}. \quad (1)$$

Donat que F és un punt del cercle, FH és mitjana proporcional entre DH i HC:

$$\frac{DH}{HF} = \frac{HF}{HC}. \quad (2)$$

I per triangles semblants:

$$\frac{CG}{GE} = \frac{CH}{HP}. \quad (3)$$

Aleshores, de (1), (2) i (3) podem concloure que:

---

[10] Vegeu T. HEATH, op. cit., I, pp. 264-266.

$$\frac{DH}{HF}=\frac{HF}{HC}=\frac{HC}{HP},$$

que equival a dir que HF i HC són les dues mitjanes proporcionals entre DH i HP.

El segle XVII

Huygens va donar la longitud d'arc de la cissoide.

Newton, a partir d'una integració, troba la generalització del binomi. Amb aquest instrument pot diferenciar i integrar, i en una carta a Leibniz aplica el seu teorema a diversos exemples. Entre ells, el de la rectificació de la cissoide.[11]

Wallis dedica una part del seu *Tractatus duo, prior de cycloide, posterior de cissoide* (1659) a l'estudi d'aquesta corba. En particular, aplica el seu mètode d'interpolació per analogia per quadrar la cissoide.[12]

---

[11] Vegeu C. H. EDWARDS. *The Historical Development of the Calculus*, pp. 219-220

[12] Ibid., pp. 176-178.

HISTÒRIA DE LA QUADRATRIU

Grècia

La geometria grega es va dedicar especialment als problemes construïbles amb regle i compàs. Es donava més importància a la forma que a la variació, de manera que el concepte de funció no va ser desenvolupat. Malgrat tot, en ocasions la "limitació platònica"[13] era ignorada.

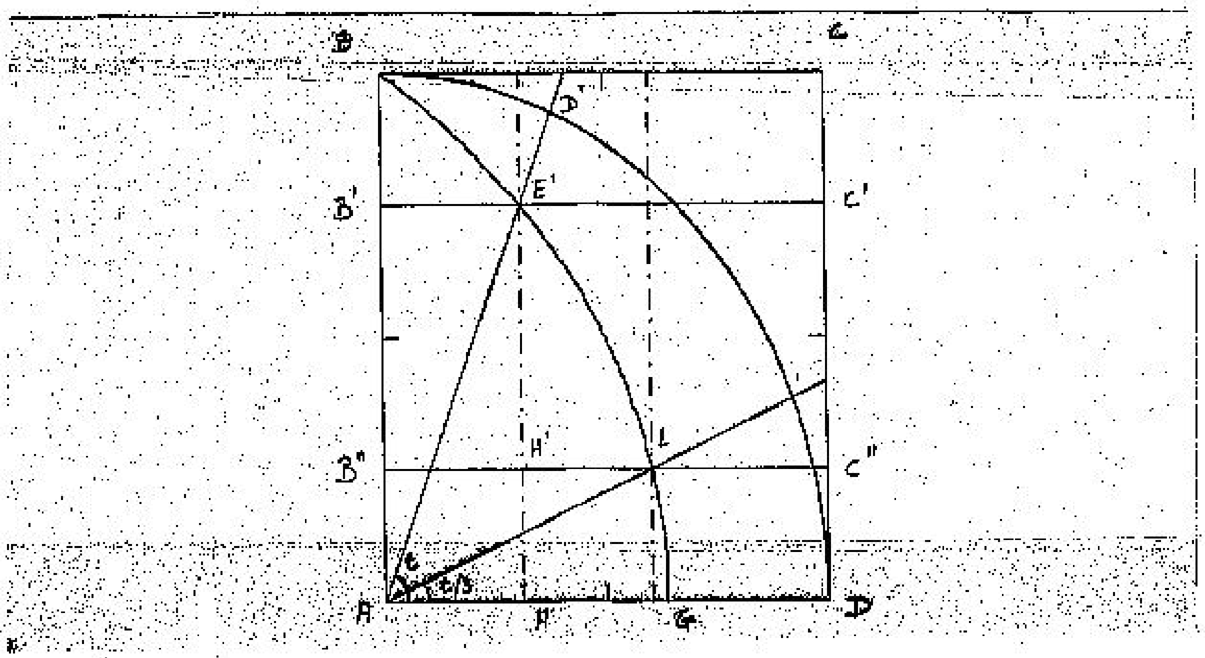
Hippias d'Elis (nascut probablement el 460 aC), de l'escola sofista, contemporani de Sòcrates, va inventar una corba, la quadratriu, que en principi havia de servir per trisecar un angle. Malauradament, la quadratriu no és construïble amb regle i compàs.

Hippias potser va intuir que amb la seva corba es podia resoldre el problema de la quadratura del cercle però no va ser capaç de justificar-ho. Dinostrat (350 aC), de l'escola platònica, va mostrar com quadrar el cercle a partir de la quadratriu i Pappos (s. III) en donà la prova.

Arquimedes (287-212 aC) podria haver estat influenciat per la composició dels dos moviments de la corba d'Hippias a l'hora de definir la seva espiral.

Nicomedes (finals del segle III aC), un successor d'Arquimedes, va utilitzar un mètode innovador per trobar la longitud de la circumferència i, així, poder quadrar el cercle. I ho va fer a partir de la quadratriu.

Construcció:



[13] J. PLA. "Arquimedes i Descartes; el mètode com un canvi de llenguatge", p. 45.

AB gira al voltant del punt *A* en el sentit de les agulles del rellotge amb velocitat constant, fins arribar a la posició *AD*. En el mateix temps, *BC* baixa, paral·lelament a ell mateix i amb velocitat uniforme, cap a *AD*.

Suposem que *AB* assoleix *AD'* quan *BC* arriba a *B'C'*. Sigui *E'* el punt d'intersecció de *AD'* i *B'C'*. El lloc geomètric dels punts *E* és la quadratriu.

Analitzem el cas particular del punt final de la corba, *G*. Aquest punt no es pot obtenir directament de la definició de la corba, doncs, quan *AB* assoleix *AD*, *BC* també assoleix *AD* i no hi ha punt d'intersecció entre la recta que gira i la recta que baixa. S'ha d'entendre *G* com el límit dels punts precedents. La construcció d'aquest punt ja va ser criticada en l'època antiga.

Equació de la corba en coordenades cartesianes:

Com que *AD'* i *B'C'* es mouen amb velocitats constants, *B'C'* recorre *E'H* en la mateixa fracció de temps en què *AD'* assoleix *AD*.

$$t = \angle D'AD,$$
$$y = E'H,$$
$$a = BA.$$

Així:

$$\frac{t}{\frac{\pi}{2}} = \frac{y}{a}, \quad (1)$$

o bé:

$$y = at\frac{2}{\pi}.$$

Si prenem $x=AH$, llavors:

$$t = \mathrm{arctg}\frac{y}{x},$$

i, per tant:

$$y = \frac{2a}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{y}{x},$$

o bé:

$$y = x \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2a}.$$

És, per tant, una corba transcendent.

<u>Equació de la corba en coordenades polars:</u>

$$t = \angle D'AD,$$
$$y = E'H,$$
$$a = AB.$$

Per definició de la corba sabem que:

$$\frac{t}{\frac{\pi}{2}} = \frac{y}{a} = \frac{\operatorname{arc}(D'D)}{\operatorname{arc}(BD)},$$

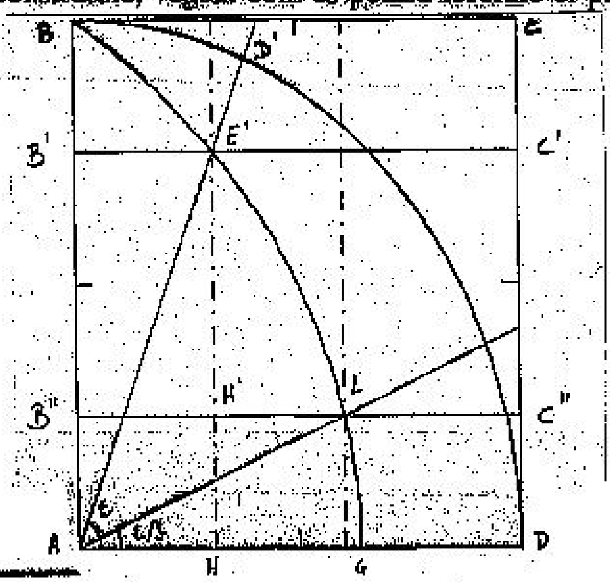
$$\frac{y}{\operatorname{arc}(D'D)} = \frac{a}{\operatorname{arc}(BD)}.$$

Sigui $r=r(t)$. Aleshores:

$$\frac{r(t)\sin t}{at} = \frac{a}{a\frac{\pi}{2}}.$$

<u>Trisecció d'un angle:</u>[14]

Si la corba fos construïble, vegem com es podria resoldre el problema de la trisecció de l'angle.



[14] Vegeu M. KLINE. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, pp. 39-40.

Volem trisecar l'angle $t=\angle D'AD$. Només cal trisecar y, de manera que $E'H'=2H'H$. Provem-ho:

Tracem $B''C''$ passant per H' i tallant la quadratriu en L. Unim A amb L. Llavors:

$$\frac{\angle LAD}{\frac{\pi}{2}}=\frac{H'H}{a}=\frac{\frac{y}{3}}{a}. \quad (2)$$

De les expressions (1) i (2) obtenim:

$$\angle LAD=\frac{t}{3}.$$

Rectificació del cercle:[15]

Per rectificar el cercle a partir de la quadratriu necessitem conèixer la posició final, G, que és la intersecció de la quadratriu amb AD.

Proposició: $\dfrac{\text{arc}(BED)}{AB}=\dfrac{AB}{AG}$

Demostració: Dinostrat, possiblement també el mateix Hippias, van demostrar aquesta proposició per reducció a l'absurd.

Necessitem alguns dels resultats coneguts cap al 350 aC:

(i) les circumferències són com els seus radis

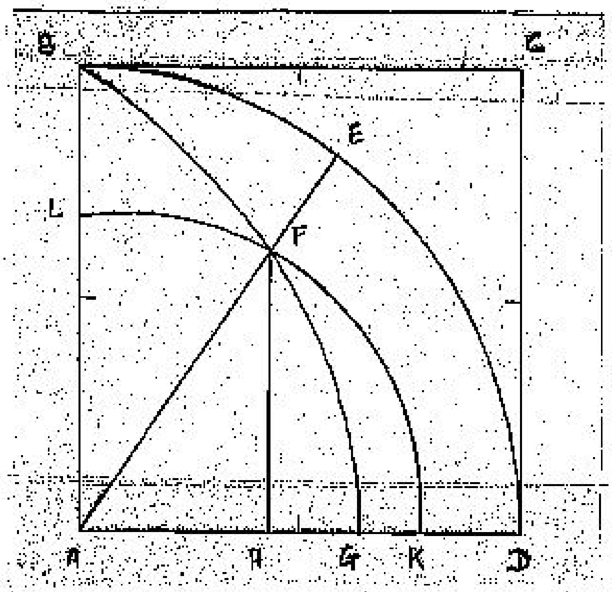
(ii) qualsevol arc de cercle és més gran que la corda corresponent

(iii) qualsevol arc de cercle menor que el quadrant és més petit que la porció de la tangent en un extrem de l'arc pel radi passant per l'altre extrem

Ara ja es pot demostrar la proposició. Suposem $\dfrac{\text{arc}(BED)}{AB}=\dfrac{AB}{AK}$. S'han d'estudiar els dos casos següents:

[15] Vegeu T. HEATH, op. cit., I, pp. 225-230; C. B. BOYER. *A History of Mathematics*, pp. 106-107.

(1) Si $AK > AG$:



Tracem el quadrant KFL amb centre A i radi AK. Aquest arc de circumferència talla la quadratriu en F i AB en L. Unim A amb F. La intersecció de AF i BED és el punt E. Tracem la perpendicular a AD passant pel punt F, FH.

Per hipòtesi i fent servir (i):

$$\frac{\text{arc}(BED)}{AB} = \frac{AB}{AK} = \frac{\text{arc}(BED)}{\text{arc}(LFK)}.$$

D'aquí obtenim que: $AB = \text{arc}(LFK)$.

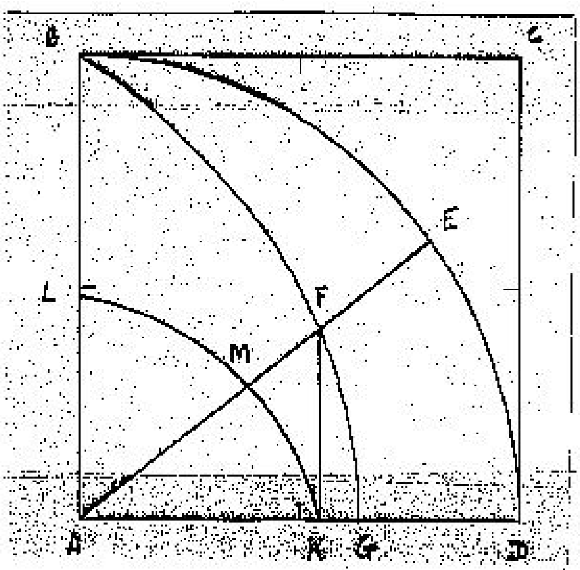
Però per la propietat de la quadratriu:

$$\frac{AB}{FH} = \frac{\text{arc}(BED)}{\text{arc}(ED)} = \frac{\text{arc}(LFK)}{\text{arc}(FK)},$$

i sabem que $AB = \text{arc}(LFK)$. Per tant: $FH = \text{arc}(FK)$, la qual cosa és absurda, per (ii).

Així, AK no pot ser més gran que AG.

(2) Si $AK < AG$:



Procedim de manera anàloga al cas anterior, considerant ara l'arc(KML). Tracem KF perpendicular a AD per F. La intersecció de KF amb la quadratriu és F. AF talla l'arc(KML) en M. Fent servir (i) deduïm que $AB = \text{arc}(LMK)$.

Fent servir la propietat de la quadratriu:

$$\frac{AB}{FK} = \frac{\text{arc}(BED)}{\text{arc}(ED)} = \frac{\text{arc}(LMK)}{\text{arc}(MK)}$$

i sabent que $AB = \text{arc}(LMK)$, tenim que $FH = \text{arc}(KM)$, la qual cosa és absurda, per (iii).

Així, AK no pot ser més petit que AG.

Com que no es pot donar ni el cas (1) ni el (2), només pot ser que AK sigui igual a AG.

Quadratura del cercle:

Per quadrar el cercle es pot aprofitar la primera proposició de *La mesura del cercle* d'Arquimedes,[16] on s'afirma que l'àrea del cercle és igual a l'àrea del triangle rectangle amb altura el radi i base la longitud de la circumferència.[17] La longitud de la circumferència és quatre vegades la longitud del quadrant considerat en el cas de la rectificació.

D'aquesta forma podem obtenir una aproximació del nombre π, tal com fa Arquimedes en l'obra esmentada.

El segle XVII

Encara que Descartes refusava les corbes no definibles geomètricament (o transcendents), era conscient de l'existència de corbes sense equacions algebraiques, com ara la quadratriu. L'inconvenient que tant Descartes com els antics li trobaven, a aquesta corba, era que no hi havia una relació exacta, mesurable, entre els dos moviments generadors, ja que no es podia determinar exactament la raó de la longitud del cercle al seu radi (és a dir, π).

Cap al 1650, la rectificació (exacta) de diverses corbes, juntament amb el càlcul d'àrees sota corbes transcendents, va ensorrar la distinció cartesiana entre corbes acceptables i no acceptables geomètricament.

[16] En l'informe de Pappos sobre la quadratriu s'esmenta aquesta obra.

[17] Aquesta proposició es pot demostrar per exhaustió, demostració possiblement coneguda per Dinostrat i potser per Hippias.

Newton calculà la tangent a la quadratriu en el seu *Methodus fluxionum*. Fent servir les sèries del sinus i del cosinus, quadrà i rectificà la quadratriu.[18]

[18] Vegeu C. H. EDWARDS. *The Historical Development of the Calculus*, pp. 208-209, 221-222.

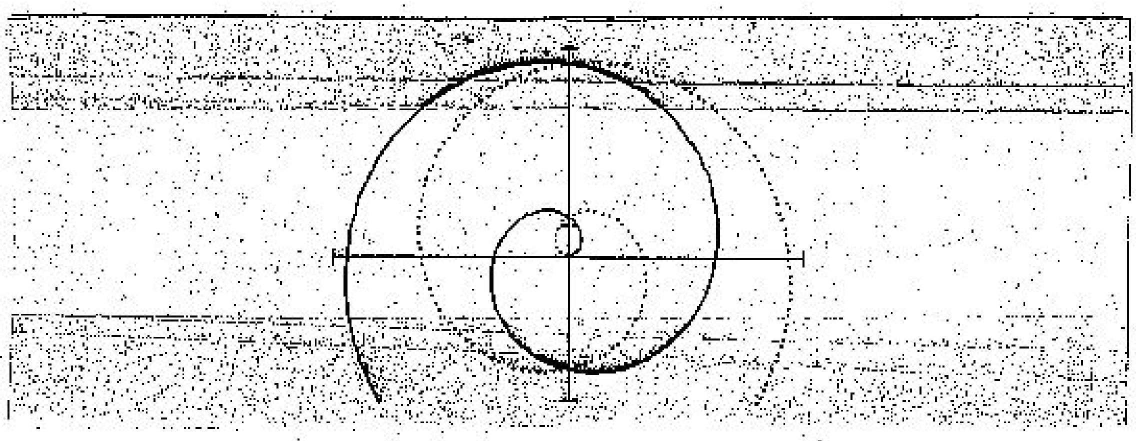
HISTÒRIA DE L'ESPIRAL

Grècia

L'àlgebra grega es va caracteritzar per ser més geomètrica i retòrica que no pas numèrica i simbòlica. La geometria grega era estàtica, limitació que es troba en la ciència grega en general. Els únics moviments que consideren són els uniformes (rectilinis o circulars).

Conseqüentment, només es podien definir corbes en termes de condicions de llocs geomètrics senzilles (com el cercle) o bé com a interseccions de superfícies fixades (per exemple, les seccions còniques). Això no impedí Arquimedes definir la seva corba[19] com a composició de dos moviments simples. L'espiral és el lloc geomètric en el pla d'un punt que, començant per l'origen fix d'un radi, es mou amb moviment uniforme, mentre que el radi gira també uniformement entorn de l'origen.

Arquimedes publicà un tractat, *Sobre les espirals*, tot desenvolupant els seus resultats sobre la seva corba. Tot i ésser el més admirat dels seus treballs, ha estat poc llegit, donada la seva dificultat.



Equació de la corba en coordenades polars:

Sigui r el radi vector que forma un angle t amb la recta inicial. Llavors: $r=at$.

[19] Pappos diu que, de fet, l'espiral la va inventar Conó d'Alexandria, amic d'Arquimedes (vegeu J. GOW. *A Short History of Greek Mathematics*, p. 229) Hi ha qui defensa aquesta tesi (vegeu C. B. BOYER. *A History of Mathematics*, p. 141; D. E. SMITH. *History of Mathematics*, I, p. 107). D'altres, però, defensen l'autoria d'Arquimedes i afirmen que ell només enviava a Conó les proposicions que aquest també havia intentat demostrar (vegeu J. GOW, op, cit,, p. 229; F. CAJORI. *A History of Mathematics*, p. 36)

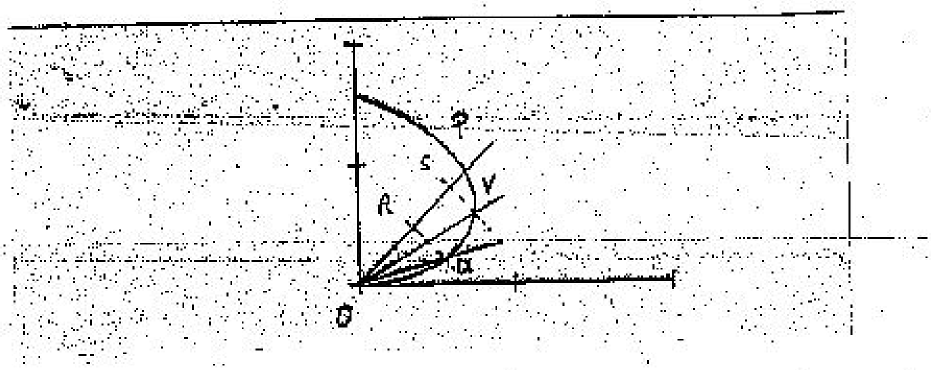
Equació de la corba en coordenades cartesianes:

$$\sqrt{x^2+y^2} = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

També veiem que és una corba transcendent.

Arquimedes va ser atret pels tres problemes de la geometria grega. La seva espiral en resol dos, encara que no amb regle i compàs.

Trisecció d'un angle:[20]

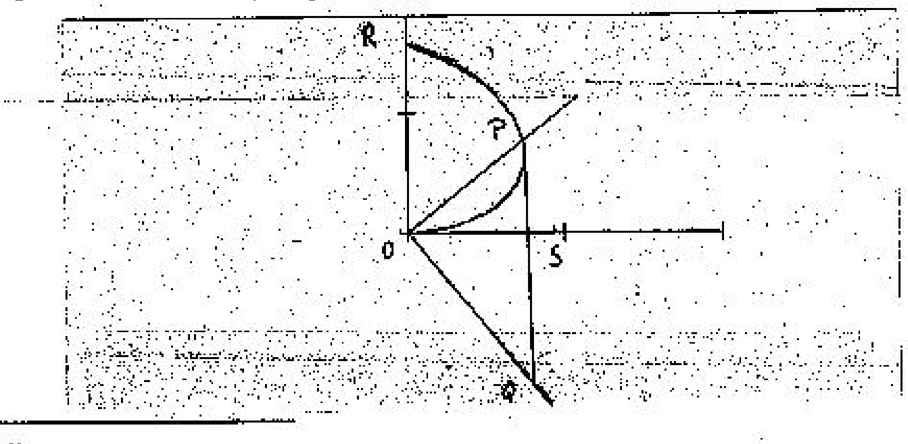


Volem trisecar l'angle $\angle OAP$, on OA és la recta inicial de la corba, O el vèrtex i P un punt de l'espiral.

Considerem R i S, punts que trisequen OP. Des del vèrtex O tracem dos cercles amb radis OR i OS, que tallen l'espiral en els punts U i V respectivament. Aleshores, és fàcil veure que les línies OU i OV trisequen l'angle $\angle OAP$.

Quadratura del cercle:[21]

Arquimedes va utilitzar l'espiral per quadrar el cercle. De fet, va mostrar com rectificar un cercle a partir de la subtangent polar de l'espiral.



[20] Vegeu C. B. BOYER, *A History of Mathematics*, pp. 140-141.
[21] Vegeu C. B. BOYER, op. cit., pp. 141-142.

Sigui P un punt de l'espiral OPR. La perpendicular a OP talla en Q la tangent a l'espiral en P. OQ és la subtangent polar.

En *Sobre les espirals* Arquimedes prova, per doble reducció a l'absurd, que la longitud del segment OQ és igual a la de l'arc del cercle de centre O i radi OP comprès entre S i P. És a dir:

$$OQ = \frac{r^2}{a}.$$

En el cas que P sigui sobre l'eix de les Y, la subtangent polar OQ serà un quart de la longitud de la circumferència de centre O i radi OP. Per tant, aquesta circumferència serà quatre vegades el segment OQ.[22]

Aleshores, es pot trobar un triangle amb àrea igual a la del cercle. Amb una transformació geomètrica, en lloc del triangle es pot obtenir un quadrat, amb la qual cosa el problema de quadrar el cercle queda resolt.

Tangent a l'espiral:

Les 20 primeres proposicions de *Sobre les espirals* estan dedicades a la determinació de la tangent en un punt de la corba. Els grecs consideren la tangent des d'un punt de vista estàtic: és la recta que "toca" la corba en un sol punt. Encara que en l'exposició final manté aquest concepte estàtic, Arquimedes sembla haver trobat la tangent a l'espiral de forma cinemàtica, de manera molt semblant a com ho tracta el càcul diferencial. A partir del paral.lelogram de les velocitats, la tangent a l'espiral en un punt és la resultant dels dos moviments generadors de la corba. En tot cas, és el primer exemple de tangent a una corba diferent de la circumferència i de les còniques.

Per construir-la, només cal conèixer la subtangent polar OQ. Llavors, unint Q amb P, ja s'obté la tangent en el punt P.

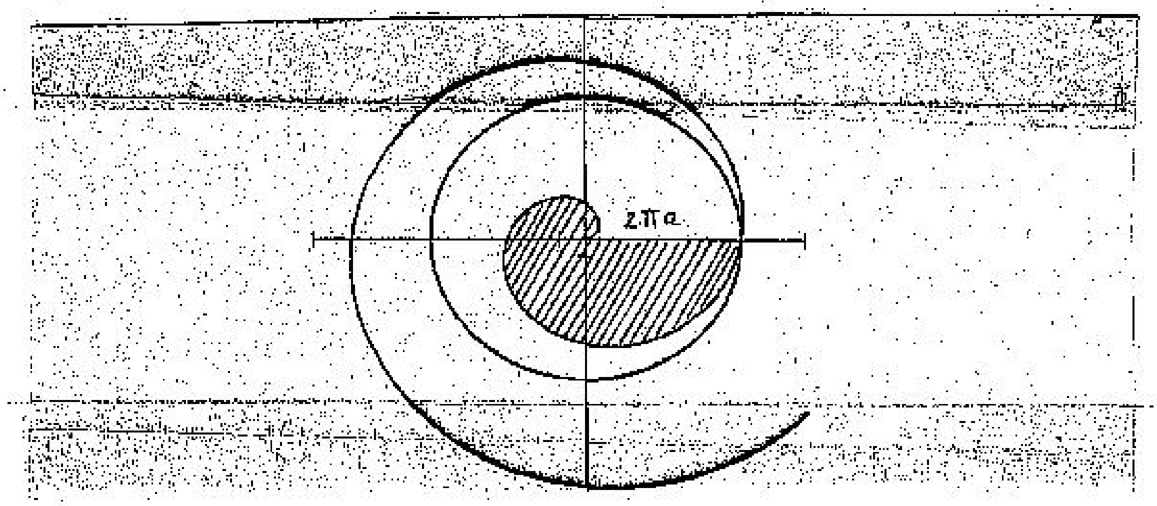
Quadratura de l'espiral:

Les darreres vuit proposicions del seu tractat sobre l'espiral estan dedicades al càlcul d'àrees. En particular, la proposició 24 diu que l'àrea escombrada pel radi vector en la primera rotació completa, S, és igual a un terç de l'àrea del cercle de centre el pol i radi el radi vector al final de la primera volta:[23]

---

[22] En general, si P és sobre la n-èsima volta de l'espiral, la recta haurà girat un angle $2(n-1)\pi+t$. Així, $OQ=r\{2(n-1)\pi+t\}=(n-1)l+\mathrm{arc}(PS)$, essent l la longitud de la circumferència de radi OP.

[23] La demostració d'aquesta proposició es pot trobar a C. H. EDWARDS. *The Historical Development of the*



$$S = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2.$$

Més endavant, Pappos dedica el llibre IV de la seva *Col·lecció matemàtica* a l'estudi de l'espiral, la concoide i la quadratriu, amb aplicacions als tres problemes i discussió sobre l'espiral especial traçada sobre l'esfera.

Època medieval

El segle XII és el segle de les traduccions de l'àrab al llatí. Malgrat això, la major part dels treballs d'Arquimedes era desconeguda a l'Occident medieval.

El 1269, William de Moerbeke (1215-1286) va traduir del grec al llatí els tractats científics i matemàtics més importants d'Arquimedes, entre els quals es troba el *Sobre les espirals*. Encara que massa literal, aquestes traduccions feren accessible l'obra del gran matemàtic grec.

El segle XVII

Cap al 1640, Torricelli i Roberval van rectificar, per separat, l'espiral d'Arquimedes. Van demostrar que la longitud de la primera rotació és igual a la longitud de la paràbola $x^2=2ay$ des de $x=0$ fins a $x=2\pi a$.

Torricelli i, de forma més important, Roberval, van tractar la tangent a partir del concepte

Calculus, pp. 56-61, i a P. M. GONZÁLEZ URBANEJA, *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*, pp. 69-77.

intuïtiu de moviment instantani. Si la corba és el camí que segueix un punt mòbil, la tangent és la recta del moviment instantani.

Roberval arribà més lluny i afirmà que el moviment que seguia el punt sobre la corba n'era la composició de dos de més senzills, de manera que la velocitat instantània era la suma de les velocitats instantànies d'aquests dos moviments generadors. La diagonal del paral·lelogram determinat pels vectors velocitat radial i velocitat angular és el vector velocitat en un punt determinat, que representa la tangent a l'espiral en aquest punt.

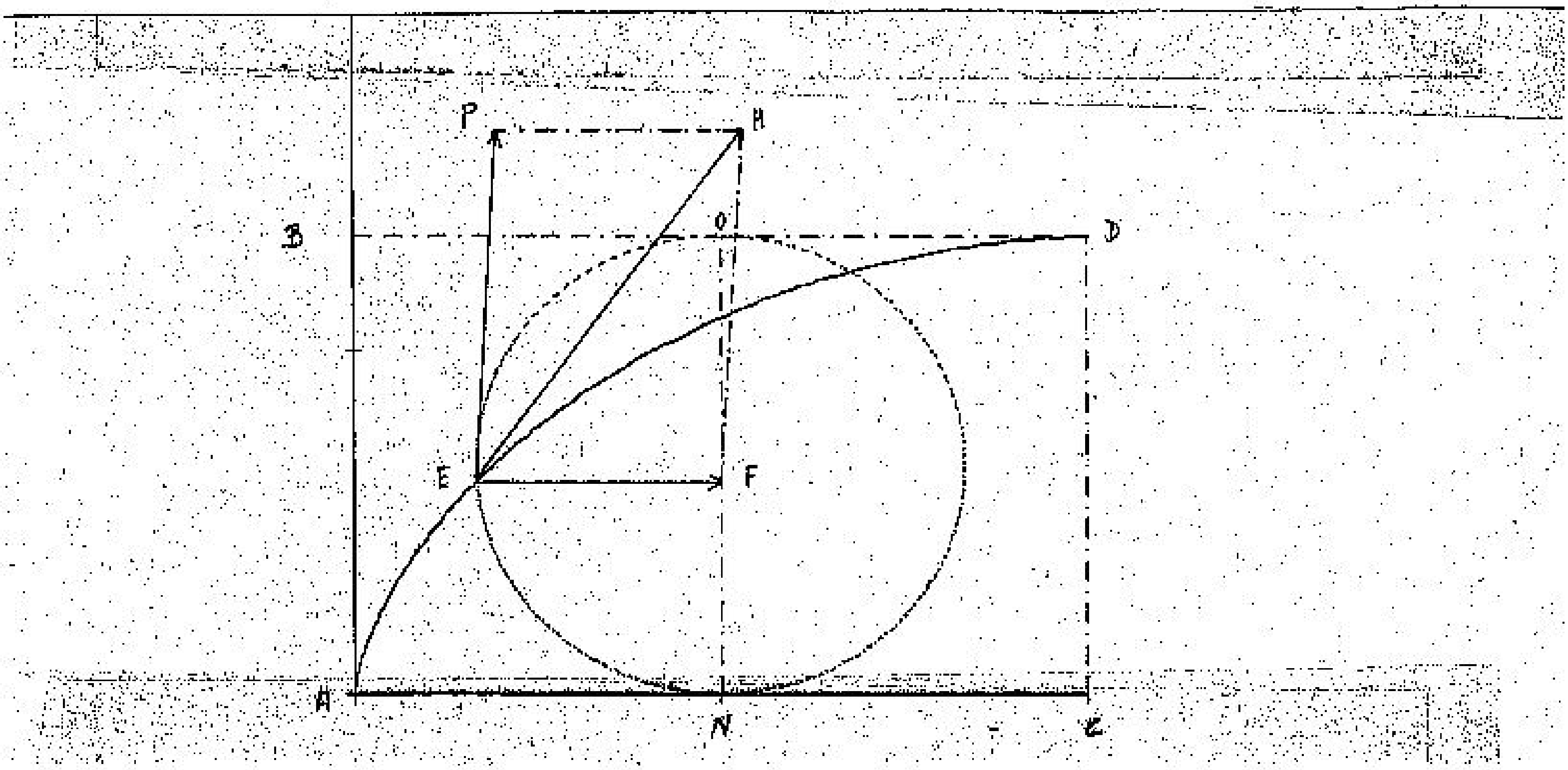
4. MÈTODES PER TROBAR LA TANGENT A LES CORBES ANALITZADES

MÈTODES PER TROBAR LA TANGENT A LA CICLOIDE

1. Mètode de Roberval[1]

Roberval considera una corba com a composició de dos moviments uniformes i simultanis. La direcció del moviment és la tangent a la corba, resultant dels dos moviments generadors.

Sigui la cicloide *ABD*. S'ha de trobar la tangent a la cicloide en el punt *E*.



Es dibuixa el cercle generador *NEO*. Sigui *EP* tangent al cercle i *EF* paral·lela a la base *AC*. *EP* satisfà:

$$\frac{EP}{EF} = \frac{\text{circumf } NEO}{\text{recta } AC}.$$

En el cas de la cicloide simple, $EP=EF$, atés que la recta AC és igual que la circumferència *NEO*.

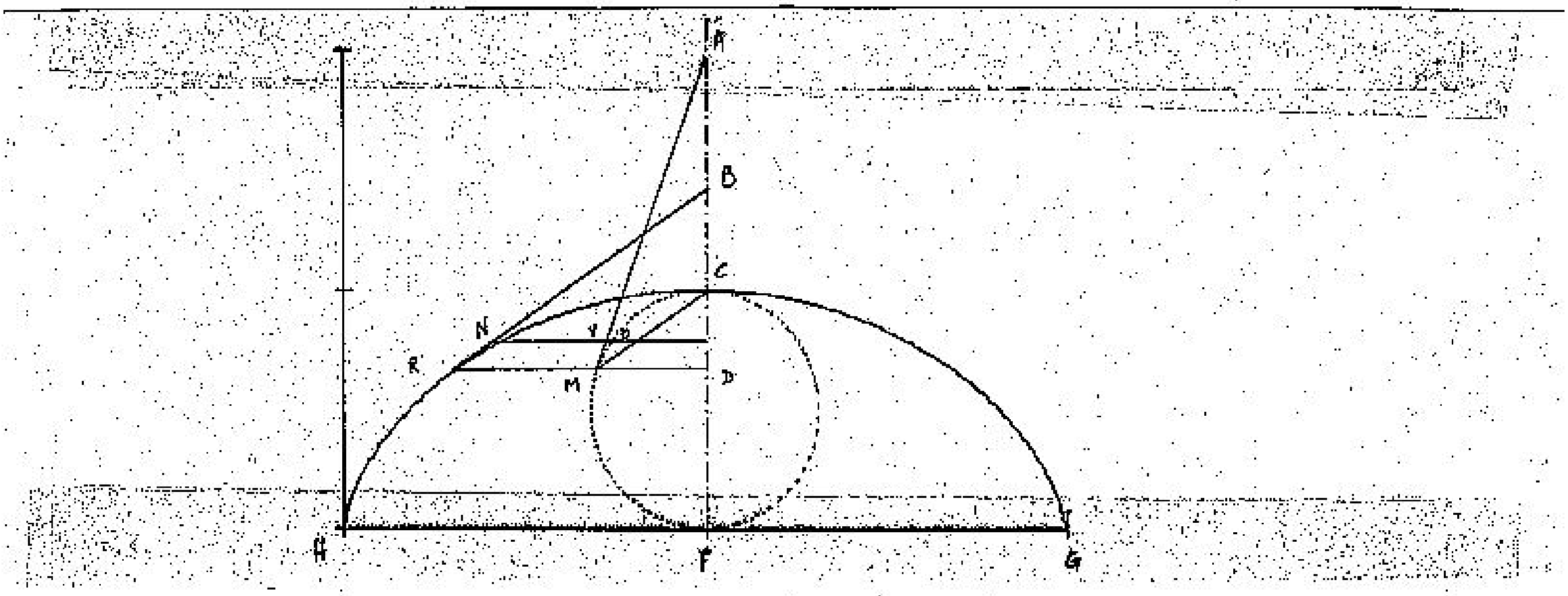
S'ha de completar el paral·lelogram *EPHF* i dibuixar la seva diagonal *EH*, que serà la tangent a la cicloide en *E*.

[1] Vegeu E. WALKER, *A Study of the Traité des Indivisibles of Roberval*, pp. 129-130.

2. Mètode de Fermat[2]

En general el mètode de Fermat consisteix en establir la longitud de la subtangent, considerant les ordenades en el punt de contacte i en un punt infinitament proper i després "adigualant".

Es considera la cicloide *HRCG* amb vèrtex en *C* i *COMF* el cercle generador. S'ha de buscar la tangent a la cicloide en el punt *R*.



Tracem *RMD* perpendicular a *CF*, la corda *MC* i *RB* paral·lela a *MC*. *RB* és la tangent a la cicloide en el punt *R*. Provem-ho:

RD (perpendicular a *FC*) talla el cercle generador en *M*.

Tracem *MA* tangent al cercle en *M*.

Sigui *EOVN* paral·lela a *RD*.

Fem servir la següent propietat de la cicloide: $NO = \text{arc}(OC)$

Sigui:

$$DB = a,\ \ DA = b,\ \ MA = d,$$

$$MD = r,\ \ RD = z,\ \ DE = e,$$

$$EB = a - e,\ \ \text{arc}(CM) = n = RM.$$

Per identitat:

[2] Vegeu P. FERMAT. *Œuvres*, III, pp. 144-145.

$$\frac{a}{a-e}=\frac{z}{\frac{za-ze}{a}}\ .\ (1)$$

Per semblança de triangles:

$$\frac{DB}{EB}=\frac{RD}{NE}\ .\ (2)$$

Donat que:

$$\frac{DB}{EB}=\frac{a}{a-e},$$

llavors:

$$\frac{z}{\frac{za-ze}{a}}=\frac{RD}{NE}=\frac{z}{NE},$$

i per tant:

$$NE=\frac{za-ze}{a}.$$

Per la propietat específica de la corba:

$$NE=NO+OE=\mathrm{arc}\,(CO)=\mathrm{arc}(MC)-\mathrm{arc}(MO)+OE\,,$$

d'on obtenim:

$$\mathrm{arc}(MC)-\mathrm{arc}(MO)+OE=\frac{za-ze}{a}\ .\ (3)$$

Per poder reduir-ho tot a resultats analítics fem $VE=OE$ i $MV=\mathrm{arc}(MO)$, és a dir, considerem punts infinitament propers.

$$\frac{MD}{VE}=\frac{DA}{EA}=\frac{b}{b-e}=\frac{r}{\frac{rb-re}{b}}.$$

Com que MD és el radi del cercle generador, r, podem concloure:

$$VE=\frac{rb-re}{b}\ .\ (4)$$

Un altre cop per semblança de triangles:

$$\frac{DA}{DE}=\frac{MA}{MV},$$

i per identitat:

$$\frac{b}{e}=\frac{d}{\frac{de}{b}},$$

$$MV = \frac{de}{b} \ . \ (5)$$

Com que:

$$\mathrm{arc}(MC) - \mathrm{arc}(MO) + OE = RM - MV + VE \ ,$$

i fent servir (3), (4) i (5):

$$\frac{az - ez}{a} = n - \frac{de}{b} + \frac{rb - re}{b} \ ,$$

$$\frac{az - ez}{a} = \frac{nb - de + rb - re}{b} \ ;$$

Per tant, dividint ambdós costats per ab:

$$abz - bez = anb - ade + arb - are \ . \ (6)$$

Però:

$$RD = MD + \mathrm{arc}(MC) \ ,$$

$$z = r + n \ .$$

Per tant:

$$abr + abn - ber - ben = abn - ade + arb - are \ ,$$

$$ber + ben = ade + are \ ,$$

$$br + bn = ad + ar \ ,$$

$$b(r + n) = a(d + r) \ ,$$

$$bz = a(r + d) \ ,$$

$$\frac{r + d}{b} = \frac{z}{a} \ ,$$

$$\frac{MD + MA}{DA} = \frac{RD}{DB} \ . \ (7)$$

DB és la subtangent, amb la qual cosa ja podem obtenir la tangent, RB. Però la corda MC és la bisectriu de l'angle $\angle DMA$, per tant, tenim que $\dfrac{MD}{MA} = \dfrac{DC}{CA}$.

Així doncs:

$$\frac{MD + MA}{MD} = \frac{DC + CA}{DC} = \frac{DA}{DC} \ .$$

Fem servir (7):

$$\frac{MD + MA}{DA} = \frac{MD}{DC} = \frac{RD}{RB} \ .$$

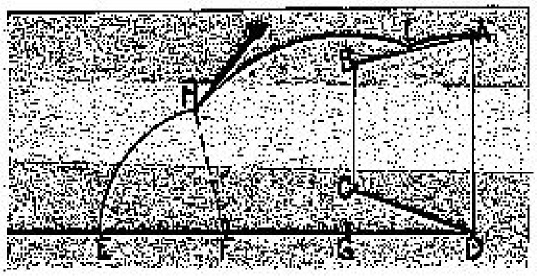
El triangle ΔMDC és semblant al triangle ΔRDB, d'on resulta que RB és paral·lela a MC.

3. Mètode de Descartes[3]

Descartes desenvolupa una tècnica per determinar la normal a una corba en un punt, en el cas d'una corba algèbrica de la qual se'n coneix l'equació. Les corbes mecàniques les ha de tractar com a casos particulars. Un cop coneix la normal, ja pot determinar la tangent.

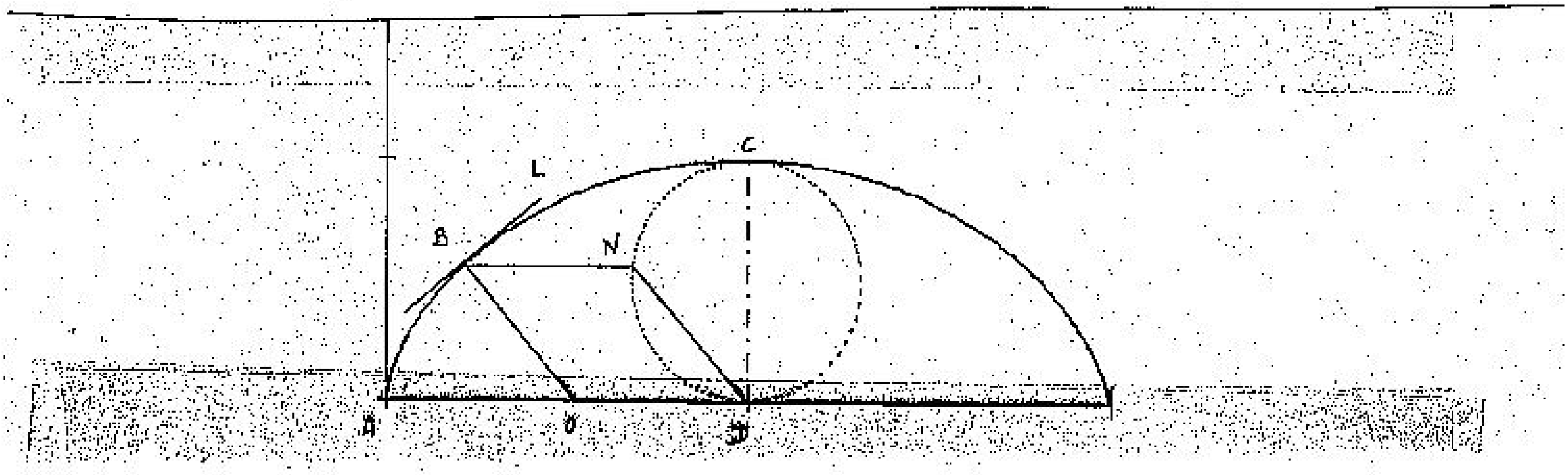
Per determinar la tangent a la cicloide, Descartes desenvolupà la idea de centre instantani de rotació:

Fem girar un polígon qualsevol *ABCD* sobre una recta *ED*.



Un punt *A* qualsevol descriurà un cert nombre de segments de cercle de centres *F*, *G*, *D*,... La tangent en qualsevol punt d'aquests cercles sempre serà perpendicular al radi del cercle corresponent (que uneix el punt de tangència amb el centre de l'arc).

En el cas particular de la cicloide (*ABC*), el cercle generador (*CND*) es pot considerar com un polígon d'infinits costats. La tangent en un punt *B* serà perpendicular a la recta que uneix aquest punt amb el punt en què el cercle generador toca la base precisament quan aquest passa pel punt (*O*). Prenem *BN* paral·lela a *AD*, tallant el cercle en *N*. Dibuixem *ND*. Tracem *BO* paral·lela a *ND* i *BL* perpendicular a *BO*. *BL* és la tangent en *B*.

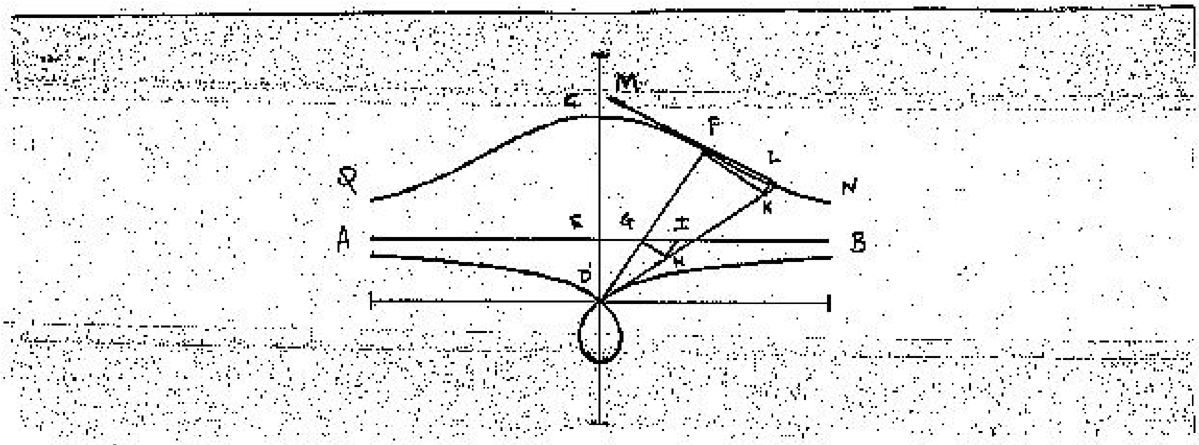


[3] Vegeu E. WALKER, op. cit., pp. 136-137; M. E. BARON, *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, pp.163-166.

MÈTODES PER TROBAR LA TANGENT A LA CONCOIDE

1. Mètode de Roberval[4]

Sigui ACN una concoide de Nicomedes, amb pol D i directriu AB. Hem de construir la tangent a la corba en el punt F.



Roberval considera la corba com a resultat dels dos moviments d'un mateix punt. Un fa pujar aquest punt al llarg de DF i l'altre fa moure circularment DF a l'entorn del centre D, portant d'aquesta manera C (passant per F) cap a N, és a dir, al llarg de FK, que és perpendicular a DF.

Per definició de la concoide, EC és igual a GF, aleshores: $DGF - DEC = DG - DE$.
Dit d'una altra forma, per anar del punt E a G, E ha de pujar tant com C per anar de C a F.

Dibuixem GH perpendicular a DG i FK perpendicular a DF. Des de H (un punt de GH) dibuixem HI paral·lela a DG, que talla AB en el punt I.

Dibuixem DHK, que talla FK en el punt K. Aleshores, el triangle ΔDGH és semblant al triangle ΔDFK.

Sigui KL un segment igual i paral·lel a HI. Llavors, FK i KL són les direccions dels dos moviments del punt F.

Per tant, hem de buscar L, ja que FL serà la resultant dels dos moviments, és a dir, la tangent buscada. La raó entre el moviment circular de F i el seu moviment rectilini és:

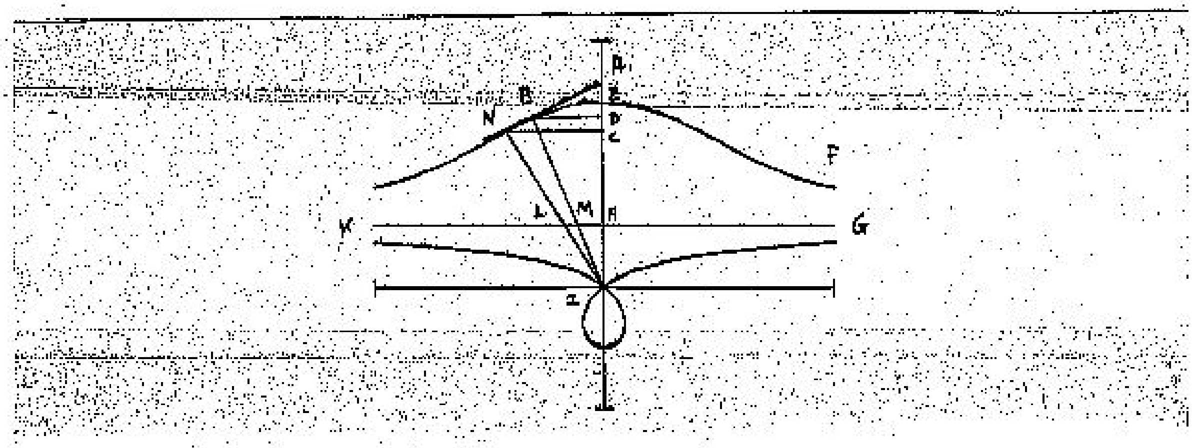
$$\frac{FK}{KL} = \frac{FK}{HI},$$

d'on obtindrem L.

---

[4] Vegeu E. WALKER. *A Study of the Traité des Indivisibles of Roberval*, pp. 128-129.

2. Mètode de Fermat[5]



Sigui I el pol i KG l'asímptota de la concoide ENF. Sigui IHE perpendicular a KG. Busquem la tangent NBA per N (on N és un punt de la concoide). Suposem resolt el problema.

Tracem NC paral·lela a KG.

Per la naturalesa de la corba: $LN=HE$.

Prenem D, un punt entre C i E, i tracem DB paral·lela a CN.

Considerem la propietat específica de la corba, ara sobre la tangent: unim B amb I (BI); M serà el punt d'intersecció de BI amb KG. "Adigualem" MB amb HE.

Fent $a=CA$, $e=CD$, $z=EH$, ja sortirà l'equació buscada (s'ha de buscar l'expressió analítica de MB i "adigualar-la" a HE).

Fins aquí són les instruccions que dóna Fermat. Ara buscaré MB i "adigualaré" a HE.

Suposem EC, CH, HI, NC coneguts.

Per semblança de triangles:

$$BD = \frac{(a-e)NC}{a},$$

$$\sqrt{BD^2 + DI^2} = BI.$$

També sabem que

$$DI = CI + e.$$

Aleshores:

[5] Vegeu P. FERMAT. *Œuvres*, III, pp. 142-144.

$$\sqrt{\frac{(a-e)^2 NC^2}{a^2}+CI^2+e^2+2eCI} = BI = BM + MI .$$

Per semblança de triangles:

$$\frac{MI}{HI}=\frac{BI}{AI}=\frac{BI}{a+CI} \Rightarrow MI = \frac{BI \cdot HI}{a+CI}.$$

Llavors:

$$BM = BI - MI = BI - \frac{BI \cdot HI}{a+CI} =$$
$$= \sqrt{\frac{(a-e)^2 NC^2}{a^2}+CI^2+e^2+2eCI} \left(1-\frac{HI}{a+CI}\right).$$

Ara apliquem la propietat de la corba sobre la tangent, és a dir, "adigualem" $BM=HE=z$:

$$\sqrt{\frac{(a-e)^2 NC^2}{a^2}+CI^2+e^2+2eCI} \left(1-\frac{HI}{a+CI}\right)=$$
$$=\sqrt{\frac{(a-e)^2 NC^2}{a^2}+CI^2+e^2+2eCI} \left(\frac{a+CH}{a+CI}\right)=$$
$$=\sqrt{\frac{(a-e)^2 NC^2}{a^2}+CI^2+e^2+2eCI} \left(\frac{a+EH-EC}{CI}\right)=$$
$$=\sqrt{\frac{(a-e)^2 NC^2}{a^2}+CI^2+e^2+2eCI} \left(\frac{a+z-EC}{CI}\right)\approx z .$$

D'aquesta manera podrem aïllar z:

$$z = \frac{\sqrt{\frac{(a-e)^2 NC^2}{a^2}+CI^2+e^2+2eCI}\left(\frac{a-EC}{CI}\right)}{1-\sqrt{\frac{(a-e)^2 NC^2}{a^2}+CI^2+e^2+2eCI}}.$$

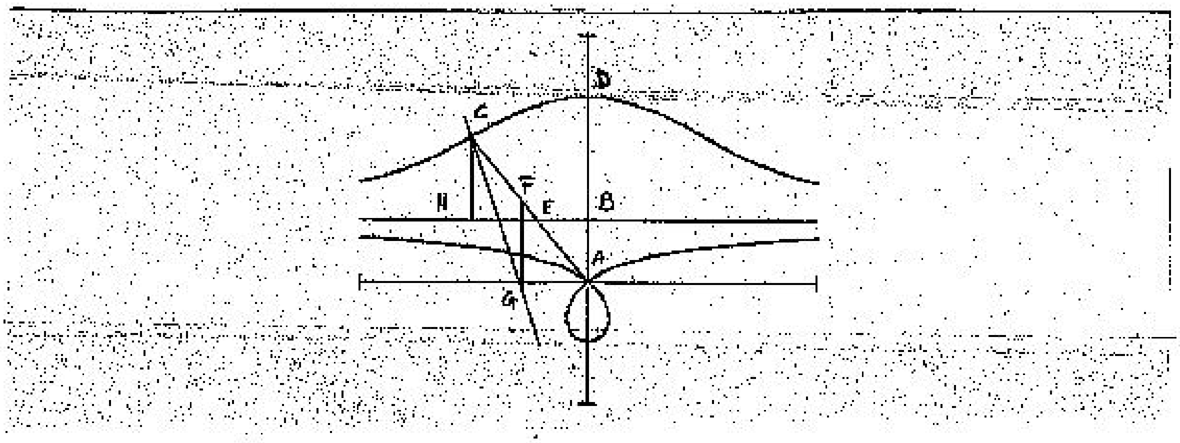
Fem e=0:

$$z=\frac{\sqrt{NC^2+CI^2}\left(\frac{a-EC}{CI}\right)}{1-\sqrt{NC^2+CI^2}}=$$
$$=\frac{NI(a-EC)}{CI(1-NI)}.$$

i així hem obtingut una expressió de BM.

3. Mètode de Descartes[6]

Descartes troba la tangent a la concoide en un punt émprant el seu mètode, és a dir, traçant primer la normal a la corba en aquest punt.



Sigui DC la primera concoide dels antics, A el pol i BH l'asímptota.

Per la naturalesa de la corba, sabem que $DB=CE=$constant.

Busquem CG que sigui perpendicular a la corba en C (la normal).

Sigui CF sobre CA tal que $CF=CH$, on CH és perpendicular a HB.

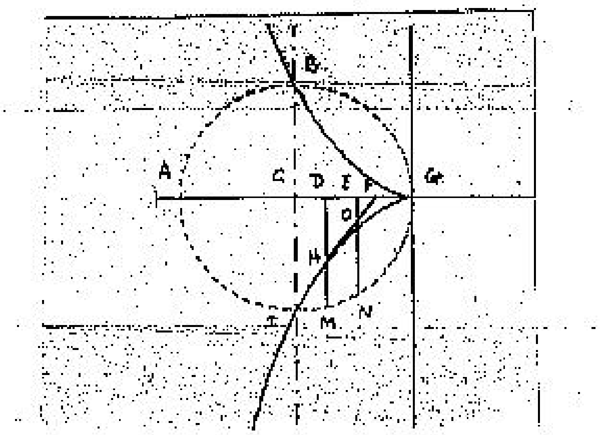
Des de F tracem FG paral·lela a BA, amb $FG=EA$. Així, ja podem obtenir la normal CG.

Observació: Descartes indica que el problema es pot estudiar amb el mètode general per trobar normals, doncs la concoide és geomètrica. Però, en aquest cas, aplica un altre camí que simplifica la construcció.

[6] Vegeu R. DESCARTES. *La Géométrie*, pp. 351-352.

MÈTODES PER TROBAR LA TANGENT A LA CISSOIDE

1. Mètode de Fermat[7]



Siguin AG i BI diàmetres perpendiculars del cercle. Sigui IHG la cissoide. Busquem la tangent pel punt H.

Suposem resolt el problema.

Sigui F el punt d'intersecció de CG amb HF.

Sigui $a=DF$. Prenem E un punt qualsevol entre D i F, amb $DE=e$.

Per propietat de la corba:

$$\frac{MD}{DG}=\frac{DG}{DH}.$$

"Adigualem":

$$\frac{NE}{EG}\approx\frac{EG}{EO},$$

essent EO la porció de recta EN que queda entre E i la tangent.

Sigui:

$$z=AD,$$

$$n=DG,$$

$$r=DH,$$

$$a=DF,$$

$$e=DE.$$

Aleshores:

[7] Vegeu P. FERMAT. *Œuvres*, III, pp. 141-142.

$$EG = n - e,$$

$$EO = \frac{ra - re}{a},$$

$$EN = \sqrt{zn - ze + ne - e^2}.$$

Ara considerem la propietat específica, no sobre la corba, sinó sobre la tangent:

$$\frac{NE}{EG} = \frac{EG}{EO},$$

on EO és l'ordenada de la tangent.

Analíticament:

$$\frac{\sqrt{zn - ze + ne - e^2}}{n - e} \approx \frac{n - e}{\left(\frac{ra - re}{a}\right)^2}.$$

Elevant al quadrat els dos costats:

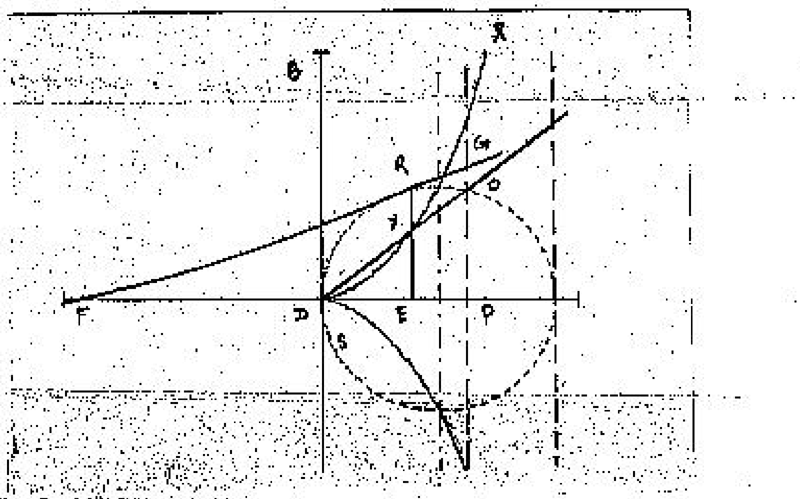
$$\frac{zn - ze + ne - e^2}{(n - e)^2} \approx \frac{(n - e)^2}{\left(\frac{ra - re}{a}\right)^2},$$

$$\frac{zn - ze + ne - e^2}{n^2 + e^2 - 2ne} \approx \frac{n^2 + e^2 - 2ne}{\frac{r^2 a^2 + r^2 e^2 - 2r^2 ae}{a^2}}.$$

Multiplicant per a^2 i "adigualant", obtenim l'equació: $3za + na = 2zn$.

Per tant, per construir la tangent perllonguem el radi CA del cercle fins a V i prenem $AV = AC$. Dividim $AD \cdot DG$ per VD, DF és el quocient. Unint F amb H, ja tenim la tangent.

2. Mètode de Barrow[8]



[8] Vegeu J. M. CHILD. *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow*, p. 97.

Sigui DP una recta i DRS, DYX dues corbes relacionades de manera que, si REY és una recta qualsevol paral·lela a DB (recta de posició donada), que talla DP en E i les corbes DRS, DYX en R, Y, sempre es té la raó:

$$\frac{RY}{DY}=\frac{DY}{EY}.$$

RF toca DRS en R.

Busquem la tangent a la corba DYX en el punt Y.

Sigui DYO una recta tal que GO sigui paral·lela a DB i talli FR, FP, DYO en G, P, O respectivament.

Unim D amb O. Aleshores:

$$\frac{GO}{DO}=\frac{DO}{PO}.$$

DYO toca la corba DYX en Y.

En *Lectiones*, VI, 12 Barrow ja ha vist que la corba DYO és una hipèrbola. YS toca aquesta hipèrbola. Llavors, YS també toca la corba DYX.

En el cas particular que DRS sigui una circumferència i $\angle GDB$ un angle recte, DYX és la cissoide.

Per la naturalesa d'aquesta corba:

$$\frac{RE}{DE}=\frac{DE}{EY}.$$

Si prenem E infinitament proper a Y, aleshores:

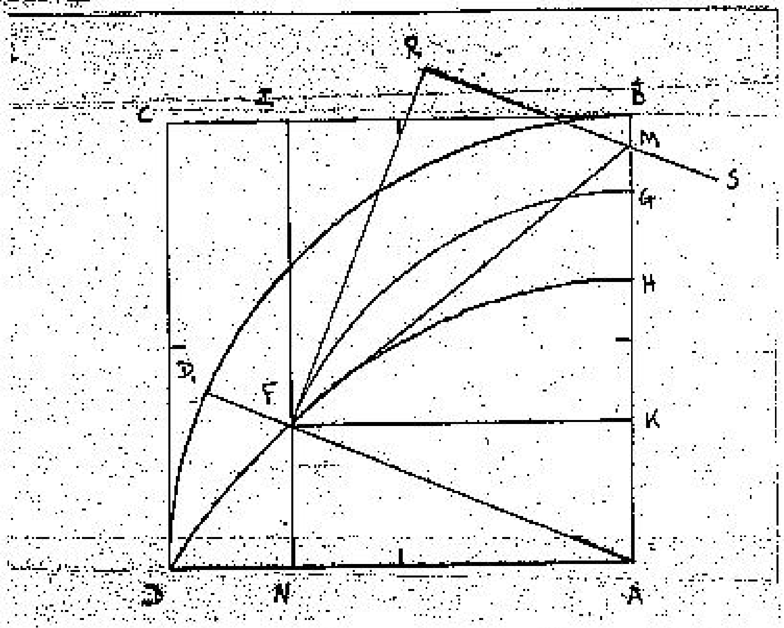
$$\frac{RY}{DY}=\frac{DY}{EY},$$

que és la raó emprada per Barrow.

Finalment, per proporcionalitat podem arribar a $\frac{GO}{DO}=\frac{DO}{PO}$, que ens portarà a la hipèrbola auxiliar.

MÈTODES PER TROBAR LA TANGENT A LA QUADRATRIU[9]

1. M[redacted][10]



[redacted]an CD assoleix la posició IN, AD es transfoma en AD_1.

Si F és el punt d'intersecció de IN i AD_1, quina és la tangent a la quadratriu en F?

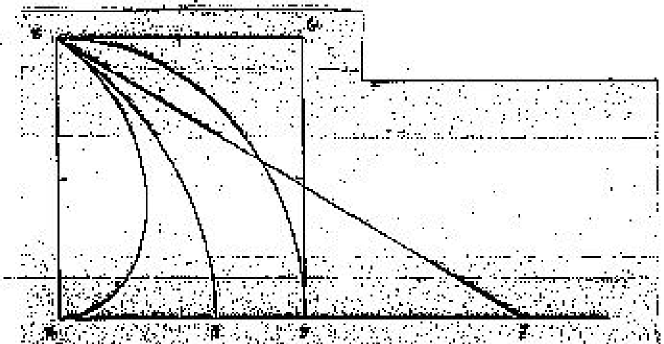
Sigui FK la velocitat de IN.

F descriu el segment FK en el mateix temps en què D_1 descriu D_1B. Per tant, D_1B representa la velocitat del moviment circular de D_1.

$$\frac{\text{velocitat del moviment circular de } F}{\text{velocitat del moviment circular de } D_1} = \frac{AF}{AD_1} = \frac{\text{arc}(FG)}{\text{arc}(D_1B)}.$$

---

[9] Considerem la quadratriu BH i l'espiral AB:



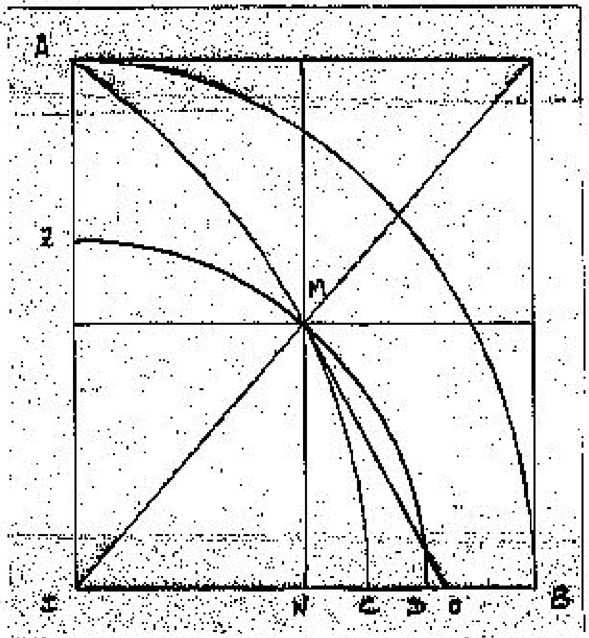
En [redacted] uniforme de B cap a A i pe[redacted]dratriu en B és BZ, que també és la tangent a l'espiral. Pappos no coneixia aquesta propietat.

[10] Vegeu I. GRATTAN-GUINNESS. *From the Calculus to Set Theory*,..., pp. 36-37 de la traducció castellana.

L'arc(FG) representa la velocitat del moviment circular de F. I com que la seva direcció és perpendicular a AF (és a dir, tangent a la circumferència), el moviment circular de F ve representat pel segment FR de la perpendicular, amb longitud igual a la de l'arc(FG).

Per trobar la direcció del moviment de F, tracem RS per R, paral·lela a AF. La tangent en F és FM, on M és la intersecció de RS amb AB.

2. Mètode [redacted]



Sigui [redacted] la corba en el punt M (MO).

Prenem MI. Amb centre I i radi IM tracem el quart de cercle ZMD. Sigui MN perpendicular a IB. Fem $\frac{MN}{IM} = \frac{\text{arc}(MD)}{IO}$.

Unint M amb O ja obtindrem la tangent a la quadratriu.

3. Mètode de Barrow[12]

Sigui AEH una corba donada, AD una recta qualsevol amb un punt fix. Sigui DH una recta amb posició donada.

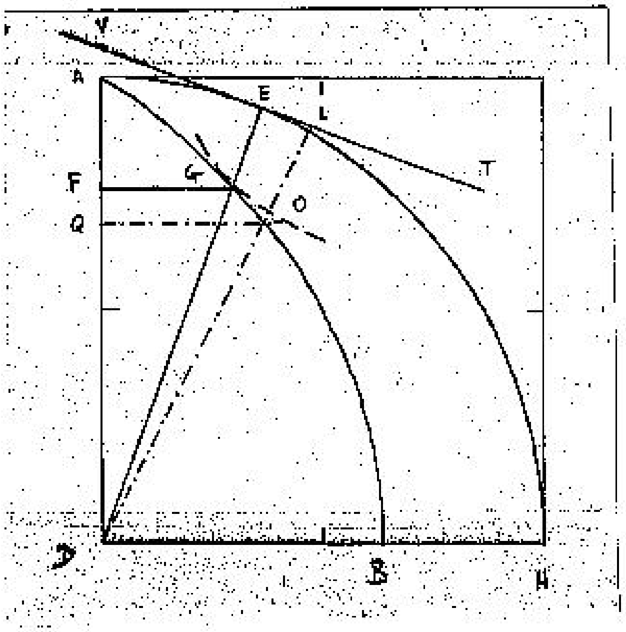
---

[11] Vegeu P. FERMAT. *Œuvres*, III, pp. 145-146.

[12] Vegeu J. M. CHILD. *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow*, pp. 115-116.

Sigui AGB una corba tal que, si prenem un punt qualsevol G i tracem la recta GD, que talla AEH en E, amb GF paral·lela a DH, GF tallant AD en F, sempre tenim la raó:

$$\frac{\operatorname{arc}(AE)}{AF}=\frac{x}{y}.$$



ET toca la corba AEH. Sobre ET prenem $EV=\operatorname{arc}(AE)$. Sigui OGO una corba tal que, la recta DOL talla OGO en O i ET en L. Sigui OQ paral·lela a GF, tallant AD en Q.

Aleshores:

$$\frac{LV}{AQ}=\frac{x}{y}.$$

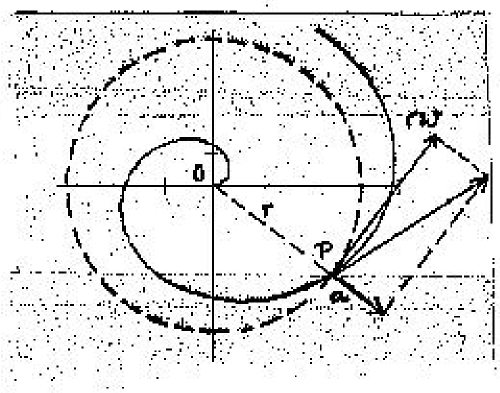
Llavors, la corba OGO és una hipèrbola (resultat ja vist a *Lectiones* VI,17). Si GS toca aquesta corba, GS toca també AGB.

En el cas particular en què AEH sigui un quart de cercle amb centre D, la corba AGB és la quadratriu.

MÈTODES PER TROBAR LA TANGENT A L'ESPIRAL

1. Mètode de Roberval[13]

Per Roberval, una corba descriu el camí d'un mòbil i la tangent representa la recta del moviment instantani. El moviment és la composició de dos moviments. Així, la velocitat instantània és la suma de les velocitats instantànies dels dos moviments generadors.



Sigui $r = at$ i $\theta = wt$.

El punt $P = P(at, wt)$ es mou sobre la corba. El seu moviment és la resultant del moviment radial i de l'angular.

El radi vector de longitud a representa la velocitat radial. El vector de longitud rw representa la velocitat angular, que és tangencial al cercle de radi r pel punt P.

La diagonal del paral·lelogram determinat pels dos vectors és el vector velocitat en P, que correspon a la tangent a l'espiral.

2. Mètode de Torricelli[14]

Igual que Roberval, considera una corba com el camí descrit per un mòbil i la tangent com la recta del moviment instantani.

[13] Vegeu C. H. EDWARDS. *The Historical Development of the Calculus*, pp. 134-135.

[14] Vegeu M. E. BARON. *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, pp. 191-192.

El mètode de les tangents de Torricelli relaciona els mètodes indivisibles de Galileu pel moviment rectilini i projectils amb la quadratura de corbes de la forma $y = kx^p$, amb p enter. El concepte bàsic és la idea medieval del gràfic velocitat-temps en el qual la distància total recorreguda és representada per l'àrea sota la corba.

El cas de la tangent a l'espiral és un dels seus exemples més fascinants.

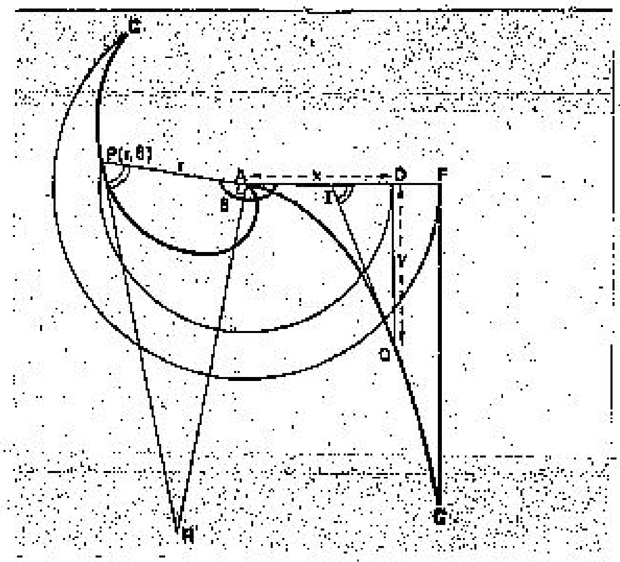
A través de transformacions geomètriques troba la relació entre corbes espirals de la forma $\left(\frac{r}{a}\right)^m = \left(\frac{r\theta}{a\alpha}\right)^n$ i paràboles superiors de la forma $\left(\frac{y}{a}\right)^m = \left(\frac{x}{b}\right)^n$.

El seu mètode és complicat, geomètric i difícil de seguir en l'original. Per això el donaré en notació moderna.

Sense perdre generalitat, podem considerar l'espiral més senzilla amb equació $r^m = k\theta^n$. *P* és un punt que es mou sobre la corba de *A* a *C*, amb dues velocitats:

(1) *v*, la corresponent al moviment progressiu sobre el radi vector.

(2) *u*, la corresponent al moviment circular on el radi vector gira uniformement al voltant del centre *A*.



Si $\theta = ct$:

$$u\left[= r\frac{d\theta}{dt}\right] = rc,$$

$$v\left[= \frac{dr}{dt}\right] = \frac{nr}{mt}.$$

Així:

$$\frac{v}{u} = \frac{nr/mt}{rc} = \frac{n}{m\theta}\left[= \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\right].$$

Per trobar la tangent pel punt P, dibuixem AH perpendicular a AP tal que:

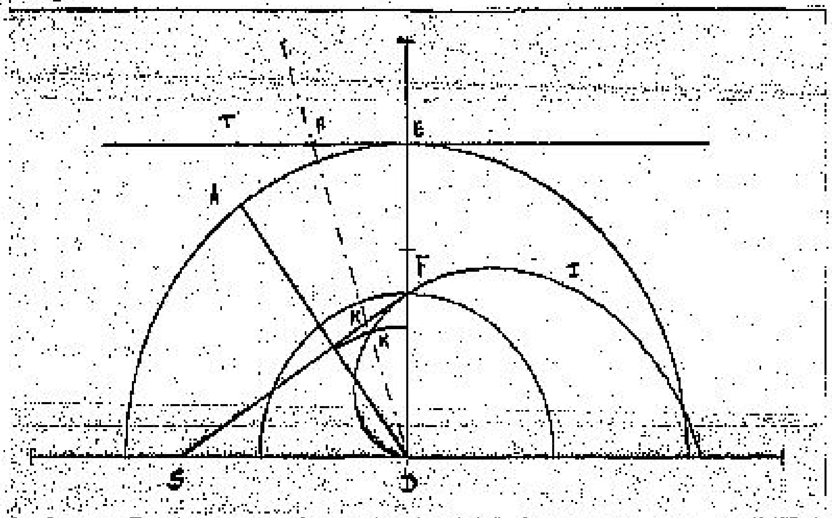
$$\frac{AH}{AP} = \frac{m\theta}{n},$$

és a dir:

$$AH = \frac{mr\theta}{n} = \left(\frac{m}{n}\right)PD,$$

on PD és l'arc circular de radi r. AH és la subtangent.

3. [redacted][15]



Sigu[redacted]a recta per D, DF=arc(AE). ET toca AGE en E.

Fem ET=arc(AE). Suposem que DKK és una corba tal que, per qualsevol recta DH per D, tallant DKK en K i TE en H, es verifica $DK=TH$.

Aleshores, si tracem FS tocant DKK en F, FS també toca DIF (vist en *Lectiones* VIII, 16).

És més, si DF sempre manté la mateixa relació amb l'arc(AE), la tangent a DIF es pot traçar i és paral·lela a FS.

Així, ja podem traçar la tangent a l'espiral circular, prenent AGE un cercle, DFI l'espiral i la relació següen entre l'arc(AE) i DF: $\frac{\text{arc}(AE)}{DF} = \frac{b}{a}$.

---

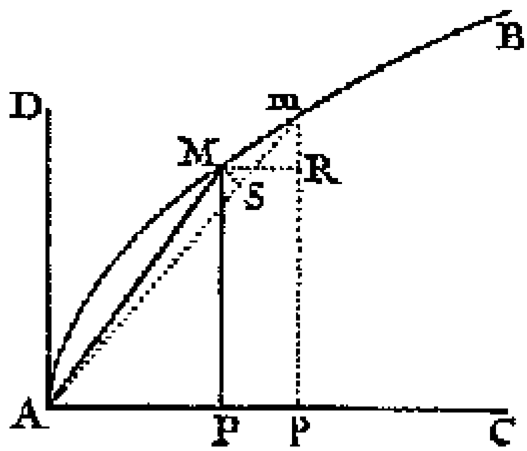
[15] Vegeu J. M. CHILD. *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow*, p. 115.

SEGONA PART : ANÀLISI COMPARATIVA DELS DOS TEXTOS

5. ÚS DEL CÀLCUL DE DIFERÈNCIES PER TROBAR LA TANGENT D'UNA CORBA

En la Secció I de l'*Analyse* de L'Hôpital primer trobem la definició de "quantitat variable" (aquella que augmenta o disminueix contínuament), de "diferència" (la porció en què la variable augmenta o disminueix)[1] i de "quantitat constant" (aquella amb diferència zero).[2] Després, L'Hôpital dóna els dos postulats següents els quals, segons ell, no necessiten demostració:

1. Es poden considerar iguals dues quantitats que difereixen en una quantitat infinitament petita. Dit d'una altra manera, si una quantitat l'augmentem o la disminuïm en una quantitat infinitament menor que ella, resta igual. Així, podrem prendre *AP* igual a *Ap*, *PM* igual a *pm*, l'espai *Apm* igual a l'espai *APM*, l'espai *MPpm* igual al rectangle *MPpR*, el sector *AMm* igual al triangle Δ*AMS*, etc.



2. Una corba pot ser considerada com un polígon d'infinits costats. Els angles entre aquests costats donen la curvatura de la corba. Per tant, la porció de corba *Mm* infinitament petita es pot considerar per aquesta raó com un segment rectilini i, així, el triangle Δ*mSM* esdevé rectilini.

L'Hôpital no dubta de l'existència dels infinitesimals. Es poden representar com a elements

[1] Com a quantitat infinitament petita, no com a variable en el límit.
[2] Hem de tenir en compte que, en aquella època, les variables dependents i independents no es distingien clarament. L'Hôpital, però, s'avança a la resta: dóna la fórmula de funció implícita en el cas de potències d'una o més

del triangle diferencial.

En la introducció de les *Lectiones* de Johann Bernoulli també trobem aquestes suposicions, dividides en tres postulats. Bernoulli, però, no defineix què són variables i què constants.

Tots dos, abans d'atacar el problema de la tangent, donen les regles bàsiques de diferenciació (suma, substracció, multiplicació, divisió, potenciació, radicació). En el cas concret de les potències, L'Hôpital dóna la mateixa regla per potències perfectes (enteres) i imperfectes (no enteres). En canvi, Bernoulli primer explica el cas de potències naturals, després el de les enteres i, finalment, el de les arrels, sense arribar a la generalització del seu alumne. A més a més, per explicar la diferenciació de $x^{m/n}$, L'Hôpital fa servir les progressions aritmètiques i geomètriques de forma més clara i estructurada que no pas Bernoulli.

Sobta el fet que a l'*Analyse* no aparegui la diferenciació del logaritme,[3] tot i que el problema V de les *Lectiones* de Bernoulli està dedicat al càlcul de la seva tangent. També trobem a faltar l'ús de funcions trigonomètriques, que li haurien estalviat molts de càlculs.

A diferència del seu mestre, a L'Hôpital l'interessa donar una sèrie de proposicions generals per aplicar-les després a alguns casos particulars. Ell mateix justifica aquest fet en el Prefaci de l'*Analyse*:

> ... (les proposicions) són totes generals i com tants de mètodes dels quals és fàcil trobar l'aplicació a tantes proposicions particulars com es vulgui: només la faig sobre alguns exemples escollits, persuadit que de fet en Matemàtiques només hem de treure profit dels mètodes, i que els llibres que es basen en el detall o en proposicions particulars, només són bons per fer perdre el temps a qui els fa i a aquells que els llegeixen.[4]

Bernoulli es caracteritza per buscar coordenades x, y ortogonals per poder aplicar directament la fórmula:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{s},$$

on s és la subtangent.

En canvi, L'Hôpital busca altres tipus de relacions (abcisses sobre corbes, ordenades des

variables.

[3] I sobta més encara perquè L'Hôpital, al prefaci de l'*Analyse*, diu que amb el mètode de Leibniz es pot tractar qualsevol tipus de corba. Les corbes transcendents ja havien començat a aparèixer en els treballs de Leibniz i dels Bernoulli. Fins i tot, L'Hôpital va suggerir a Bernoulli de fer un apèndix sobre la diferenciació del logaritme, que no es dugué a terme.

[4] Prefaci de l'*Analyse*, p. 10.

d'un punt...), segons les propietats de la corba estudiada,[5] un fet que l'obliga a canviar les coordenades. En aquest sentit, Bernoulli és més actual, ja que el mètode és sempre el mateix i no depèn de la naturalesa de la corba.

Finalment, trobo que la notació que fa servir L'Hôpital és més moderna que la utilitzada per Bernoulli.[6] Mentre que L'Hôpital ja nota les potències com es fa actualment, Bernoulli a vegades utilitza □, C, QQ per indicar potència quadrada, cúbica i quarta respectivament. I si s'han de multiplicar expressions llargues, Bernoulli escriu "in", quan el seu alumne només nota ×.[7] Amb un infinit invertit i trencat Bernoulli indica el doble signe ± que sí que fa servir L'Hôpital. A més a més, Bernoulli no escriu de forma clara les proporcions.

Penso que el tractament de la cissoide (corba algèbrica) per part de Bernoulli és més avantatjós que el de L'Hôpital. El cas de la concoide (també algèbrica) és equivalent en ambdós autors.

Quant a les transcendents, trobo que el mètode de L'Hôpital és més rendible en el cas de la cicloide i de l'espiral. En el cas de la quadratriu, tot i que fan servir coordenades diferents, crec que la rendibilitat dels dos mètodes és equivalent.

A continuació analitzaré els exemples comuns a mestre i alumne en el cas del càlcul de tangents.

---

[5] Newton escull les coordenades segons la seva conveniència així com també dóna primer una proposició general i després aplicacions particulars (vegeu I. NEWTON. *Methodus fluxionum*, problema IV, pp. 49-62 de la traducció francesa).

[6] Alhora, el seu llenguatge no és tan atrevit com el dels seus contemporanis (vegeu C. B. BOYER. "The first calculus textbooks", p. 163).

[7] I Leibniz ja fa servir el símbol · .

TANGENT A LA CICLOIDE

SEGONS BERNOULLI

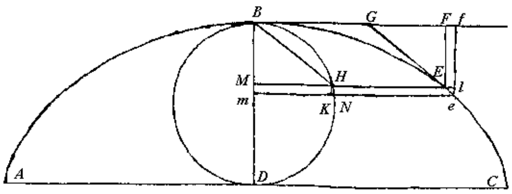
Bernoulli estudia aquesta qüestió al problema VI de les seves *Lectiones.*

Sigui *EM* paral.lel a *AC*.

$x=BF$,

$y=EF=BM$,

$f=EH=$arc(HB).



Aplicant la propietat de la cicloide, resulta:

$$x=EH+HM=f+\sqrt{2ay-y^2}\ ,$$

$$dx = df + \frac{2ady - 2ydy}{2\sqrt{2ay - y^2}}\ .$$

Com que df és HN i ΔHKN és un triangle rectangle (el postulat 2 diu que una corba es pot considerar com un polígon d'infinits costats):

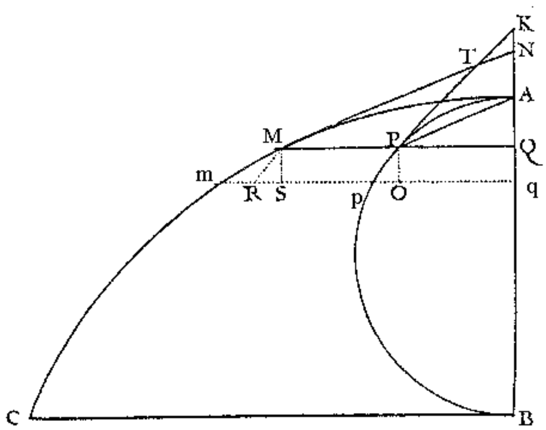
SEGONS L'HÔPITAL

El plantejament de L'Hôpital és ben diferent. Comença demostrant una proposició de caire general.

<u>Proposició II (Secció II)</u>:

Si agafem les abcisses sobre una corba de la qual en sabem traçar les tangents *PT*, hem de buscar la tangent *MT* de la corba *AM*.

(És a dir, en aquest cas l'abcissa no és *AQ* sobre la recta *AB*, sinó arc(*AP*) sobre la corba *APB*). [8]



Sigui *MP* l'abcissa amb tangent *PT* i *MT* la tangent buscada.[9]

Prenem *mp* infinitament proper a *MP* i *MR* paral.lel a *PT*.

[8] Això també ho fa Pascal, qui, a les perpendiculars traçades des de la corba, les anomena "sinus a la base".

[9] Aquí, la figura del cas particular serveix per il·lustrar el cas general.

$$HN=\sqrt{HK^2+KN^2}=\frac{ady}{\sqrt{2ay-y^2}},$$

$$dx=\frac{2ady-ydy}{\sqrt{2ay-y^2}}.$$

Fent servir la relació:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{s}$$

arriba a veure que:

$$s=\frac{2ay-y^2}{\sqrt{2ay-y^2}}=\sqrt{2ay-y^2}=HM\ .$$

Així doncs, *HM* és la subtangent. Si portem aquesta distància sobre *FB*, obtenim *FG*. Finalment, unint *E* amb *G* ja obtindrem la tangent a la cicloide pel punt *E*.

Bernoulli acaba el problema afirmant que la corda *BH* és paral.lela a la tangent per *E*.

x=arc(AP), dx=arc(Pp)=MR,

y=PM, dy=Rm.

Els triangles ΔmRM i ΔMPT són semblants. Per tant:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{MP}{PT},$$

$$PT=\frac{ydx}{dy}.$$

Ara aplicarà aquest resultat al cas particular de la cicloide.

<u>Exemple</u>: Donada la corba tal que la x i la y compleixen la següent relació:

$$x=\frac{ay}{b},$$

si diferenciem i apliquem la proposició general:

$$dx=\frac{ady}{b},$$

$$PT=\frac{ay}{b}=x.$$

En el cas particular en què *APB* sigui un semi-cercle i *MP* perpendicular a *AB*, *AMC* serà una semicicloide.

<u>Corol.lari</u>: L'Hôpital demostra que la corda *AP* és paral.lela a la tangent pel punt *M* de la cicloide.

Tot i que tots dos arriben al mateix resultat cal remarcar que els camins seguits són diferents. La diferència que trobo més notable és l'elecció de les coordenades.

Bernoulli sempre busca coordenades cartesianes per poder aplicar:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{s},$$

de manera que, en aquest cas, l'equació de la corba no queda tan clara i senzilla com amb les coordenades utilitzades per L'Hôpital. Resulten, així, expressions a operar molt llargues.

Fermat, en estudiar aquest problema, també fa servir el segment *EM* (que és la x en el cas de Bernoulli).[10] Però, de fet, el desenvolupament del mètode de Fermat és el corol.lari de Bernoulli i de L'Hôpital: demostra que la corda és paral.lela a la tangent.

Per la seva banda, crec que les coordenades considerades per L'Hôpital s'apropen més a Roberval.[11] La x i la y de L'Hôpital representen el moviment sobre el cercle generador i el de la translació horitzontal respectivament. D'aquesta manera, l'equació de la corba és molt més senzilla.

Així, L'Hôpital només necessita un parell de triangles semblants mentre que Bernoulli ha de fer més operacions.

A part de la cicloide, L'Hôpital només aplica la seva proposició general al següent exemple:

<u>Exemple I</u>: Donada la corba:

$$\frac{y^2}{x} = \frac{x\sqrt{a^2+y^2}}{a},$$

trobar la tangent en un punt donat.

[10] Vegeu l'apartat MÈTODES PER TROBAR LA TANGENT A LA CICLOIDE.
[11] Ibid.

TANGENT A LA CONCOIDE

SEGONS BERNOULLI

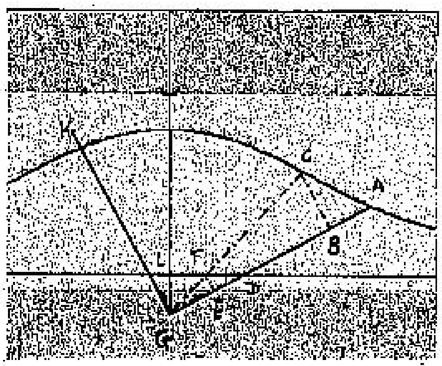
Bernoulli dedica el problema VII a trobar la tangent a la concoide de Nicomedes, encara que només estudia la branca superior. Seguint la construcció de Nicomedes:

$a=GL$,

$b=CF=AD$,

$x=GD$,

$dx=DE=AB$.



Fent servir semblança de triangles:

. ΔDEF i ΔDLG:

$$\frac{DL}{LG}=\frac{DE}{EF}\ \Rightarrow EF=\frac{adx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

. ΔBGC i ΔEGF:

$$\frac{GF}{GC}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow BC=\frac{axdx+abdx}{x\sqrt{x^2-a^2}}.$$

. ΔABC i ΔAGK:

SEGONS L'HÔPITAL

1ª FORMA:

Proposició VI (Secció II):

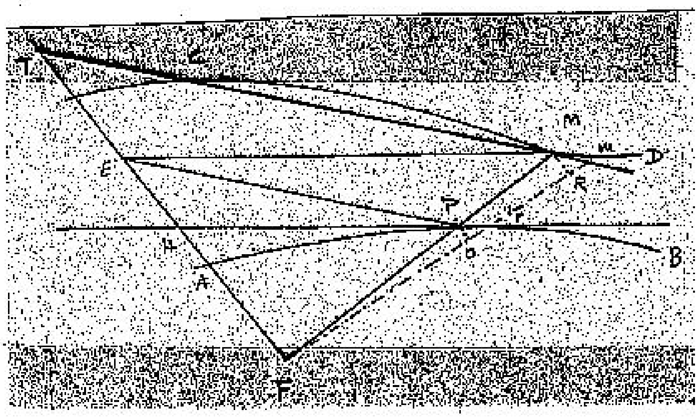
Sigui APB una corba de la qual sabem traçar la tangent PH; F un punt fix exterior a la corba; i una altra corba CMD tal que per a qualsevol recta FPM, la relació entre FP i FM ve donada per una equació. S'ha de buscar la tangent MT pel punt M.

Sigui FHT perpendicular a FM.

$s=FH$,

$x=FP$, $\quad dx=Op$,

$y=FM$, $\quad dy=mR$.



Fent servir els següents parells de triangles semblants:

. ΔPOp i ΔHFP,

. ΔMRm i ΔTFM,

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AG}{GK}\Rightarrow GK=\frac{ax^2+2abx+ab^2}{x\sqrt{x^2-a^2}}.$$

I, com que *GK* s'ha d'agafar perpendicular a *GC* (encara que ell no ho diu), *GK* és la subtangent. Unint *K* amb *C* ja tindrem la tangent.

Demostra com, a partir d'aquí, es pot trobar de forma ràpida la tangent (cosa que també es pot veure a l'estudi de L'Hôpital).

<u>Observacions</u>: $b+x$ correspon a la y de L'Hôpital. Bernoulli no descriu la seva construcció: no "avisa" que *GK* ha de ser perpendicular a *AG*. En aquest sentit ja es pot afirmar que el text de L'Hôpital és més didàctic.

obté:

$$\frac{PF}{FH}=\frac{pO}{OP}\Rightarrow OP=\frac{sdx}{x},$$
$$\frac{FP}{FM}=\frac{OP}{RM}\Rightarrow RM=\frac{sydx}{x^2},$$
$$\frac{mR}{RM}=\frac{FM}{FT}\Rightarrow FT=\frac{sy^2dx}{x^2dy}.$$

A partir de l'equació es pot posar *dy* en funció de *dx* i ja es té la subtangent.

Després d'enunciar la proposició general, l'aplica al cas particular de la concoide.

<u>Exemple</u>: Sigui ara *APB* una recta (*PH*). La relació entre *FP* i *FM* ve donada per:

$$y-x=a.$$

La corba *CMD* serà la concoide de Nicomedes, amb asímptota *OH* i pol *F*.

$$dy=dx,$$

$$FT=\frac{sy^2}{x^2}.$$

Es pot deduir una forma abreujada de trobar la tangent: si tracem *ME* paral·lela a *PH* i *MT* paral·lela a *PE*, *MT* és la tangent buscada.

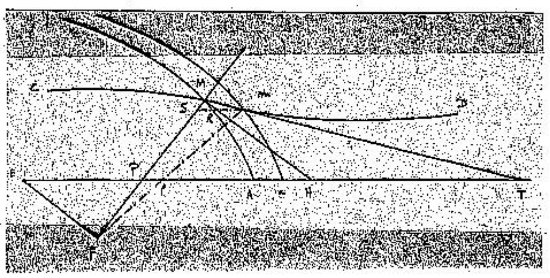
Efectivament:

$$\frac{FP}{FH}=\frac{FM}{FE}\Rightarrow FE=\frac{sy}{x},$$
$$\frac{FP}{FE}=\frac{FM}{FT}\Rightarrow FT=\frac{sy^2}{x^2}.$$

<u>2ª FORMA</u>:

Proposició VII (Secció II):

Sigui *ARM* una corba, amb tangent *MH* al punt *M* i de diàmetre *EPAHT*. *F* un punt fix exterior, del qual surt una recta *FPSM* que talla el diàmetre en *P* i la corba en *M*. La recta *FPM* gira al voltant de *F*, fent moure el pla *PAM* paral·lelament a si mateix al llarg de la recta *ET*, de forma que *PA* sempre és igual. La intersecció contínua de *FM* i *AM* descriu la corba *CMD*. S'ha de buscar la tangent *MT*.



Sigui *pam* un pla infinitament proper al pla *PAM*.

Tracem *mRS* paral·lela a *AP*.

$Pp=Aa=Rm \Rightarrow RS=Sm-Pp$,

$FP=Fp=x$,

$FM=Fm=y$,

$PH=s$,

$MH=t$,

$Pp=dz$.

Considerem els següents parells de triangles semblants:

. ΔFPp i ΔFSm,

. ΔMPH i ΔMSR,

. ΔMHT i ΔMRm.

Per tant, tenim la sèrie de proporcions:

$$\frac{Fp}{Fm} = \frac{Pp}{Sm} \Rightarrow Sm = \frac{ydz}{x} \Rightarrow RS = \frac{ydz - xdz}{x},$$

$$\frac{PH}{HM} = \frac{SR}{RM} \Rightarrow RM = \frac{tydz - txdz}{sx},$$

$$\frac{MR}{Rm} = \frac{MH}{HT} \Rightarrow HT = \frac{sx}{y - x}.$$

I d'aquesta manera podem obtenir *MT*.

De tot això L'Hôpital dedueix que, si tracem *FE* paral·lela a *MH* i prenem *HT* igual a *PE*, aleshores *MT* serà la tangent buscada:

Sabem que $HT = \frac{PH \cdot FP}{MP}$. Si *FE* és paral·lela a *MH*, com que el triangle ΔPFE és semblant al triangle ΔMPH, llavors: $\frac{PE}{PH} = \frac{FP}{PM}$, d'on deduïm que

$$PE = \frac{PF \cdot PH}{MP} = HT.$$

Aquesta proposició general és interessant ja que aquí sí que l'aplica a diversos casos particulars:

. Si *AM* és una recta, *CMD* és hipèrbola (amb asímptota *ET*).

. Si *AM* és un cercle de centre *P*, *CMD* és la concoide de Nicomedes (amb asímptota *ET* i pol *F*).

. Si *AM* és una paràbola, *CMD* és la companya del paraboloide de Descartes.

En aquest cas, el primer mètode emprat per L'Hôpital és equivalent a l'utilitzat per Bernoulli. Només cal comprovar que la cadena de proporcions a partir dels triangles semblants coincideix en els dos casos. A més a més, l'elecció de les coordenades és la mateixa. Ambdós treballen amb coordenades des d'un punt.

Però el segon camí utilitzat pel marquès és interessant doncs aplica el mètode general a diverses corbes.

A nivell didàctic, cal remarcar que L'Hôpital presenta dues formes de resoldre el problema.

TANGENT A LA CISSOIDE

SEGONS BERNOULLI

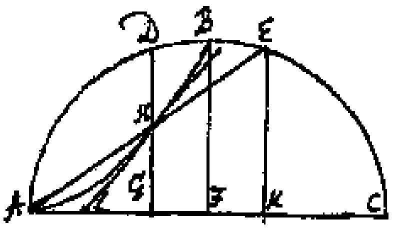
Al problema VIII Bernoulli defineix la corba com ho havien fet els grecs: l'arc *BD* ha de ser igual a l'arc *BE*.

$AF=FC=a$,

$AG=x$,

$GH=y$,

$FG=a\text{-}x=FK$.



Sigui *H* un punt de la cissoide.

Fent servir la naturalesa de la corba:

$$GD=KE=\sqrt{2ax\text{-}x^2}\,.$$

Llavors:

$$\frac{AK}{KE}=\frac{AG}{GH}\,.$$

És a dir:

$$\frac{2ax\text{-}x}{\sqrt{2ax\text{-}x^2}}=\frac{x}{y}$$

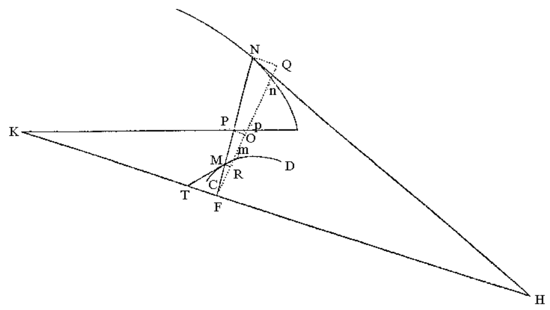
Simplificant:

SEGONS L'HÔPITAL

L'Hôpital torna a fer servir el seu sistema: primer demostra una proposició general i després l'aplica al cas particular de la corba estudiada.

<u>Proposició VIII (Secció II)</u>:

Donats la corba *AN* amb diàmetre *AP*, un punt exterior fix *F*, una altra corba *CMD* i la recta *FMPN*, i donada l'equació que relaciona *FN*, *FP* i *FM*, s'ha trobar la tangent *MT*.



Pel punt *F* es traça la perpendicular *HK* a *FN*.

Agafant centre *F* i radis *FN*, *FP* i *FM* s'obtenen els petits arcs arc(*NQ*), arc(*PO*) i arc(*MR*), respectivament. L'angle entre *FN* i *Fn* és infinitament petit.

$$\frac{\sqrt{2a\text{-}x}}{\sqrt{x}}=\frac{x}{y},$$

$$\frac{2a-x}{x}=\frac{x^2}{y^2}.$$

Operant arriba a:

$$x^3=2ay^2-xy^2=(2a\text{-}x)y^2.$$

Diferenciant ambdós costats:

$$3x^2dx=4aydy-2xydy-y^2dx,$$

$$\frac{3x^2+y^2}{4ay\text{-}2xy}=\frac{dy}{dx}=\frac{y}{s}.$$

I ara ja pot trobar la subtangent GL (respecte els eixos x i y):

$$GL=...=\frac{2ax\text{-}x^2}{3a\text{-}x}.$$

$s=FK$,

$t=FH$,

$x=FP$, $dx=pO$,

$y=FM$, $dy=Rm$,

$z=FN$, $-dz=nQ$.

Considera els següents triangles semblants:

. ΔPFK i ΔpOP,

. ΔFMR, ΔFPO i ΔFNQ,

. ΔHFN i ΔNQn,

. ΔmRM i ΔMFT.

Llavors:

$$\frac{x}{s}=\frac{dx}{OP}\Rightarrow OP=\frac{sdx}{x},$$

$$\frac{x}{y}=\frac{OP}{MR}\Rightarrow MR=\frac{sydx}{x^2},$$

$$\frac{x}{z}=\frac{OP}{NQ}\Rightarrow NQ=\frac{szdx}{x^2},$$

$$\frac{t}{z}=\frac{NQ}{Qn}\Rightarrow Qn=\frac{sz^2dx}{tx^2},$$

$$\frac{dy}{RM}=\frac{y}{FT}\Rightarrow FT=\frac{sy^2dx}{x^2dy}.$$

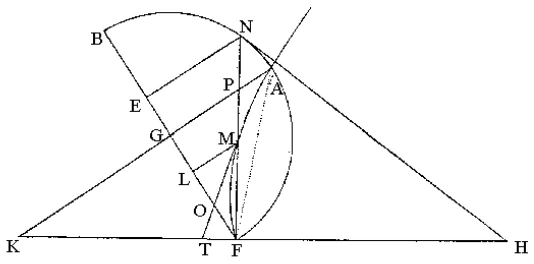
Diferenciant l'equació es podrà posar dy en funció de dx i de dz. I fent servir:

$$dz=-\frac{sz^2dx}{tx^2},$$

(ja que si la x creix la z disminueix), les dx desapareixeran de FT.

Observació: S'obté el mateix resultat si AP és una corba.

Exemple:



1ª forma: Sigui *AN* cercle de centre *G* que passa per *F* i *FB* perpendicular al diàmetre *AP*. I sigui *PM* sempre igual a *PN*. La corba resultant és una cissoide. L'equació que relaciona *FN*, *FM* i *FP* és:

$$z+y=2x.$$

Diferentciant:

$$dy = 2dx - dz = \frac{2tx^2\,dx + sz^2\,dx}{tx^2}.$$

Per tant:

$$FT=\frac{sty^2}{2tx^2+sz^2}.$$

2ªforma: Igual que Bernoulli.

En aquest cas trobo que el mètode de Bernoulli és més rendible que el de L'Hôpital. Bernoulli, amb coordenades ortogonals (aprofitant la naturalesa de la corba) i amb un parell de triangles semblants, resol el problema. Mentre que L'Hôpital necessita quatre parells de triangles semblants. Al pas final, la subtangent queda en funció de x, y, z, s, t, mentre que al problema de Bernoulli queda només en funció de x.

Un altre avantatge del mètode de Bernoulli és que dóna l'equació de la corba en termes de x i y, cosa que no fa L'Hôpital. Així és més còmode el maneig de la corba.

Tampoc no hem d'oblidar que el mètode de L'Hôpital s'allarga una mica més perquè primer resol el cas general, que, d'una altra banda, només aplica al cas de la cissoide.

TANGENT A LA QUADRATRIU

SEGONS BERNOULLI

Aquesta corba queda caracteritzada de la següent forma:

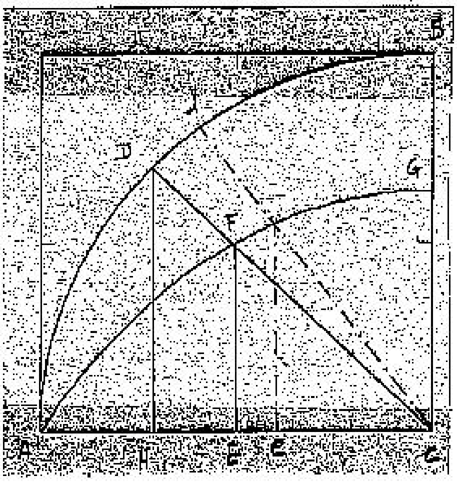
$$\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}.$$

Bernoulli li dedica el problema IX de les seves *Lectiones*.

$a=AC$, $b=AB$,

$x=AH$, $f=\text{arc}(AD)$,

$HC=a-x$.



Com que D pertany al quart de cercle:

$$DH=\sqrt{2ax-x^2},$$

$$AE=\frac{af}{b} \Rightarrow EC=a-\frac{af}{b}.$$

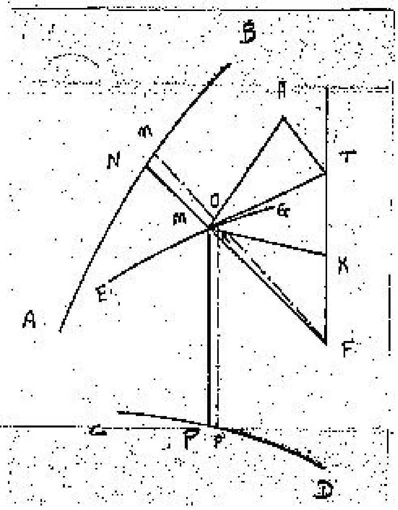
ΔDHC i ΔFEC són triangles semblants. Per tant:

SEGONS L'HÔPITAL

Com sempre, primer ataca el problema de forma general per a després tractar un cas particular.

Proposició IX (Secció II):

Donades les corbes ANB i CPD; la recta FKT; A, C, F punts fixos. Sigui EMG una corba tal que, per a qualsevol recta FMN, MP és paral·lel a FK. La relació de l'arc(AN) amb l'arc(CP) ve donada per l'equació. Busquem la tangent MT, amb M punt sobre EG.



Sigui TH paral·lel a FM i les rectes MRK i MOH paral·leles a les tangents en P i en N, respectivament. Sigui $FmOn$ infinitament proper a FMN, amb mRp paral·lel a MP.

$s=FM$,

77

$$\frac{HC}{HD}=\frac{EC}{EF} \Rightarrow EF=\frac{(ab-af)\sqrt{2ax-x^2}}{ab-bx}.$$

Considerant un triangle infinitament petit:

$$df=\frac{adx}{\sqrt{2ax-x^2}},$$

llavors:

$$d(AE)=\frac{a}{b}df=\frac{a^2dx}{b\sqrt{2ax-x^2}}.$$

Un Un cop ha diferenciat EF, aplica la fórmula habitual:

$$\frac{d(EF)}{d(AE)}=\frac{EF}{s},$$

i obté la subtangent s.

A partir d'aquí Bernoulli dóna una forma abreujada de calcular la tangent: prenent CK perpendicular a DC; considerant els triangles semblants ΔDHC i ΔFEC i els sectors semblants DdC i EfC; i diferenciant FC arriba a:

$$\frac{d(FC)}{b-f}=\frac{FC}{CK}.$$

Això, però, ho escriu, no fa servir aquesta notació.

Finalment, tenint CK es pot traçar la tangent FK.

Al problema X Bernoulli segueix estudiant aquesta corba. Busca G, punt d'intersecció de la quadratriu AG i el radi perpendicular

$t=FN$,

$u=MK$,

$x=\text{arc}(CP)$, $dx=\text{arc}(Pp)=MR$,

$y=\text{arc}(AN)$, $dy=\text{arc}(Nn)$.

Els parells de triangles següents són semblants:

. ΔFNn i ΔFMO,

. ΔMOm i ΔMHT,

. ΔMRm i ΔMKT,

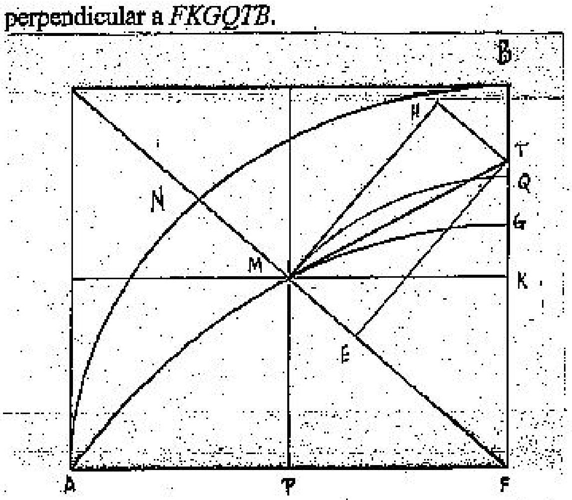
d'on surt:

$$MH=\frac{sudy}{tdx}.$$ [12]

Posant dy en funció de dx a partir de l'equació, desaparcixeran les dx.

Així, si tracem recta paral·lela a FM pel punt H, tallarà FK en el punt T, obtenint per tant la tangent MT.

Exemple: Sigui ANB un quart de cercle amb centre F (fix) i CPD el radi APF perpendicular a $FKGQTB$.



[12] Aquest segment MH es correspon amb l'arc(MD) que utilitza Fermat (vegeu l'apartat MÈTODES PER TROBAR LA TANGENT A LA QUADRATRIU).

78

CB.

Agafa un punt *D* tal que *DB* sigui infinitament petit.

Per això i per la definició de la quadratriu:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}=\frac{DB}{EC}=\frac{DB}{FG}=\frac{CB}{CG}=\frac{AC}{CG}.$$

Així, *CG* és la 3ª proporcional al quart de cercle *AB* i al radi *AC*.

$a=AF$, $b=ANB$,

$x=AP$,

$y=\text{arc}(AN)$,

$u=FP=MK=a\text{-}x$,

$t=FN=a$.

L'equació de la quadratriu és:

$$\frac{y}{x}=\frac{b}{a},$$

per tant:

$$dy=\frac{b}{a}dx,$$

$$MH=\frac{sudy}{tdx}=\frac{asdy\text{-}sxdy}{adx}=\frac{bs\text{-}ys}{a}.$$

Com fa Bernoulli, L'Hôpital també dóna la forma curta de trobar la tangent *MT*, prenent *MH*=arc(*MQ*) i perpendicular a *FM*, i *HT* paral·lel a *FM*. En efecte: *FNB* i *FMQ* són sectors semblants, així:

$$\frac{FN}{FM}=\frac{\text{arc}(NB)}{\text{arc}(MQ)},$$

$$\text{arc}(MQ)=\frac{bs-ys}{a}=MH.$$

com volia demostrar.[12]

El corol·lari que L'Hôpital dóna a continuació és el problema X de Bernoulli.

[12] Aquest arc(*MQ*) també l'utilitza Fermat per calcular la tangent a la quadratriu (vegeu l'apartat MÈTODES PER TROBAR LA TANGENT A LA QUADRATRIU).

Ambdós autors treballen amb els mateixos elements (tot i que Bernoulli fa servir coordenades cartesianes i L'Hôpital, polars[13]):

Bernoulli	L'Hôpital
$a=AC$	$a=AF=FN=t$
$b=AB$	$b=ANB$
AE	$x=AP$
f=arc(AD)	y=arc(AN)
EC	$u=FP=MK=a-x$
FC	$s=FM$

A diferència de Bernoulli, L'Hôpital no troba la subtangent directament, sinó un segment MH en funció de x, y, s, t, u tal que, traçant una determinada paral·lela per H, resulta la tangent buscada. A continuació ho aplica a una corba concreta, la quadratriu. Les variables x, y són els elements característics de la corba, que podem identificar amb els seus moviments generadors.

En canvi, Bernoulli torna a treballar amb coordenades cartesianes per poder aplicar:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{s}.$$

Bernoulli treballa amb triangles semblants mentre que L'Hôpital ho fa amb sectors semblants.

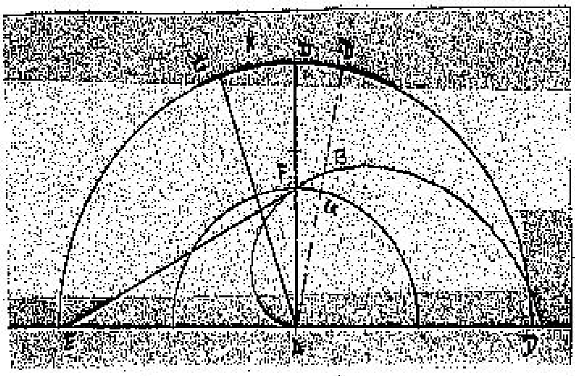
Els corol·laris i conseqüències que se'n deriven en els dos casos són els mateixos.

[13] De fet, la relació entre l'angle recorregut (t), el radi vector ($r=r(t)$) i les coordenades x, y de L'Hôpital és la següent: $y = at$, $a - x = r\cos t$.

TANGENT A L'ESPIRAL

SEGONS BERNOULLI

El problema XI està dedicat al cas de l'espiral d'Arquimedes.
Sigui a el radi AC, b la longitud de la perifèria $DDCD$ i $x = AF$.



Sigui AE perpendicular a AB.
Per definició de l'espiral:

$$\frac{a}{b} = \frac{AB}{\text{arc}(CKD)}.$$[15]

Això ho escriu, no fa servir aquesta notació.

Aleshores, aïllant l'arc CKD i diferentciant-lo:

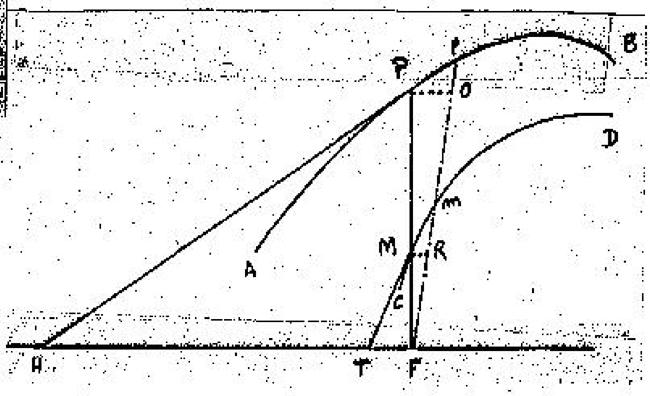
$$d[\text{arc}(CKD)] = DD = (b/a)dx,$$

i així tenim que:

SEGONS L'HÔPITAL

Per al cas general enuncia la següent proposició:

Proposició V(Secció II):
Sigui APB una corba, amb A fix, de la qual sabem trobar la tangent PH. Sigui F un altre punt fix i CMD una altra corba tal que, agafant una recta FMP, la relació entre FM i AP ve donada per una equació.
S'ha de trobar la tangent MT des de M.



Tracem sobre FP la perpendicular FH.
Prenem la recta $FRmOp$ que forma un angle amb FP infinitament petit.
Amb centre F descrivim els arcs arc(PO) i arc(MR).
$s=HF$,
$t=PH$,

[15] Ell no ho diu però es pot sobreentendre que aquest arc funciona com la coordenada y.

$$\frac{AD}{AF}=\frac{DD}{FG}\Rightarrow\frac{AD}{x}=\frac{DD}{FG}\Rightarrow FG=\frac{bxdx}{a^2}$$ [16]

Llavors:

$$\frac{BG}{FG}=\frac{AB}{AE},\text{ és a dir : }\frac{dx}{\frac{bxdx}{a^2}}=\frac{x}{AE}.$$

I així ja obté la subtangent, AE.

La idea torna a ser aplicar la fórmula:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{s},$$

però, en aquest cas, usant coordenades polars.

$x=\text{arc}(AP)$, $dx=\text{arc}(Pp)$,
$y=FM$, $dy=mR$,
$z=FP$.

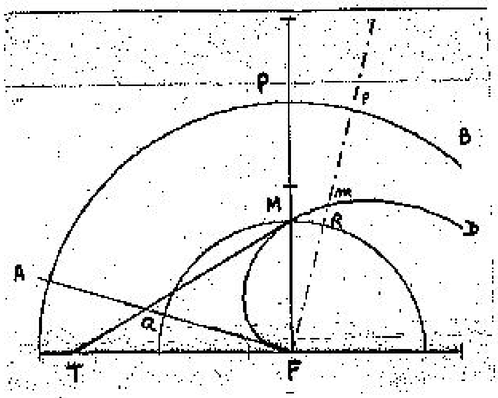
Considerem els següents parells de triangles semblants:

. ΔPOp i ΔPFH,
. ΔmRM i ΔMFT,
. ΔFPO i ΔFMR.

Aleshores:

$$\frac{PH}{HF}=\frac{Pp}{PO}\Rightarrow PO=\frac{sdx}{t},$$
$$\frac{FP}{FM}=\frac{PO}{MR}\Rightarrow MR=\frac{ysdx}{tz},$$
$$\frac{mR}{RM}=\frac{FM}{FT}\Rightarrow FT=\frac{sy^2dx}{tzdy}.$$

Exemple: Si prenem APB un cercle de centre F, PH serà paral·lel i igual a FH, és a dir, $t=s$. En aquest cas, la corba CMD és l'espiral d'Arquimedes.[17]



Així doncs:

[16] Ho he interpretat com a semblança de triangles.

[17] Newton, en el seu *Methodus fluxionum* (Problema IV, setena manera), estudia el cas de les espirals i ja fa servir aquestes coordenades, que no són altra cosa que les coordenades polars.

82

x=arc(AP),

y=FM,

z=FP=a.

Fent servir la proposició general:

$$FT = \frac{y^2 dx}{ady}.$$

Si b és la longitud de la circumferència (o una porció), per definició d'espiral:

$$\frac{b}{x} = \frac{a}{y}$$

(que seria la relació entre FM i AP).

Diferenciant:

$$FT = \frac{xy}{a},$$

que és el resultat que obté Bernoulli (tenint en compte les diferents notacions).

A continuació, descriu una forma ràpida de trobar aquesta tangent:

Si tracem l'arc de cercle arc(MQ) de centre F i radi FM, que acaba en Q pel radi FA que uneix els dos punts fixos A i F. Si prenem FT igual a l'arc(MQ), la recta MT serà la tangent en M. Efectivament: FPA i FMQ són sectors semblants, per tant:

$$\frac{FP}{FM} = \frac{AP}{\text{arc}(MQ)} \Rightarrow \text{arc}(MQ) = \frac{yx}{a} = FT$$

Aquest cas és força interessant doncs l'aplica a d'altres corbes, tot i que també són espirals. Agafa en general:

$$\frac{b}{x} = \frac{a^m}{y^m},$$

on *m* és racional.

La corba *FMD* serà una espiral a l'infinit. Diferenciant, obtenim:

$$ydx = \frac{mby^m dy}{a^m} = mxdy$$

i, per tant, *FT* queda de la següent forma:

$$\frac{y^2 dx}{ady} = \frac{mxy}{a} = m \cdot \mathrm{arc}(MQ).$$

Ambdós usen, com a variables, l'arc i el radi, és a dir, fan servir coordenades polars (igual que Newton).

En aquest cas, trobo que el tractament de L'Hôpital és més avantatjós ja que la proposició general aquí sí l'aplica a diversos exemples particulars.[14] A més a més, explica una forma ràpida de trobar la tangent, cosa que no fa Bernoulli.

[14] Newton, al Problema IV, setena manera, del seu *Methodus fluxionum*, després del cas general estudia espirals on la relació entre la *x* i la *y* ve donada per una equació. Per exemple:

. $y = \frac{ax}{b}$, que és l'espiral d'Arquimedes

. $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$

. $x^2 = by$

6. ESTUDI DELS MÀXIMS I MÍNIMS

Amb el problema XII Bernoulli comença l'estudi dels màxims i mínims. Un màxim (mínim) és un punt on la corba és còncava (convexa) respecte l'eix. En aquest punt (màxim o mínim) la tangent és paral·lela a l'eix. Dit d'una altra forma, *y* és infinitament petita respecte *s*. Per tant, fent servir que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{s},$$

podem considerar $dy=0$.

<u>Exemple</u>:[1] Donat *a*, dividit en *x* i *a*-*x*, s'ha de buscar la *x* que faci màxim el rectangle $x(a-x)$.

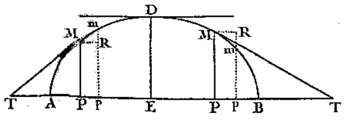
Diferenciant $ax-x^2$ i igualant a zero:

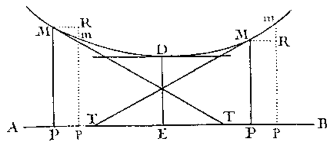
$$adx-2xdx = 0,$$

$$x = a/2.$$

La Secció III de l'*Analyse* està dedicada al problema de buscar l'ordenada més gran o més petita, és a dir, al problema de trobar els màxims i mínims.

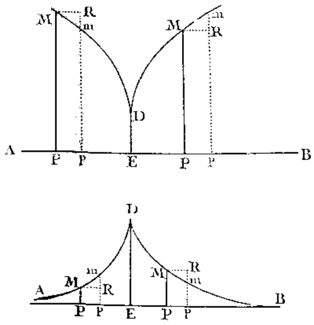
L'estudi que fa L'Hôpital dels màxims i mínims es basa en el que havia fet Leibniz,[2] però de manera més general. Considerant que l'abcissa creix contínuament, si l'ordenada també creix fins a un cert punt on comença a decrèixer (o viceversa), la diferència de l'ordenada passarà de positiva a negativa (o al revés). Per tant, haurà de ser zero o infinita en algun moment.[3] Igualant, doncs, la diferència primera a zero (cas que aquesta disminueixi) i després a infinit (cas que augmenti) trobarà l'ordenada més gran o la més petita (art.46). Quan la diferència és zero la tangent en el màxim (o mínim) és paral·lela a l'eix de les abcisses. És a dir, la subtangent és infinita.





[1] Aquest exemple coindideix amb el primer que dóna Fermat en el seu *Maxima et minima*.
[2] Vegeu G. W. LEIBNIZ. “Nova methodus pro maximis &minimis, ...”.

En canvi, si la diferència és infinita, la tangent es confon amb l'ordenada corresponent a aquest màxim (o mínim).



Després de les definicions, ambdós autors donen un seguit d'exemples on ja pressuposen si el que es busca és un màxim o un mínim, sense donar cap indicació de com esbrinar si és d'un tipus o de l'altre. Generalment, però, la naturalesa dels extrems és clara a partir de les condicions del problema.

Molts dels exemples són idèntics. Les figures també, però, segons Coolidge, estan millor les de L’Hôpital.[4]

L'estudi de L'Hôpital és més complet que el de Bernoulli (per exemple, Bernoulli no estudia el cas de la diferència infinita).[5] Tot i això, a l'estudi de L'Hôpital manca el cas on el màxim (o el mínim) es troba als extrems de l'interval.[6]

També cal remarcar que en aquesta secció tornem a observar que la notació de L'Hôpital és més moderna que la del seu mestre. Per exemple, als problemes XV i XVII, en resoldre una equació de segon grau, Bernoulli fa servir un infinit invertit i trencat per a indicar el doble signe del discriminant. En canvi, en el problema XX utilitza el ± habitual.

Ara analitzaré com tracten els dos autors els problemes següents: el de la refracció (el camí més ràpid que segueix la llum per a passar d'un medi a un altre de diferent densitat) i el de la posició més baixa que assoleix un pes en un sistema de dues politges.

[3] Aquesta és la idea del teorema de Bolzano (1781-1848).

[4] De fet, no he aconseguit veure les figures de les *Lectiones* de Bernoulli.

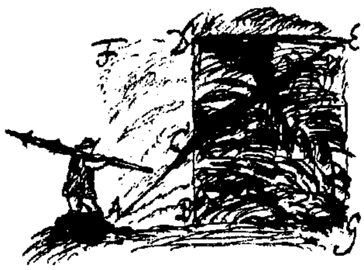
[5] Malgrat això, en una carta del 22 d'abril de 1694, Bernoulli li diu a L'Hôpital que no sempre es compleix dy=0 quan hi ha un extrem. Està pensant en les corbes "bicòrnies", aquelles amb punt de retrocés. Les tangents en aquests punts no són paral·leles sinó perpendiculars a l'eix de les x, és a dir, $dy=\infty$.

[6] Vegeu J. L. COOLIDGE. *The Mathematics of Great Amateurs*, p. 155.

SEGONS BERNOULLI

Problema XVI:

Un viatger ha d'anar de *A* a *E* fent servir el mínim temps possible. Primer ha de travessar el camp *AFDB* i després el *DBGE*. Al primer camp recorre un espai *b* en un temps *a*. I en el segon, un espai *c* en un temps *a*. Quina via haurà de seguir?



AB=m, ED=n,

BC=x, BD=e,

DC=e-x,

$$AC=\sqrt{m^2+x^2},$$

$$CE=\sqrt{e^2-2ex+x^2+n^2}.$$

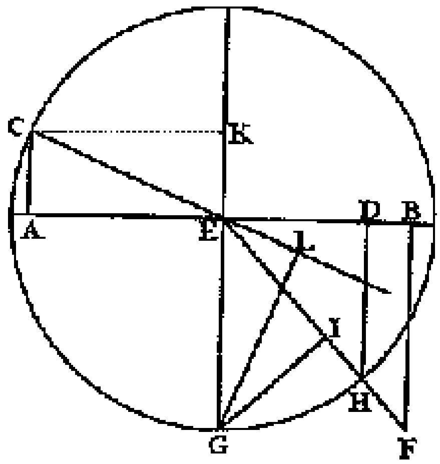
Usant la velocitat al camp *ABC*:

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{m^2+x^2}}{\text{temps}},$$

SEGONS L'HÔPITAL

Exemple XI (Secció III):

Un viatger surt de *C* per a anar a *F*. Ha de travessar dos camps separats per la recta *AEB*. Al camp del costat de *C*, recorre un espai *a* en un temps *c*. Al camp del costat de *F*, recorre un espai *b* en un temps *c*. Quin ha de ser el punt *E* de *AEB* per poder anar de *C* a *F* en el mínim temps possible?



CE=u,

EF=z.

Com Bernoulli:

$$\frac{a}{u}=\frac{c}{\text{temps}}.$$

Llavors el temps de *C* a *E* serà:

$$\frac{cu}{a}.$$

així, el temps per a anar de *A* a *C* serà:

$$\frac{a\sqrt{m^2+x^2}}{b}.$$

Anàlogament, fent servir la velocitat al camp *CDE*:

$$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{e^2\text{-}2ex+x^2+n^2}}{\text{temps}},$$

amb la qual cosa el temps per a anar de *C* a *E* serà:

$$\frac{a\sqrt{e^2-2ex+x^2+n^2}}{c}.$$

El temps total, que és el que volem fer mínim, és:

$$\frac{a\sqrt{m^2+x^2}}{b}+\frac{a\sqrt{e^2-2ex+x^2+n^2}}{c}\ .\ (1)$$

Diferenciant aquesta expressió i igualant-la a zero, el problema queda reduït a resoldre la següent equació:

$$(b^2-c^2)\,x^4+(2c^2e-2b^2e)\,x^3+$$
$$+(b^2m^2+b^2e^2-c^2e^2-c^2n^2)x^2-$$
$$-2b^2em^2x+b^2e^2m^2=0\ .\ (2)$$

Anàlogament:

$$\frac{b}{z}=\frac{c}{\text{temps}}.$$

Per tant, el temps de *E* a *F* serà: $\frac{cz}{b}$.

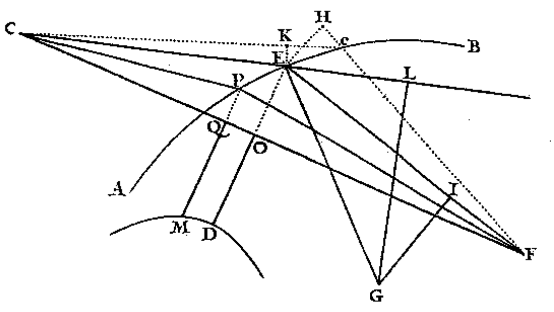
Aleshores, el temps total

$$\frac{cu}{a}+\frac{cz}{b}$$

ha de ser mínim.

Ara fa servir el següent resultat:

<u>Article 56</u>: Sigui *AEB* una corba plana amb dos punts fixos, *C* i *F*. Des d'un punt *P* qualsevol d'aquesta corba tracem les rectes *CP* (*u*) i *PF* (*z*). Considerem una quantitat composta per *u*, *z*, i per altres rectes *a*, *b*, *c*,... Es demana quina és la posició de les rectes *CE* i *EF* de manera que la quantitat sigui màxima o mínima.



Siguin *CE* i *EF* les rectes amb la posició desitjada. Unim *C* amb *F*. Construïm una nova corba *DM* tal que, si tracem la recta *PQM* perpendicular a *CF*, l'ordenada *QM* sigui igual a la quantitat donada. Quan *P* esdevé *E*, *QM* passa a ser *OD*, que serà màxima o mínima. Per tant, haurem de diferenciar i igualar a zero o a infinit. Tracem *EG* perpendicular a *AEB* i des d'un punt *G* qualsevol *GL*, *GI* perpendiculars a *CE* i *EF* respectivament. Sigui *e* un punt infinitament proper a *E* i des d'aquest punt dibuixem les rectes *CKe* i *FeH*. Agafant aquestes rectes com a radis i els punts *C*, *F* com a centres dibuixem els petits arcs *EK* i *EH*. Es pot comprovar que els parells de triangles rectangles següents són semblants:

. ΔELG i ΔEke,

. ΔEIG i ΔEhe.

Aleshores:

$$\frac{GL}{GI} = \frac{Ke}{He} = \frac{du}{-dz} = \frac{\sin(\angle GEC)}{\sin(\angle GEF)}$$

(*dz* és negatiu respecte *du* perquè quan la *u* creix la *z* decreix).

Agafant, doncs, *EG* perpendicular a *AB* i aplicant el resultat anterior:

$$\frac{\sin(\angle GEC)}{\sin(\angle GEF)} = \frac{GL}{GI} = \frac{a}{b} \ . \ (*)$$

Sigui *CGH* la circumferència de centre *E* i radi *EC*. Primer tracem *AC*, *HD* i *BF* perpendiculars a *AB*; i després, *GL* i *GI* perpendiculars a *CE* i a *EF* respectivament.

Fent servir (*) i els següents parells de triangles semblants:

. ΔGEL i ΔECA,

. ΔGEI i ΔEHD,

s'obté $GL=AE$ i $GI=ED$.

Prenent $x=AE$:

$$ED = \frac{bx}{a}.$$

Sigui:

$AB=f$, $AC=g$, $BF=h$.

Com que ΔEBF i ΔEDH són semblants:

$$\frac{EB}{BF} = \frac{f-x}{h} = \frac{ED}{DH} \Rightarrow DH = \frac{hbx}{af-ax}.$$

ΔEDH i ΔEAC són triangles rectangles les hipotenuses dels quals, *EH* i *EC*, són iguals:

$$ED^2 + DH^2 = EA^2 + AC^2.$$

És a dir:

$$\frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{h^2b^2x^2}{(af-ax)^2} = x^2 + g^2.$$

Això es redueix a estudiar la següent equació:

$$(a^2-b^2)x^4 + (2b^2f - 2a^2f)x^3 + \\ + (a^2f^2 + a^2g^2 - b^2f^2 - b^2h^2)x^2 - \\ - 2a^2fg^2x + a^2f^2g^2 = 0,$$

la solució de la qual ja ens indicarà quin és el punt *E* buscat.

L'Hôpital després també resol aquest problema tal com ho havia fet Bernoulli, però canviant la notació.

Bernoulli diferencia i iguala a zero. Per la seva banda, L'Hôpital aplica l'article 56 de l'*Analyse*, assolint la mateixa equació (2) de Bernoulli. Després exposa una altra manera de resoldre el problema, que coincideix amb la del seu mestre.

En l'article de 1684 de l'*Acta Eruditorum*, Leibniz havia analitzat aquest problema considerant dos medis de diferent densitat, separats per una recta, mentre que Bernoulli considera diferents velocitats segons el medi. Arriba a la mateixa expressió (1) de Bernoulli (llevat notació), que diferencia i iguala a zero, sense donar l'equació (2).

Aleshores, Leibniz aplica tot això a l'Òptica. Si considerem el cas de la refracció, la distància de *A* a *C* és la mateixa que la de *C* a *E*. Llavors, la densitat del segon medi és a la del primer com *BC* és a *CE*, és a dir, com el sinus de l'angle d'incidència és al sinus de l'angle de refracció.[7]

La forma amb què L'Hôpital resol el problema és notable, doncs traça una circumferència de centre *E*, passant per *C* (igual que Fermat i Descartes).[8] El camí total, *CEF*, el descomposa en *CEH* (*H* sobre la circumferència) i en *HF*. Llavors aplica la llei de la refracció al camí seguit fins a *H*. De fet, el resultat de l'article 56 de l'*Analyse* és conegut com la llei de Snell, que fou el primer que l'enuncià. Va ser demostrat per primer cop per Descartes.

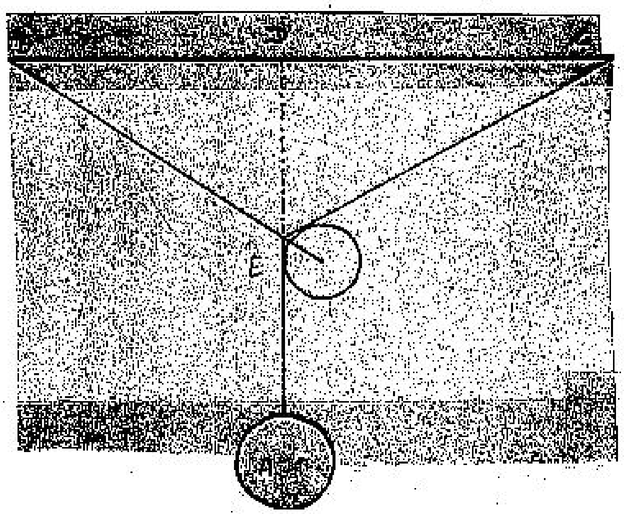
[7] Vegeu G. W. LEIBNIZ, op. cit.

[8] Vegeu R. DESCARTES. *Œuvres, VI: La Dioptrique*, discours II, pp. 93-105; P. FERMAT. *Œuvres, III: Maxima et minima*, pp. 149-156.

SEGONS BERNOULLI

Problema XIX:

Sigui A un pes que penja del fil AC, essent C fix. Aquest fil passa per la politja mòbil E, que està agafada a B (fix). Suposem que ni el fil ni la politja no tenen pes. Quina serà la distància màxima de A a l'horitzontal BC?[9]



Busquem D sobre BC tal que AD sigui màxima.

$$AC=a,\ BC=b,$$

$$BE=c,\ DE=x,$$

$$BD=\sqrt{c^2-x^2},$$

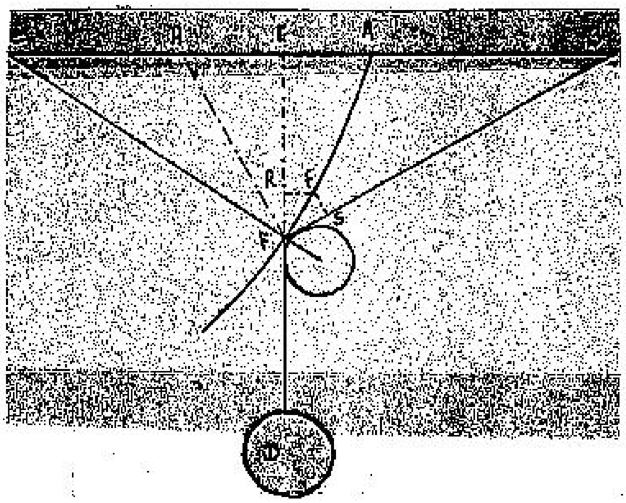
$$DC=b-\sqrt{c^2-x^2}.$$

Així:

SEGONS L'HÔPITAL

Exemple XII (Secció III):

Sigui F una politja que penja lliurement de la corda CF amb un pes D suspès de la corda DFB que passa per damunt de la politja F i està agafada en B. Suposem C i B sobre la mateixa horitzontal. Ni la politja ni la corda no tenen pes. En quin punt el pes D o la politja F s'aturen?



Segons el Principi de la Mecànica, D descendirà el màxim possible per sota de CB. Per tant, DFE ha de ser màxima.

$$CF=a,\quad DFB=b,$$

$$CB=c,\quad CE=x,$$

$$EF=\sqrt{a^2-x^2},$$

[9] És un problema ben curiós, doncs, aparentment, la solució no depèn del pes que penja.

92

$$CE=\sqrt{b^2+c^2-2b\sqrt{c^2-x^2}},$$
$$AE=a-\sqrt{b^2+c^2-2b\sqrt{c^2-x^2}},$$
$$AD=x+a-\sqrt{b^2+c^2-2b\sqrt{c^2-x^2}}.$$

que és l'expressió que hem de fer màxima. Diferenciant-la i igualant-la a zero obtenim:

$$\sqrt{b^2+c^2\text{-}2b\sqrt{c^2\text{-}x^2}}=\frac{bx}{\sqrt{c^2\text{-}x^2}},$$
$$b^2+c^2-2b\sqrt{c^2-x^2}=\frac{b^2x^2}{c^2-x^2},$$
$$b^2+c^2-\frac{b^2x^2}{c^2-x^2}=2b\sqrt{c^2-x^2},$$
$$\frac{b^2c^2-b^2x^2+c^4-c^2x^2-b^2x^2}{c^2-x^2}=$$
$$=\frac{b^2c^2+c^4-c^2x^2-2b^2x^2}{c^2-x^2}.$$

Finalment, el problema es redueix a resoldre la següent equació:

$$4b^2x^6+(4b^4+c^4-8b^2c^2)x^4+$$
$$+(6b^2c^4-2c^6-4b^4c^2)x^2+$$
$$+b^4+c^8-2b^2c^6=0.$$

També considera una altra forma de fer-ho, que és anàloga al primer mètode de L'Hôpital i d'on surt una equació més senzilla (degut a l'elecció de coordenades).

$$FB=\sqrt{(c-x)^2+a^2\text{-}x^2}=\sqrt{a^2+c^2-2cx},$$
$$DFE=b-\sqrt{a^2+c^2-2cx}+\sqrt{a^2-x^2}.$$

que és l'expressió que volem fer màxima. Diferenciant-la i igualant-la a zero obtenim:

$$\frac{cdx}{\sqrt{a^2+c^2-2cx}}-\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=0,$$
$$2cx^3-2c^2x^2-a^2x^2+a^2c^2=0.$$

Dividint per x-c:

$$2c^2-a^2x-a^2c=0.$$

Una de les arrels donarà una $x=CE$ tal que ED (perpendicular) passa per la politja i el pes quan estan en repòs.

<u>D'una altra forma</u>:

$$EF=y,$$
$$BF=z.$$

El que volem fer màxim és: b-z+y.

Per tant, $dz=dy$.

La politja descriu la circumferència de centre C i radi FA. Agafem f infinitament proper a F; sigui fR paral·lel a CB, i fS perpendicular a FB. Així,

$$FR=dy,$$
$$FS=dz,$$

(és a dir, $FR=FS$).

Els triangles rectangles ΔFRf i ΔFSf són iguals i semblants, la qual cosa implica que l'angle $\angle RFf$ és igual a l'angle $\angle SFf$.

Així doncs, F està situat de tal manera sobre la circumferència *FA* que l'angle format per *EF* i la tangent en *F* és igual a l'angle format per *FB* i la tangent en *F*. És a dir:

$$\angle BFC=\angle DFC.$$

Per tant, si dibuixem *FH* tal que:

$$\angle FHC=\angle CFB=\angle CFD,$$

aleshores els triangles ΔCBF i ΔCFH seran semblants; els triangles rectangles ΔECF i ΔEFH seran semblants i:

$$CH=\frac{a^2}{c},$$

$$\frac{HE}{EF}=\frac{x-\frac{a^2}{c}}{y}=\frac{EF}{EC}.$$

D'on podem concloure (aprofitant que el punt es troba sobre la circumferència):

$$x^2-\frac{a^2x}{c}=y^2=a^2-x^2.$$

Ara només cal resoldre aquesta equació.

El primer camí seguit per L'Hôpital coincideix amb el segon de Bernoulli, on les coordenades han estat escollides de manera que l'equació resultant és més senzilla de resoldre que en el primer cas. Es tracta d'igualar a zero la diferència de la quantitat que es vol fer màxima.

A continuació L'Hôpital resol el problema de la següent manera: considera la circumferència descrita per la corda *CF* i treballa amb elements infinitament propers. Aquest camí és, si més no, força original.

7. ESTUDI DELS PUNTS D'INFLEXIÓ

En començar el capítol dedicat als punts d’inflexió, Bernoulli en dóna la següent definició: el punt d'inflexió és aquell que separa les dues curvatures, quan la corba passa de còncava a convexa o viceversa. Aquest punt és al final de la primera i al principi de l'última.

Vegem els tres mètodes de Bernoulli per trobar els punts d’inflexió.

<u>PRIMUS MODUS</u>

Les tangents creixen fins al punt d'inflexió i quan canvia de curvatura comencen a decrèixer. Bernoulli diu que la tangent en el punt d'inflexió és "remotíssima", d'on dedueix que la diferència entre la subtangent (t)[1] i l'abcissa (x) ha de ser màxima. És a dir:

$$x - t = m,$$
$$dx - dt = 0,$$
$$dx = dt.$$

D'aquesta manera sortirà x i, per tant, el punt d'inflexió.

<u>Exemple</u>: Sigui la corba d'equació $ax^2-yx^2-a^2y=0$. Si la diferenciem:

$$2axdx - x^2dy - 2xydx - a^2dy = 0,$$
$$2axdx - 2xydx = x^2dy + a^2dy,$$
$$\frac{2ax - 2yx}{x^2 + a^2} = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{t}.$$

Aprofitant l'equació de la corba:

$$t = \frac{x^2y + a^2y}{2ax - 2yx} = \frac{ax^2}{2ax - 2yx} =$$
$$= \frac{ax}{2a - 2y} = \frac{a^2x + x^3}{2a^2}.$$

Hem de fer màxima l'expressió:

[1] Notem que, en aquest capítol, Bernoulli utilitzarà una t per indicar la subtangent i no s, com havia fet fins ara. Leibniz també farà servir aquesta notació en el seu "Nova methodus pro maximis & minimis,...".

$$x - t = \frac{a^2 x - x^3}{2a^2}.$$

Finalment, diferenciant i igualant a zero resulta l'equació a^2-3x^2=0 i, per tant:

$$x = a\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

METHODUS SECUNDUS

Considerant *dx* constant, en el punt d'inflexió, la corba no és ni convexa ni còncava, és a dir, aquí serà una porció de recta infinitament petita d'on es dedueix que *dy* serà constant. La qual cosa implica que *d*(*dy*) (és a dir, *ddy*) és zero.

Exemple: Considerem la mateixa corba de l'exemple anterior però posant *y* en funció de *x*:

$$y = \frac{ax^2}{a^2 + x^2}.$$

Diferenciant:

$$dy = \frac{2a^3 xdx}{(a^2 + x^2)^2}.$$

(Aquí Bernoulli fa servir un quadradet davant de a^2+x^2).

Diferenciant un altre cop (tenint en compte que *ddx*=0, atés que *dx* és constant) i igualant a zero, obtenim:

$$ddy = \frac{2a^7 dx^2 - 4a^5 x^2 dx^2 - 6a^3 x^4 dx^2}{(a^2 + x^2)^4} = 0.$$

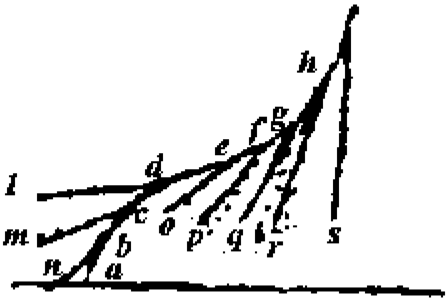
(I aquí Bernoulli utilitza QQ per indicar la potència quarta)

Bernoulli multiplica aquesta expressió per $(a^2+x^2)^4$ i la divideix per $2a^3dx^2$, obtenint l'abcissa del punt d'inflexió com a arrel de a^2-3x^2=0.

Bernoulli observa que tot això funciona tant per a corbes mecàniques com per a geomètriques.

MODUS TERTIUS

Suposem la corba formada per infinites rectes infinitament petites *ab*, *bc*, *cd*... La tangent en el punt *d* és *dc* en *m*. Si la corba exterior és convexa, la tangent *de* és exterior i l'angle $\angle ldm$ és infinitament petit.[2] Si la corba exterior és còncava, la tangent serà interior. Les tangents en punts infinitament propers al punt d'inflexió no són ni exteriors ni interiors. Les podem igualar, obtenint així el punt buscat. Per tant, al punt d'inflexió la tangent coincideix amb la tangent en un punt infinitament proper.



Sigui la corba *ABC*, on *B* és el punt d'inflexió. Des del punt *F* tracem les rectes *FB* i *Fb*, on l'angle $\angle bFB$ és infinitament petit. Tracem *FD* i *Fd* perpendiculars a *FB* i *Fb* respectivament. La tangent *BdD* en *B* és la mateixa que la tangent en *b*.

Siguin arc(*Be*) i arc(*gd*) arcs de centre *F*.

$$FD=Fd=t, \qquad gD=dt,$$
$$FB=Fb=z, \qquad be=dz,$$
$$\mathrm{arc}(Be)=dy.$$

Els sectors *Fgd* i *BeF* són semblants ja que l'angle $\angle BFe$ és igual a l'angle $\angle gFd$. Així:

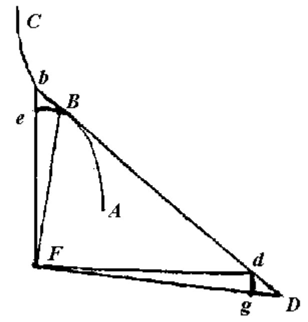
$$\frac{FB}{Fd}=\frac{Be}{gd}\Rightarrow gd=\frac{tdy}{z}.$$

També són semblants ΔbeB i ΔgdD (doncs *D*, *d*, *B*, *b* es troben sobre la mateixa tangent):

$$\frac{be}{Be}=\frac{gd}{gD},$$
$$\frac{dz}{dy}=\frac{\frac{tdy}{z}}{dt}.$$

[2] Per a Fermat, el punt d'inflexió és aquell tal que la tangent amb l'eix d'abcisses forma un angle mínim.

$$\frac{tdy^2}{z} = dzdt = \frac{dy^3}{dz},$$
$$dy^3 = dz^2 dt.$$



Fent servir la definició de tangent.[3]

Notem que *BdD* és la tangent en *B*, que també ho és en *b*.

* * *

L'Hôpital comença per definir les diferencials d'ordre superior (cosa que no fa Bernoulli).

Definició I: la porció infinitament petita que creix o decreix la diferència d'una variable és la diferència de la diferència (o diferència segona). Anàlogament es pot definir la diferència tercera, etc.

Aquesta definició coincideix amb la que ja havia donat Leibniz (encara que de forma no gaire clara) al seu article d'*Acta eruditorum* "Nova methodus pro maximis & minimis,...", el 1684.[4]

La diferència segona és infinitament petita respecte *dy*.

L'Hôpital especifica que *dd*, *ddd*,... serveix per indicar l'ordre de la diferència i que dx^2, dx^3, ddx^2,... indica la potència de la diferència.

Calcula les diferències segones tant en el cas d'ordenades paral·leles com en el cas d'ordenades des d'un punt. Observa que, per calcular la diferència segona, una de les diferències *dx*,

---

[3] És a dir: $\frac{dz}{dy} = \frac{z}{t}$.

[4] Aquesta manca de claredat en les definicions de les diferències d'ordre superior no va donar precisament coherència al simbolisme de les diferències. Per exemple, Johann Bernoulli, en una carta a Leibniz el 1695, escriu:

$$\sqrt[3]{d^6 y} = d^2 y$$
$$\frac{d^3 y}{d^2 x} = d^3 y\, d^{-2} x = d^3 y \int^2 x$$

A més a més, la crítica que va fer Nieuwentijdt (1695-96) es basà precisament en aquesta qüestió.

dy o du ha de ser constant (Corol·laris I i II). A la Proposició I estudia un exemple, primer considerant dx constant i després dy constant.

<u>Definició II</u>: Quan una corba *AFK* és còncava i convexa respecte una recta *AB* o un punt fix *B*, el punt *F* que separa la part còncava de la convexa i que és al final d'una i al principi de l'altra s'anomena d'inflexió, si la corba a partir d'aquest punt segueix el seu camí del mateix costat, i de retrocés, si retrocedeix cap a l'origen.

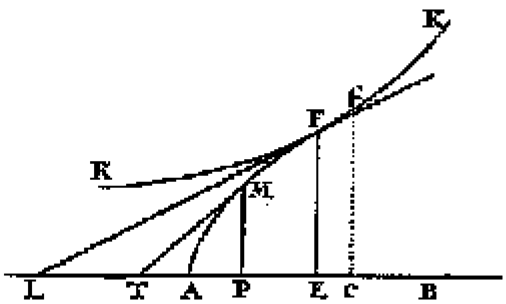
<u>Proposició II</u>: Donada una corba, trobar els seus punts d'inflexió i de retrocés.

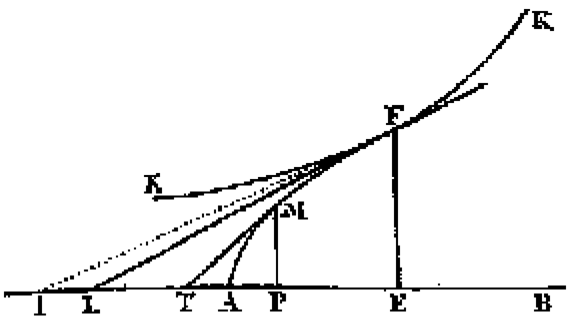
1) Cas punt d'inflexió:

Si *AP* creix contínuament, en aquest cas *AT* va creixent fins al punt d'inflexió, a partir del qual comença a decrèixer. I *AT* serà màxim quan *P* caigui sobre *E* (*AL*).

2) Cas punt de retrocés:

Si *AT* creix contínuament, aleshores *AP* també creix fins que *T* esdevé *L*, on comença a decrèixer. *AP* ha de ser un màxim (*AE*) quan *T* passa a ser *L*.





Aleshores, en general:

$$AE = x,$$
$$EF = y,$$
$$AL = \frac{ydx}{dy} - x.$$

(que és l'expressió que Bernoulli fa màxima en el seu primer mètode).

Diferenciant:

$$\frac{dy^2\,dx\text{-}ydxddy}{dy^2}\text{-}dx=0.$$

Dividint per *dx* (que pren constant) i igualant a zero:

$$\frac{dy^2\text{-}yddy}{dy^2}\text{-}1=\frac{\text{-}yddy}{dy^2}.$$

L'Hôpital dedueix els casos següents:[5]

- Si *ddy*=0, tenim un punt d'inflexió.
- Si *ddy*=∞, tenim un punt de retrocés.[6]

Això, però, no és recíproc. En una carta a Johann Bernoulli (el 7 d'abril de 1694) afirma que hi ha corbes que no canvien la seva curvatura i que, en canvi, verifiquen *ddy*=0.

La definició de L'Hôpital de punt d'inflexió coincideix amb la que dóna Bernoulli. Però aquest no considera el cas dels punts de retrocés en les seves *Lectiones*.[7] Leibniz tampoc no els considera en aquest apartat.

L'Hôpital dóna un segon mètode que coincideix amb el segon de Bernoulli. Considerant *dx* constant, si *y* augmenta llavors *ddy* passa de positiva a negativa en canviar la curvatura (és a dir, al punt d'inflexió o de retrocés). Per tant, *ddy* ha de ser igual a zero o a infinit.

I, finalment, dóna un corol·lari on descriu el tercer mètode de Bernoulli:

- Quan *ddy*=0: Si prenem dues tangents infinitament properes *FL* i *fL* han de coincidir al punt d'inflexió *F*.
- Quan *ddy*=∞: Podem traçar per *F* (punt de retrocés) dues tangents *FL*, *Fl* amb angle entre elles infinitament petit.

L'Hôpital també estudia el cas en què les ordenades parteixen d'un mateix punt, cas que Bernoulli ignora.[8]

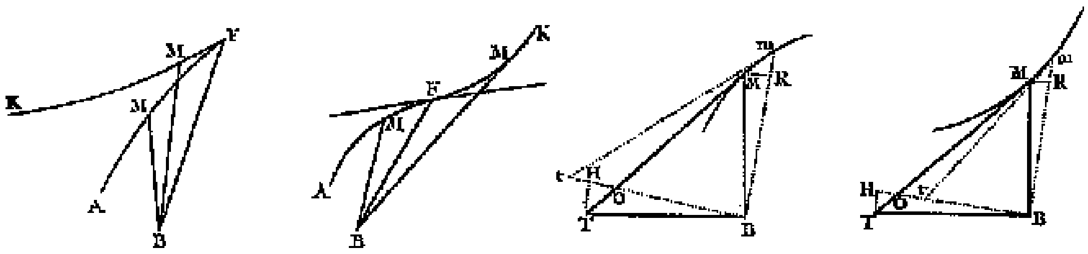
---

[5] L'Hôpital,com també fa Pascal, escull la seva variable independent amb molta cura (vegeu J. L. COOLIDGE. *The Mathematics of Great Amateurs*, p. 156)

[6] Segons Coolidge, L'Hôpital comet l'error següent: si *ddy* és infinitament petita respecte *dy*, aleshores no pot ser mai infinita.

[7] Sí que ho fa, però, en la carta que li envia a L'Hôpital el 22 d'abril de 1694.

[8] En la carta que Bernoulli envia a L'Hôpital el 12 de gener de 1695 li mostra como trobar les diferències segones



Sigui *AFK* una corba les ordenades de la qual són *BM*, *BF*,... des de *B*. Sigui *MT* la tangent corresponent a l'ordenada *BM* i *BT* perpendicular a *BM*. Prenem *m* infinitament proper a *M* amb ordenada *Bm* i tangent *mt*, amb *Bt* perpendicular a *Bm*. La intersecció entre *Bt* i *MT* és el punt *O*.

Suposant que l'ordenada augmenta (quan *BM* passa a ser *Bm*), aleshores *Bt* és major que *BO* a la part còncava i menor que *BO* a la part convexa. Així, al punt d'inflexió (o de retrocés) *F*, *Ot* passa de positiva a negativa. És a dir, *Ot* serà zero al punt *F*.

Tracem des de *B* els arcs arc(*MR*), arc(*TH*). De manera que es formen els triangles semblants ΔmRM, ΔMBT i ΔTHO, i els sectors semblants *BMR* i *BTH*.

Sigui:

$$BM=y, \qquad mR=dy, \qquad MR=dx.$$

De les semblances de triangles i sectors obtenim la següent cadena de proporcions:

$$\frac{mR}{RM}=\frac{BM}{BT}=\frac{MR}{TH}=\frac{TH}{HO},$$

$$\frac{mR}{RM}=\frac{BM}{BT}\Rightarrow BT=\frac{ydx}{dy},$$

$$\frac{BM}{BT}=\frac{MR}{TH}\Rightarrow TH=\frac{dx^2}{dy},$$

$$\frac{MR}{TH}=\frac{TH}{HO}\Rightarrow HO=\frac{dx^3}{dy^2}.$$

Suposem *dx* constant. Si prenem la diferència de *BT*:

$$Bt\text{-}BT=Ht=\frac{dxdy^2\text{-}ydxddy}{dy^2}.$$

Per tant:

$$OH+Ht=Ot=\frac{dx^3+dxdy^2\text{-}ydxddy}{dy^2}.$$

Llavors, multiplicant per dy^2 i dividint per *dx* resulta l'equació:

---

en el cas d'ordenades des d'un punt, procediment idèntic al que apareix en l'article 64 de l'*Analyse*. Val a dir, però, que la idea d'ordenades des d'un punt sembla haver estat suggerida per L'Hôpital en la carta anterior.

$$dx^2 + dy^2 \text{-} yddy = 0\,,$$

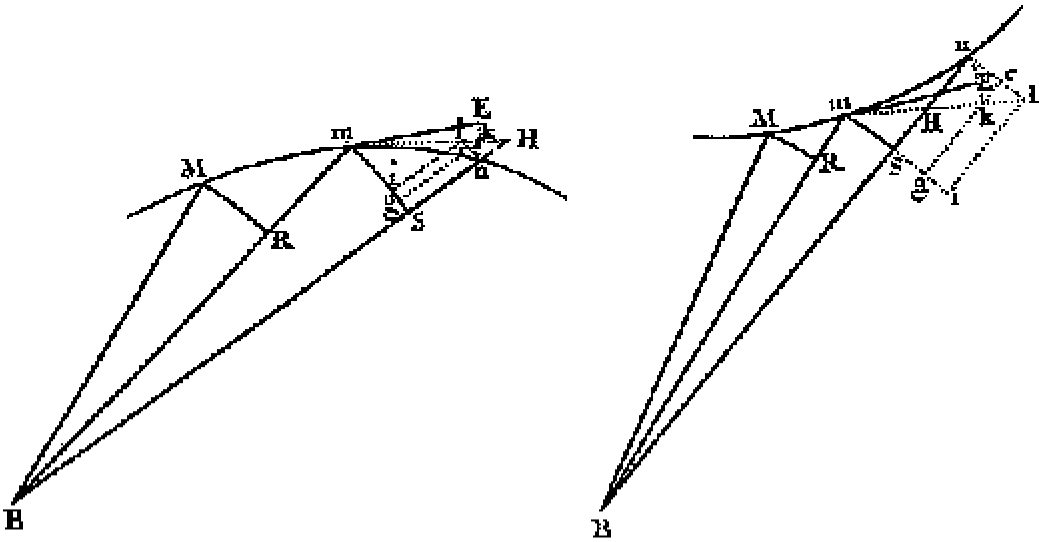
d'on surten els punts d'inflexió.

I l'equació:

$$dx^2 + dy^2 \text{-} yddy = \infty\,,$$

d'on surten els punts de retrocés.

Encara dóna una altra forma de resoldre el problema.



A la part còncava l'angle $\angle BmE$ és més gran que $\angle Bmn$. En canvi, a la part convexa passa al revés. La diferència entre els dos angles és l'angle $\angle Emn$, que és la mesura de l'arc(En), que passarà de positiu a negatiu en el punt F.

Suposem dx constant. Com que els triangles ΔHmS i ΔHnk són semblants i si Bm creix Rm decreix:

$$\frac{Hm}{mS} = \frac{Hn}{nk},$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\text{-}\,ddy}{nk} \Rightarrow nk = -\frac{dxddy}{du}.$$

Com que els sectors BmS i mEk són semblants:

$$\frac{Bm}{mS} = \frac{mE}{Ek},$$
$$\frac{y}{dx} = \frac{du}{Ek} \Rightarrow Ek = \frac{dxdu}{y},$$
$$Ek + kn = \text{arc}(En) = \frac{dxdu^2\text{-}ydxddy}{ydu}.$$

Multiplicant per *ydu* i dividint per *dx*:

$$du^2\text{-}yddy = dx^2 + dy^2\text{-}yddy\ ,$$

que en el punt *F* passa de positiu a negatiu.

Si la *y* tendeix a infinit, dx^2 i dy^2 són nuls respecte *yddy*. Per tant:

$$dx^2 + dy^2\text{-}yddy = 0 \text{ o } \infty\ ,$$

d'on, finalment, resulta que *ddy* ha de ser zero o infinit.

Ara analitzaré un exemple comú a tots dos autors.[9]

[9] Un altre exemple comú és el de l’espiral parabòlica. Bernoulli fa servir el seu primer mètode, mentre que L’Hôpital utilitza la primera manera del cas d’ordenades des d’un punt.

PUNTS D'INFLEXIÓ DE LA CONCOIDE DE NICOMEDES

SEGONS BERNOULLI

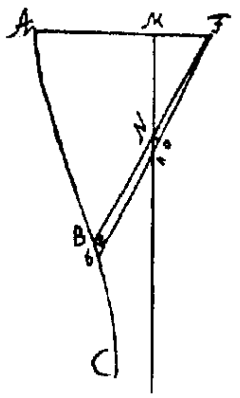
Bernoulli resol aquest problema segons els tres mètodes.

Segons el primer mètode:

$AE=BG=a$, $EF=b$,

$AD=x$, $BD=y$,

$DE=a-x$.



$$\frac{DE}{EF}=\frac{BG}{GF},$$

$$GF=\frac{ab}{a-x},$$

$$GE=\frac{\sqrt{2ab^2x-b^2x^2}}{a-x}.$$

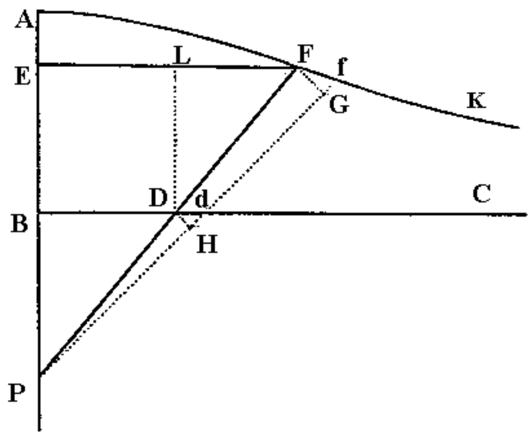
Fent servir semblança de triangles:

$$\frac{GF}{GE}=\frac{BF}{BD},$$

és a dir:

SEGONS L'HÔPITAL

Exemple IV (Secció IV):



S'ha de buscar el punt d'inflexió de la concoide *AFK* de pol *P* i asímptota *BC*. La propietat que caracteritza aquesta corba és que tota recta *PF* (amb *F* un punt de la concoide) talla l'asímptota en un punt *D* tal que *FD* és constant.

Sigui *PA* perpendicular a *BC*, i *FE* paral·lela a *BC*.

$AB=FD=a$, $BP=b$,

$BE=x$, $EF=y$.

Traçant *DL* paral·lela a *AB*, resulta que ΔDLF i ΔPEF són semblants. Per tant:

$$\frac{DL}{LF}=\frac{PE}{EF},$$

$$EF=y=\frac{(b+x)\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

la diferència de la qual és:

$$\frac{ab}{a\text{-}x}=\frac{\sqrt{2ab^2x\text{-}b^2x^2}}{a\text{-}x},$$

$$a\sqrt{2ax\text{-}x^2}=\frac{a^2+ab\text{-}ax}{a\text{-}x}y.$$

Per tant:

$$y=\frac{b}{a\text{-}x}\sqrt{2ax\text{-}x^2}+\sqrt{2ax\text{-}x^2}.$$

Diferenciant:

$$dy=\frac{a^2bdx}{(a^2-2ax+x^2)\sqrt{2ax-x^2}}+$$

$$+\frac{adx\text{-}xdx}{\sqrt{2ax\text{-}x^2}}.$$

Com que

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{t},$$

aleshores:

$$t=\frac{(ab\text{-}bx+a^2\text{-}2ax+x^2)(2ax\text{-}x^2)}{a^2b+(a\text{-}x)^3}$$

(aquí Bernoulli en lloc del cub fa servir un C davant (a-x) i tal com escriu igualtats dins les proporcions pot confondre una mica).

Fent el canvi a-x=z:

$$t=\frac{(bz+z^2)(a^2-z^2)}{a^2b+z^3}=$$

$$=\frac{a^2bz+a^2z^2-bz^3-z^4}{a^2b+z^3}.$$

L'expressió t-x=t-a+z és la que s'ha de fer

$$dy=\frac{x^3dx+a^2bdx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Si fem la diferència d'aquesta quantitat i la igualem a zero, la solució del nostre problema serà una de les arrels de l'equació:

$$x^3+3bx^2-2a^2b=0.$$

Observem que ha fet servir el seu segon mètode.

També resol aquest problema com un cas d'ordenades que parteixen d'un punt, fent servir l'equació:

$$yddy=dx^2+dy^2,\ (*)$$

amb dx constant.

Considerem com a ordenades les rectes PF pel pol P.

Tracem els arcs arc(FG) i arc(DH) amb centre P.

Sigui Pf una ordenada que forma amb PF un angle infinitament petit, $\angle FPf$.

$AB=a$, $BP=b$,

$PF=y$, $PD=z$,

$dz=dH$, $dx=FG$.

Donat que els punts de la concoide verifiquen:

$$y=z+a,$$

aleshores:

$$dy=dz.$$

màxima.

Diferenciant i igualant a zero i, després, multiplicant per $(a^2b+z^3)^2$ i dividint per a^2bdz+a^2zdz, la solució serà arrel de l'equació:

$$2a^2b\text{-}3bz^2\text{-}z^3=0\,.$$

<u>Segons el segon mètode</u>:

Obté *dy* com abans i torna a diferenciar, igualant *ddy* a zero i fent el canvi $z=a\text{-}x$. La solució serà arrel de l'equació:

$$z^3+3bz^2\text{-}2a^2b=0\,.$$

D'aquesta forma el problema es resol més ràpidament.

<u>Segons el tercer mètode</u>:

Si *A* és el vèrtex, *F* el centre i *MN* l'asímptota, quin serà el punt d'inflexió *B*?

La intersecció de *FB* amb l'asímptota és el punt *N*.

$NB=AM=a,\quad FM=b,$

$FB=Fb=z,\quad be=no=dz,$

$Be=dy.$

Sigui *NO* paral·lela a *Be*.

$$FN=z\text{-}a,$$

$$NM=\sqrt{z^2\text{-}2az+a^2\text{-}b^2}\,.$$

ΔNMF i ΔNon són semblants. Per tant:

$$\frac{NM}{MF}=\frac{no}{oN}\,,$$

Δ*DBP* és un triangle rectangle. Per tant:

$$DB=\sqrt{z^2\text{-}b^2}\,.$$

Llavors, tenim els següents parells de triangles semblants:

. Δ*DBP* i Δ*dHD*

. Δ*PDH* i Δ*PFG*

d'on resulta:

$$\frac{DB}{BP}=\frac{dH}{HD}\Rightarrow HD=\frac{bdz}{\sqrt{z^2\text{-}b^2}}\,,$$

$$\frac{PD}{PF}=\frac{HD}{FG}\Rightarrow dz=dy=\frac{zdx\sqrt{z^2\text{-}b^2}}{bz+ab}\,.$$

Ara diferenciem (prenent *dx* constant i substituint *dz* pel seu valor en funció de *y*):

$$ddy=...=\frac{(bz^4+2abz^3\text{-}ab^3z)\,dx^2}{(bz+ab)^3}\,.$$

Aleshores, si substituïm en la fórmula (*) els valors de *y*, *dy* i *ddy*, obtenim l'equació:

$$\frac{(z^4+2az^3\text{-}ab^2z)\,dx^2}{(bz+ab)^2}=$$

$$=\frac{(z^4+2ab^2z+a^2b^2)\,dx^2}{(bz+ab)^2}\,.$$

Operant resulta:

$$2z^3\text{-}3b^2z\text{-}ab^2=0\,.$$

Una de les arrels (*z*) d'aquesta equació més *a* es donarà *PF*.

$$No=\frac{bdz}{\sqrt{z^2-2az+a^2-b^2}},$$

$$\frac{FN}{FB}=\frac{No}{Be},$$

$$Be=\frac{bzdz}{(z-a)\sqrt{z^2-2az+a^2-b^2}}=dy,$$

$$\frac{be}{Be}=\frac{bF}{t},$$

$$t=\frac{bz^2}{(z-a)\sqrt{z^2-2az+a^2-b^2}}.$$

Si z creix, t decreix. Per tant dt quedarà afectada per un signe negatiu.

Utilitzant el resultat vist al tercer mètode:

$$dy^3=dz^2\,dt,$$

resulta l'equació:

$$2az^3-6a^2z^2+6a^3z-3ab^2z-$$
$$-2a^4+2a^2b^2=0,$$

d'on sortirà la solució buscada.

Cal remarcar les diverses maneres que ambdós fan servir per resoldre aquest exemple comú. Mentre que Bernoulli estudia el problema aplicant els seus tres mètodes, L'Hôpital, a més d'utilitzar el seu segon mètode, resol el problema com un cas d'ordenades des d'un punt.

CONCLUSIÓ

Després de la publicació de les *Lectiones* i de la correspondència de Johann Bernoulli, es va conèixer el pacte entre L'Hôpital i Bernoulli i es va veure clarament que l'*Analyse* es basava en les *Lectiones*. Tot i això, no podem dir que els dos textos siguin idèntics. Tampoc les intencions divulgadores dels dos autors no són les mateixes.

Les diferències més notables que he trobat entre els dos autors són:

- la didàctica del text
- l'enfocament dels problemes
- l'elecció de coordenades
- el diferent tractament de les corbes algèbriques i transcendents
- la notació

A més a més, no hem d'oblidar que l'*Analyse* té deu seccions, de les quals només les quatre primeres es corresponen amb les *Lectiones* de Bernoulli.

Didàctica del text

El treball de L'Hôpital està més ben estructurat que les lliçons de Bernoulli. El text del marquès és molt més didàctic, serveix per iniciar-se en el càlcul diferencial, mentre que el de Bernoulli més aviat està dirigit als ja iniciats. Quan és possible, L'Hôpital presenta diverses maneres de resoldre el mateix problema; normalment una d'elles coincideix amb la resolució de Bernoulli (com, per exemple, en el cas del problema sobre la refracció). De fet, l'*Analyse* és el primer tractat sistemàtic del càlcul, que farà que la nova matèria sigui accessible al lector mitjà.

Ja en la primera secció notem aquesta diferència quant a la intenció didàctica. L'Hôpital dedica més temps a definicions i axiomes fonamentals que no pas Johann.

L'estudi de L'Hôpital sobre màxims i mínims és més complet que el de Bernoulli. Mentre que L'Hôpital distingeix els casos diferència nul·la/ diferència infinita, Bernoulli no ho fa en les *Lectiones*, però sí en una carta dirigida a L'Hôpital el 22 d'abril de 1694, on considera el cas de les corbes bicòrnies (és a dir, amb punt de retrocés).

Quant a les diferencials d'ordre superior, L'Hôpital comença per definir-les (seguint la línia de Leibniz i malgrat la seva manca de claredat), mentre que Bernoulli dóna directament la definició de punt d'inflexió. El marquès dedica un apartat al punt de retrocés. En canvi, com ja he dit més amunt, Bernoulli no ho fa en les *Lectiones* sinó en una carta a L'Hôpital.

L'enfocament dels problemes

Mentre que Bernoulli estudia directament problemes concrets, L'Hôpital primer analitza el cas general i després ho aplica a alguns casos particulars, defensant així la idea de càlcul com a mètode d'aplicació general. Per exemple, en la Proposició VI (Secció II) de l'*Analyse*, L'Hôpital calcula la tangent a una corba, coneixent la tangent a una corba auxiliar i la relació entre els segments de recta compresos entre el punt fix de la recta i les interseccions d'aquesta amb les dues corbes. Aquest resultat l'aplica als casos particulars de la hipèrbola, la concoide i la companya del paraboloide de Descartes.

Tot i això, ens trobem amb què la Proposició VIII (Secció II) només l'aplica al cas de la cissoide. No hem d'oblidar, però, que per a ell el que importa és el mètode.

L'elecció de coordenades

Generalment, Bernoulli busca coordenades cartesianes per poder aplicar la fórmula:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{s}$$

encara que no sempre, com en el cas de l'espiral, on utilitza coordenades polars.

Per la seva banda, L'Hôpital busca altres tipus de relacions, segons la naturalesa de la corba estudiada: coordenades des d'un punt[1] (com en el segon mètode utilitzat per trobar els punts d'inflexió de la concoide de Nicomedes), abcisses sobre una corba (com en el cas de la cilcoide), polars (com en el cas de la quadratriu) ... Newton i Pascal ja escollien les seves coordenades amb molta cura i depenent de la corba.

[1] Ja hem vist que Bernoulli considera les coordenades des d'un punt en la seva carta a L'Hôpital el 12 de gener de 1695, però no en les *Lectiones*.

Podem dir que, d'alguna manera, Bernoulli és més actual, mentre que L'Hôpital és més un matemàtic del segle XVII.

El diferent tractament de les corbes algèbriques i transcendents

En general, em sembla més avantatjós el tractament de les corbes algèbriques per part de Bernoulli (especialment la cissoide). En canvi, en el cas de les transcendents (sobretot la cicloide i l'espiral) surt guanyant el mètode de L'Hôpital.

En Bernoulli el que compta essencialment és l'equació $f(x, y) = 0$, que és ben coneguda quan la corba és algèbrica. Quan és transcendent, l'expressió és força més fosca i el problema se li complica.

En L'Hôpital, en canvi, el fet d'ajustar-se a la naturalesa geomètrica de la corba li permet una millor elecció de les coordenades. Obté, aleshores, expressions $f(u, v) = 0$, on u, v són escaients.

La notació

La notació emprada per L'Hôpital és més moderna que la utilitzada per Bernoulli. De fet, és semblant a l'actual, de manera que es pot llegir sense dificultats. Bernoulli encara fa servir símbols com $\square$, C, QQ, etc.

Amb aquest treball també he volgut destacar la figura de L'Hôpital com a autor de llibres de text.[2] Precisament és la manca de tractats elementals sobre el càlcul la raó que impulsa L'Hôpital a publicar l'*Analyse*. Els textos sobre càlcul publicats fins aleshores eren curts i críptics (els articles de Leibniz a *Acta Eruditorum*, la base del mètode de fluxions de Newton en els seus *Principia*,...). El text del marquès és un intent de "normalitzar" la nova matèria.

L'*Analyse* estarà de moda durant tot el segle XVII, serà traduït a l'anglès i al llatí i editat diverses vegades.

[2] Recordem que, a més de l'*Analyse*, també publicà amb èxit el *Traité des sections coniques* (1707).

Hi ha historiadors que creuen que l'únic que va fer L'Hôpital fou "pagar" Bernoulli per poder apropiar-se de les seves lliçons.[3] Però, deixant de banda la controvèrsia originada al voltant de l'*Analyse* i les mancances que pugui tenir l'obra, jo estic d'acord amb l'altre grup d'historiadors, que defensen L'Hôpital tant per haver publicat amb propietat el primer llibre de text sobre càlcul com per les seves aportacions originals.

Agraïments

Vull expressar el meu agraïment al Dr. Josep Pla (Universitat de Barcelona) per haver-me animat a fer aquest treball, tot guiant-me i aconsellant-me.

També m'han estat molt útils els comentaris crítics de l'esborrany que han fet en Carles Dorce (IES Barres i Ones, Badalona) i na Marta Ginovart (Escola Superior d'Agricultura de Barcelona), així com també les seves aportacions.

Finalment, vull agrair al Seminari d'Història de la Ciència de la Universitat Autònoma de Barcelona el material que m'ha proveït, sense el qual aquest treball no hagués estat possible.

[3] De fet, en el prefaci de l'*Analyse* L'Hôpital només reconeix feblement tot el que deu a Bernoulli.

LLISTA DE SÍMBOLS UTILITZATS

arc( )	Ni Bernoulli ni L'Hôpital no fan servir una notació especial per a l'arc. Com a molt, ho indiquen dins el text.
y^2	Per indicar la potència quadrada ells utilitzen la notació de l'època: *yy*.
Δ	Quan treballen amb triangles ho indiquen dins el text, sense cap notació especial.
$\angle$	Quan treballen amb angles ho indiquen també dins el text, sense cap notació especial.
ddy	En aquest cas he mantingut la notació utilitzada per ambdós autors a l'hora de treballar amb diferencials d'ordre superior.
dy^n	D'aquesta manera els autors estudiats noten la potència *n*-èsima de *dy*.

BIBLIOGRAFIA

ADAM, Charles, TANNERY, Paul (eds.). *Œuvres* de Descartes. L. Cerf, París, 1897-1913 (reeditat per Librairie Philisophique J. Vrin, París, 1982), vol. VI

BARON, Margaret E. *The Origins of the Infinitesimal Calculus*. General Publishing Co., Canadà, 1969 (reeditat per Dover, Nova York, 1987)

BARROW, Isaac. *Lectiones geometricae*. Londres, 1670 (traducció anglesa de J. M. Child, *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow*, The Open Court Publishing Co., Chicago i Londres, 1916)

BERNOULLI, Johann. *Lectiones de calculo differentialium (1691-92)*, ed. P. Schafheitlin, Basilea, 1922

BERNOULLI, Johann. *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli* (*Correspondència de Johann Bernoulli*), ed. O. Spiess, Birkhäuser, Basilea, 1955, vol. I

BOURBAKI, Nicolas. *Éléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Éditeurs des Sciences et des Arts, París, 1969 (traducció castellana de Jesús Hernández, *Elementos de historia de las matemáticas*, Alianza Universidad, Madrid, 1972)

BOYER, Carl B. "The First Calculus Textbooks", *The Mathematics Teacher*, 34, abril 1946, pp. 159-167

BOYER, Carl B. *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, Nova York, 1968 (traducció castellana de Mariano Martínez Pérez, *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, Madrid, 1986)

BOYER, Carl B. *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, Dover Publications, Nova York, 1949

CAJORI, Florian. *A History of Mathematics*, MacMillan, Nova York, 1960

CHILD, J. M. Veure BARROW, Isaac. *Lectiones geometricae*.

COLLETTE, Jean-Paul. *Histoire de mathématiques*, Éditions du Renouveau Pédagogique, Montreal, 1979 (traducció castellana en dos volums d'Alfonso Casal, *Historia de las matemáticas*, Siglo XXI de España Editores, Madrid, 1993)

COOLIDGE, Julian Lowell. "Guillaume L'Hospital, Marquis de Sainte-Mesme", *The Mathematics of Great Amateurs*, Dover, Nova York, 1963, cap. 12

DESCARTES, René. *Œuvres*. Veure ADAM-TANNERY.

DESCARTES, René. *La Géométrie*, Leiden, 1637 (reeditat per Éditions de l'AEFPPI, Nantes, 1984), llibre segon

Dictionary of Scientific Biography (DSB), ed. C. C. Gillispie, Charles Scribner's Sons, Nova York, 1970 (reeditat en vuit volums el 1981)

DOU, Albert. *Leonhard Euler. Método de máximos y mínimos*, Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona i Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 1993

EDITIONS DE L'AREFPPI. Veure DESCARTES, René. *La Géométrie*.

EDWARDS, Charles Henry, Jr. *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag, Nova York, 1979

EVES, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*, The Saunders Series, Estats Units, 1992

EVES, Howard. *Great Moments in Mathematics (after 1650)*, The Dolciani Mathematical Expositions, 7, The Mathematical Associations of America, 1981

FAUVEL, John, GRAY, Jeremy (eds.). *The History of Mathematics: a Reader*, MacMillan Press associada amb The Open University, Londres, 1987

FERMAT, Pierre. *Œuvres* , eds. P. Tannery i Ch. Henry, Gauthier-Villars et Fils, París, 1894, vol. III

FONTENELLE, Bernard le Bouyer de. *Histoires et mémoires* de l'Académie des Sciences de París, 1704

GILLISPIE, Charles Coulston. Veure *Dictionary of Scientific Biography*.

GONZÁLEZ URBANEJA, Pedro M. *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*, Alianza Editorial, Madrid, 1992

GOW, James. *A Short History of Greek Mathematics*, Chelsea Publishing Company, Nova York, 1968

GRATTAN-GUINNESS, Isaac. *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910. An Introductory History*, 1980 (traducció castellana de Mariano Martínez Pérez, *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*, Alianza Editorial, Madrid, 1984)

GRAY, Jeremy (ed.). "The Development of the Calculus", *The Seventeenth and Eighteenth Centuries*, The Open University Mathematics/Arts, bloc 3, 1987

HEATH, Sir Thomas L. *A History of Greek Mathematics*, General Publishing Company, Canadà, 1971 (reeditat, en dos volums, per Dover, Nova York, 1981)

KATZ, Victor J. *A History of Mathematics (an Introduction)*, Harper Collins, Nova York, 1993

KLINE, Morris. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, Oxford, 1972 (traducció castellana, en tres volums, de Mariano Martínez, Juan Tarrés i Alfonso Casal, sota la direcció de Jesús Hernández, *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Alianza Editorial, Madrid, 1992)

KNORR, Wilbur R. *The Ancient Tradition of Geometric Problems*, Dover, Nova York, 1986

KUHN, Thomas S. *The Structure of Scientific Revolutions,* University of Chicago Press, 1962 (traducció castellana de Agustín Contín, *La estructura de las revoluciones científicas*, Fondo de Cultura Económica, Madrid,1971)

LEIBNIZ, Gottfried W. "Nova methodus pro maximis & minimis,...", *Acta Eruditorum*, 1684, (traducció castellana de Teresa Martín amb introducció i notes de J. de Lorenzo, *Análisis infinitesimal*, Tecnos, Madrid, 1994)

L'HÔPITAL, Guillaume F. A. *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, París, 1696 (reimpressió feta per ACL-Éditions, París, 1988)

LICK, Dale. "The Remarkable Bernoulli Family", *The Mathematics Teacher*, 62, maig 1969, pp. 401-409

MANCOSU, Paolo. *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*, Oxford University Press, Nova York, 1996

MONTUCLA, Jean E. *Histoire des mathématiques*, chez H. Agasse, París, 1758 (reeditat per Librairie Scientifique et Tecnique Albert Blanchard, París, 1968)

NEWTON, Sir Isaac. *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, 1671 (no publicat en llatí fins al 1779; traducció francesa de Buffon, *La Méthode des fluxions et des suites infinies*, chez Beburé, París, 1740; reeditat per Librairie Scientifique Albert Blanchard, París, 1966)

PLA, Josep. "Arquimedes i Descartes; el mètode com un canvi de llenguatge", *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, vol. XIII, 2, 1998, pp. 35-84

SCHAFHEITLIN, P. (ed.). Veure BERNOULLI, Johann. *Lectiones*.

SMITH, David E. *History of Mathematics*, Dover, Nova York, 1958

SMITH, David E. *A Source Book in Mathematics*, Dover, Nova York, 1959

SPIESS, O.(ed.). Veure BERNOULLI, Johann. *Der Briefwechsel*...

STRUIK, Dirk J. "The Origin of L'Hôpital's Rule", *The Mathematics Teacher*, 55, abril 1963, pp. 257-260

STRUIK, Dirk J. *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*, Princeton University Press, Princeton, 1986

TANNERY, Paul, HENRY, Charles (eds.). Veure FERMAT, Pierre. *Œuvres*

WALKER, Evelyn. *A Study of the Traité des Indivisibles of Roberval*, Columbia University Press, Nova York, 1986

WHITESIDE, D. T. "Patterns of Mathematical Thought in the Later 17th Century", X, *Archive for History of Exact Sciences*, 1, (1960-1962)

WUSSING, Hans, ARNOLD, Wolfgang. *Biographien bedeutender Mathematiker*, Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlín, 1979 (traducció castellana de Mariano Hormigón, *Biografías de grandes matemáticos*, Prensas Universitarias de Zaragoza, Zaragoza, 1989)