LA *PHORONOMIA* (1716) DE JACOB HERMANN (1678 -1733)

ENTRE LA FILOSOFÍA NATURAL Y LA MECÁNICA ANALÍTICA

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN DEL PROGRAMA DE DOCTORADO

"HISTORIA DE LA CIENCIA"

UAB CURSO 2006/2007

LUIS GONZÁLEZ MAZÓN

ÍNDICE

0 INTRODUCCIÓN

La historia de la ciencia está hecha a partir de las grandes figuras. Galileo, Huygens, Newton, Leibniz, Euler, …, constituyen los hitos a partir de los que se traza la evolución de las ideas científicas. Son los que han producido las "mutaciones" conceptuales y metodológicas que permiten "saltar" a un estadio diferente el conocimiento científico, o para decirlo con Patricia Radelet[1], son los personajes que han sabido "anudar" en un discurso organizado los diferentes "hilos" que constituyen los desarrollos de otros autores, creando una nueva forma de ver en un campo del conocimiento.

Hermann no representa ninguna figura principal en la historia de la ciencia, es un personaje secundario. Sin embargo, el estudio de estos "secundarios", nos permite seguir el trazado de algunos de estos "hilos" que constituyen la historia. Nos ayudan a comprender mejor los problemas, los temas, las dificultades de un momento histórico, sin descartar retrospectivamente su trabajo por irrelevante, por no haber llegado a las grandes construcciones que figuran en nuestros textos científicos.

La obra principal de Hermann, la *Phoronomia* (1716), es particularmente interesante, porque es la primera mecánica racional escrita tras los *Principia* (1687). Representa, por tanto, un intento de exposición organizada de la primera ciencia matematizada en la historia de la ciencia, después de la magna obra de Newton. La reciente creación del cálculo diferencial- integral, sobretodo en la versión de Leibniz, estaba produciendo una gran cantidad de nuevos resultados en el estudio de los problemas mecánicos, además de una reelaboración de los resultados conocidos, todo ello mezclado con las polémicas sobre sus fundamentos. En este contexto se escribe la obra de Hermann.

[1] [RADELET-DE GRAVE P. 1998. p. 457] *"Il me semble préférable de parler des continuités parce que je vois les grands progrès chez les auteurs que nouent dans un discours organiséles diffèrents fils qui se présentent à eux. "*

La organización de esta monografía trata de responder a los objetivos siguientes: por un lado dar a conocer los contenidos de la obra, que salvo algunas catas importantes que comentaremos en el primer capítulo, carece de un estudio global. Por otro, proceder a un análisis en relación a la ciencia del momento y en contraste con otros autores, de los siguientes aspectos:

- Métodos: organización de los conocimientos, estructuración y definición de las leyes básicas, tipología de los problemas analizados, relaciones de sus desarrollos teóricos con experiencias prácticas, algoritmos del cálculo diferencial e integral y su uso.
- Conceptos: elaboración explícita e implícita, jerarquía y uso de los mismos en la elaboración de leyes, discusiones en torno a la estructura de la materia.
- Estilo: geometría versus álgebra en el uso del cálculo diferencial e integral.

Veremos fundamentalmente como en la *Phoronomia* se procede a reorganizar y ampliar los conocimientos dispersos acumulados desde la publicación de los *Principia,* dándoles un tratamiento unificado. Se introducen leyes que a modo de algoritmos proporcionan modos genéricos de acceso a los distintos campos de la mecánica. Veremos que esto se hace con una orientación diferente a la emprendidad unos años antes por Varignon, privilegiando un modo de hacer que después se reconocerá como "energético", y que tendrá en Lagrange su máximo exponente.

Agradezco la paciencia y sabiduría de la tutoría del profesor Antoni Malet a lo largo de la elaboración del trabajo, así como los comentarios sugerentes del profesor Marco Panza con ocasión del *workshop,* en el que presenté algunas de las ideas contenidas en esta monografía. El trabajo de amigos como Gabriel Almirante y Paco Gurrea ha sido determinante para acabar de entender el texto latino.

1 HERMANN EN LA HISTORIOGRAFÍA

Tras la publicación en 1684 y 1686 por Leibniz de los dos artículos que se consideran fundadores del cálculo infinitesimal[2], Jacob Bernoulli, desde Basel, junto con su hermano Johann, trece años más joven que él, consiguen asimilar esos textos esquemáticos y en ocasiones deliberadamente oscuros. A partir de 1690, los hermanos Bernoulli y Leibniz comienzan a publicar artículos en *Acta Eruditorum* con aplicaciones del nuevo cálculo a problemas nuevos y a algunos ya resueltos con éxito por otros procedimientos. Johann viaja a París en 1690 donde consigue interesar en los nuevos métodos al marqués de l'Hôpital, quien acuerda con Johann la recepción de lecciones en exclusiva a cambio de una renta entre 1691-92. Fruto de estas enseñanzas, l'Hopital escribe en 1696 el primer tratado en el que se expone con claridad el cálculo infinitesimal[3].

Cercano el final de siglo, se dispone, por un lado, de un buen manual de cálculo diferencial, y por otro de una colección de artículos en los que el cálculo se aplica con éxito a una variedad de problemas cada vez más amplia. En el texto de l'Hôpital la exposición del nuevo cálculo se aplica a problemas puramente matemáticos, tales como el trazado de tangentes de cónicas o espirales. Sin embargo, los artículos de AE tratan también de matemáticas mixtas, en los que el objetivo es aplicar los métodos a curvas que representan movimientos o situaciones estáticas de objetos (son las llamadas curvas mecánicas), y que eran muy difíciles de resolver con los métodos tradicionales.

En este contexto, que caracteriza las preocupaciones matemáticas en la última década del s. XVII, aparece Hermann (Basel 1678-1733) quien, mientras estudia teología en la universidad de su ciudad natal, se forma matemáticamente con

[2] LEIBNIZ, G. W. 1684 y 1686
[3] L'HOPITAL 1696

Bernoulli en los últimos años del siglo. Sobre la biografía de Hermann tenemos los obituarios [Bourguet 1733], [Scheuchzer JJ 1735], [Herzog 1778] y el artículo correspondiente de Dictionary of Scientific Biography (DSB en adelante) [Fellmann 1981].

En 1997 aparece el único libro publicado hasta ahora sobre la figura y la obra de Hermann, *Hermann and the diffusion of the Leibnizian Calculus in Italy* [Mazzone S. y Roero C.S. 1997]. Contiene dos capítulos y un apéndice: a partir de correspondencia y de manuscritos inéditos reproducidos en el apéndice, en el primer capítulo se estudia la estancia de Hermann en Padua (1707-1713), las negociaciones previas a su llegada, su enseñanza privada y pública y un análisis de sus principales obras; en el segundo capítulo se estudia su relación con los estudiosos y matemáticos italianos del momento. Esta monografía está dedicada fundamentalmente a mostrar la influencia de Hermann en la difusión del cálculo diferencial en Italia.

Fritz Nagel ha realizado un catálogo los trabajos escritos de Hermann [Nagel F. 1991], que incluye tres categorías: publicaciones de contenido científico (59 entradas), manuscritos de contenido científico (17 entradas), y publicaciones de contenido no científico (15 entradas). La correspondencia relacionada con Hermann se encuentra en parte en la edición de Gerhardt de los escritos de Leibniz [Gerhardt. C.J. ed. 1859]. Posteriormente Robinet ha publicado la relativa a la introducción de Hermann en la cátedra de Padua [Robinet A. 1991 a]. Mazzone y Roero, en el contexto de sus estudios sobre la introducción del cálculo en Italia, han publicado la correspondencia con Guido Grandi [Mazzone S. y Roero C.S. eds. 1992] y, en el citado texto sobre Hermann [Mazzone S. y Roero C.S. 1997], una amplia correspondencia entre Hermann y otros intelectuales italianos.[4]

Analizaremos el tratamiento dado a la obra y figura de Hermann en la historiografía, tomando como hilo conductor la cronología del personaje.

[4] Estudia en concreto la relación con: M. Fardella, A. Conti, B. Zendrini, J. Riccati, G. Poleni, S. Checoxxi, P. A. Michelotti, D. Guglielmini, V. F. Stancari, G. Manfredi, G. S. Verzaglia, G. Grandi y C. Galiani.

La primera intervención de Hermann, con motivo de su graduación pública como *Master of Arts* en 1696, es para defender la teoría de series de Jacob Bernoulli (Disertación titulada: *Positionum de seriebus infinitis pars tertia,* publicada como apéndice en *Ars Conjectandi* de Jacob Bernoulli en 1713), donde ya incluye el uso explícito del cálculo diferencial e integral.

El nacimiento y desarrollo del cálculo diferencial se hace de forma polémica. Desde su comienzo, quienes lo reciben perciben que el tratamiento de las cantidades infinitamente grandes o pequeñas no está suficientemente claro para eliminar inconsistencias, y que, por lo tanto, su uso es, en sentido lógico, peligroso, ya que puede conducir a resultados erróneos. La pérdida de la evidencia visual que proporcionan los diagramas geométricos provoca inseguridad y hace que algunos críticos recomienden confrontar los nuevos métodos con los de la geometría ordinaria.

Las primeras críticas[5] provienen de Detlef Clüver en un artículo publicado en AE, en fecha tan temprana como 1687, y en la correspondencia con Leibniz. El mismo año La Hire muestra ejemplos del mal uso del nuevo cálculo en la Academia de París. El segundo momento polémico procede del matemático holandés Bernhard Nieuwentijt, buen conocedor del cálculo en sus dos versiones newtoniana y leibniziana, que entre 1694 y 1695 publica dos artículos, *Considerationes primae* y *Analisis Infinitorum,* contestados por Leibniz en su R*esponsio* y *Adendae* de 1695.

No satisfecho con estas respuestas, Nieuwentijt publica sus *Considerationes secundas* en 1696, donde reitera algunas de sus principales críticas. Las ocupaciones de Leibniz le impiden contestar, y es Hermann, en este caso, quien escribe un artículo en 1700 titulado *Responsio ad Cl. Nieuwentijt Consideraciones secundas*[6]. Los

[5] Ver el artículo de Pasini E. *Segni e algoritmo nell'analisi leibniziana* pp. 347-351, en [Panza M. y Roero S. (ed.) 1995].
[6] [Hermann J. 1700]

artículos del holandés y la respuesta de Hermann son analizados en el artículo que ha publicado Palladino [Palladino 1995], en el que se anuncia la edición crítica, en colaboración con R. Gatto, del texto de Hermann junto con el original latino.

La respuesta de Hermann mezcla argumentos usados por Leibniz en su primera respuesta con nuevos ejemplos que ilustran el uso correcto del cálculo. Consta de seis capítulos; en los cinco primeros revisa las objeciones de Nieuwentijt, a saber: los diferenciales pueden despreciarse si se comparan con las cantidades finitas inhomogéneas con ellos, tiene sentido considerar la iteración de la diferencial, es necesario introducir una constante al realizar la sumación como inversa de la diferenciación (muestra como Nieuwentijt llega a resultados ilógicos por no hacerlo así), el infinito admite potencias, y finalmente aplica el cálculo a las escalas exponenciales.

La sexta parte tiene un carácter especial ya que intenta establecer una base axiomática para el cálculo. Retrospectivamente es evidentemente que esto constituye un intento ingenuo en ese momento histórico, tal como se afirma en [Mazzone S. y Roero C.S. 1997; pp. 31], pero indica en qué dirección es impulsada la búsqueda de fundamentos como consecuencia de una polémica en la que Nieuwentijt pide, cartesianamente, claridad lógica.

Según Palladino [Palladino 1995; 414, 423], a finales del siglo XVII se produce un desplazamiento en el valor de verdad que afecta a los fundamentos del cálculo. Para sus defensores: Leibniz, los hermanos Bernoulli y Hermann en el ámbito germánico, y para los franceses L'Hôpital y Varignon, es válido un algoritmo que produce resultados correctos, tal como declara Hermann al final de su *Responsio*, pero para Nieuwentijt, los objetos y sus reglas deben responder a la ideación geométrica tradicional. Palladino [ibid. pp. 403-408] añade un segundo desplazamiento, esta vez ontológico, que habría tenido lugar a lo largo del siglo XVII, producido por la irrupción de nuevos objetos: el vacío y los números imaginarios, y de nuevos métodos:

la formulación de la cinemática galileana, en la que se introducen conceptos de filosofía natural en el formato de la geometría euclidiana. Palladino señala, cómo Leibniz compara los números imaginarios, en tanto "ficciones útiles", con sus diferenciales, ambos sin una representación geométrica fiable en ese momento.

Hermann señala, en una carta a G. Grandi de 1709[7], que no da a su *Responsio* gran valor ya que, aunque los resultados son válidos, fue escrita cuando todavía no había completado su aprendizaje y sin tener experiencia en la escritura de textos científicos. Señala, así mismo, errores en las demostraciones. Por otro lado, Leibniz declara, en una carta a M. Dangicourt de 1716[8], que no está contento con las expresiones de Hermann en su respuesta ni con la de sus otros amigos en relación con las polémicas. Parece evidente que los defensores tampoco están totalmente satisfechos con sus propios argumentos.

En 1700[9], la Academia francesa abre un debate sobre los infinitamente pequeños cuyo principal crítico es Rolle, siendo los defensores Varignon y L'Hôpital. Desde Inglaterra, Berkeley publica sobre 1707-09 un pequeño artículo crítico, *Of Infinities,* y aún, tras casi 30 años de éxitos del cálculo, escribe en 1734 *L'analyste*, donde critica la base inconsistente de los principios del cálculo, argumentando que dan lugar a resultados correctos sólo por compensación de errores. Los esfuerzos para fundamentar sobre base sólida el cálculo diferencial, tendrían que esperar al uso de la derivada como concepto central y, por tanto, a la formalización del concepto de límite en Cauchy[10].

Entre 1701-1702, Hermann emprende un viaje en el que entra en contacto con personas significativas en la creación científica de Holanda, Inglaterra y Francia. Entre 1702 y 1706, Hermann publica trabajos en: AE, *Nouvelles de la Republique des*

[7] La traducción inglesa está en la nota 9 p. 31 de [Mazzone S. Roero C. S. 1997]
[8] El fragmento citado está en la nota 20 p. 402 de [Palladino F. 1995]
[9] Sobre el debate en Francia e Inglaterra ver Blay M 1992 pp. y Blay M. 1986
[10] Se hizo necesario establecer el concepto de función y sobre él, el de la derivada. Sobre la evolución del cálculo desde su invención por Leibniz hasta la formalización, ver [Bos 1974-75]

Lettres y en *Nova Literaria Helvetica*[11], relativos al cálculo del radio del arco iris y al radio del círculo oscilador de curvas. En ellos sigue defiendo el cálculo diferencial, en este caso, contra los ataques de miembros de la Academia francesa.

La cátedra de matemáticas de la universidad de Padua había quedado vacante en 1700 y en años sucesivos se encuentran, impartiendo clases en ella, Ramazzini, Fardella y Guglielmini, tres de los amigos que había hecho Leibniz durante su estancia en Italia entre 1689-90. André Robinet ha reconstruido en su *Iter Italicum* [Robinet A. 1988] la estancia de Leibniz en Italia. Describe cómo Leibniz, al comprobar que los avances matemáticos se habían estancado en las universidades italianas, introduce en el nuevo cálculo a los amigos eruditos que hace durante sus viajes. Éstos se dan cuenta de la importancia de los nuevos métodos y se convierten en sus defensores, pero no se dedican a desarrollarlos. Robinet, en otro de sus textos [Robinet A. 1991 a], ha estudiado a partir de correspondencia inédita, los movimientos y las negociaciones del grupo de Leibniz y de sus amigos italianos para proponer a alguien que pudiera difundir el nuevo cálculo en Italia. En 1704, Fardella[12] advierte a Leibniz de la vacante y éste pide opinión a Johann Bernoulli quien propone a Hermann. Leibniz apoya su candidatura señalando en carta a Fardella que, "Hermann de Basel, que ha publicado un número de artículos sobre el cálculo diferencial (el sublime nuevo método matemático) será quizá la persona adecuada para enseñar matemáticas y difundir el nuevo análisis en su región"[13]. Finalmente, Hermann llega a Padua para hacerse cargo de la cátedra de matemáticas en 1707 y permanece allí, según el contrato firmado, hasta 1713, en que, de nuevo por influencia de Leibniz, se traslada a Francfort-on-the-Oder para ocupar allí la cátedra vacante de matemáticas. El grupo leibniziano conseguirá que el sustituto de Hermann en Padua entre 1716-19 sea

[11] Ver el catálogo de Nagel F. 1991 y los comentarios sobre la significación de esos trabajos en [Mazzone S. Roero C. S. 1997; pp 31-23]

[12] Es interesante señalar, por cuanto pudiera ser motivo de investigación, que M. Fardella se traslada a Barcelona entre 1709-12 acompañando a la corte del rey Carlos III. Declara en correspondencia que una de sus intenciones es enseñar el nuevo cálculo, aprendido de Hermann, en España. Las referencias están en [Mazzone S.y Roero C.S. 1997; pp.104-109]

[13] Traducción mía de la carta de Leibniz a Fardella 12.7.1704 en [Robinet A. 1991a, p.87]

Nicolás I Bernoulli, sobrino de Johann Bernoulli, continuando así la difusión del nuevo cálculo.

La estancia de Hermann en Padua ha sido reconstruida en el primer capítulo de [Mazzone S. y Roero C.S. 1997], a partir de correspondencia y de los manuscritos supervivientes en las bibliotecas de Venecia y Ginebra de algunas de sus conferencias públicas. La citada monografía detalla cómo Hermann decide enseñar el nuevo cálculo en sus clases privadas ya que el nivel existente en la universidad hace que sus alumnos no estén en condiciones de recibirlas. Así mismo, expone y analiza algunos manuscritos de Hermann guardados en Venecia sobre cálculo diferencial e integral. Sus enseñanzas públicas, fijadas por la estructura universitaria, son: el primer año geometría clásica (Euclides completado con Arquímedes) de la que se conservan la lección inaugural, manuscritos de las cuatro conferencias preliminares, y láminas con las ilustraciones usadas en las clases; el segundo año enseña mecánica de la que se conservan manuscritos de algunas lecciones y de notas del curso; de los tres años siguientes, en los que trata de hidráulica, óptica y gnomónica respectivamente, se conservan muy pocos documentos, tan solo las lecciones inaugurales y datos extraídos de la biografía de Antonio Conti, uno de sus alumnos; en el último año, Hermann vuelve a tratar la mecánica tal como indican los *rotuli* de la universidad de Padua. Mazzone – Roero [op. cit. p. 53] concluyen la exposición de las enseñanzas de Hermann afirmando que: "However, we believe that, we may assume that, Hermann had introduced the modern methods and the first rudiments of infinitesimal calculus in his public lectures too". Apoyan esta afirmación citando una carta de Hermann a Johan BERNOULLI de 1709 en la que explica cómo ha expuesto en sus clases un problema relativo a ángulos de contacto para fuerzas centrales, asunto polémico en ese momento y que se maneja usando ampliamente el nuevo cálculo.

Las lecciones en Padua son la base para la escritura del principal trabajo de Hermann, la *Phoronomia* [Hermann J. 1716], impresa como tarde en el verano de 1715, ya que Leibniz recibe una copia a primeros de septiembre de ese año, tal como se indica en

Mazzone – Roero [op. Cit. nota 116. pp. 69]. Según declara en el prólogo[14], Hermann comienza a escribir tras decidir enseñar hidráulica durante su segundo curso en Padua. El libro está terminado en 1712, ya que en dicho año explica en correspondencia cómo está intentando que el libro se imprima primero en Venecia y después en Basel [op. Cit. pp. 80-82]. El objetivo inicial era escribir una obra sobre mecánica de fluidos pero decide comenzar con la mecánica de cuerpos sólidos para hacer, declara en el prólogo citado, más comprensible la obra. Mazzone-Roero, en su monografía sobre Hermann, detallan la distribución del libro entre los amigos italianos de Hermann, destacando la influencia de la obra en Italia. Así mismo, comentan las declaraciones de Hermann en el prólogo y la correspondencia sobre el estilo matemático de la obra y la polémica[15] surgida tras la publicación. Las intenciones de Hermann son meridianamente claras en una carta escrita en 17.8.1709 a Johann Scheuchzer:

> "Ahora estoy totalmente ocupado con la escritura de la Mecánica de fluidos o Hidráulica. En esta obra intentaré demostrar todos los resultados de mayor importancia en el contexto de la Filosofía natural o de las Matemáticas y otros, descubiertos con un método nuevo y evidente, con un método geométrico sin cálculo algebraico, a menos que sea completamente necesario para las expresiones analíticas, de modo que sea comprendido incluso por aquellos que sólo estudiaron demostraciones lineales."[16]

En otra carta dirigida a Leibniz en 28.11.1709[17], declara que el método geométrico hará la obra más comprensible para los italianos poco avezados "… en los misterios del

[14] *Ad Benevolum Lectorem* [Hermann J. 1716]
[15] [Mazzone S.y Roero C.S. 1997 pp. 69-75]
[16] Traducción mía a partir del original latino p. 72 de [Mazzone S.y Roero C.S. 1997] ("Nunc totus occupatus sum in conscribenda Mechanic fluidorum seu Hydraulica, in qua opera omnia in hac maximi momenti Philosophiae naturalis sive Matheseos partis inventa aliaque perspicua et nova methodo demonstrare conabor geometrico more absque algebraicis calculis nisi ubi summa necessitate urgente analiticis expressionibus opus erit, ut ab iis etiam intelligi queat, qui tantum in demonstrationibus linearibus nonnihil studii posuerunt.")
[17] Transcrita en la nota 126 p. 72 de [Mazzone S.y Roero C.S. 1997]

análisis diferencial…". Hermann, en correspondencia analizada por Mazzone – Roero [Ibídem p. 74], declara una segunda razón para elegir un estilo geométrico, y es que, a veces, se obtienen resultados más elegantes y simples que con el método algebraico.

El análisis de la recepción de la obra describe el debate generado por el estilo matemático en que ha sido escrita. Leibniz, que en carta a Johann BERNOULLI de 10.2.1711 se había mostrado comprensivo con el plan de Hermann, declara en la reseña de la obra publicada en AE en 1716 y en cartas a Johann BERNOULLI y Bourge que ha sido demasiado deferente con los ingleses. Johann Bernoulli y Christian Wolf, que son de la misma opinión, añaden que los métodos analíticos, en los que reconocen a Hermann experto, habrían abreviado y hecho menos pesado el texto.

El cálculo diferencial es utilizado solamente en los corolarios de los teoremas principales, pero sin que el autor exponga los algoritmos en los que se basa. En relación al cálculo integral, se da la traducción inglesa de la exposición que hace Hermann de su versión del teorema principal del cálculo integral, junto con los tres ejemplos en los que muestra cómo hacer uso de él para calcular integrales [op. Cit. pp. 77-80].

Anteriormente a la citada monografía sobre Hermann de 1997, la *Phoronomia*, fue objeto de atención en un corto artículo publicado por W. E. Knowles Middleton en 1965 titulado *Hermann and the kinetic theory* [Middleton W. E. 1965]. Middleton presenta la traducción de las dos últimas páginas de la *Phoronomia* previas al apéndice, que constituyen el capítulo XXIV y último de la obra, titulado *De motu intestino fluidorum*. En él Hermann expone, mediante una definición y un teorema, la relación entre el calor y la velocidad cuadrática media de las partículas de un fluido. Middleton destaca que este capítulo de la *Phoronomia* constituye el primer intento de tratar matemáticamente la relación entre calor y movimiento interno del fluido. Además expresa su extrañeza por la ausencia de referencias a Hermann en los textos que tratan del comienzo de la teoría cinética de gases y que siempre lo refieren a la *Hydrodynamica* de Daniel Bernoulli de 1738

C. Truesdell hace una afirmación similar, cuando en 1968 publica sus *Essays in the History of Mechanics* [Truesdell C. 1968]. En la parte correspondiente al siglo XVIII del capítulo titulado "*Early kinetic theories of gases* "[18], y sin referencias a Middleton, Truesdell comienza trazando la historia de la teoría cinética de gases a partir del citado capítulo final de la *Phoronomia*.

Por su interés historiográfico discutiremos este último capítulo del libro de Hermann, en el apartado 5.6 de esta monografía.

Mientras está realizando su docencia en Padua y elaborando su mecánica, Hermann publica en italiano entre 1710 y 1713 cinco artículos en *Giornale de' Letterati d'Italia* (en adelante GLI) sobre las fuerzas centrales, un tema polémico en ese momento porque algunos matemáticos consideran que no ha sido resuelto por Newton en los *Principia.* Estos artículos y la polémica entre Hermann y Verzaglia son analizados en [Mazzone S. 1996] y en [Mazzone S. y Roero C.S. 1997; pp. 100-101]

A comienzos del siglo XVIII los leibnizianos intentan traducir en términos de cálculo diferencial importantes resultados de los *Principia.* Uno de los problemas importantes tratados por Newton es el relativo al estudio de las fuerzas centrales en relación con las leyes de Kepler. Los *Principia* contienen la demostración del problema directo de las fuerzas centrales, a saber: si las órbitas son cónicas entonces la ley de fuerzas es como la inversa del cuadrado de la distancia, pero, en la primera edición de los *Principia,* Newton da por evidente sin demostración la afirmación inversa[19]. Johann Bernoulli, que había llamado la atención de Varignon sobre el llamado problema

---

[18] [TRUESDELL C. 1968. pp. 272-304]

[19] [Newton I. 1687b. Lib. I, Sect. III. Prop. XIII. Corol. I. p. 467.] Newton añadiría un texto explicativo al corolario en la segunda edición de los *Principia* de 1713.

inverso de las fuerzas centrales, le comunica en 1709 que ha resuelto el problema completamente. Su solución se publica en *Memoires* de la Academia de París en 1710.

Hermann, independientemente de Johann BERNOULLI, da la solución analítica del problema inverso, de forma directa y especialmente simple, en el primer artículo del *Giornale* [Hermann J. 1710] [20], sin recurrir, como hace Johann BERNOULLI a radios de curvatura. Johann BERNOULLI critica por carta a Hermann en dos aspectos, ha integrado la ecuación porque ya sabía de antemano el tipo de solución y ha olvidado añadir una constante en la primera integración. Hermann responde dando por carta la sustitución empleada en la integración y publica un artículo en GLI [Hermann J. 1711 b] en el que muestra que una transformación conveniente de coordenadas permite tomar como constante de integración cero. En el número anterior de GLI, Hermann había publicado otro artículo [Hermann J. 1711 a] en el que resolvía el problema más general, propuesto por Johann BERNOULLI en una carta dirigida a él en diciembre de 1710. En este caso el cuerpo se movería en un medio resistente y estaría sometido a dos fuerzas centrales distintas.

Entretanto, Giuseppe Verzaglia, uno de los tres intelectuales italianos que desde Bolonia habían comenzado a estudiar el cálculo leibniziano[21] a principios de siglo, escribe un escrito crítico con Hermann en 1710 [Verzaglia G.S. 1710], indicando cómo la solución del problema inverso se puede hacer usando el teorema XLI de los *Principia* y ciertos procedimientos utilizados por Varignon en un artículo de 1701 publicado en *Mémoires*. El objetivo declarado de Verzaglia, tal como se explica en el artículo de Silvia Mazzone que analiza la polémica, es mostrar que el problema inverso ha sido completamente resuelto por Newton para cualquier fuerza central y que no vale la pena dar el caso particular para fuerzas newtonianas, ya obtenida, por otra parte, por Johann Bernoulli mediante otro procedimiento. Hermann responde con el ya citado segundo artículo publicado en GLI [Hermann J. 1711 a], donde después de

[20] La solución de Hermann de 1710 es expuesta en [Aiton 1989] y [Grugnetti 1992]

[21] La biografía de Verzaglia y el análisis de la controversia con Hermann está tratado en el artículo de [Mazzone S. 1996] de forma monográfica y en el libro [Mazzone S. y Roero C.S. 1997; pp. 217-240 y pp.

dar la solución general, particulariza para fuerzas newtonianas obteniendo cónicas como solución.

En [Mazzone S. y Roero C.S. 1997; pp. 100-101], se describen los últimos artículos de Hermann en GLI[22] y su influencia en la formación analítica de los eruditos italianos. Estos artículos están dedicados a refutar las acusaciones de Verzaglia de superficialidad y paralogismo. Hermann sigue pensando que Newton no ha mostrado cómo a partir de la solución general que supone el teorema XLI, las cónicas son las "únicas" soluciones admisibles, y que su contribución ha sido completar el tratamiento de Newton.

Silvia Mazzone dice en su artículo, que en la *Phoronomia,* Hermann retoma y reelabora analíticamente la demostración de la proposición XLI de los *Principia*. Concluye, diciendo que las soluciones newtoniana y analítica no sólo se diferencian en la simbología empleada ya que "La soluzione newtoniana individua la posizione del mobile sulla trajettoria punto per punto, lascindome in ombra le propietà globali e qualitativa. …… , e le trattazione di Hermann del problema inverso nel vuoto ne è un esempio significativo. (…) Ma el cambiamento di simboli è ricco di conseguenze … "[23]. Es el cambio de lenguaje el que permite un tratamiento global del problema.

Las soluciones al problema inverso de las fuerzas centrales de Johann Bernoulli, Hermann y Varignon se publican juntas en 1710 en *Mèmoires de l'Acadèmie de Paris*. Forman parte, tal como hemos dicho, del proceso nada trivial emprendido por los leibnizianos de aplicar el cálculo a los problemas mecánicos, comenzando por los contenidos en los *Principia*. N. Guicciardini analiza en un artículo [Guicciardini N. 1996] un episodio de este proceso que culminará en los años treinta con Euler: en la *Phoronomia* encontramos la primera demostración usando el cálculo diferencial del teorema de las áreas (para toda fuerza central se cumple que la velocidad areolar es constante) realizada en estilo geométrico, es decir donde se razona a partir de

[22] [Hermann J. 1711 c] y [Hermann J. 1711 d]
[23] [Mazzone S. 1996; pp. 168-169]

valores como pares de puntos en un gráfico. Trataremos estos resultados de Hermann en el marco de la exposición de las leyes mecánicas, en el capítulo 5.2 de esta monografía. La misma demostración, pero esta vez en lenguaje algebraico diferencial, es comunicada por carta a J. Keill y se publica en *Journal Literaire* en 1717. La demostración es significativa ya que todas las pruebas de la ley inversa de las fuerzas centrales se habían basado en ella. El artículo compara las demostraciones de Newton y Hermann y destaca que tras los *Principia*, la ley de las àreas Kepleriana demostrada mediante procedimientos intuitivos de límites en las proposiciones 1 y 2 del Libro I, no se considera firmemente establecida hasta que se hace la prueba analítica. La prueba de Hermann en su forma algebraica se mantiene en la *Mechanica* de Euler de 1736.

Tal como hemos explicado, Hermann acaba la docencia en Padua en 1713 para trasladarse, por influencia de Leibniz, a la cátedra de matemáticas de Frankfurt, donde enseña hasta 1725. En 1724 Pedro el Grande le llama para fundar la Academia Científica de S. Petesburgo. Hermann acepta, viviendo allí entre 1725 y 1731. En 1726 escribe *Oratio de ortu et progressu geometriae*, primera publicación en la historia de la ciencia en Rusia[24]. Siempre echó de menos su tierra y desde su salida para Padua intentó conseguir un puesto universitario en Basel. Finalmente se traslada a su ciudad natal en 1731, dos años antes de morir, para hacerse cargo de la cátedra de ética y ley natural conseguida en 1722.

No hay estudios sobre las publicaciones y escritos de Hermann hechos durante su estancia en Frankfurt o sobre las que hizo desde S. Pertesburgo. Sólo se cita en las biografías como importante, la escritura de los tomos I y III dedicados a matemáticas y fortificación, del libro de texto *Abrégé des mathèmatiques pour l'Usage de sa Majesté Imperiale de toutes les Russies.* El tomo II sobre astronomía y geografía fue escrito por De L'isle[25].

[24] Código del catálogo Nagel Na. 045 [Nagel F. 1991; p.47]
[25] Op. cit. p. 48

La importancia de Hermann como miembro destacado del círculo de los Bernoulli, y por tanto como defensor-difusor-desarrollador de los métodos que puso en marcha Leibniz, se pone de manifiesto en la decisión, por parte los encargados de la edición en marcha de la obra de la familia Bernoulli[26], de publicar en la segunda etapa del proyecto la principal obra de J. Hermann la *Phoronomia*. En la tercera etapa se reunirá la correspondencia.

Podemos decir, a la vista de lo afirmado en este capítulo, que se han estudiado aspectos concretos de la obra de Hermann ligados a polémicas como la del problema inverso de las fuerzas centrales o la fundamentación del cálculo. En los años sesenta se destacó sin mucho éxito su aportación como iniciador de la teoría cinética de gases. También ha sido estudiada su etapa como introductor-difusor del nuevo cálculo en Italia.

A comienzos del siglo XVIII Hermann junto con los Bernoulli y Varignon [Blay M. 1992] están desarrollando una visión analítica de la mecánica newtoniana, pero también tratando de establecer los principios básicos de esa ciencia que pretenden sea deductiva. Por tanto, pensamos que se hace necesario un estudio panorámico de la principal obra de Hermann, la *Phoronomia,* objetivo de este trabajo, que nos muestre de qué modo Hermann intentó dar una visión integrada de la mecánica del momento usando el cálculo diferencial e integral. Desarrollos parciales como los citados llevarían no mucho después a las formulaciones plenamente analíticas de Euler y Lagrange.

[26] *The Bernoulli Edition.* Editor general: D. Speiser. Colaboración entre el *Forschungsstelle Basel* (F. Nagel) y *Unité de Recherches Louvain* (P. Radelet-de Grave). Birkhäuser Verlag AG. Basel-Boston-Berlin..

2 ESTRUCTURA GENERAL Y OBJETIVOS DE LA OBRA ("simple, directo y elegante")

La *Phoronomia*, escrita en latín, consta de 401 páginas más 20 iniciales sin numerar que incluyen: el frontispicio de la portada, los datos del autor, la dedicatoria de la obra a Leibniz, el prefacio *Ad benevolum lectorem*, un poema escrito por Nicolaus Westerman de homenaje al autor y su obra, como era costumbre en la época, y el índice.

La obra está dividida en dos libros: el primero trata sobre los cuerpos sólidos (*de corporibus solidis)* y el segundo sobre los fluidos *(de corporibus fluidis)*. Antes de comenzar el primer libro incluye 5 páginas de "nociones previas" (*Praenotanda).* Tras el último capítulo añade un Apéndice de 23 páginas, y doce páginas adicionales con numeración independiente que contienen 160 ilustraciones.

Sobre la elección de la palabra *Phoronomia* no disponemos de comentarios de Hermann, aunque, podemos suponer la influencia de Leibniz. Éste había escrito, durante su estancia en Italia entre 1689-1690, un proyecto de mecánica titulado *Phoranomus seu Potentia et Legibus naturae* que, según ha estudiado A. Robinet[27], habría sido el germen del manuscrito *Dynamica* escrito al final de su estancia en Italia. Será esta última palabra inventada por Leibniz, la que prevalecerá hasta hoy como "estudio de las causas del movimiento"[28].

Leibniz, tal como explica en carta a M. Foucher en 1690[29], deja en Florencia en manos de su amigo Bodenhusen el manuscrito de la dinámica a la espera de enviarle el final para ser editado. Nunca se publicará porque, afirma Leibniz en la carta citada, cada vez que intenta acabar el trabajo se le ocurren múltiples modificaciones y no tiene tiempo de digerirlas.

La palabra *Phoronomia* está compuesta de dos raíces de origen griego: *phérō* (φέρω) 'llevar' y *nomoi* 'leyes"[30]. Aristóteles en la *Physica*[31] divide el cambio en cuatro categorías: según la esencia, según la cantidad, según la calidad y según el lugar (*kinêsis kata topon)*. Ésta última es la definición que da Aristóteles de *pheromai*. Si entendemos el cambio de lugar como movimiento, podemos concluir dando como significado de *Phoronomia*: leyes de los movimientos.

Todos los resultados del libro, proposiciones, definiciones, lemas, etc., salvo alguna introducción explicativa de algún capítulo y el apéndice, están numerados. Así, la *Phoronomia* consta de 660 resultados. De modo que en esta monografía citaremos

[27] ROBINET A. 1991 b

[28] D'Alembert en el artículo *dynamique* de la *Encyclopédie* declara: "El Sr. Leibniz es el primero que se ha servido de este término para designar la parte más trascendente de la mecánica, que trata del movimiento de los cuerpos, en tanto que causado por fuerzas motrices actual y continuamente actuantes." *Encyclopedie*, Vol. V. p. 174.

[29] Traducción de la carta en [LEIBNIZ G.W. 1991] pp. XI-XII.

[30] Henry George Liddell, Robert Scott, A Greek-English Lexicon. Oxford University Press. 9th Rev edition (July 1, 1996).

[31] Aristóteles. *Physica* (III, 1, 200b26-27)

indicando además de la página el número correspondiente (p. ej. *Phoronomia* p. 369 (nº643).

La estructura de los libros es la siguiente:

El primer libro (124 pp.) está dividido en dos secciones:

- Sección primera: (50 pp.) expone la estática de sólidos rígidos y flexibles; (sobre las solicitaciones y sus direcciones medias aplicadas de cualquier forma en los equilibrios). Está dividida en 3 capítulos:

    - Capítulo I: sobre la proporción entre las Solicitaciones de la gravedad, o peso de los cuerpos, y sus masas.
    - Capítulo II: sobre las solicitaciones y sus direcciones medias aplicadas a cuerpos rígidos o inflexibles.
    - Capítulo III: sobre las formas que los cuerpos flexibles adoptan a partir de las potencias aplicadas, y sobre las direcciones medias de esas potencias.

- Sección segunda: (74 pp.) expone la dinámica de los cuerpos sólidos y consta de 6 capítulos:

    - Capítulo I: sobre las solicitaciones generales aplicadas continuamente y el movimiento que éstas originan.
    - Capítulo II: sobre el movimiento curvo en el vacío para cualquier hipótesis de gravedad variable.
    - Capítulo III: sobre el movimiento de los péndulos; y sobre el movimiento isócrono de cuerpos descendiendo en curvas para cualquier hipótesis de gravedad variable.

- Capítulo IV: sobre las solicitaciones centrales que mantienen moviéndose en las órbitas a los cuerpos, y sobre el movimiento de los ápsides.
- Capítulo V: sobre el movimiento de los péndulos compuestos y su centro de oscilación en cualquier hipótesis de gravedad.
- Capítulo VI: sobre las leyes del movimiento en la colisión de los cuerpos.

El <u>segundo libro</u> (253 pp.) dedicado a los fluidos está dividido en cinco secciones:

- <u>Sección primera:</u> (88 pp.) expone la estática de los fluidos; (sobre la fuerza de los fluidos por la gravedad). Consta de 8 capítulos:

  - Capítulo I: sobre las leyes generales de la gravitación de los Líquidos sobre su base plana.
  - Capítulo II: sobre la gravitación de líquidos en los laterales de recipientes, y sobre la firmeza de tubos requerida para soportar la presión de los líquidos.
  - Capítulo III: sobre el equilibrio de cuerpos sólidos sumergidos total o parcialmente en fluidos.
  - Capítulo IV: sobre las figuras que deben adquirir los cuerpos flexibles bajo algún fluido.
  - Capítulo V: sobre la presión del aire a causa de la gravedad.
  - Capítulo VI: sobre la fuerza elástica del aire.
  - Capítulo VII: sobre la fuerza elástica del aire comparada con su densidad.
  - Capítulo VIII: sobre la densidad del aire en diversos puntos de la atmósfera in todas las posibles hipótesis de elasticidad.

- Sección segunda: (22 pp.) trata del movimiento del agua y consta de 2 capítulos:

    - Capítulo IX: sobre el movimiento de los fluidos que salen por pequeños orificios.
    - Capítulo X: sobre el curso de los ríos.

- Sección tercera: (42 pp.) estudia los efectos de la percusión de los fluidos y consta de 3 capítulos

    - Capítulo XI: sobre los efectos percusivos de los fluidos
    - Capítulo XII: sobre las resistencias de las formas en fluidos en movimiento.
    - Capítulo XIII: sobre las formas que deben adoptar las superficies flexibles expuestos directamente al viento, o sobre la curva Velaria.

- Sección cuarta: (84 pp.) trata del movimiento de cuerpos en medios resistentes y consta de 8 capítulos:

    - Capítulo XIV: teoría general del movimiento de cuerpos en medios resistentes.
    - Capítulo XV: sobre el movimiento de cuerpos que resisten al aire en razón de la velocidad del móvil.
    - Capítulo XVI: sobre el movimiento de cuerpos que resisten al aire en razón duplicada de la velocidad del móvil
    - Capítulo XVII: sobre el movimiento de cuerpos que resisten al aire en parte en razón de la velocidad del móvil y en parte en razón duplicada de la misma velocidad.

- Capítulo XVIII: encontrar métodos para el movimiento de los cuerpos en cualquier medio resistente, y con la densidad variable de cualquier forma.
- Capítulo XIX: sobre el descenso y ascenso de graves por cualquier línea curva, dada una resistencia del medio proporcional al cuadrado de la velocidad.
- Capítulo XX: sobre el movimiento de los proyectiles en el aire, en que el proyectil resiste en razón duplicada de la velocidad, cuando el cuerpo es empujado por la solicitación de la gravedad no hacia algún centro dado con una posición, como hasta ahora solían considerar, dirigido, sino según la dirección de cualquier línea en posición dada
- Capítulo XXI: sobre el movimiento de los navíos impulsados por el viento.

- <u>Sección quinta:</u> (17 pp.) contiene una miscelánea en 3 capítulos:

    - Capítulo XXII: sobre el movimiento circular de fluidos.
    - Capítulo XXIII: sobre la agitación del aire al producir sonido.
    - Capítulo XXIV: sobre el movimiento interno de los fluidos.

Hermann hace una descripción de la obra y de sus intenciones en el prólogo *Ad benevolum lectorem*. Comienza explicando que el origen del proyecto fue su compromiso cuatro años antes de explicar la Hidrostática a los alumnos de la Universidad ("Liceo") de Padua. La atención que Herman dedica a la ciencia de la hidráulica tiene que ver con el interés que la República Veneciana había mostrado por el estudio y control de las aguas. Presentarse como conocedor de la mecánica de las aguas fue siempre importante para ocupar la cátedra de matemáticas de Padua, para el propio Hermann, para sus antecesores (G. Montanari y D. Guglielmini), y para su sustituto, Nicolaus I Bernoulli[32].

[32] Ver correspondencia al respecto en [MAZZONE S. y ROERO C.S. 1997] pp. 70-71

Demuestra conocer el desarrollo de la mecánica de los fluidos a través de la sucinta historia que traza de la hidráulica. Comenzando con Arquímedes pasa a Galileo con el que de nuevo se producen especulaciones de interés. Cita como autores de los sucesivos avances a Torricelli, posteriormente llevados a Francia y mejorados por Pascal, sucesivamente llevados a Inglaterra y ampliados por Boyle. Cita como autores de estudios a Borelli y Mariotte, y los trabajos sobre el movimiento de las aguas de Guglielmini[33]. Finalmente, alaba los resultados más modernos: de Newton sobre el movimiento de cuerpos en medios resistentes; de Varignon mejorando los de Newton y produciendo estudios como el de las clepsidras; y de los hermanos Bernoulli con sus estudios de las formas que adoptan superficies flexibles por la acción de fluidos como el agua o el aire.

A continuación, Hermann explicita de forma elocuente el objetivo principal y la filosofía desde la que ha escrito el libro:

"Pero, como estos extraordinarios hallazgos se hallan dispersos en varios Diarios y otros libros y a veces sacados de diferentes principios, he pensado que lo agradecerán aquellos que se deleitan con estos asuntos, si expongo todo a la luz pública reunido en uno según un orden de principios, deducido y desarrollado desde muy pocos y simples elementos. Pero habiendo entrado apenas en este campo, me he dado cuenta enseguida de que este propósito no lo cumpliré con éxito, me elevo a una mayor altura, y tomo muchas cosas de la Mecánica de cuerpos sólidos, a fin de que los principiantes puedan ir leyendo el opúsculo sin llegar a molestarse, ni sea necesario para su comprensión buscar ayudas en otra parte. Pero como en estos asuntos subsidiarios que hay que explicar, la materia ha crecido tanto que no es fácil decidir qué parte del opúsculo debe incluirse, aparece finalmente el presente tratado, cuyo título general es *Phoronomia*, o *Sobre las fuerzas y movimientos de los cuerpos sólidos y fluidos,* dividido en dos libros, tratando el primero sobre fuerzas y movimientos de cuerpos sólidos, y sobre fluidos el otro."[34]

---

[33] Autor de trabajos sobre hidráulica. Amigo de Leibniz y contacto importante en Italia para conseguir que Hermann ocupe la cátedra. Para una rápida biografía y resumen de los intereses de Guglielmini ver Ibid. Pp. 183-188

[34] "Sed, quia eximia haec inventa in variis Diariis aliisque libris dispersa et ex diversis saepe principiis elicita sunt, gratum est me iis factorum, qui hisce rebus delectantur, existimavi, si omnia juxta genuinum ordinem in unum collecta, ex paucis iisque simplicibus principiis deducta et aucta publicae luci siterem. Verum hunc vix ingressus campum illico perspexi, propositum istud me nunquam feliciter ad exitum

Hermann emprende la tarea de sistematizar la mecánica de fluidos basándola en la de los sólidos a partir de principios simples, reuniendo los resultados dispersos y a menudo demostrados con métodos heterogéneos. Pretende hacer un libro de mecánica autosuficiente y completo. Para apreciar el valor de este proyecto, tenemos que señalar que desde los *Principia* de Newton no se había editado ningún libro importante de mecánica; la *Phoronomia* es el primero, que pretende además, seguir un método deductivo en el que a partir de principios generales se obtengan, entre otros, los resultados ya conocidos.

Seguidamente, da una rápida visión de los temas que tratará, destacando los siguientes resultados del primer libro:

- A partir de dos teoremas generales, "potentes" y "elegantes" obtiene como corolarios las diferentes curvas estáticas: catenaria, velaria y lintearia.
- Estudia los movimientos provocados por la gravedad, incluido el de la isocronía de péndulos, y los generados por colisión; todo de forma suficientemente general para poder encontrar las curvas a partir de las fuerzas.
- Anuncia una nueva teoría de los centros de oscilación usando un principio simplificador que puede resolver distintas situaciones, y reduciendo el péndulo compuesto al simple equivalente.
- Declara que va ha presentar nuevas reglas del movimiento en la percusión de los cuerpos elásticos a partir de un principio sobre centros de gravedad.

Enumera, a continuación, los temas tratados en el segundo libro, insistiendo siempre en que, "para abreviar", ha tratado de establecer teoremas generales a partir de los

---

deducturum, nisi omnia altius repeterem, pluraque ex Mechanica corporum solidorum mutuarer, ad id ut tyrones opusculum citra ossensionem percurrere possent, nec ad ejus intelligentiam auxilia aliunde conquirere necessum haberent. Cum vero in rebus hisce subsidiariis explicandis materia in tantum excreverit, ut non contemnendam opusculi partem constitueret, natus demum est praesens tractatus, quem generaliori titulo *Phoronomia, De Viribus et Motibus Corporum solidorum et fluidorum*, insigniendum et in duos libros dividendum duxi, quorum prior vires et motus corporum solidorum, fluidorum vero alter, evolverer." HERMANN J. 1716 pp. 3 y 4 del prólogo: "Ad benevolum lectorem" que deducir de forma "simple" en los corolarios los casos particulares. En este sentido, resalta que ha establecido primero las leyes de los fluidos heterogéneos para deducir como caso particular las de los homogéneos.

Comenta que, de nuevo en este segundo libro, deduce la forma de las curvas catenaria, velaria, lintearia, etc., en esta ocasión, a partir de una propiedad general de los centros de gravedad. Afirma haber pensado que era el primero en llegar a estos resultados pero que, antes de que su libro apareciera, los ha encontrado en el de Johann Bernoulli: *Essay d'une Theorie de la Manoeuvre des Vaisseaux*[35] que, por otro lado, afirma Hermann, había visto su manuscrito antes de ser editado.

A continuación alaba la "simplicidad" y la "elegancia" como principios que ha tratado de seguir en su exposición. Se dirige, afirma, a los "Geómetras" avezados y también a los "Principiantes". Hermann da a su obra una clara orientación didáctica, motivada por su interés en extender los nuevos métodos en Italia. La *Phoronomia* está salpicada de alusiones a los "*Tyrones*" o Novatos en aquellos puntos en que, estos, debido a su inexperiencia, pueden cometer errores conceptuales. Por ejemplo, en un texto en el que previene contra una mala interpretación de un término recién definido:

"Por otra parte debe enseñarse a los novatos, que las potencias o solicitaciones, que se llaman equipolentes, no deben suponerse por consiguiente como iguales; en efecto tener la misma potencia [aequipolere] y ser iguales no son en Mecánica frases sinónimas."[36]

Declara que ha "preferido" las demostraciones lineales, es decir geométricas, a las algebraicas ya que:

[35] Único libro publicado por Johann Bernoulli. *Essay d'une nouvelle Theorie de la Manoeuvre des Vaisseaux, avec quelques Lettres sur le même Sujet*, Basle 1714, pp.1-144 (UB Basel Ko VI 11) - *Opera* II, pp.1-96.

[36] "Caeterum monendus est tyro, quod potentia vel solicitatio, quae reliquis aequipolere dicitur, ipsis ideo aequalis censenda non sit; etenim aequipolere et aequale esse in Mechanicis non sunt phrases synonimae." [*Phoronomia*. p. 10 (nº36)].

"... la experiencia me ha enseñado que la contemplación de las figuras proporciona abundantemente soluciones y construcciones sumamente más simples y más elegantes que el Análisis especioso. Y digo especioso, para diferenciarlo del análisis geométrico o lineal que opera sin los símbolos algebraicos, del que se obtienen muchas cosas de forma más elegante que con los cálculos analíticos, aunque no siempre."[37]

Declara su gran aprecio por los métodos usados por Euclides, Apolonio, y por los utilizados por Newton en sus *Principia,* pero afirma que usará el método algebraico en la aplicación de los teoremas generales a casos particulares por considerar que es éste el lugar más idóneo.

Hermann destaca además de la simplicidad y la elegancia, el valor visual, la "contemplación" de las figuras, para preferir el método geométrico al algebraico, obtenidas de su propia experiencia.

Finalmente, explica el artefacto geométrico que usará para representar las proporciones entre fuerzas, tiempos, velocidades, etc. Serán unas curvas que llama *Escalas* cuyo uso retrotrae hasta Cavalieri y Viviani. Estas escalas, dice, imitan a los arquitectos que representan modelos en los que las líneas son proporcionales a las obras imaginadas. Destaca de nuevo su valor "visual" en las demostraciones y su "adecuación a los fenómenos" . A lo largo de la monografía dibujamos muchos ejemplos de escalas usasdas por Hermann. Ver por ejemplo la fig. 18 p. 73.

Las escalas son para Hermann curvas que representan "geométricamente" la correspondencia entre dos cantidades variables sin distinción. Tal como iremos mostrando, las utiliza en las demostraciones, combinándolas entre sí para obtener relaciones entre distintas variables o ecuaciones diferenciales.

---

[37] *"..., experientia multiplici edoctum, meditationem figurarum simplissime simpliciores et elegantiores suppeditare solutiones ac consructiones, quam Analysim speciosam. Speciosam dico, nam subinde utor analysi geometrica, seu lineari absque symbolis algebraicis procendente, cujus beneficio multa elegantius obtinentur quam calculis analyticis, etsi non semper." Phoronomia. Praefatio* p. 7.

Como primera obra de mecánica general tras los *Principia*, parece natural comparar la estructura de la *Phoronomia* con esta obra de Newton, que sigue siendo la referencia principal a partir de la que los matemáticos de la época desarrollan su trabajo. Como es bien conocido, los *Principia* comienzan con ocho definiciones en las que Newton delimita los conceptos que considera básicos: cantidad de materia, cantidad de movimiento, *vis insita* (asimilable a nuestra fuerza de inercia), la fuerza centrípeta y sus cantidades absoluta, aceleratriz, y motriz. Podemos ver en la obra de Newton el modelo que sigue Hermann, por cuanto da al comienzo las definiciones que de forma general usará en el transcurso de su obra.

Newton prosigue dando las tres famosas leyes del movimiento, sin embargo, la *Phoronomia* no establece leyes generales al comienzo, sino que las tratará en el contexto de cada una de las ramas en la que divide la mecánica en su obra. A lo largo del trabajo mostraremos de qué modo Hermann elabora lo que considera las leyes de la estática y las del movimiento.

Los *Principia* constan de tres libros, los dos primeros puramente matemáticos sin referencia a los fenómenos físicos. En el primero estudia las fuerzas centrales y en el segundo el movimiento en medios resistentes. El tercer libro aplica los resultados anteriores al sistema del mundo. Newton desarrolla considerablemente el estudio del movimiento y salvo alguna proposición sobre el peso de fluidos no trata problemas estáticos.

Entre 1687 y 1716 se van acumulando resultados y métodos diversos, de forma que Hermann organiza su libro con las dos ramas de la mecánica en proceso de construcción en ese momento: la de los sólidos y la de los fluidos. Ambas tratadas en sus dos aspectos estático y móvil. Da, pues, su visión global y sistemática de la mecánica del momento, lo que constituye ya un mérito de su obra.

Para Hermann lo "simple" y "elegante" tal como repite en múltiples lugares, equivale a demostrar teoremas de alcance muy general para después, en los corolarios, particularizarlos en casos que se relacionan con problemas prácticos concretos.

Hasta aquí hemos presentado lo que el propio Hermann destaca de su obra, las justificaciones que da de los métodos elegidos, lo que considera que son sus aportaciones, sus objetivos y la organización de sus contenidos. En los siguientes capítulos ilustraremos cómo desarrolla estos aspectos, tratando sus dimensiones metodológicas y conceptuales en relación con otros autores de su época. La discusión en torno al uso del cálculo infinitesimal y al estilo será tratada en el apartado 6 de esta monografía.

3 LOS CONCEPTOS BÁSICOS DE LA PHORONOMIA

Como la intención de Hermann es hacer un manual de mecánica, la *Phoronomia* comienza definiendo los términos que se consideran de uso generalizad en la obra. Así, empieza con una serie de 25 nociones previas que titula *De viribus et motibus corporum praenotanda,* en las que se definen los conceptos básicos que se usarán profusamente en la obra: espacio y tiempo, velocidad, fuerza, masa, cuerpo sólido y fluido. Aparte, a lo largo de la obra, introducirá nuevos conceptos cada vez que los necesite para los distintos apartados de la mecánica.

Ya en sus definiciones previas veremos la particular mezcla que hace Hermann de las concepciones mecánicas más influyentes en su época, las de Newton y Leibniz. Asimismo, veremos cómo su definición original de masa inaugura una tradición consistente con la "filosofía mecánica" que se acerca a los actuales intentos por definir el kilogramo patrón a partir de elementos atómicos repetidos, y cómo su vacío se define a partir de negar cualquier influencia mecánica del mismo.

3.1 MOVIMIENTO, ESPACIO Y TIEMPO

Define, como primer concepto, Movimiento absoluto (*Motus),* que es el cambio de contigüidad con respecto al Espacio absoluto infinito e inmóvil, "... *spatii infiniti et immobilis...*", siendo éste último objeto de la segunda definición.

En la definición tres señala como evidente que los cambios de contigüidad tienen que realizarse en la progresión del Tiempo, que es definido en la definición cuatro como: "flujo regular" de un indivisible llamado Momento o instante (*Momentum o instans).* Análogamente a como, dice Hermann, los Geómetras generan un línea por el movimiento del punto, pero con la diferencia de que en el tiempo el movimiento de los instantes es siempre regular.

"Porque, el cambio de contigüidad no puede hacerse sin la progresión del tiempo, implica en efecto que las diversas partes de uno y el mismo cuerpo son contiguas al mismo tiempo, esto es, existen en diversos lugares; por esta razón todo movimiento implica el tiempo"[38]

En el punto cinco explica que la "medida sensible" del tiempo en astronomía sólo da el tiempo "aparente" o "medio" ya que no hay regularidad en el movimiento de los astros. Habla de los relojes precisos desarrollados a partir de las teorías de Huygens, pero que tampoco pueden considerarse medida perfecta del tiempo a causa de las imperfecciones técnicas implicadas ineludiblemente en su construcción.

Las definiciones de Hermann de movimiento, espacio y tiempo absoluto coinciden con las que Newton incluye en el escolio general que acompaña las definiciones iniciales de los *Principia*. Ambos conciben el espacio absoluto como el receptáculo absoluto e independiente de las cosas. El tiempo para Hermann está ligado al movimiento pero

[38] "*Quia, contiguitatis mutatio non nisi tractu temporis fieri potest, implicat enim ut unum idemque corpus simul et eodem tempore diversis spatii partibus contiguum sit, id est, in diversis locis existat; ideo omnis motus tempus involvit*" *Phoronomia* p.1

fluye regular e independientemente de los objetos que se mueven. Newton define el tiempo absoluto sin asociarlo al movimiento.

El escolio general de los *Principia* distingue el espacio y tiempo absoluto del relativo. Este último es para Newton la medida sensible del absoluto. Hermann considera suficiente definir las ideas absolutas, indicando, tal como hace Newton, la dificultad de medir el tiempo absoluto por la irregularidad de los movimientos planetarios y por la imperfección constructiva de los péndulos isócronos que había desarrollado Huygens.

3.2 VELOCIDAD

En el punto seis la *Phoronomia* define Celeridad o Velocidad[39] (*Celeritas vel Velocitas),* para un movimiento uniforme (*uniformi*), como el cociente entre la longitud regularmente recorrida por el cuerpo y el tiempo que fluye siempre de forma regular.

Ni Galileo en su *Discorsi* de 1638 fundador de la "nueva ciencia del movimiento", ni Newton en los *Principia* dan una definición explícita de velocidad. Galileo establece en los axiomas iniciales de la Tercera Jornada[40], las proporciones simples entre espacio, velocidad y tiempo para un movimiento uniforme. Ambos autores se basan en el uso geométrico de velocidad como segmento de longitud variable en la demostración de sus teoremas. Hermann no lo asocia a elementos geométricos en su definición.

Hermann, por un lado, da la definición explícita de velocidad como cociente en un movimiento uniforme, que funciona como concepto general básico en su obra. Por otro lado, Hermann no hace mención de la inhomogeneidad de las magnitudes divididas, problema que impedía en ocasiones avanzar hacia la conceptualización en mecánica.

[39] " Si fluens nostrum punctum, aut etiam corpus quodvis, uniformi passu incedit, perinde ac momentum temporis uniformiter fluere intelligitur, tunc motus puncti vel corporis *aequabilis* vocatur. Et iter seu longitudo, quae etiam spatium vocari solet motu corporis descriptum, ad tractum temporis à fluente momento interea confectum, hoc est, ad tempus lationis applicatum seu divisum *Celeritas* vel *Velocitas*, appellatur. " *Phoronomia. Praenotanda* p. 3

[40] GALILEO G. 1988. pp. 34-35

A partir de la obra de M. Blay *La naissance de la mecanique analitique*[41], sabemos que Varignon había definido la velocidad en un instante como cociente, en una sesión leída en *l'Académie* el 5 de julio de 1698, y que en otra memoria de 1707 escribe que no son propiamente las magnitudes heterogéneas espacio y tiempo las que se comparan en la definición de velocidad, sino las magnitudes homogéneas que las representan. No sabemos si Hermann conoce estas memorias de Varignon previas a su trabajo. Podemos suponer que no, ya que Hermann, tal como iremos viendo, da referencias continuas en su obra a autores relacionados con las materias o problemas que trata. Por otro lado, tal como veremos en el apartado 5.1. (Las leyes generales del movimiento y sus aplicaciones) de esta monografía, Hermann no define "explícitamente" al "velocidad en un instante" como cociente dx:dt, aunque usa esta relación en sus otras variantes, es decir, cuando calcula el tiempo dt=vdx, o la distancia recorrida dx = v:dt. Funciona en Hermann, tal como veremos en la dinámica, como una extensión natural de su definición para movimiento uniforme, en este caso para un fragmento infinitesimal de espacio y de tiempo en el que cabe considerar que el movimiento es uniforme. Así es también en Newton, pero a diferencia de éste, Hermann hace uso explícito de los símbolos algebraicos diferenciales de Leibniz.

En el análisis de la dinámica contenida en la *Phoronomia,* trataremos la conceptualización de las magnitudes instantáneas (velocidad, fuerza), y las compararemos con las elaboradas por Varignon y estudiadas por M. Blay en el citado texto.

3.3 SOLICITACIONES Y FUERZAS

A finales del siglo XVII Newton y Leibniz elaboran simultáneamente dos modelos conceptuales de fuerza. Expondremos un resumen de cada uno de ellos para después compararlos con el propuesto en la *Phoronomia*.

[41] BLAY M. 1992. pp. 152-159

El modelo de Newton está incluido en las definiciones y en las tres leyes que las acompañan al comienzo de los *Principia*. Newton, tras la definición de cantidad de movimiento (mv), define las siguientes fuerzas: *Vis insita (*def. III) o *Vis inertiae* como el poder de resistencia de los cuerpos que les hace perseverar en su estado de reposo o movimiento. Se manifiesta cuando otra fuerza trata de alterar su estado, y es proporcional a su masa. *Vis* impresa (def. IV): la acción ejercida sobre un cuerpo para alterar su estado, y puede ser por impacto, presión o centrípeta. *Vis* centrípeta (def. V): fuerzas dirigidas hacia un centro que apartan de la línea recta a los cuerpos en movimiento. Esta última puede ser medida según tres cantidades: la "absoluta" que depende de la eficacia de la fuerza en su propagación (en el caso del peso depende de la masa del cuerpo, pero en el caso de un imán puede depender de la forma y tamaño)[42], la "acelerativa" proporcional a la velocidad generada en un tiempo dado (equivalente a la aceleración), y la "motriz" proporcional al movimiento (equivalente a la cantidad de movimiento) generado en un tiempo dado (esta fuerza anticipa la segunda ley). En la segunda ley declara que el cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa.

Vemos que Newton define dos tipos fundamentales de fuerza, la interna o inercial del cuerpo, y la impresa o externa, que puede ser de cualquier tipo: impacto (choques), presión (continuamente aplicada) o centrípeta (dirigida hacia un punto).

Sin embargo, como se ha hecho notar en varios estudios[43], Newton define la fuerza impresa de dos formas: en la definición la fuerza motriz se mide por el cambio de movimiento en un tiempo dado [en notación actual (ma)], y en la segunda ley como cambio de movimiento [en notación actual (Δmv)]. La explicación de los estudios citados es que la segunda ley se refiere a fuerzas de impacto que ocurren en tiempos muy pequeños. De hecho, Newton trabaja con la segunda ley considerando la fuerza en intervalos de tiempo iguales.

[42] Ver p. 102 y 104 de la introducción de I.B. Cohen a su edición de los *Principia* [NEWTON I. 1687 b]
[43] HANKINS T. L. 1990. pp. 180-183. y WESTFALL R.S. 1971. pp. 436-438 y 432

Podemos esquematizar el modelo de Newton del siguiente modo:

- Fuerza
  - F. ínsita (inercial) (Interna)
  - F. impresa (Externa) (puede ser)
    - F. impacto
    - F. presión
    - F. centrípeta

Veamos ahora el modelo leibniziano. Leibniz en su crítica de las concepciones de Descartes (*Brevis erroris memorabilis Cartesii.* 1686), distingue entre "fuerza Motriz" y "cantidad de movimiento", declarando que la primera no puede medirse por la segunda. Para Leibniz la cantidad conservada en la naturaleza no es la cartesiana cantidad de movimiento (mv) sino la *vis viva* (mv^2). La posterior discusión da lugar a la conocida "controversia de las fuerzas vivas" que recorrerá el siglo XVIII, hasta que aparezca la distinción entre fuerza y energía, conceptos que permanecían mezclados en la controversia[44].

Podemos tomar su *Specimen Dynamicum*[45] publicado en *Acta Eruditorum* en 1695 como la expresión madura de su ciencia dinámica. En ella Leibniz rechaza por incompleta la concepción cartesiana de la naturaleza como extensión y movimiento. Piensa que debe haber algo más allá del tamaño y la velocidad que le dé al cuerpo capacidad para actuar. Propone el concepto de fuerza como principio que caracteriza la sustancia de las cosas. Leibniz elabora sus conceptos dinámicos en relación con la teoría de la sustancia de su sistema metafísico (escribe su *Discourse on Metaphysics* en 1686), considerando que la extensión no puede ser esencia de nada.

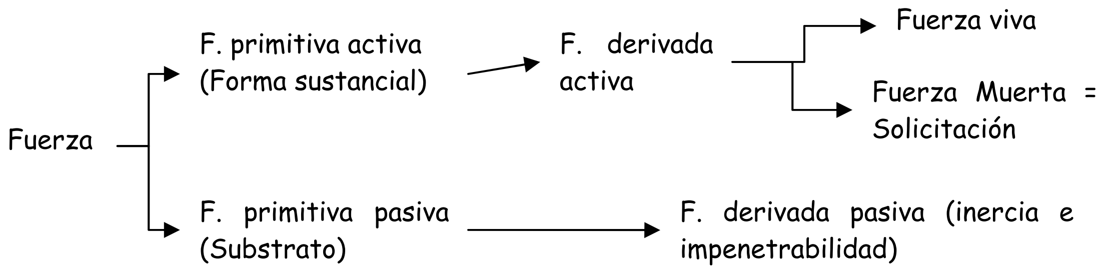
En la obra citada (Ibid. pp. 58-65) expone las distinciones que conviene hacer sobre el concepto de fuerza. Distingue entre fuerza primitiva y derivada; la primera caracteriza a la sustancia o esencia de los cuerpos, mientras que la segunda sería su manifestación fenoménica. Ambas fuerzas primitiva y derivada pueden ser a su vez

[44] Discutiremos la posición de Hermann en esta controversia en el apartado 5.3 de este trabajo
[45] Traducción castellana en LEIBNIZ G.W. 1991. pp. 55-99.

activas o pasivas, según den cuenta de los cambios de movimiento o de la inercia e impenetrabilidad de los cuerpos.

Por último Leibniz divide la fuerza derivada activa en: viva (*vis viva*) "... es la fuerza ordinaria, asociada al movimiento actual." (Ibid. p. 64) y muerta (*vis mortua*) "... una elemental,....., puesto que en ella aún no existe el movimiento sino tan sólo la instigación al mismo." (Ibid. p. 63). Traslada a la dinámica la idea de diferencial de su nueva matemática y considera la fuerza muerta o solicitación como un elemento de fuerza. Al igual que sus diferenciales, no considera, en este texto, a las solicitaciones como realmente existentes sino como artificios matemáticos[46]. Sin embargo las fuerzas tienen para él una realidad substancial. A continuación ofrece como ejemplos de fuerzas vivas la centrifuga y la centrípeta o gravitatoria.

Podemos esquematizar las fuerzas en Leibniz del modo siguiente:



La terminología, clasificación y definiciones que hace Hermann de las fuerzas, están claramente relacionadas con las correspondientes elaboradas por Leibniz, pero con matices importantes.

Hermann define <u>Fuerza motriz</u> (*Vis motrix*), en el punto siete de las *Praenotanda*:

"Esto, que lleva al cuerpo al movimiento, o sea de lo que resulta el movimiento del cuerpo, esto es, dispuesto lo cual se pone en movimiento el cuerpo, se llama Fuerza motriz, que puede dividirse en Viva y Muerta". [47]

---

[46] "De aquí se deduce que es doble el esfuerzo, a saber, elemental o infinitamente pequeño, al que llamo *solicitación*, y el formado por la continuación o repetición de los esfuerzos elementales, esto es, el propio ímpetu, aunque no quiera por ello que estos Entes Matemáticos se encuentren exactamente así en la naturaleza, sino que sirven tan sólo para hacer cuidadosas evaluaciones por abstracción del pensamiento." (Ibid. p. 63)

[47] "Id, quod corpus ad motum concitat, seu ex quo motus corporis resultat, id est quo posito ponitur motus corporis, vocatur *Vis motrix*, quae dividi potest, in *Vivam et Mortuam.* "

Notemos que la fuerza motriz no es la causa que hace "variar" el movimiento de los cuerpos, sino sólo la causa que "inicia" su movimiento.

En las definiciones ocho y nueve define fuerza viva y muerta.

"La *Vis viva* es la que está asociada con el movimiento activo. Así se dice que un cuerpo, que en un tiempo dado avanza una distancia dada, está dotado de fuerza viva"[48]

Notemos que la fuerza viva, se asocia al movimiento pero no a su variación. Para Hermann cualquier cuerpo en movimiento tiene Vis viva. Este punto de vista correspondería a nuestra "energía cinética".

"La *Vis Mortua* sin embargo es, de la que ningún movimiento activo resulta, a no ser que estuviera continuada o repetida durante algún tiempo en le cuerpo. Tal fuerza sería solamente el impulso único de la gravedad no recibiendo ningún otro, y en efecto, el cuerpo sólo se pone en movimiento, después de infinitos golpes de la gravedad indefinidamente repetidos o continuamente sucedidos unos a otros. Así también el esfuerzo centrífugo originado en el movimiento circular, del mismo modo que el impulso de la gravedad, proporciona un ejemplo de fuerza muerta."[49]

Concibe la fuerza muerta (*Vis Mortua*) como un impulso mínimo y único que aún no provoca movimiento. El movimiento (o *vis viva*) surge de la repetición continua de la fuerza muerta. Ejemplos de fuerza muerta serían la gravitatoria y la centrífuga.

En la definición diez declara que para simplificar llamará a la Fuerza Viva simplemente Fuerza (*Vi*), y a la muerta en general Solicitación (*Solicitationem*). Llama

---

HERMANN J. 1716 *Praenotanda* p. 3 (Def. 7)

[48] "*Vis viva* est, quae cum motu actuali conjuncta est. Sic corpus, quod dato tempore datam lineam transmittit, vi viva praeditum est." (Ibid. Def. 8)

[49] "Vis mortua verò est, ex qua nullus motus actualis resultat, nisi aliquamdiu in corpore continuata vel replicata fuerit. Talis vis foret unicus tantum gravitatis impulsus nullis aliis ei cuccedentibus, etenim non, nisi post infinitos demum gravitatis ictus indefinenter replicatos seu unos aliis continue succedentes, motus sensibilis gravi acquiritur. Sic etiam conatus centrifugi ex circulari motu oriundi, perinde ac gravitatis impulsus, sistunt exemplum vis mortuae. " (Ibid. Def. 9)

a todas las fuerzas motrices Fuerzas Activas de los cuerpos, en contraposición con las fuerzas Pasivas (*Vis passiva*) que definirá en el siguiente punto.

Define la Fuerza Pasiva como una resistencia de los cuerpos a cualquier fuerza externa que intente cambiar su estado de movimiento o de reposo. ("... *sed consistit in Renixu illo, quo cuilibet vim externae mutationem status, id est motus vel quietis, corporibus inducere conanti reluctatur.*"). Llama a la fuerza pasiva Fuerza de inercia (*Vis inertiae*), declarando que esta denominación procede de Kepler. Esta fuerza equivale a la *vis insita* que hemos visto define Newton[50].

Destaquemos que en esta definición, Hermann asigna a la fuerza externa la capacidad de cambiar el estatus de reposo o movimiento, mientras que en la definición general sólo tenían capacidad para modificar el reposo. Es claro, tal como veremos en el desarrollo de la dinámica de la *Phoronomia*, que Hermann confiere a las fuerzas la capacidad de cambiar el movimiento además del reposo, aunque su definición al comienzo de la obra mantiene una ambigüedad deudora de las concepciones leibnizianas.

Prosigue explicando que la fuerza de inercia está en los cuerpos quietos y lo argumenta a partir del impacto de un cuerpo móvil A sobre otro en reposo B. Como B se pone en movimiento disminuyendo el de A, significa que el cuerpo parado B tenía alguna Fuerza Pasiva que era necesario vencer por la fuerza del que le impacta A, tal como, dice, está de acuerdo con los fenómenos.

Durante su argumentación Hermann dice "... A perderá algo de su fuerza y movimiento (*vi et motu*) y B ganará algo de fuerza y movimiento a partir de A." (ibid.) Vemos que aquí hace equivalentes fuerza y variación de movimiento ya que al perder o ganar una también lo hace el otro.

---

[50] El grado de originalidad de Newton respecto de los predecesores que usaron esta denominación (Kepler, Descartes, Huygens) está analizado por Cohen en su Introducción a [NEWTON I. 1687 b. pp. 96-101]

Podemos esquematizar las distinciones así:

- Fuerza
  - Fuerza Activa = F. Motriz
    - Fuerza viva = Fuerza
    - Fuerza Muerta = Solicitación
  - Fuerza Pasiva = Fuerza de Inercia

Podemos caracterizar el concepto de fuerza en Hermann del modo siguiente:

- Causa de que un cuerpo cambie su estatus de reposo (o movimiento) (F. motriz = F. activa).
- Es algo que tienen los cuerpos por el hecho de estar en movimiento (F. viva = fuerza).
- Si la fuerza viva se da en un instante no causa aún movimiento (F. muerta = solicitación).
- Es algo que tienen los cuerpos en reposo (F. pasiva).

Para Hermann la fuerza tiene dos características en la definición general de la *Phoronomia*: por un lado es causa del movimiento (fuerza motriz), y por otro, es algo que tiene el propio movimiento (fuerza viva) o el cuerpo en reposo (fuerza de inercia). Es curioso notar que Hermnan, tal como hace Leibniz, cuado usa en los choques la *vis viva* le da otro nombre "fuerza absoluta" (ver apartado 5.3), ditinción verbal que no llega a la disociación conceptual.

De Leibniz conserva: la distinción de entre fuerza instantánea y continuamente aplicada común en la época, y la idea de fuerza como algo inscrito (substancial) en los cuerpos, que a su vez influiría en el encuentro con otros cuerpos. Sin embargo, Hermann, como hacen otros leibnizianos como Johann Bernoulli o Varignon, abandona la distinción entre fuerzas primarias y derivadas, núcleo de la metafísica de Leibniz.

Tal como dice Harman, usar el concepto de vis viva no supone seguir las concepciones metafísicas de Leibniz.[51]

Hermann, de hecho, usará profusamente el término "solicitación" para referirse a las fuerzas en la *Phoronomia* (en la estática identificará "solicitación" con "potencia" para "seguir a los antiguos", nos dirá). Considerará solicitaciones continuamente aplicadas y así serán también fuerzas vivas o simplemente fuerzas. De este modo, en la práctica, se van difuminando las distinciones leibnizianas y newtonianas de fuerza como causa de variación del movimiento- Aunque Hermann, con Leibniz, mantiene una segunda acepción en la que un cuerpo tiene "fuerza viva" por el solo hecho de estar en movimiento. Esta ambigüedad y su discusión durante todo el s. XVIII dará lugar a los conceptos separados de fuerza y energía cinética.

En su acepción de *solicitatio* sigue a Leibniz, quien en 1693 en *Le Journal de Savants* da la siguiente explicación:

"J'appelle sollicitations les efforts infiniment petits ou conatus, par lesquels le mobile est sollicité ou invité, pour ainsi dire, au mouvement, comme est par exemple l'action de la pesanteur, ou de la tendance centrifuge, dont il en faut une infinité pour composer le mouvement ordinaire ... "[52]

Pero Hermann, al igual que Newton y Leibniz, mantiene una fuerza pasiva o inercial, que los tres autores asignan al cuerpo en sí, y que se mostrará inútil cuando se vea la ley de inercia (primera de Newton) como un caso especial de la segunda.

Notemos también que Hermann no hace distinción entre fuerzas por contacto (choques) y a distancia (gravedad), siguiendo en este caso el modelo newtoniano. Esta distinción dará lugar a un debate importante sobre el estatuto de "fuerza", ya que no

[51] Tal como dice F.M. Harman "*..., but the acceptance and use of the vis viva concept by eighteenth scientists did not entail a commitment to Leibniz's natural philosophy.*" [. HARMAN F.M 1993 p.2]
[52] Aparece en la monografía titulada *"Deux problèmes construits par G.W. Leibniz en employant sa règle générale de la composition des mouvements"* citado en n. 130 de [BLAY M. 1992 p. 145]

cabe, dentro de la filosofía mecánico- corpuscular de la época, la acción sin contacto. Hermann no entra en reflexiones sobre fuerzas a distancia en la *Phoronomia*. Recordemos que tanto Leibniz como Huygens critican el carácter "oculto" de la fuerza gravitatoria, reelaborando distintas teorías de vórtices. Sin embargo, Hermann como Varignon mantienen "*a species of agnosticism about underlying physical causes* "[53] posición del propio Newton cuando insiste en el carácter matemático de su obra, que le lleva a declarar en el famoso scolio a la tercera edición de los *Principia*: "*hypotheses non fingo*".

Por ejemplo, cuando Hermann establece la continuidad entre los métodos y los conceptos que le permitán estudiar el movimiento en medios resistentes [*Phoronomia* p. 281 ; nº 484], asimilándolos a los que estableció para solicitaciones centrales, trata con fuerzas que provienen de la composición de las gravitatorias y de las de colisión, considerándolas de la misma forma.

Serán necesarios debates y polémicas como la de las fuerzas vivas, para que a lo largo del siglo XVIII se separaren las dos características citadas de la fuerza en sendos conceptos de "fuerza" y "energía cinética".

Las *praenotanda* continúan con lo que Hermann llama una Ley de la Naturaleza basada en la Fuerza de inercia de la materia: para cualquier acción hay una reacción igual y contraria ("*In hac Vi inertiae materiae fundata est Naturae Lex, qua cuilibet actioni aequalis et contraria est reactio." Praenotanda*. Def. 12)). Esta ley, dice, se deduce de considerar la resistencia que tiene cada cuerpo en la acción mutua, y se basa en el principio de correspondencia entre causa y efecto[54]. Ahora identificamos esta ley como la tercera de Newton, pero durante el siglo XVIII, las tres leyes que figuran en

[53] Para una discusión de las posiciones después de la publicación de los *Principia* ver [GRAY J. (ed.) 1987]

[54] Leibniz establece su "ley de causalidad" como ley de la naturaleza, en su texto de respuesta a Catelan (Nouvelles de la république des lettres, 1687, 9, 131-144). Traducido en LEIBNIZ G.W. 1991 p.

el comienzo de los *Principia*, se consideran leyes naturales ya conocidas, tal como manifiesta el propio Newton[55].

A continuación, Hermann, establece el carácter aditivo de las fuerzas, de modo que "la fuerza de cualquier cuerpo es la que resulta de todas las fuerzas parciales, de las que gozan cada uno de sus elementos o partículas mínimas del cuerpo." Y si estas son de la misma dirección y sentido (*conspirantes*) la fuerza total será su suma.

Los últimos apartados de las *praenotanda* establecen el carácter direccional de las fuerzas y del movimiento, definiendo dirección (*Directio*), igual sentido (*conspirantes*), sentido opuesto (*contrarii*). "*Directio* de cualquier fuerza motriz es la línea hacia la que la fuerza empuja al cuerpo, y es esa recta, producida por esa fuerza la que el móvil describe en su movimiento o bien al menos intenta describir." (*Praenotanda*. Def. 21). "*Vires et Motus conspirantes* son, aquellos en que sus direcciones concuerdan, o son paralelas, y tienden hacia las mismas partes." (*Praenotanda*. Def. 22). "*Vires et motus Contrarii* esto es, directamente opuestos, son aquellas que concuerda, o son paralelas, pero que están vueltas hacia partes opuestas." (*Praenotanda*. Def. 22)

3.4 MATERIA Y VACÍO

Después de tratar los tipos de fuerzas, la *Phoronomia* prosigue definiendo en el punto catorce la Cantidad de materia o Masa (*Quantitas materiae, Massam),* como el agregado de partículas del cuerpo a las que llama Elementos (*Elementa).*

La definición que hace Hermann de masa está dentro de la llamada "filosofía mecánica" de la naturaleza que durante el siglo XVII se había ido estableciendo por parte de los "nuevos filósofos"[56].

[55] "*Hitherto I have laid down such principles as have been received by mathematicians, and are confirmed by abundance of experiment"*. [NEWTON I. 1687 b. p. 150]

Estos luchan por eliminar las cualidades ocultas de los aristotélicos y establecer las causas eficientes que provocan los fenómenos. Combinaban el método experimental con la filosofía natural mecánico-matemática. Descartes, importante promotor de estas nuevas ideas, concibe la naturaleza como un mecanismo de relojería que tiene sus propias leyes de funcionamiento. Los mecanismos tienen que ver con los elementos o partículas que constituyen la materia, sean estos los átomos en el vacío de Gassendi o Boyle, o el *plenum* de partículas de Descartes. La discusión se establece entonces, en cómo concebir esos elementos y sus mecanismos asociados.

Hermann es un seguidor entusiasta del modelo mecánico-corpuscular de la "nueva filosofía" ya ampliamente consensuada en 1716. En noviembre de 1707 escribe una carta a Johann Scheuchzer[57] donde le explica que a su llegada a Padua ha escuchado conferencias públicas de varios oradores; algunos profesando la filosofía escolástica, que opone a la de los *Modernis*. Confiesa que sus bárbaras distinciones le producen dolor de estómago.

La definición de masa se completa aclarando que la posible materia contenida entre los poros no cuenta:

"la materia fluida que puede estar oculta en los intersticios de los cuerpos no pertenece a su masa, del mismo modo que el agua contenida en los poros de las esponjas no pertenece a su masa."[58]

Concibe la materia formada por elementos últimos iguales, pero en el caso en que hubiera que considerar algún fluido entre ellos (el éter cartesiano por ejemplo), éste no contribuiría a la masa. Por el momento se deja en suspenso la decisión sobre la existencia del vacío.

---

[56] [DIJKSTERJHUIS E.J. 1961]
[57] Carta traducida en MAZZONE S. y ROERO C.S. 1997. p. 39
[58] "*Idcirco materia fluida, quae in corporum meatibus latere potest, ad corporis substantiam pertinere non censetur, perinde ac aqua in spongiae poris delitescens ad spongiae substantiam non refertur." Phoronomia* p.4

La primera definición de los *Principia* se refiere a la cantidad de materia que también llama masa o cuerpo, como el producto de la densidad por el volumen. Hermann, sin embargo, fundamenta su definición en los elementos más pequeños de masa, las partículas, que para poder ser agregadas tienen que considerarse iguales.

E. Mach[59] señaló que la definición de Newton es circular ya que la densidad se define a su vez como masa entre volumen, en el corol. IV de la prop. VI del libro III de los *Principia*. En ese mismo corolario, Newton hace una aclaración parcial, que indica que está pensando la masa como agregado de partículas y defiende la existencia del vacío.

"Si todas las partículas sólidas de todo cuerpo son de la misma densidad y no pueden enrarecerse a no ser por sus poros, hay que aceptar un espacio o vacío. Al decir cuerpos de la misma densidad me refiero a aquellos cuyas inercias son proporcionales a sus volúmenes".

Thomas L. Hankins en su obra sobre D'Alembert[60] afirma que: "Hermann took density for the fundamental notion." De este modo emparenta la definición de Hermann con la de Newton. Sin embargo, en la *Phoronomia* se definen, primero la cantidad de materia tal como se ha indicado, después el volumen en la definición quince, como el espacio que ocupa la materia con sus poros, y en la siguiente definición la Densidad (*Densitas*) del siguiente modo:

"*Densitas,* es la razón que hay entre la cantidad de materia en cualquier cuerpo con el volumen del mismo."[61]

La definición prosigue explicando que si variamos la amplitud de los poros en un mismo cuerpo su densidad cambia.

[59] [MACH E. 1949]
[60] HANKINS T. L. 1990 p. 163
[61] "*Densitas*, quae est ratio quam materiae quantitas in quolibet corpore habet ad corporis Volumen." *Phoronomia* p.5

Sin embargo, tanto la crítica de circularidad de Mach de la que se hace eco Hankins, como la opionión de éste último en cuanto a que Newton toma la densidad por fundamental, son rebatidas en el análisis detallado que hace I. Bernard Cohen en la introducción a su edición de los *Principia*[62]. Cohen muestra el anacronismo implícito en las anteriores consideraciones. La definición de masa contenida en los *Principia* como "*orta ex illius densitate et magnitudine conjunctim"* no es una definición al uso como las que le siguen en los *Principia*, ya que éstas comienzan por la partícula "es": p. ej. la cantidad acelerativa de la fuerza centrípeta es …, o un fluido es… Sin embargo el uso del verbo deponente *oriri* indica "surge" o "resulta de" la densidad y el tamaño. Por otro lado, Newton no define densidad, lo que indicaría su consideración como magnitud primaria.

"In the Principia, Newton does not in general determine masses by finding densities and volumen, but by diynamical (inertial and gravitational) considerations." [Ibídem p.91]

Siguiendo el texto citado de T. L. Hankins, encontramos definiciones de masa similares a la que figura en la *Phoronomia,* en la *Mechanica* de Euler (1736), que es el siguiente texto importante de mecánica editado tras el de Hermann:

"*It is necessary to consider the number of points [punctorum] which the body being moved contains and the mass of the body ought to be considered proportional to this number.*"[63]

Así mismo, en el texto de Laplace *Exposition du système du monde:* "*The mass of a body is the sum of its material points*"[64]

Tal como afirma Hankins (Ibid.): "si toda la materia se concibe como uniforme y homogénea, y las diferencias de densidad proceden sólo de los espacios vacíos incluidos en sus volúmenes, la definición de masa aparece como simple, casi obvia." Este es el procedimiento que se encuentra a partir de Hermann y que se prolonga

[62] *A guide to Newton's Principia* [NEWTON I. 1687 b p. 85]
[63] Euleri opera omnia, ser. 2, I, 51. Traducido por Hankins Ibid.
[64] P. S. Laplace *Exposition du système du monde.* 5ª ed. (París 1824) p. 158. Traducido por Hankins. Ibid.

hasta la actualidad. Cita Hankins (ibid. Nota 3 p. 164), un artículo de Scientific American donde se discute cómo el U.S. Natinal Bureau of Standards en 1968, propone la construcción de un prototipo de masa como una estructura que contenga un número concreto de una clase de átomos. Digamos por nuestra parte que éste es uno de los 2 proyectos actualmente en estudio para sustituir el artefacto que representa el kg[65].

Después de definir la densidad a partir de la masa y el volumen, Hermann define la Raridad (*Raritas*) como el inverso de la densidad. Este concepto le será útil para el estudio de la creación de "rarefacción" mediante las máquinas neumáticas, que tratará en la primera sección del Libro II.

Tras estas definiciones obtiene las relaciones mutuas que podemos deducir hoy a partir de la definición de densidad D = M: V.

La lista de nociones previas acaba con las definiciones de cuerpo sólido y de fluido. En los sólidos existe una cohesión tal entre sus elementos, que sólo se mueven si lo hacen todas sus partes. Aclara que el fenómeno, observado por Cassini, del cambio de tamaño de los metales por efecto de la temperatura no contradice en su definición; sólo implica que la cohesión de los cuerpos no es perfecta. En los fluidos las partículas también tienen ligadura en alguna medida, pero ésta no les impide un movimiento interno independiente del externo. La conepción microscópica contenida en la *Phoronomia* se completa al comenzar el libro II relativo a los fluidos. Allí comenta que no investigará las múltiples formas y tamaños que pueden adoptar las partículas o moléculas que forman los cuerpos sino su movimiento no condicionado por sus distintas formas [*Phoronomia.* nº239] .

[65] In one type of experiment, the number of atoms in a weighed quantity of matter is determined (**Avogadro project**, ion accumulation), thus establishing a relationship between the kilogram and an atomic mass. A second class of electro-mechanical experiments (**watt balance**, magnetic levitation) links the kilogram to the Planck constant *h*.
Bureau International des Poids et Mesures [http://www.bipm.fr/en/scientific/elec/watt_balance/]
Ver también: http://www.nist.gov/public_affairs/newsfromnist_beyond_the_kilogram.htm [National Institute of Standards and technology]

El vacío se define explícitamente en la primera definición del cap. I de la secc. II del primer libro dedicada a exponer la dinámica de cuerpos sólidos.

"Designamos vacío a todo medi, que los cuerpos pueden atravesar libremente sin impedimento ni ayuda, …" [*Phoronomia*. p. 51 nº 114][66]

La posibilidad de que en lugar de *vacuum* pudiera haber algún tipo de fluido sutil al modo cartesiano es criticada por Hermann, tal como veremos en el capítulo 4.4.2 sobre "La elasticidad del aire". Allí mostraremos cómo las propiedades conocidas de los fluidos llevan a Hermann a contradecir la teoría de A. Parent, según la cual el movimiento del éter provoca la elasticidad del aire.

Por otro lado hemos citado en este mismo capítulo cómo Hermann define la masa a partir de los corpúsculos eliminando cualquier contribución de materia entre sus poros. La posición de Hermann es clara en la *Phoronomia*; por un lado define el vacío explícitamente, y por otro niega los posibles usos del éter como explicación de propiedades mecánicas.

3.5 RELACIÓN MASA-PESO

La *Phoronomia* se abre con un pequeño capítulo dedicado a demostrar la proporcionalidad entre masa y peso. Hermann declara que esta propiedad ha sido considerada de gran importancia por Filósofos y Geómetras, y ha sido demostrada por Newton a partir de cuidadosos experimentos con péndulos (corol. I de la prop. XXIV L. II de los *Principia*), y por Huygens a partir de leyes del movimiento (*Diatribae De Caussa Gravitatis*). Hermann intentará también su demostración admitiendo como hipótesis que la gravedad es uniforme.

---

[66] "*Per vacuum designatur omne medium, quod corpora absque impemento aut adjumento libere trajicere possunt, …*"

"Permaneciendo igual la cantidad de materia y siendo las direcciones de la gravedad paralelas, o sea convergentes hacia un Centro infinitamente alejado, los pesos de los cuerpos no cambian, cuando varía su forma y su posición respecto del horizonte." [*Phoronomia*. p. 7 (nº27)]

Teniendo en cuenta esta hipótesis, demuestra por reducción al absurdo un lema: "La gravedad, sea cual sea su causa, no sólo actúa en las partes externas del cuerpo sino también en las internas." [*Phoronomia*. p. 7 (nº28)]. Y un corolario que afirma que todos los elementos iguales de los cuerpos reciben iguales impulsos de la gravedad (pesan lo mismo).

Tras lo que demuestra el primer teorema de su obra: "El peso de los cuerpos es proporcional a su cantidad de materia o masa" [*Phoronomia*. p. 7 (nº30)]. Llama C,c a los cuerpos; N, n al número de sus elementos; M, m a sus masas; a cada elemento, e; al peso de cada elemento, i; pC y pc son los pesos de los cuerpos. Demuestra el teorema haciendo proporciones que relacionan el cuerpo con el agregado de elementos:

$$\frac{pC}{pc} = \frac{N\,i}{n\,i} = \frac{N\,e}{n\,e} = \frac{M}{m}$$

En consonancia con su definición de masa, considera que todo cuerpo está compuesto de elementos iguales del mismo peso, y deduce lógicamente que el peso de N elementos es proporcional a su masa, si la gravedad es uniforme.

En los corolarios siguientes define, en forma de igualdad y no de proporción, varios conceptos derivados, que corresponden a magnitudes intensivas[67]:

<u>Solicitación de la gravedad (G) que recibe cada elemento: "*solicitationem qua unum corporis elementum urgetur*"</u>: la define como la que recibe cada elemento del cuerpo.

[67] Se llaman magnitudes intensivas, por oposición a las extensivas, a la que se definen por unidad de espacio, superficie o volumen. Serían intensivas la densidad y la intensidad luminos por ejemplo.

Le sirve para expresar el "peso absoluto" del cuerpo pC como producto de su masa *C* y *G*. (pC = *C*.*G*). *G* equivale al peso por unidad de masa (para nosotros sería *g*, intensidad de la fuerza gravitatoria).

También expresa pC = *G*.D.V ya que M (masa) es D.V (densidad por volumen).
En sus definiciones, Hermann usa como símbolo de masa indistintamente M o simplemente el que representa al cuerpo *C*, en coherencia con su definición de masa.

Gravedad específica (S): equivalente a nuestro peso específico o masa por unidad de volumen. (S=D.*G*, siendo D la densidad).

Hermann indica en el escolio final que demostrará a partir de las leyes del movimiento de graves la proporcionalidad masa-peso, al igual que hizo Newton a partir de la dinámica de péndulos. Comentaremos su demostración en el apartado "Los pesos y las masas son proporcionales" del capítulo 5 de este trabajo.

4 DESDE LA ESTÁTICA DE LOS SÓLIDOS A LA DE LOS FLUIDOS: LA ORGANIZACIÓN DE LA ESTÁTICA

La *Phoronomia* contiene una exposición sistemática de la Estática, que se reconoce como uno de los campos en los que se divide la entonces naciente ciencia de la Mecánica. Veamos en qué sentido es una elaboración original.

Podemos hablar de confección moderna de la estática a partir de la obra de Simon Stevin. Su Estática *The elements of the art of weighing,* y su anexo *The elements of hydrostatics*, aparece primero en flamenco en 1586 aunque es a partir de su traducción al francés en 1634 que se difunde por toda Europa. Es una referencia importante en la elaboración de la ciencia mecánica durante el siglo XVII, ya que en ella, Stevin elabora de forma axiomático-geométrica a la manera de Euclides e inspirándose en Arquímedes, cuestiones no sólo relativas al equilibrio de cuerpos sólidos ejemplificados en las máquinas simples, y a la descomposición de fuerzas, sino que también detalla y amplía la hidrostática arquimediana[68]. Muestra cómo la presión en un líquido sobre una superficie depende de la altura del líquido y del área de la superficie independientemente de la forma del recipiente.

La segunda referencia importante en relación a la elaboración de la estática, en este caso de fluidos, es la obra de Pascal. La expresión más acabada de sus principios se encuentre en sus dos *Traites de l'Equilibre des Liqueurs et de la Pesenteur de la Masse de l'Air* publicados póstumamente en 1663[69].

Durante el s. XVII diversos autores tratan problemas estáticos: así Galileo estudia la forma de una viga sujeta por uno de sus extremos y cargada en el otro con un peso, o la forma de una "cadeneta" sujeta por sus extremos, a la que atribuye erróneamente la forma parabólica.

Wallis escribe su *Mechanica, sive de motu tractatus gometricus* en 1669[70]. En el cap. III (*De libra*) de la primera parte [Ibíd. pp. 570-642] estudia el equilibrio de sistemas discretos de fuerzas, en la segunda parte [Ibíd. pp. 645-938] estudia el cálculo de centros de gravedad, y en la tercera la hidrostática [Ibíd. pp. 1032-1055]. Constituye pues el tratado más completo de estática anterior a la *Phoronomia*. Wallis recoge los resultados de Stevin y Pascal, extendiéndolos al estudio de figuras de revolución (como la recién descubierta cicloide) usando los indivisibles de Cavalieri[71].

Se resuelven en esa época algunos problemas singulares estáticos usando el nuevo cálculo infinitesimal, como los de las curvas catenaria, velaria y lintearia, planteados

---

68 Ver [DUGAS R. 1954 pp. 54-60] y [DIJKSTERJHUIS E.J. 1970. cap. III-IV]
69 Ibid. pp. 203-241
70 [WALLIS JOHN 1972; Vol. I; pp. 570-1073]
71 [MAIERU L. 2001; pp. 246-256]

como retos por Leibniz y por los hermanos Bernoulli[72]. Sin embargo los *Principia* fundan la nueva ciencia de la dinámica pero trata los problemas estáticos de forma anecdótica.

En este contexto aparece la exposición de la Estática contenida en la *Phoronomia*. Hermann procede a una reorganización de los resultados conocidos, completándolos con sus propias aportaciones y demostraciones, que utilizan el cálculo diferencial e integral. El planteamiento general de Hermann es fundar la estática de los fluidos sobre resultados más básicos referidos a estática de sólidos estableciendo una continuidad metodológica y conceptual. En sus palabras:

"Ciertamente, además de que tales principios [de Pascal y otros] son indirectos, estos con o sin dificultad y mediante largos detalles parece que puede aplicarse a los fluidos heterogéneos en la universalidad, con la que hemos deducido en las precedentes proposiciones directamente a partir de sus principios inmediatamente precedentes; preferí insistir en los fundamentos y métodos aplicados sobre las potencias en cada punto de cualquier cuerpo, que expuse en el primer libro, ya que suministra un modo elegante de reducir las presiones de los fluidos heterogéneos a las presiones equivalentes de fluidos homogéneos.."[73]

Hermann organiza la Estática del modo siguiente:

- Estática de <u>sólidos rígidos</u> general, de la que extrae resultados para el caso de cuerpos sumergidos total o parcialmente en fluidos heterogéneos y homogéneos.
- Estática de <u>líneas flexibles</u> general, de la que se obtienen entre otros los casos particulares de las curvas catenaria, lintearia y velaria, tratados así mismo en la estática de fluidos.

[72] En el capítulo 4.2 relativo a la estática flexible se dan más detalles. Ver RADELET-DE GRAVE P. 1998 pp. 469-470 sobre el planteamiento de estos problemas y su resolución.

[73] "Verum, praeterquam quod talia principia indirecta sunt, ea vix ac ne vix quidem absque lingis ambigibus, fluidis heterogenesis appñicari posse videntur in ea universalitate, in qua praecedentes propositiones ex principiis suis proximis directe deduximus; malui methodo et fundamentis circa potentias singulis punctis, cujusque orporis applicatis, quae in primo libro exposuimos, insistere, utpote quae modum non inelegantem subministrarunt pressiones fluidorum heterogeneorum ad aequivalentes pressiones fluidorum homogeneorum reducendi." [*Phoronomia*. p. 157 (nº 297)]

- Hidrostática general en la que establece las leyes básicas para fluidos heterogéneos, y se prolonga con el estudio de la resistencia de tubos llenos de fluido.
- Estudio de la presión del aire.

Trataremos a continuación separadamente cada una, destacando sus características.

4.1 ESTÁTICA DE CUERPOS RÍGIDOS

La estática rígida utiliza un procedimiento que podríamos denominar "progresivo", consistente en extender los resultados básicos para casos sencillos hasta llegar a los más complejos. Esto contrasta, tal como mostraremos, con el tratamiento deductivo de la estática flexible y de la dinámica. Las leyes estáticas requieren saber cómo "sumar" fuerzas en casos progresivamente más complejos, y éste será el objetivo de Hermann.

Muchos problemas en fluidos se refieren al cálculo de la fuerza total a la que está sometido un cuerpo completa o parcialmente sumergido (ver cap. III del libro II de la *Phoronomia*). Esto supone el estudio de sistemas "continuos" de fuerzas para conocer el estado de equilibrio del cuerpo y deducir su posible movimiento. El objetivo de la estática rígida en la *Phoronomia* es, pues, obtener un procedimiento que permita calcular la fuerza resultante sobre un cuerpo sometido a fuerzas en todos sus puntos. Es decir, Hermann construye una estática de "medios continuos" que partiendo del estudio de cuerpos sometidos a sistemas discretos de fuerzas de formas diversas, se extiende a sistemas continuos de fuerzas sobre un objeto extenso tridimensional.

La estrategia general se basará en plantear situaciones de equilibrio usando la igualdad de momentos, tanto para calcular resultantes de fuerzas como para encontrar centros de gravedad. Estrategia que desarrolla en tres direcciones:

- Extendiendo la aplicación de fuerzas sobre una la línea recta hasta líneas curvas cualesquiera.
- Ampliando las dimensiones de estudio hasta llegar a tres.
- Pasando de sistemas de fuerzas discretos a continuos. Paso que requiere el uso del cálculo diferencial e integral. El estilo geométrico preponderante dará lugar en ocasiones al algebraico.

El capitulo II del libro I está dedicado por completo a exponer la estática de cuerpos rígidos. Comienza con las definiciones que caracterizan a las fuerzas como lo que en lenguaje moderno llamamos vectores y da el concepto de fuerzas equipolentes o de igual potencia. La Fig. 2 nos da una idea del tipo de ilustraciones que acompañan las explicaciones de Hermann:

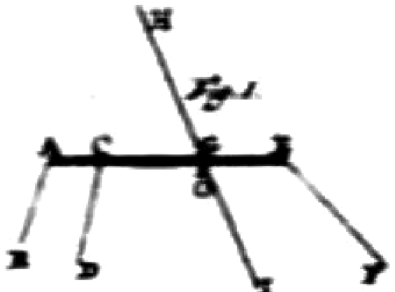


Fig. 2 Ilustración nº 1de la *Phoronomia*

- Las "fuerzas", "solicitaciones" o "potencias"[74] son del género cuantitativo, y por tanto pueden representarse por líneas rectas con dos letras, cuyo orden indica su dirección y cuya longitud es proporcional a su valor.
- Si varias fuerzas están en equilibrio, las que están a un lado del cuerpo se dice que son "equipolentes" (*aequipollere*) a las que caen del otro lado. De este modo define la fuerza equilibrante o resultante de un conjunto.
- La prolongación de la fuerza equipolente de un conjunto se llama "dirección media" o "eje de equilibrio" del conjunto. Y al punto donde se aplica la fuerza equipolente se le llama fulcro (*hypomoclium*) o "centro de equilibrio".

Comienza considerando como axioma que la resultante de fuerzas paralelas es como la suma o la diferencia según tengan el mismo sentido (*conspirantibus*) o no. Para fuerzas no paralelas demuestra como teorema lo que en lenguaje actual llamamos

[74] Ver para una discusión de la terminología aplicada al concepto de fuerza ver el apartado 3.3 de este trabajo.

regla del paralelogramo[75]. La demostración se basa en considerar movimientos en un tiempo muy pequeño (*virtuale*)[76], tal como hace Newton en los *Principia.*[77].

En la proposición IV (ver Fig. 3)[78], Hermann muestra cómo calcular el Centro de Gravedad E (c. de g. en adelante) de un conjunto de masas (A,B,C y D) respecto de dos líneas rectas perpendiculares (PQ, y ad). Utiliza la igualdad de momentos (producto de la magnitud por la distancia a una referencia común) de larga tradición arquimediana. El c. de g. sería el punto cuyo "momento" equivale a la suma de "momentos" de todas las masas. Encuentra el c. de g. como resultado de resolver un problema de equilibrio.

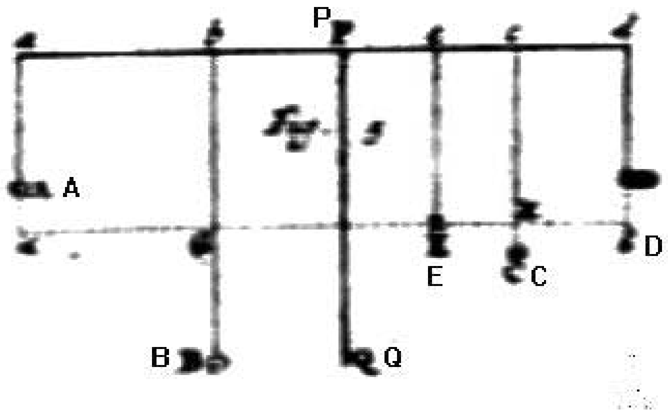


Fig. 3

Hermann traslada el resultado del lema que sirve para calcular c. de g. en el caso discreto, al caso continuo engendrado por revolución de una magnitud cualquiera sobre un eje. Es el llamado teorema de Guldin[79], que Hermann demuestra como escolio I del lema anterior:

"La figura formada por el giro de una magnitud alrededor de un eje dado, es igual al producto de la magnitud generatriz por la circunferencia que tiene por radio la distancia desde el centro de gravedad de la magnitud al eje."[80]

---

[75] La resultante de dos fuerzas no paralelas es la diagonal del paralelogramo formado con ellas. Ver la historia de sus demostraciones en [INDORATO L. NASTASI P. 1991]

[76] usa el término leibniziano *conatus* para referirse a un movimiento infinitesimal)

[77] *Principia* L. I corol. I y II de las leyes del movimiento. [NEWTON I. 1687 b pp. 417-420]

[78] Cuando utilicemos ilustraciones incluidas en la *Phoronomia,* superpondremos a las letras difícilmente legibles del original, sus equivalentes.

[79] Hoy conocemos este teorema como "teorema de Pappus Gulin". Fue formulado por P. Guldin en su *Centrobarica* (1635-1641a, vol. 2, 147). Se encuentra también en el libro VII de las *Colecciones* de Pappus. [I. Grattan-G. 1984. p. 66]

[80] "Figuram ex conversione cujuslibet magnitudinis circa aliquam rectam positione datam oriundam, aequari facto ex Magnitudine generatrice in viam centri ejus gravitatis." [*Phoronomia.* p. 15 (nº47)]

Vamos a ver cómo Hermann aplica de forma simple el álgebra diferencial e integral al comienzo de su obra, haciendo las deducciones en un lenguaje completamente actual, sin referencia a figuras geométricas. El problema es tratado de modo general, ya que considera una magnitud generatriz cualquiera.

Con sus propias palabras y símbolos (ver fig. 4): sea F la magnitud que gira (puede ser masa, superficie, etc.), S la figura formada por revolución cuyo elemento es dS, D la distancia desde el c. de g. hasta el eje, y la ordenada al eje de giro (es la coordenada horizontal para nosotros), dx un elemento de eje x. El momento de cada elemento de F es su valor ydx por la distancia de su c. de g. al eje ($\frac{1}{2}$ y), es decir: $\frac{1}{2}$ yydx.

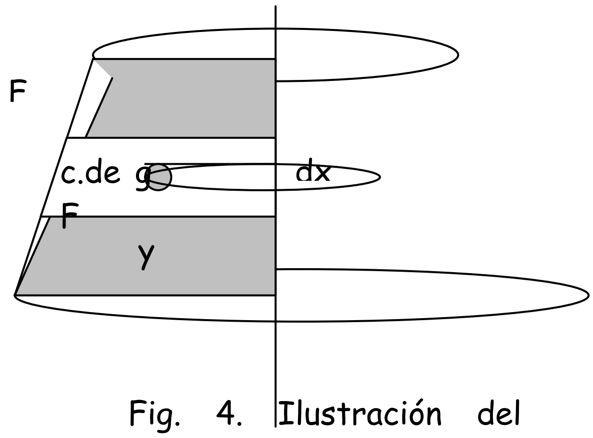


Fig. 4. Ilustración del teorema de Guldin.

Según el lema demostrado para encontrar c. de g., el producto de la magnitud F por la distancia desde su c. de g. hasta el eje, es igual a la suma de todos los momentos elementales anteriores. Es decir tenemos: $D.F = \int \frac{1}{2}yydx$. Multiplicado por p, que Hermann define como la circunferencia de radio uno, queda $pD.F = \int p\frac{1}{2}yydx$.

Como, dice Hermann, pD es la circunferencia de radio D y py la circunferencia de radio y, ($p\frac{1}{2}yydx$) es un elemento de la magnitud engendrada por revolución (= dS), y por tanto: $pD.F = \int p\frac{1}{2}yydx = \int dS = S$. QED.

Finalmente, Hermann explica que en la relación de momentos obtenida para calcular el c. de g., se puede usar indistintamente la masa o el peso ya que son proporcionales en gravedad uniforme. Aclara que en el caso de gravedad no uniforme, cada peso se sustituye por el producto de la masa por la gravedad específica correspondiente.

Como veremos a continuación, el teorema del c. de g. le permitirá a Hermann obtener la resultante de sistemas de fuerzas progresivamente más complejos.

La proposición V demuestra un teorema que, dice Hermann, Leibniz había comunicado por carta[81] a Wallis sin demostrar. Este teorema (ver fig. 5) nos indica cómo calcular la resultante en valor y dirección de un conjunto de fuerzas <u>concurrentes</u> aplicadas sobre un punto P:

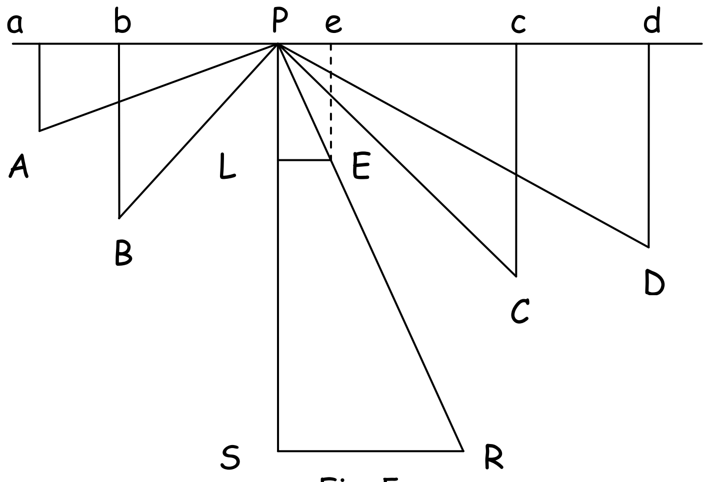


Fig. 5

"Las solicitaciones PA, PB, PC, PD etc. aplicadas sobre el mismo móvil P tienen por dirección media PE, recta que une el centro de gravedad del móvil P y el centro de gravedad E de todos los puntos A, B, C, D, etc. en que terminan las rectas que representan las solicitaciones; y la solicitación resultante de todas será un múltiplo de la recta PE, según el número de solicitaciones" [82]

Ahora, el c. de g. (E) de los extremos de las fuerzas dará la <u>dirección</u> de la resultante (PE). El <u>valor</u> de la resultante será el múltiplo de la distancia al c. de g. según el número de fuerzas presentes N, que en este caso sería 4.

$$F_T = PE \cdot N$$

[81] La referencia que da Hermann es:[Tomo III. Oper. Wallisii fol. 687]. Ver la carta de Leibniz a Wallis de 28 sept. 1697 en [JOHN WALLIS 1972. pp. 685-687]

[82] "Solicitationum quarumlibet PA, PB, PC, PD, etc. eidem mobili P impressorum media directio PE est recta jungens centrum gravitatis mobilis P et centrum gravitatis E omnium punctorum A, B, C, D et c. quibusrectae solicitatiomum representatrices terminantur ; et solicitatio ex omnibus corpori impressis resultans expni debet multiplo rectae PE, secundum punctorum seu solicitationem impressorum numerum." [*Phoronomia*. p. 16 (nº 53)]

La estrategia de Hermann consiste en seguir usando el equilibrio de momentos para las componentes, que ya había utilizado antes para calcular centros de gravedad. Este método equivale al posterior uso de la trigonometría para calcular la dirección de la resultante. Es decir: si tenemos que sumar dos vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ de los que conocemos sus módulos y su dirección, actualmente los descomponemos cartesianamente $V_1 = (V_{1x}, V_{1y})$, $V_2 = (V_{2x}, V_{2y})$ mediante las relaciones trigonométricas $V_x = V \cos \alpha$ y $V_y = V \operatorname{sen} \alpha$, después sumamos componentes para obtener la resultante $V = (V_x, V_y)$ y su dirección β será la tangente ($\operatorname{tg} \beta = V_y{:}V_x$).

Este teorema representa el resultado básico que Hermann extenderá progresivamente a situaciones de mayor complejidad tales como:

- Un problema que propuso Torricelli: encontrar la resultante de <u>cuatro fuerzas concurrentes</u> en equilibrio en <u>tres dimensiones.</u>
- Un sistema de <u>fuerzas continuo</u>, <u>concurrente</u> y en <u>tres dimensiones</u> (Ver Fig. 6). Si sobre P actúan fuerzas cuyos extremos están en la superficie ABC (la figura sólo muestra uno de los contornos de la superficie), su resultante es el producto de la superficie (que equivale a contar el número de fuerzas) por la distancia desde el móvil P hasta el c. de g. E de la los puntos de la superficie.
- Un sistema de fuerzas <u>oblicuas</u> <u>no concurrentes</u> <u>sobre una línea recta</u>, que reduce a un sistema concurrente.

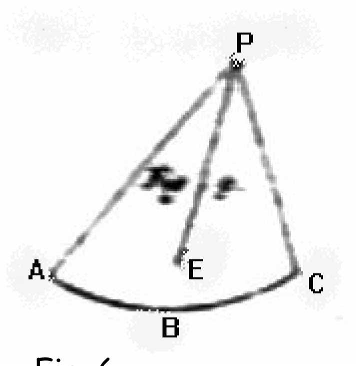


Fig. 6

Hasta ahora siempre ha trabajado separadamente con las componentes ortogonales de las fuerzas, pero en un corolario [*Phoronomia.* p. 21 (nº 55)] demuestra que la igualdad de momentos respecto del punto de equilibrio para un sistema de fuerzas oblicuas, puede hacerse directamente sin recurrir a las componentes (ver Fig. 7). Basta considerar el momento como el producto de la fuerza por la distancia perpendicular a la dirección de la fuerza desde el punto de equilibrio. Siguiendo la Fig. 7 tenemos: momento de la fuerza oblicua AG = AG. EP, siendo E el fulcro del sistema.

En lenguaje actual equivale a definir el momento como el producto vectorial de la fuerza por la distancia $\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}$, cuyo módulo es M = F· r sen (F,r). Vemos que la perpendicular EP equivale a r·sen (F,r) siendo (F,r) es el ángulo que forman los vectores F y r).

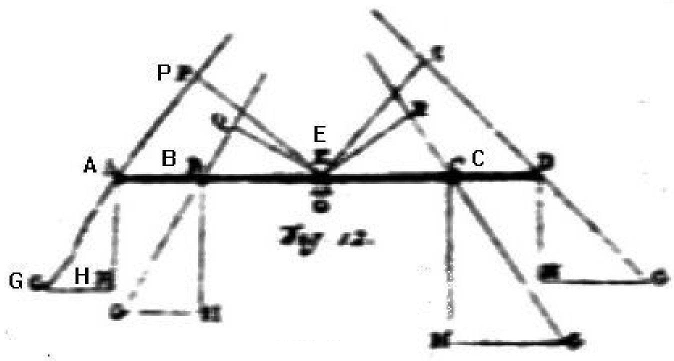


Fig. 7

Hermann destaca el hecho de haber llegado "inopinadamente a la demostración de forma directa e inmediata"[83] del teorema de Arquímedes de igualdad de momentos respecto del punto de equilibrio, "que de diversas maneras personas variadas han intentado demostrar".

El resultado más ambicioso de Hermann en la estática de sólidos rígidos, consiste en establecer un método de cálculo para la fuerza que resulta de la aplicación de un sistema continuo de fuerzas sobre un sólido. Este será el caso si pensamos en cuerpos sumergidos en fluidos, o de fuerzas sobre el timón de un barco, que será objeto de estudia en tomo II de su obra.

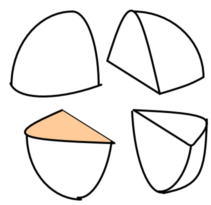

Cuerpo paciente

Fig. 8

La estrategia general consiste en separar el cálculo de la fuerza total en dos partes, proyectadas sobre planos horizontal y vertical respectivamente. Para llegar a esto,

[83] "atqui sic inopinato incidimus in demonstrationem directam et immediatam principii Archimedei de aequalitate momentorum, in casu aequilibri potentiarum inter. se commissarum, quod varii varie demoonstrare conati sunt." [*Phoronomia* p. 21 nº56]

Hermann establece una secuencia de teoremas que atañen a casos progresivamente más complejos.

Dando marcha atrás en la secuencia de Hermann, pensemos en un cuerpo sólido sobre el que actúan fuerzas en todos sus puntos. Podemos partir el cuerpo en cuatro partes mediante dos planos perpendiculares (fig. 8) y estudiar cada fragmento. Cartando una de las cuatro partes por planos horizontales obtenemos curvas en las que podemos estudiar la resultante de un sistema continuo de fuerzas iguales y perpendiculares. Esta es el tipo de fuerzas actuantes sobre un cuerpo sumergido en un fluido donde la presión depende de la profundidad. Iremos mostrando gráficamente la construcción de Hermann. La secuencia progresiva de resultados es la siguiente:

- Primero [*Phoronomia* p. 23 nª58] calcula la resultante de una serie <u>discreta</u> de fuerzas F, f etc. actuando sobre una <u>curva</u> regualar AB cualquiera[84]. La construcción geométrica (ver Fig. 9) consiste en encontrar primero la resultante de las componentes de cada fuerza proyectadas sobre dos ejes ortogonales, para después obtener la resultante total (en rojo en el dibujo) en valor y dirección a partir de la igualdad de momentos anterior. Varignon ha llegado a parecidos resultados, dice Hermann, pero su construcción puede extenderse al caso continuo, tal como mostrará a continuació.

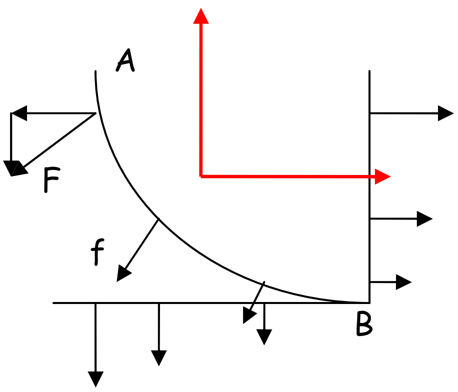


Fig. 9

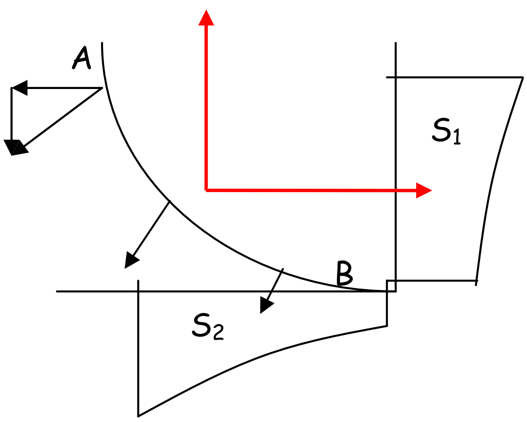


Fig. 10

[84] para que pueda aplicarse a "ruedas u otros dispositivos mecánicos" nos dice Hermann. [Ibídem]

- Hermann demuestra en la proposición VIII un potente teorema [*Phoronomia* p. 24 nª59], que reduce el cálculo de la resultante de un sistema continuo de fuerzas actuando sobre una curva regular cualquiera AB (ver Fig. 10), a la evaluación de dos áreas S_1 y S_2 proyectadas sobre dos ejes ortogonales. El punto de aplicación se hace, tal como demostró para el caso discreto, mediante la localización de c. de g. de las figuras laterales. Para su demostración, Hermann usa la "geometría diferencial" que consiste en razonar con diferenciales a partir de las líneas en una figura geométrica.

  A continuación particulariza el resultado para fuerzas iguales y perpendiculares a la curva. En este caso las figuras mixtilíneas S_1 y S_2 se convierten en rectángulos.

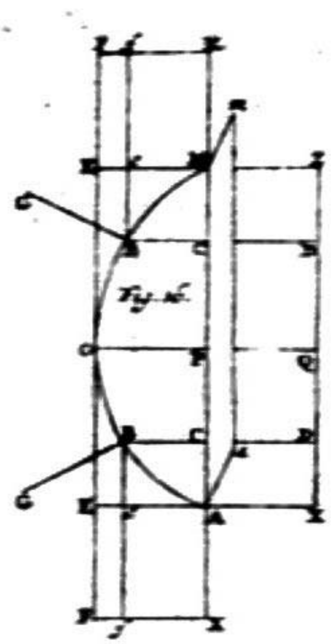


Fig. 11

- Extiende el resultado anterior, completando la curva sobre la que actúan las fuerzas a su parte simétrica (ver Fig. 11) [*Phoronomia* pp. 26 nª62-63]. En este caso las componentes verticales se anulan y la resultante para el caso de fuerzas perpendiculares a la curva e iguales es el rectángulo cuya base es el valor de la fuerza y cuya altura es la proyección de la curva sobre un plano vertical. Si la curva se desplaza formando un cilindro la resultante será un paralelepípedo tal como muestra la ilustración del propio Hermann.

- Si ahora [*Phoronomia* pp. 30-31 nª79] la figura sobre la que actúan fuerzas iguales y perpendiculares es la mitad de un tronco de cono (Fig. 12), la resultante equivale a la fuerza sobre el cilindro que resulta de la proyección sobre un plano vertical (en rojo), y la fuerza sobre el anillo (en verde) que resulta de la proyección sobre un plano horizontal. Hagamos notar que un tronco de cono tal, es el corte infinitesimal de una capa horizontal de un cuerpo cualquiera, tal como considerará en el siguiente teorema.

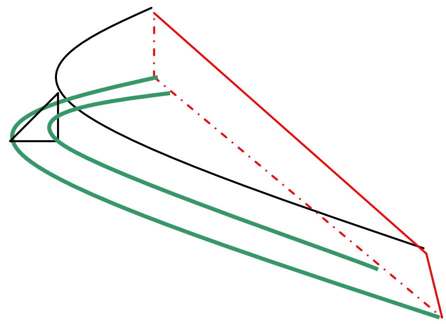


Fig. 12

- Con estos resultados ataca el cálculo de la resultante sobre la superficie que representa un cuarto del cuerpo total [*Phoronomia* pp. 31-34 nª80]. Demuestra que se compone de la pseudo-cuña formada por la escala de fuerzas (equivalente a una función fuerza–profundidad) con la proyección del cuerpo sobre un plano vertical, y del "cuerpo análogo extendido" que en la fig. 13 es el verde más todo el espacio entre el verde y el negro. Los c. de g. de estos volúmenes nos dan el punto de aplicación de la resultante.

Repite el proceso para un cuerpo paciente invertido. Las diferencias fundamentales son dos: la componente vertical es ahora solamente el espacio que queda entre el "cuerpo paciente análogo" (en verde en la ilustración) y el "cuerpo paciente" (en negro), y la componente vertical es ahora dirigida hacia abajo.

- Finalmente obtiene en un corolario [*Phoronomia* p. 24 nº 59] la resultante sobre el cuerpo entero. Como las componentes horizontales (pseudo-cuñas) se anulan entre sí al actuar en sentidos opuestos, queda como resultante la diferencia entre el "sólido paciente análogo extendido" y su "extensión". Esta diferencia es el "sólido paciente análogo" (verde).

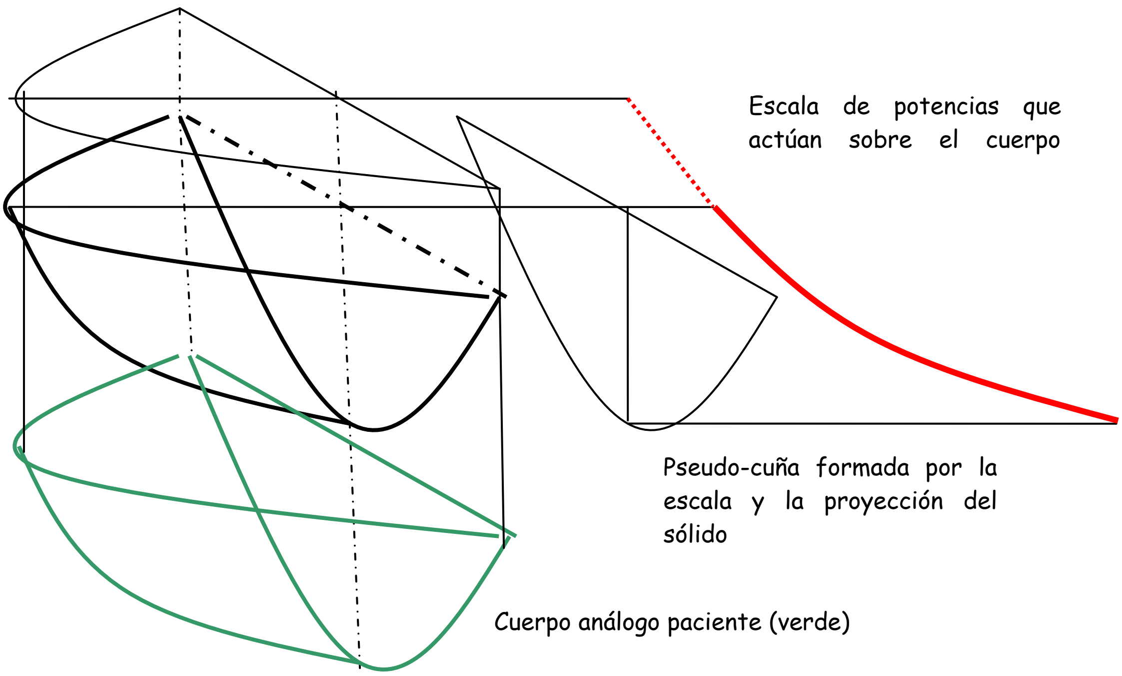


Fig. 13

Hermann ha llegado a un resultado general que usará en el cap. III del libro II dedicado a los fluidos [*Phoronomia* p. 152], y que trata sobre "El equilibrio de cuerpos sólidos sumergidos o flotando en cualquier fluido". En el teorema XII [*Phoronomia* p. 152 nº 290] afirma que "… este teorema no es diferente del 83 tomado en un caso concreto; … poniendo ahora la línea OLQ, que llamábamos escala de potencias aplicadas al sólido paciente, como escala de presiones o gravitaciones del fluido heterogéneo."

Este es el teorema que conocemos como de Arquímedes, que en la *Phoronomia* se demuestra para fluidos heterogéneos y que dice: "Todo cuerpo sumergido en un fluido heterogéneo, o flotando en él, empuja hacia arriba con tanta fuerza, como el peso de la masa de cierto líquido homogéneo cuyo volumen es la del cuerpo del sólido análogo sumergido o a su parte sumergida, cuya densidad es la densidad media del líquido heterogéneo, según la dirección normal a la superficie del fluido pasando por el centro de gravedad del sólido análogo." [Ibid.]

Continúa estudiando el equilibrio de cuerpos sumergidos como consecuencia del balance entre el empuje del fluido y el peso del cuerpo. Destaquemos resumiendo que:

- Hermann hace la demostración para fluidos heterogéneos en general. Para fluidos homogéneos muestra que el sólido análogo coincide con el paciente con lo que tenemos el teorema de Arquímedes habitual.
- La demostración es una aplicación al caso de fluidos, de teoremas generales establecidos en la estática de sólidos rígidos del libro I.
- Establece una continuidad basada en resultados generales.
- Usa el cálculo diferencial e integral en su forma "geométrica" y en su forma "algebraica" (ver teorema de Guldin) para los casos de sistemas de fuerzas continuos.

4.2 ESTÁTICA DE SÓLIDOS FLEXIBLES: paradigma de método en la *Phoronomia*.

Dentro de la sección I del libro I dedicada a la estática, el capítulo III trata "de las figuras que pueden adoptar los cuerpos flexibles por la aplicación de potencias cualesquiera; y sobre las direcciones medias de esas potencias." [*Phoronomia* pp. 36-50]

Hermann incluye por primera y única vez en su obra, un apartado matemático en el que explica la relación mutua entre diferenciales e integrales, además de mostrar un algoritmo para hacer integraciones. Hermann usará el cálculo integral y diferencial profusamente en la deducción de las ecuaciones generales para una línea flexible sometida a fuerzas de modo continuo, por lo que comienza exponiendo en un lema y un escolio el cálculo integral. Añade tres ejemplos como ilustración. Analizaremos más adelante la exposición que hace Hermann del cálculo integral y de su teorema principal, en el capítulo 6 ("El cálculo diferencial e integral: entre la geometría y el álgebra").

La novedad y la virtud del método de Hermann consisten en que obtiene un conjunto de ecuaciones generales integro-diferenciales relativas a un problema genérico (en este caso para un cuerpo lineal elástico sometido a fuerzas externas) que, particularizando, pueden ser usadas para "deducir" los casos de interés (curvas velaria, lintearia, catenaria, etc.). Los problemas relativos a cada curva se habían tratado independientente, y hasta 1744 no se conseguirá con Euler una formulación genérica de todos ellos como curvas isoperímetricas (ver nota 87). Este proceso, que se repite los distintos apartados de la *Phoronomia*, puede caracterizar el modo de proceder de Hemann en la *Phoronomia* como una algoritmización, que contiene las siguientes características:

- Obtiene un conjunto de relaciones generales entre variables de forma diferencial e/o integral, a partir de razonamientos geométrico - diferenciales referidos a líneas de una ilustración. La expresión de estas relaciones fundamentales es geométrica, es decir, los valores se simbolizan con dos letras (AB por ejemplo) que representan los extremos de un segmento sobre la figura. No se hace distinción simbólica entre valores infinitésimos o finitos, aunque sí se usa en ocasiones el símbolo integral de dos modos: *omnes* AB = ∫AB.

- Estas relaciones fundamentales son rescritas en forma diferencial algebraica, quedando preparadas para ser aplicadas a casos particulares, teniendo en cuenta las condiciones pertinentes.

Veamos primero en qué consiste el teorema principal. La proposición XII [*Phoronomia* p. 40 nº 93] considera el hilo flexible e inextensible ZBABX (ver Fig. 14 que corresponde a la Fig. 29 de la *Phoronomia*) ligado en sus extremos Z, X y sometido en cada punto B, β, etc. a las potencias BH, βh, etc. Estas potencias son genéricas y serán particularizadas más adelante por Hermann para significar pesos o presiones.

La tenacidad o firmeza (*tenacitas* o *firmitas*) del hilo se define como la fuerza que nace en el hilo por las potencias externas aplicadas. Es la resistencia del hilo, que equivale a las fuerzas externas cuando consideramos la situación de equilibrio.

Llama a las tenacidades (tensiones diríamos ahora) en dos puntos B y β contiguos T y t, a las potencias aplicadas en un elemento Bb del hilo (diferencial en el lenguaje de

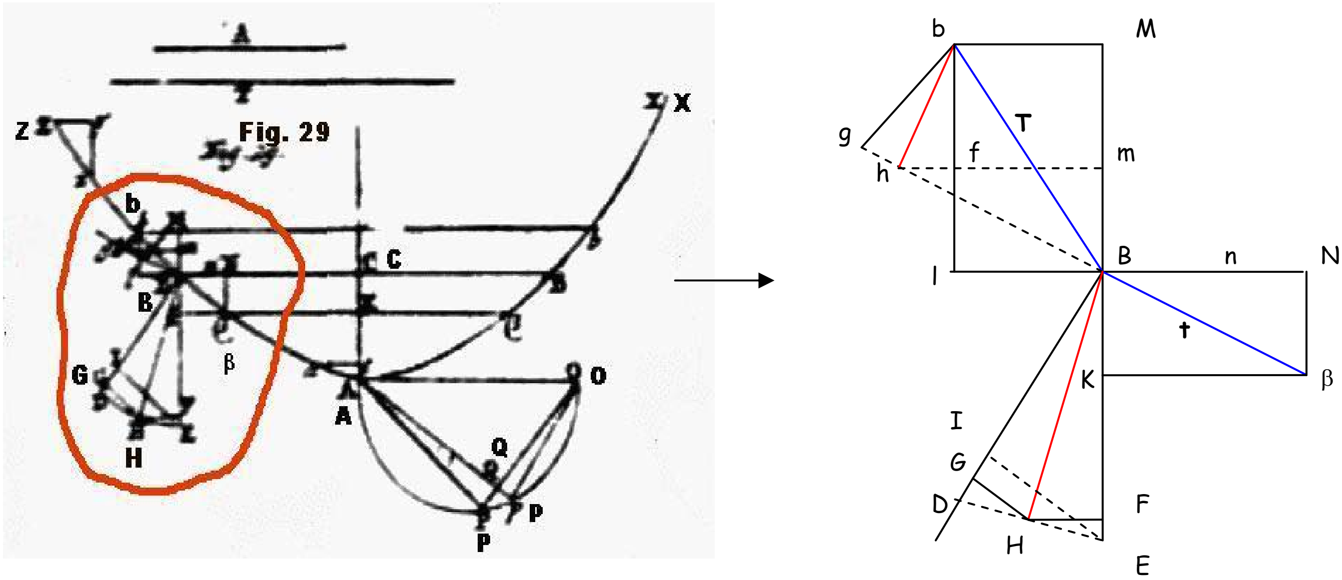


Fig. 14 (A la derecha detalle del elemento diferencial ampliado)

Hermann) pBb. La potencia en el punto inferior A se simboliza como A y es un dato constante ya que depende del equilibro de fuerzas en el otro lado del hilo AX. Los ejes son AC para las abscisas y BC para las ordenadas.

Ampliamos en la figura la zona del hilo que corresponde a dos elementos diferenciales contiguos Bb y βB (zona roja de la fig. 14). Las tensiones se descomponen ortogonalmente; para T son BM y Mb; y la potencia externa aplicada BH se descompone de dos formas: BF y HF según los ejes perpendiculares del sistema (Coordenadas cartesianas) y según las direcciones tangencial GH y perpendicular a la curva BG (coordenadas intrínsecas)

El teorema deduce dos resultados en una situación de equilibrio:

I. Para las componentes tangenciales T = A + ∫GH. (1)

La tensión T del hilo en un punto cualquiera B, es igual a la suma de todas las componentes tangenciales de las fuerzas externas, más el valor de la tensión en el punto más bajo A.

II. El cociente entre cualesquiera dos líneas homólogas de los cuadriláteros BGHF y bghf, es igual al cociente entre T y Bb.

En el lenguaje *geométrico* de Hermann, por ejemplo: $\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{bf}} = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{Bb}}$ (2)

La demostración maneja símbolos geométrico-diferenciales y relaciones geométricas en la figura. Podemos interpretar el resultado en términos diferenciales de la siguiente manera: las líneas en el triángulo pequeño bghf son las diferenciales segundas y las del grande BGHF las primeras diferenciales. Considerando los ejes a la manera de la época, es decir, intercambiados con los actuales, tenemos:

$\mathrm{bf} = \mathrm{Mm} = \mathrm{BM} - \mathrm{Bk} = dx_2 - dx_1 = d^2x$

$\mathrm{hf} = \mathrm{nN} = \mathrm{BN} - \mathrm{Bl} = dy_2 - dy_1 = d^2y$

Bb = ds (elemento de arco en el que trabaja)

Así, el conjunto de relaciones deducidas en (2) son ecuaciones diferenciales de la forma: $\frac{\mathrm{F_x}}{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d\,s}}$ donde x puede intercambiarse por y.

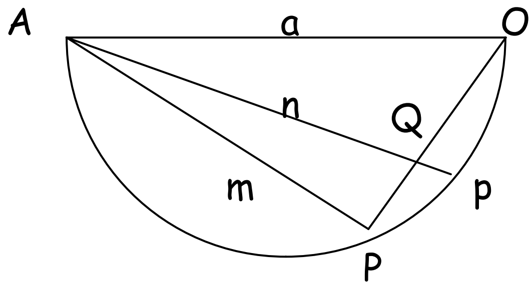


Fig. 15

El primer corolario añade una figura auxiliar al hilo (Fig. 15). Traza desde A una línea de magnitud arbitraria AO horizontal, y con ella como diámetro un semicírculo, tal como se ve en la figura. A partir de A traza dos segmentos AP y Ap que son paralelos a los dos elementos de hilo Bb y βB considerados. Usando la similaridad de los triángulos Bbg y APQ de la figura auxiliar, demuestra una relación entre fuerzas y lados del triángulo auxiliar: $\frac{BG}{T}=\frac{PQ}{AP}$ (3)

A partir de la relación (1) estudia el caso en que las fuerzas BH son perpendiculares a la curva. En este caso GH = 0 y por tanto en (1) T = A. La tensión en cualquier punto es igual al valor en A dado.

También deduce la ecuación integral correspondiente a (2) suponiendo todos los arcos Bb iguales y fuerzas perpendiculares a la curva:

$$\frac{\int \mathrm{FH}}{\mathrm{Bb-bM}}=\frac{\int \mathrm{BF}}{\mathrm{BM}}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Bb}} \qquad (4)$$

Que transcrita con nuestros símbolos queda: $\frac{\int \mathrm{F_Y}}{\mathrm{ds-dy}}=\frac{\int \mathrm{F_X}}{\mathrm{dx}}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{ds}}$

Cconsidera el caso en que las fuerzas son paralelas al eje vertical (sería el caso de un hilo cuya fuerza exterior es su peso). La ecuación (2) quedaría:

$$\frac{\int \mathrm{BF}}{\mathrm{BM}}=\frac{\int \mathrm{BE}}{\mathrm{BM}}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{bM}} \qquad (5)$$

Llamando F a la suma de todas las fuerzas o peso y siendo A el valor de la tensión en el punto más bajo, la ecuación (4) se puede transcribir:

$$\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{dx}}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{dy}} \qquad (6)$$

Preparado el teorema general y sus corolarios, Hermann nos indica que:

"A partir de los corolarios añadidos a nuestro teorema puede ser establecido, como se desprende ampliamente de su uso, que verdaderamente éste contiene las soluciones de infinitos problemas, de los que los Problemas de la *Catenaria, Velaria,* y las formas del lienzo curvado por el líquido contenido, no son sino casos especialísimos de nuestro teorema."[85]

A continuación Hermann traduce a lenguaje algebraico sus resultados y obtiene dos reglas para transformar diferenciales y poder deducir los casos particulares:

"Sea por tanto AC=x, CB=y, BM= dx, bM= dy, Bb= ds, AO=a, AP=m y PO=n = √ (aa - mm). De aquí PQ = dn, y Qp = dm. Establecido esto, de los triángulos similares BbM, y OAP obtiene las relaciones" [*Phoronomia* p. 44 nº 101]:

$$\mathbf{ds = adx:n} \qquad (7)$$

$$\mathbf{dy = mdx:n} \qquad (8)$$

Sustituyendo sus valores en la proporción (3) BG:T= PQ:AP, obtenemos lo que Hermann llama "primera regla" (*primus Canon)* para las componentes normales BG:

$$\mathbf{BG:T = dn:m} \qquad (9)$$

Toma como segunda fórmula general la relación integral (1) que correspondiente a las componentes tangenciales GH: **T = A + ∫ GH**

A partir de las ecuaciones integral (1) y de la ecuación diferencial (9) Hermann obtendrá para los casos particulares las correspondientes curvas y=f(x) en nuestro lenguaje, transformando variables mediante las relaciones (7) y (8). Veamos cómo.

<u>Caso 1</u>: la circunferencia [*Phoronomia* p. 44 nº 102]. Condiciones del problema:

[85] "Ex Coroariis theoremati nostro adjectis fatis constare potest quam late pateat ejes usus, revera enim infinitorum id problematum solutionem continet, quórum problemata *Catenaria, Velariae,* et figurae lintei ab incumbene liquore inflexi nonnisi casus sunt specialissimi nostri theorematis." [*Phoronomia* p. 44 nº 100]

- ✓ Fuerzas externas perpendiculares a la curva: BG = BH y GH = 0
- ✓ Fuerzas proporcionales a la longitud del hilo: BG = b ds (b=cte.)
- ✓ Supone que la fuerza en el punto inferior A = a·b (parámetro constante que no da las condiciones de contorno)

La ecuación (9) queda: $\frac{b\,ds}{a\,b}=\frac{dn}{m}$; $\frac{ds}{a}=\frac{dn}{m}$;

Por (7) pasamos de ds a dx $\frac{dx}{n}=\frac{dn}{m}$; $m\,dx=n\,dn=-m\,dm$; integrando queda $m=a-x$ Como $n=\sqrt{a^2-m^2}$ obtenemos ahora n como función de x: $n=\sqrt{2ax-x^2}$

La estrategia general será siempre obtener las relaciones de n y m con x y constantes, de modo que aplicando la relación (8) obtiene la ecuación diferencial de la curva buscada:

$$dy=\frac{m}{n}\,dx=\frac{(a-x)\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\frac{a\,dx-xdx}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

Este es el único caso que Hermann integra dando la ecuación de una circunferencia:

$$y=\sqrt{2ax-x^2}$$

Usará este resultado en la mecánica de fluidos en la que vemos una vez más la continuidad de los métodos usados en la *Phoronomia,* cuando en el capítulo IV del libro II (estática de fluidos) estudia "Sobre las formas que fluidos envasados en cuerpos flexibles inducen en estos cuerpos" [*Phoronomia* pp. 162-169].

En dicho capítulo estudia por otros métodos dos problemas que ya ha resuelto a partir de las ecuaciones generales del capítulo sobre estática de medios flexibles: el primero es el del recipiente flexible cilíndrico lleno de líquido cuya forma es circular.

Este problema tiene que ver, dice Hermann, con el interés que puede tener en el estudio de la forma adoptada por los vasos sanguíneos de los animales, tal como ya habían hecho "Johann Bernoulli en su texto sobre Fuerzas y Movimientos de los músculos disertación contenida en Act. Lips. 1694 p. 200 seq., Y También el insigne ecocés Archibald Pitcairne en su Physiologia,"[86]. [*Phoronomia* pp. 162-163]

El segundo problema que estudia es el de la *lintearia* o curva que adopta una tela que contiene líquido, y que también había resuelto en la estática flexible del libro I. Su enunciado en la estática de fluidos es:

"Si en el lienzo (*lintei*) ZDAX con extremos Z, X fijos está embalsado cualquier líquido heterogéneo cuya escala de gravedad es la curva ROS, encontrar la forma de la tela" [*Phoronomia* p. 166 nº 307]

Su solución siguiendo el método general de la estática flexible es:

<u>Caso 2</u>: la *lintearia* [*Phoronomia* p. 45 nº 104]. Las condiciones son:

- ✓ Fuerza externa BG perpendicular a la curva: BG = BD y T = A
- ✓ Fuerza BD función de la distancia x y del arco ds: BD = k ds siendo k una expresión de x y constantes.
- ✓ Valor de la tensión en el punto inferior A = ½ a^2

Estas condiciones corresponden al peso de un líquido, que como mostrará en la hidrostática, dependen de la altura x, y de la superficie sobre la que se aplica ds.

La ecuación (9) queda ahora: $\frac{2k\,ds}{a^2}=\frac{dn}{m}$, aplicando (7) para cambiar ds por dx: $\frac{2k\,dx}{n\,a}=\frac{dn}{m}$; y teniendo en cuenta como antes que $m\,dx=n\,dn=-m\,dm$ queda: $2k\,dx=-a\,dm$, con el cambio de variable du = -dx y m=p y n se obtiene de; finalmente sustituyendo en (8) los valores de m y n encontrados queda:

[86] PITCAIRNE, ARCHIBALD. Edinburgo (1652-1713). Publica en 1701 (2ª ed. 1713) *Dissertationes medicae*, donde discute la aplicación de la geometría a la medicina.

$$dy = \frac{m}{n}\,dx = \frac{p\,dx}{\sqrt{a^2 - p^2}}$$

Que es, dice, la ecuación diferencial de la lintearia encontrada por los Bernoulli por otros métodos. Con el cambio de variable k = u = b-x que representa medir las alturas desde la parte superior, queda que u^2 = ap, y sustituyendo en la ecuación diferencial queda la ecuación de la lintearia en la forma encontrada por Bernoulli:

$$dy = \frac{-\,u^2\,dx}{\sqrt{a^4 - u^4}}$$

<u>Caso 3</u>: la velaria [*Phoronomia* p. 44 nº 103]. Las condiciones son ahora:

- ✓ Fuerza perpendicular a la curva: BH = BG = BD y T=A ya que GH = 0
- ✓ Fuerza igual a dy^2/ds
- ✓ Fuerza dada en el punto más bajo A = a

Transformando la expresión de BD tenemos: $\frac{dy^2}{ds} = \frac{m^2\,dx}{a\,n}$ La ecuación (9) queda ahora: $\frac{a\,dn}{m} = \frac{m^2\,dx}{a\,n}$, y teniendo en cuenta como en casos anteriores que $m\,dx = n\,dn = -\,m\,dm$ e integrando queda: $m = \frac{a^2}{x+a}$ el valor de n se obtiene como siempre de $n = \sqrt{a^2 - m^2}$. Finalmente encontramos la ecuación diferencial de la Velaria (curva producida por la presión del viento) sustituyendo m y n en (8):

$$dy = \frac{m}{n}\,dx = \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}}$$

<u>Caso 4</u>: las catenarias [*Phoronomia* p. 45 nº 105]. Las condiciones son:

- ✓ Fuerzas verticales BH = BE como corresponden a los pesos de cada ds
- ✓ Pesos proporcional a la longitud del hilo: BE = dq. Siendo q el peso total.

Hermann hace en esta ocasión dos demostraciones: la primera usa el método general de las anteriores, y en la segunda, mucho más corta, obtiene la ecuación diferencial a partir de un corolario general para fuerzas verticales en el que había obtenido la relación (5) $\frac{\int \mathrm{BF}}{\mathrm{BM}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{bM}}$; transcrita algebraicamente queda: $\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{dy}}$, que contiene, nos dice, todos los géneros de catenarias.

Teniendo en cuenta que el peso q es proporcional a la longitud del hilo s, es decir que BE = dq = ds, podemos desarrollar la expresión general encontrada usando las relaciones entre variables hasta encontrar la ecuación diferencial de la catenaria (cuerda o *catena* que cuelga libremente de sus extremos):

$$dy = \frac{m}{n}\,dx = \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}}$$

Bernoulli había propuesto el problema de la catenaria en el primer artículo de aplicación del cálculo diferencial-integral de 1690, tras los artículos fundadores de Leibniz. Éste era ya un viejo problema que, por ejemplo, había tratado Galileo llegando a la conclusión equivocada de que la curva era una parábola. El problema es resuelto por Huygens mediante procedimientos geométricos y por Johann BERNOULLI y Leibniz usando el cálculo infinitesimal.

El mismo había planteado el problema de la velaria en 1692 y Johann BERNOULLI el de la lintearia. Euler en su obra de 1744[87] agrupará todos estos problemas, más el de la curva elástica (curva sujeta por un extremo teniendo un peso en el otro), en las

[87] *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive propietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici altísimo sensu accepti.* Euler L.

isoperimétricas o curvas de longitud fija que satisfacen una cierta condición de máximo o mínimo[88].

La virtud del trabajo de Hermann consiste en agrupar todos los casos bajo un mismo sistema de ecuaciones diferenciales generales, que como hemos dicho, conseguirá Euler mediante principios variacionales en 1744.

4.3 HIDROSTÁTICA

Expondremos los principios de la hidrostática contenida en la *Phoronomia* ya que suponen una estructuración de esta parte de la mecánica en sus vertientes teóricas y prácticas. Hermann recoge y amplía los resultados conocidos organizándolos y dándoles un nivel mayor de generalidad, e introduciendo explicaciones originales.

El capítulo I de la segunda sección (estática) del segundo libro (fluidos) trata "Sobre las leyes generales de la gravedad de los fluidos que reposan sobre planos" [*Phoronomia* pp. 128-138]. Previamente hace varias definiciones y distinciones:

- Fluido en contraposición con sólido es aquel cuerpo cuyas partes pueden moverse sin que se mueva todo él.
- Distingue entre fluido y líquido como género y especie, definiendo líquido como: "Los líquidos son de hecho, los que fluyen hasta que sus superficies se hacen horizontales" [*Phoronomia* p. 128 nº 241].
- Fluido homogéneo o de densidad uniforme, y heterogéneo o de densidad variable. Da como ejemplo del primero los líquidos conocidos y del segundo la atmósfera.
- Escala de densidad: tal como hace por doquier, define la relación de variables geométricamente al modo de la época. En este caso los valores de la densidad

[88] Ver RADELET-DE GRAVE P. 1998 pp. 469-470

para cada distancia a un punto de referencia en el que se cruzan perpendicularmente los ejes.

- Densidad media en un fluido heterogéneo: equivale a la densidad de un fluido homogéneo que para la misma altura ejerce una presión igual sobre una superficie horizontal. La descripción verbal de Hermann equivale con nuestra notación a:

$$\rho_m = \frac{\int_0^H \rho\, dh}{H}$$

- Define punto o partícula como un plano infinitesimal.
- Presión o gravitación (*pressio vel gravitationis)* como fuerza sobre una superficie.

A continuación el capítulo expone de forma particularmente simple todos los resultados fundamentales y las paradojas referidas a la presión estática de fluidos sobre superficies. Tras unos resultados básicos:

- Las presiones que se ejercen mutuamente sólidos o fluidos están en dirección perpendicular al plano de contacto entre sus superficies.
- Un líquido en un recipiente alcanza el equilibrio cuando su superficie es horizontal. En un corolario comenta el problema de la forma de la Tierra, indicando que debe ser un elipsoide con el eje mayor en el ecuador por efecto de su movimiento diurno[89].

Hermann demuestra en la proposición III [*Phoronomia* p. 130 nº 252] que cualquier "elemento" de una superficie horizontal de un líquido en equilibrio o de los laterales del recipiente, soportan la misma presión. El razonamiento se basa en que, si no

[89] Hermann sigue la teoría de Newton. La polémica sobre la forma de la tierra estalla en 1722 cuando J. Cassini publica *De la grandeur et de la figure de la terre*, donde expone cómo a partir de sus mediciones de 1718 se desprende la mayor elongación en los polos, que Maupertuis contesta. Ver sobre la polémica y sobre los recursos usados: Terrall, Mary, 'Representing the earth's shape: the polemics surrounding Maupertuis's expedition to Lapland', *Isis* **83** (1992), 218-237.

soportaran la misma presión habría un desequilibrio que provocaría movimiento, en contradicción con la hipótesis.

En la siguiente proposición [*Phoronomia* pp. 131-132 nº 253] tenemos el resultado principal de la hidrostática: "la presión de cualquier líquido homogéneo sobre un plano horizontal es proporcional a la altura del líquido sobre ese plano". El razonamiento sigue usando la reducción al absurdo con la hipótesis de equilibrio. Razonando sobre una figura similar a la de Hermann (Fig. 16), la presión en el punto A se debe al peso de la columna que tiene encima OA. Cualquier punto de la superficie AB tiene la misma presión tal como demostró antes. El punto C y cualquier punto de su superficie DC, tienen una presión que depende de la cantidad de líquido sobre él BC, más la presión del punto B. Es decir la presión en C depende de la altura de líquido desde C hasta la superficie O. Las fuerzas en las paredes son perpendiculares a la superficie del recipiente e iguales a cualquier punto que esté a la misma altura respecto de la superficie del líquido.

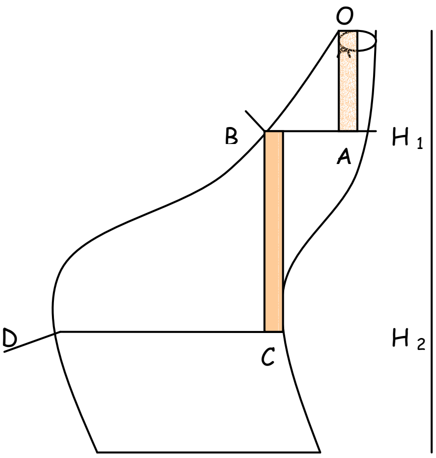


Fig. 16

En un escolio y dos corolarios [*Phoronomia* pp. 132-134 nº 254-256], Hermann explica que la ley es independiente de la forma del recipiente, cosa que parece paradójica "*quod haud dubie non paucis paradoxum videbitur.*", pero cuya verdad se comprueba con experimentos para después ser probada[90].

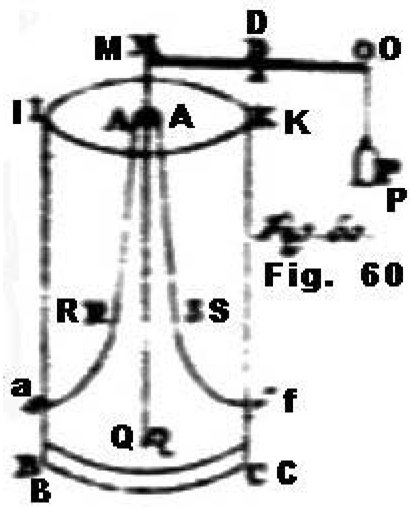


Fig. 17

[90] "*Ejus tamen veritas ipsa experimenta comprobata est, atque deinceps probari potest.*" [Ibídem] Trataremos las relaciones entre la mecánica racional y las experiencias en el apartado 7 "Experimentación e instrumentos: la razón práctica en la *Phoronomia*".

La experiencia, siguiendo la figura 60 de Hermann (Fig. 17), consiste en una balanza MDO que equilibra mediante el peso P, el fondo aBCf sujeto en Q. En este pequeño fondo se pueden encajar dos tipos de recipientes, el cilindro BIKC y el recipiente puntiagudo ABC. Si la altura del líquido es la misma en ambos recipientes, la balanza queda igualmente equilibrada.

Pero como la cantidad de líquido es distinta, prosigue Hermann, la ley hidrostática parece contraria a los fenómenos: "… atque adeo regula nosta hydrostatica phaenomenis adversari videtur.". La explicación de Hermann, completamente actual, es que sobre las paredes del recipiente puntiagudo se ejerce una fuerza perpendicular, que las paredes también ejercen hacia el líquido, incrementando la presión del mismo en la misma proporción que el líquido que hay entre ambos recipientes.

A continuación demuestra un resultado genérico de gran potencia que relaciona la escala de presiones con la de densidades para cualquier fluido heterogéneo. [*Phoronomia* pp. 135-136 nº 258]

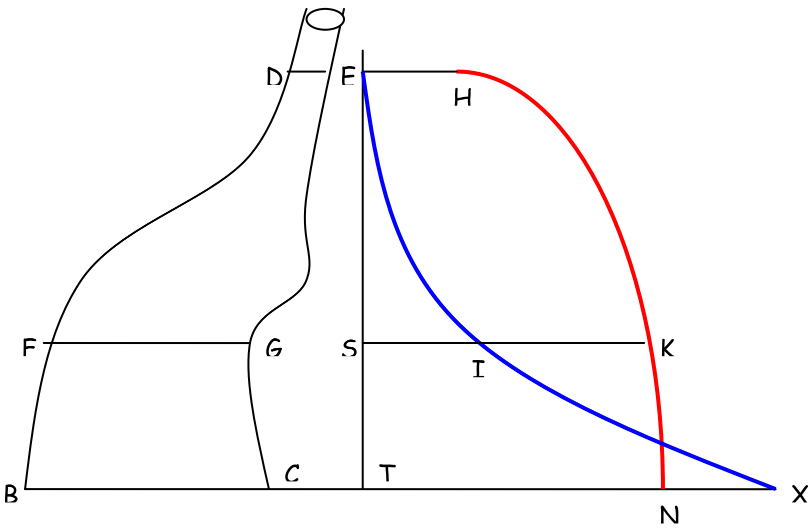


Fig. 18

Las presiones (escala azul de la fig. 18) son proporcionales a las áreas homólogas de la escala de densidades (escala roja). En su lenguaje: $\frac{\text{pr FG}}{\text{pr BC}} = \frac{SI}{TX} = \frac{\text{ESKH}}{\text{ETNKH}}$. Para nosotros: $\frac{\text{pr FG}}{\text{pr BC}} = \frac{\int_0^{FG} \rho \, dh}{\int_0^{BC} \rho \, dh}$ donde h es la altura y ρ la densidad.

Seguidamente reduce el teorema, para un líquido homogéneo de densidad igual a la media del heterogéneo, con la hipótesis TX = TE, que supone tomar un sistema de unidades en el que una presión TX equivale a una altura TE. Con estas premisas: "la presión en cualquier partícula del plano FG es igual al peso de una columna de líquido con densidad la media del heterogéneo y como altura la presión SI correspondiente a esa profundidad" [ibid.].

Estudia en corolarios dos casos particulares [Ibid. pp.136-138]:

- En el caso homogéneo la escala de densidades es una recta y las presiones son proporcionales a las alturas desde la superficie del líquido.
- Estudia los vasos comunicantes con líquidos de distinta densidad. En este caso las alturas de los líquidos son inversamente proporcionales a sus densidades. Este resultado lo utilizará cuando estudie el fundamento de los barómetros, considerados vasos comunicantes con un líquido en una rama y un gas en la otra.

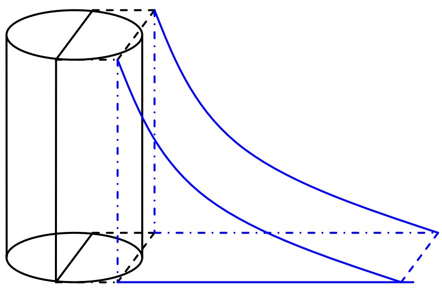


Fig. 19

En el capítulo II del libro II estudia la presión sobre los laterales de tubos que contienen líquidos. La presión de un líquido heterogéneo sobre la cara curva de un tubo o sobre su proyección sobre un plano vertical, es igual al peso de la cuña de líquido homogéneo correspondiente, formada por la escala de presiones (ver Fig. 19) y la proyección del tubo sobre un plano vertical.

El centro de gravedad de la figura será el punto definido como "centro de presiones" del líquido heterogéneo. Aquí vuelve a aplicar los resultados generales de la estática rígida para encontrar el punto de aplicación de las fuerzas sobre una superficie.

Finalmente estudia la resistencia de los materiales de los tubos. El teorema VIII [*Phoronomia* p. 143 nº 272] demuestra que la Resistencia o Firmeza F (conceptos ya definidos para hilos en la estática flexible) de los tubos rígidos que contienen líquidos está en razón compuesta de la Tenacidad T de la materia (que define como la resistencia de una fibra del tubo), del grosor C del tubo y de la altura del mismo A:

$$\frac{F}{f} = \frac{T\,C\,A}{t\,c\,a}$$

Como había demostrado que la fuerza del líquido en el tubo era el peso de una columna de líquido con la densidad media del líquido heterogéneo S, de altura igual a la presión M, y superficie igual al producto del diámetro del tubo D y de su sección A; la expresión anterior queda: $\frac{MADS}{mads} = \frac{T\,C\,A}{t\,c\,a}$, que simplificada es: $\frac{MDS}{mds} = \frac{T\,C}{t\,c}$. La particulariza en corolarios para:

- Líquidos homogéneos (S=s): $\frac{MD}{md} = \frac{T\,C}{t\,c}$
- Líquidos homogéneos del mismo material (T=t): $\frac{MD}{md} = \frac{C}{c}$

Por tanto, concluye, el grosor de los tubos C es proporcional al producto de su altura M por su diámetro D.

Como aplicación de las relaciones obtenidas da en un escolio [*Phoronomia* p. 145 nº 277] dos ejemplos tomados de referencias inscritas en *Divers Ouvrages de Mathematique et de Physique de Metiseurs de l'Academie Royale des Sciences* de la Academia de París:

Ejemplo 1: tomado de la disertación del danés Ole Roemer[91] (inscrita en la obra anterior fol. 517) sobre los grosores y las fuerzas de tubos en conductos de agua, según las diversas alturas de la fuente, y de los distintos diámetros de los tubos.

A partir de experiencias sabemos que un tubo de plomo de 16 pulgadas (*pollicum*) de diámetro D, con un espesor C de 6 ½ líneas (*linearum*) resiste una presión de agua M de 50 pies de altura (un pie de París contiene 144 líneas y una pulgada 12). Se busca qué grueso c ha de tener otro tubo de plomo de 10 dedos (*digitorum* equivalente a pulgada) de diámetro d, para transportar una presión m de 40 pies. Con las relaciones anteriores obtiene: $\frac{C}{c} = \frac{MD}{md} = \frac{50 \cdot 16}{40 \cdot 10} = 2$ de donde: c = C/2 = 3¼ líneas.

Este resultado difiere de las aproximadas 4 ½ líneas que da Romerus, suponiendo equivocadamente que las resistencias están en razón doble del grueso de los tubos[92].

Ejemplo II: dado por Mariotte en la misma obra folio 513. Supone un tubo de cobre de 5 pulgadas de diámetro d, con media línea de grosor c y llevando agua con una presión de 30 pies de altura m. Queremos buscar la relación entre las tenacidades (resistencias) del plomo y del cobre supuestos los datos anteriores del tubo de plomo. Aplicando $\frac{T}{t} = \frac{MD:C}{md:c} \cong \frac{1}{3}$, deducimos que la tenacidad del cobre es un poco superior a 3 veces la del plomo, "*juxta has observaciones*".

Vemos en el desarrollo de la hidrostática que Hermann atiende a los cálculos prácticos después de exponer su mecánica racional, contrastando sus cálculos con otros autores como en el primer ejemplo, o llegando a resultados que coinciden con las observaciones como en el segundo ejemplo.

---

[91] Ole Christensen Roemer (1644-1710). Científico danés. Se traslada a París trabajando en su observatorio durante nueve años. Conocido por hacer la primera medida de la velocidad de la luz y por desarrollar un termómetro con dos puntos fijos.

[92] "*quia resistentias tuborum statuit esse in duplicata ratione crassitierum caeteris existentibus paribus, quas supra in propositione apparet esse in simplice non duplicata illa ratione*." [Ibid.]

Toda la *Phoronomia* está llena de referencias y cálculos a experiencias y al diseño de aparatos de medida. Analizaremos con más detalle la relación mecánica racional–experiencias en el capítulo 7, "Experimentación e instrumentos".

4.4 EL ESTUDIO MECÁNICO DEL AIRE

En los capítulos V, VI, VII y VIII, Hermann organiza y sistematiza los conocimientos sobre el aire, aplicando los resultados de la estática de fluidos general, y tratando aspectos peculiares asociados a las características del aire como gas. El primer capítulo tratará del peso del aire, establecido a partir de las experiencias de Torricelli y la posterior discusión de Pascal. El capítulo siguiente discutirá otro aspecto del aire puesto al descubierto también en el siglo XVII por las investigaciones de Boyle: la elasticidad. Finalmente, otro capítulo desarrollará las relaciones mecáncias que permiten, considerando ciertas hipótesis, asociar una escala de densidades con la altura atmosférica (ecuación barométrica).

Todo el estudio está salpicado de experiencias, que serán analizadas con detalle a partir de la mecánica racional que desarrolla; su objetivo será dejar claro que los fenómenos del peso del aire y de su elasticidad están bien establecidos. Después se puede ir más allá, estudiando las consecuencias de esas propiedades del aire, por ejemplo para analizar la estructura de la atmósfera.

4.4.1 El peso del aire

El capítulo V del segundo libro está dedicado a estudiar: "la presión del aire causada por la gravedad". Hermann comienza afirmando que los resultados obtenidos para los fluidos pueden ser aplicados al caso del aire, ya que éste es una especie del género fluido. Pasa seguidamente a tratar el problema del peso del aire, considerándolo una evidencia más allá de cualquier duda, como han mostrado, dice, las experiencias de Galileo, Boyle, Mariotte y Borelli.

Con todo, al principio discute las experiencias que muestran el peso del aire. Comienza comentando la falacia que Hermann atribuye a Aristóteles y que, dice, había puesto al descubierto Jacob Bernoulli en un texto de Actas de Leipzig de 1685. Tal falacia consiste en afirmar que una vesícula pesa más llena de aire que vacía. Para Hermann el razonamiento es simple, y le sorprende que no haya sido descubierto antes: la vesícula llena o vacía soporta sobre sí la misma columna de aire, por tanto su peso es el mismo en ambos casos. Detallaremos su razonamiento en el apartado 7.

Hermann explica que Johann Bernoulli había medido la densidad relativa agua/aire dando un valor de 740, que mejoró en experiencias más cuidadosas hasta obtener el valor 774[93]. Él, dice, usará por comodidad en los cálculos el valor 800.

Aclarada la falsedad de la experiencia anterior, Hermann justifica el desarrollo que dará al capítulo. Ya que el fenómeno del barómetro explica el peso del aire, primero demostrará una serie de proposiciones de las que deducir su funcionamiento, así como el de otros artilugios, tales como bombas de succión y sifones. Acabará con la descripción de un modelo nuevo de barómetro más sensible, ideado por Johann Bernoulli y aún no dado a conocer.

Primero demuestra la proposición principal [*Phoronomia* p. 171 nº 315] de la que extraerá en corolarios la explicación del funcionamiento de barómetros, bombas de agua y sifones. La demostración es inmediata ya que se basa en un resultado previamente demostrado en la estática de fluidos general [Corolario IV de la proposición V. Libro II]. Dicho resultado afirma que: las alturas que alcanzan dos líquidos distintos no miscibles en las ramas de dos vasos comunicantes, es inversamente proporcional a sus densidades. Lo aplica del modo siguiente:

[93] El valor de la *Phoronomia* contiene una fracción ilegible añadida al entero 774. El valor actual es 769,2.

Supone un sistema de vasos comunicantes que no es el habitual (Fig. 20). Tiene un tubo A abierto en sus extremos e introducido en el recipiente B abierto. Ambos están en el interior de un gran vaso C. Supone que A y B tienen mercurio y que en C hay agua hasta el nivel MN. Teniendo en cuenta, nos dice, que la densidad del mercurio es 14 veces la del agua, la relación de sus alturas será 1/14.

Continúa [*Phoronomia* p. 172 nº 316], sustituyendo el agua contenida en C por el aire de la atmósfera. El tubo A estaría abierto fuera de la atmósfera que llegaría hasta MN, pero como esto no es posible podemos suponer, lo que es equivalente, dice, que el tubo A está cerrado superiormente. Como por experiencias se sabe que la altura que alcanza el mercurio es de 28 dedos de pie de París[94], el peso de la atmósfera equivale al peso de esa columna de mercurio.

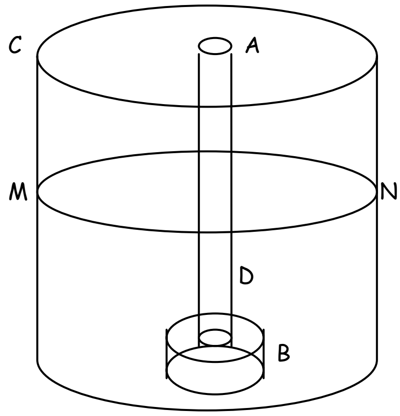


Fig. 20

La experiencia de Torricelli queda pues explicada mecánicamente, mediante su asimilación a los vasos comunicantes para dos fluidos diferentes. De este modo abstrae y generaliza la experiencia del barómetro.

Un corolario posterior [*Phoronomia* pp. 172-173 nº 317] calcula la altura de la columna de agua que equilibraría a la atmósfera. Encuentra que como el mercurio es 14 veces más pesado que el agua, ésta alcanzará una altura 14 veces superior, es decir: $h_{agua} = 14\ h_{mercurio} = 14 \cdot 28$ dedos = 392 dedos = 392 pulgadas = 33 pies de París[95].

[94] (28 *digitorum pedis Parisensis*). Si 28 dedos equivalen a la medida actual de 760 mm de mercurio. La relación sería aproximadamente 27 mm/dedo.

[95] Si 392 dedos equivalen a 392 pulgadas = 33 pies. Podemos deducir la relación aproximada 11,88 dedos/pie de París. Teniendo en cuenta la equivalencia anterior de 27 mm/dedo, obtenemos 320,76 mm/pie de París.

Esto le permite a Hermann estimar la altura mínima de la atmósfera en 26.400 pies, supuesta uniforme la densidad del aire. Añade que será mucho mayor ya que el aire se reconoce menos denso con la altura.

La altura del agua le sirve para tratar en el siguiente corolario [*Phoronomia* pp. 173-174 nº 318], las bombas elevadoras de agua (*antilae suctoria vel aspirans)*. Describe cómo es y de qué materiales está hecha la bomba (ver fig. 21), y explica que la fuerza que eleva el agua es la misma que mantiene al mercurio, en el tubo comunicado con la atmósfera: *pressio scilicet atmospherae*. Retrayendo, dice, el émbolo (hecho de cuero que encaja en el tubo AB de forma que el aire no pueda pasar desde la cavidad superior a la inferior), desde CD hasta mn el agua entrará por B impulsada por la presión atmosférica.

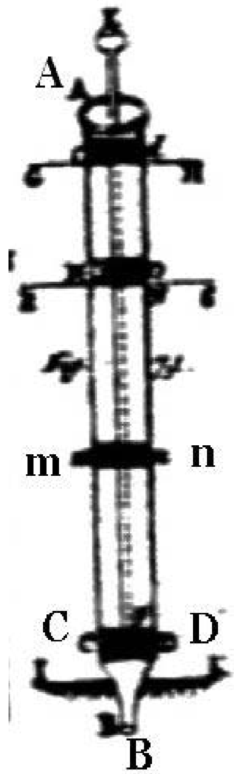


Fig. 21

Como el peso de la atmósfera equilibra el del agua, tal como ha mostrado en la proposición, el agua podrá subir hasta la altura máxima de 33 pies, fenómeno ampliamente conocido. Aunque estiremos más el émbolo, el agua permanecerá a 33 pies, tal como Galileo consideró, nos dice Hermann.

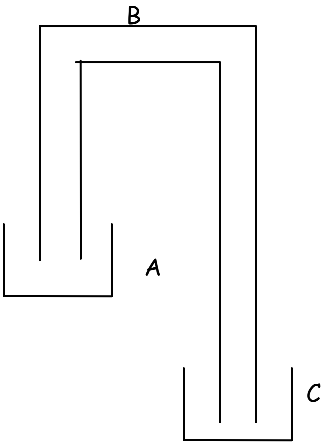


Fig. 22

El siguiente corolario [*Phoronomia* p. 174 nº 319] lo dedica a explicar el fenómeno del sifón (*siphones*). Consiste en un tubo ABC (fig. 22) doblado en forma de U invertida con brazos desiguales. Se observa comúnmente que cuando el tubo está lleno, el agua circula del depósito A al C.

Hermann explica que tal dispositivo no es otra cosa que un barómetro doble. La explicación se basa pues en la del barómetro ya descrito. Al ser la rama AB menor que la CB, la presión en A es mayor que en C, lo que hace que el agua circule desde A hasta C hasta acabar el agua del recipiente A. La diferencia de alturas CB-AB define lo que Hermann llama *vim motricem*, y de ella depende la rapidez de vaciado.

En otro corolario [ibid. nº 320] Hermann define las condiciones de funcionamiento del sifón; no fluirá si:

- Si la fuerza motriz es cero, es decir, si CB-AB = 0
- Si la longitud de la rama corta iguala o excede los 33 pies, que equivalen al peso de la atmósfera. En este el peso de la columna AB equilibraría o superaría el peso de la atmósfera.

Un corolario posterior [ibid. nº 321] explora la formación de vacío (*vacuum)* en el interior del tubo ABC. Ocurrirá en el caso en que la rama AB es menor de 33 pies y la rama BC mucho mayor de 33 pies. La presión de la rama BC sería mucho mayor que la atmosférica en C, produciendo un movimiento de agua que crearía un vacío en B, mayor cuanto más sobrepase BC el valor de 33 pies.

Señalemos que por primera vez aparece en la *Phoronomia* el vacío como tal. Hermann no hace de él un asunto de discusión, como lo fue en el siglo XVII[96], sino que lo incluye de forma natural en sus explicaciones, incluso describe la forma de producirlo mediante el sifón. En un corolario [ibid. nº 322], resuelve el problema de encontrar la longitud del brazo largo BC, conocida la del corto AB, para que conseguir un grado de vacío determinado, dado como la longitud de tubo que no contiene agua.

En el escolio final [ibid. nº 323] explica que la medida de 27 o 28 pulgadas que alcanza el mercurio varía a menudo, obteniéndose de este modo la variación en la presión atmosférica, si el instrumento es lo suficientemente sensible para apreciar

[96] A partir de las experiencias italianas del tubo de mercurio de Torricelli y de su repetición en Francia por Pascal, se produce una discusión sobre si el espacio que queda en la parte superior del tubo está vacío, como piensan Torricelli y Pascal, o lleno de partículas sutiles como piensan Descartes y sus seguidores. Para una exposición de las ideas sobre lo vacío y lo pleno desde la antigüedad hasta el s. XVII ver [Waard C. 1936]

dichas variaciones. Reservará el nombre de barómetro (*barometri)* al que pueda mostrar las variaciones de presión atmosférica con precisión, llamando al resto baroscopios (*baroscopii)*.

Señala los intentos por diseñar barómetros más precisos por parte de:

- Huygens[97] (descrito en *Ephemeridibus Gallicis*)
- De Hire[98] (descrito en *Actis Academiae Regiae Paris* del 21 de marzo de 1708)

Debido a su simplicidad, acaba con la descripción del nuevo barómetro inédito ideado por Johann Bernoulli, y que éste le ha comunicado en privado.

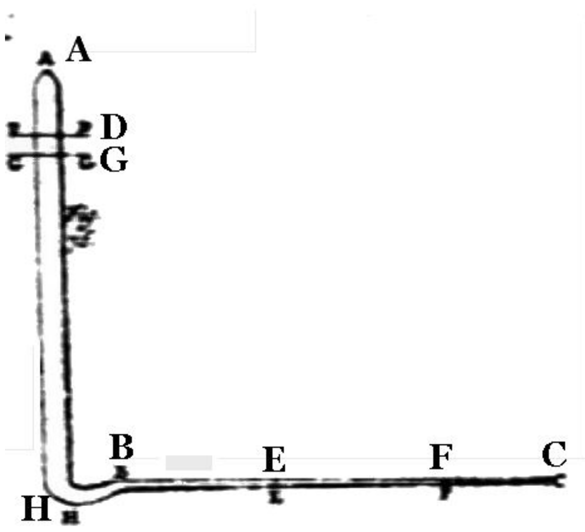


Fig. 23

La mejora en sensibilidad procede del diseño de la cubeta en la que reposa el tubo cerrado vertical tradicional. Dicha cubeta es sustituida por la prolongación en ángulo recto del tubo vertical AHB en otro más delgado BC (ver fig. 23). El barómetro se llena de mercurio desde A hasta E, permaneciendo el extremo C abierto al aire. Las dimensiones deberían ser: altura de la rama vertical AB, 30 o 31 pulgadas, longitud de la rama horizontal BC, 3 pies como mínimo, diámetro de AB 4 líneas[99], diámetro de BC, 1 línea.

El descenso del mercurio en el tubo vertical supone un desplazamiento de igual volumen en el líquido del tubo horizontal. Como este último tiene un diámetro 4 veces

---

[97] *Extrait d'une lettre de M. Huygens touchant une nouvelle maniere de Barometre, qu'il a inventée* (1672), en [HUYGENS C. 1888-1950] T. VII. Correspondance, 1670-1675. pp. 238-241.
[98] *Sur un nouveau baromètre.* Histoire de L'académie Royale des Sciences. 1708. p. 3
[99] Da el valor de 1/12 pie de París como equivalente a 1 línea, por tanto, tendremos aproximadamente 26,73 mm/línea.

inferior, el mercurio alcanzará en el tubo horizontal una longitud inversamente proporcional al cuadrado del radio, es decir, 16 veces más que en el vertical. La sensibilidad por tanto aumenta 16 veces respecto del diseño habitual en el que los tubos tienen igual diámetro.

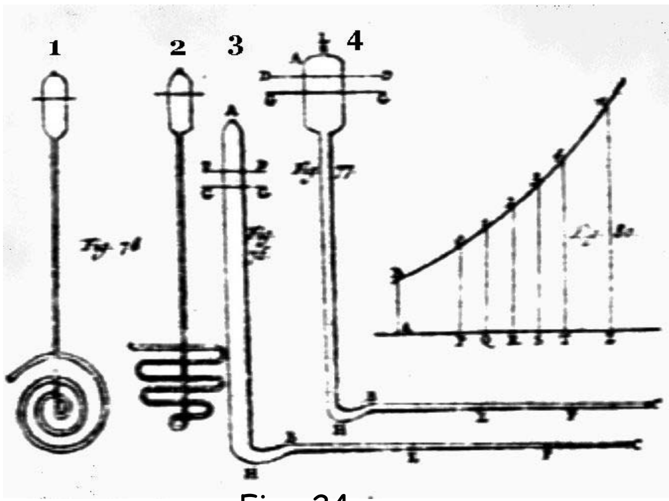


Fig. 24

Para resolver problemas prácticos como la excesiva longitud de la rama horizontal, propone troquelar en espiral la rama horizontal. Además coloca una entrada superior obturable para poder rellenarlo con mercurio fácilmente, y un depósito más ancho en la parte superior del tubo vertical que toma del diseño ya citado de Huygens. Una ligera curvatura en la parte inferior del tubo vertical hace, dice, que el aire no entre por el tubo horizontal al proceder al llenado del barómetro. Podemos ver en la fig. 24 los diversos diseños propuestos.

4.4.2 La elasticidad del aire

El capítulo VI del segundo libro trata de "la fuerza elástica del aire en general" ("*De vi elastica aeris in genere"* [*Phoronomia* pp. 180-189]. En él Hermann sigue el mismo planteamiento de los *Principia* que supone un tratamiento tautológico ya que se pretende deducir la relación de Boyle (densidad proporcional a la presión) a partir de tomar como hipótesis que la presión depende de la distancia intermolecular.

El aire para Hermann tiene una propiedad peculiar, *quantum experimentis constat*, que lo distingue del resto de fluidos líquidos: tiende a expansionarse continuamente si no se lo impide algún cuerpo. A esta propiedad le llama "fuerza elástica" (*Elater seu vis elastica*)[100].

Cita varios autores que han descrito experiencias que prueban tal propiedad: Boyle, Mariotte, Jacob Bernoulli, y la *Aerometria* de Wolff. Resume tres de estas experiencias que considera inequívocas: dos de ellas se basan en introducir objetos en una bomba pneumática; primero considera una vejiga cerrada con un poco de aire en su interior que se hinchará al extraer el aire de la campana de cristal en la que se encuentra encerrada; después explica que si introducimos en la campana de la bomba un recipiente de cristal fino cerrado que contiene aire, al vaciar la campana el recipiente interior a veces se rompe. La tercera experiencia compara el esfuerzo necesario para separar dos hemisferios metálicos vaciados de aire y llenos.

Establecida la realidad de esta nueva propiedad del aire, Hermann discute las teorías que han intentado explicarla. Expone la teoría que sobre la elasticidad del aire había expuesto Parent[101] y que se encuentra en el artículo *Elasticitatem aeris* de L'Histoire de l'Académie royale de 1708[102].

Hermann explica que si se lee el artículo superficialmente, parece que Parent duda de la elasticidad del aire, sin embargo, dice, no es así, ya que Parent sólo niega que las partículas de aire puedan ser consideradas al modo de laminillas dobladas o filamentos enmarañados en espiras, etc.

La teoría de Parent, nos dice Hermann, consiste en explicar la tendencia al mutuo alejamiento, como producida por la cantidad y velocidad de las partículas de éter que pasan por los espacios que hay entre las moléculas de aire.

---

[100] Estos términos son introducidos por Jean Pecquet (1622-1674) en *Experimenta Nova Anatomica* (París 1651), para nombrar la tendencia de las partículas de aire al mutuo alejamiento. Esta obra se considera la introductora de las experiencias de Torricelli, Pascal, y Roberval en Inglaterra, donde serán conocidas por Boyle. [WEBSTER C. 1965; pp. 451-454]

[101] Antoine Parent (1666-1716) [DSB, X, 319-320]

[102] En la p. 17 del texto "*Sur la dilatation de l'aire*" [Histoire de L'académie Royale des Sciences. 1708 pp. 11-19], se describe la teoría de Parent citada por Hermann.

"*Idcirco juxta laudatum Autorem moleculae aerae tanto magis a se invicem recedere conantur, quo abundantior fuerit aetherea materia meatus aeris transfluens, et quo pernicios ejus motus. Ab hac enim materia aetherea vim omnem derivandam esse putat, qua aeris moleculae in alia corpora agere possunt.*" [*Phoronomia* p. 181 nº 326]

Esta teoría de Parent es refutada por Hermann de la siguiente forma. Es sabido, dice, que los fluidos fluyen por lugares estrechos con una velocidad inversamente proporcional a la sección del conducto. Como los líquidos tienen mayor densidad que el aire, la velocidad de las partículas etéreas por entre los conductos de sus moléculas será mayor que en el aire, lo que producirá una mayor fuerza sobre las moléculas de líquido, ya que, tal como demostrará, nos dice, la fuerza de un flujo de partículas está en razón del cuadrado de la velocidad de dichas partículas.

Concluye que, en los líquidos, siguiendo la teoría de Parent, la fuerza elástica es mayor que en el aire, cosa que contradice lo observado. ¿Por qué, pregunta Hermann, el agua no tiene elasticidad? Mucha mayor elasticidad (*elasticitas*) aún tendría el mercurio, acaba afirmando.

Hermann no propone una teoría de la elasticidad alternativa. Afirma que cualquiera que sea su causa física, es suficiente saber que existe, por los experimentos citados[103] realizados con la bomba pneumática (*Autlia Pneumatica*) de Guericke perfeccionada por Boyle.

Notemos la prudencia de Hermann que no niega explícitamente la existencia del éter en toda su obra, sin embargo usa los resultados de la mecánica racional para demostrar la imposibilidad de usar tales partículas etéreas para explicar una propiedad del aire. El éter es sencillamente innecesario en su obra.

[103] *"Verum quicquid sit de causa physica elateris aeris, ad institutum nostrum sufficit aeri vim elasticam inesse, quod praeter experimenta ab initio hujus capitis relata, etiam probari potest effectibus antilae Guerikianae a Roberto Boylio postea magis perfectae,…"* [*Phoronomia* p. 183 nº 327]

Pasa a describir las partes de la bomba pneumática (ver fig. 25) cuya razón de ser es poder extraer el aire del recipiente superior M a través de las sucesivas emboladas (t, s, r, q etc.) en el tubo AG[104] o comprimirlo en la secuencia inversa (T, S, R, etc.). La válvula IK (*spiraculo*) permite cerrar la comunicación entre el tubo del émbolo AG y la campana M. El plato CD contiene agua para evitar indeseadas entradas o salidas de aire.

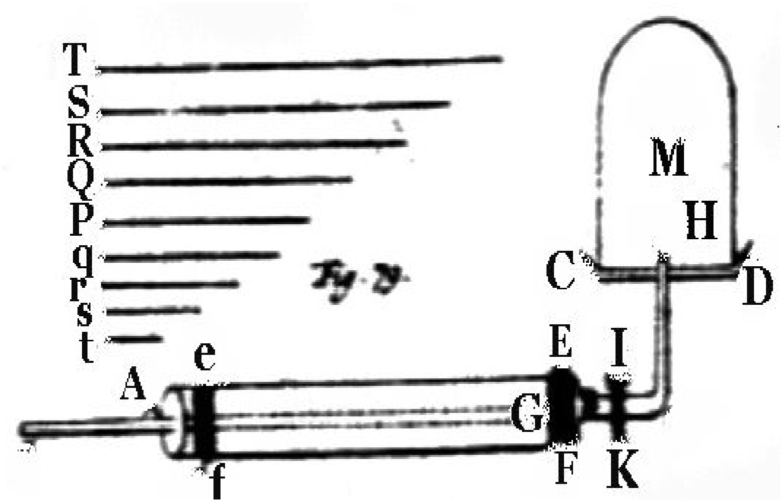


Fig. 25

Hermann demuestra a continuación, basándose en que las raridades sucesivas siguen una progresión geométrica, la relación fundamental de la bomba de aire. Recordando la definición de raridad como el inverso de la densidad, obtiene la siguiente relación que sirve tanto para rarefacciones como para condensaciones del aire:

$$n = \frac{\operatorname{Log}\frac{Z}{P}}{\operatorname{Log}\frac{Q}{P}}$$

Donde:

- n es el número de emboladas realizadas en la máquina
- Z la raridad final tras las n emboladas
- P la raridad inicial o natural antes de hacer funcionar la máquina
- Q la raridad tras la primera embolada

Hermann afirma que tal relación fue establecida sin demostración por Jacob Bernoulli en 1693 y que en 1705 Varignon publica su demostración en las Actas de la

[104] Para una breve historia de la bomba pneumática y sus diferentes diseños ver [WEBSTER C. 1965; pp. 464-465]

Academia de París. La memoria de Varignon que contiene la demostración, que básicamente es la de Hermann, es "*Manometre ou machine pour trouver le raport des raretés ou rarefactions de l'air naturel ...*" [Histoire de L'académie Royale des Sciences. 1705 pp. 300-331]. Varignon indica en la memoria que fue Bernoulli quien da la regla sin demostrar en *de seriebus infinitis* de 1692.

Dedica el capítulo VII a estudiar la relación entre la fuerza elástica y la densidad ("*De viribus elasticis aeris cum densitatibus ejus comparatis*" [*Phoronomia* pp. 189-197]. Hermann nos dice que los "filósofos" han notado que la fuerza elástica crece cuando lo hace la densidad del aire, pero que habrá que examinar si la proporción es simple o compuesta.

A continuación, explica que la presión sobre las paredes que contienen el aire, es un efecto colectivo de la elasticidad de las partículas. Ya que la elasticidad consiste en el empuje de las moléculas del aire en su intento de alejamiento mutuo, la presión sobre la pared que intenta impedir su expansión, será la resultante de las fuerzas que ejercen todas las partículas [*Phoronomia* p. 189 nº 339].

El teorema principal [*Phoronomia* pp. 189-190 nº 340] supone la expansión en una dimensión de un recipiente prismático que contiene aire. Muestra que, tomando como hipótesis que la fuerza elástica es proporcional a la potencia n de la distancia de separación entre dos partículas contiguas, esta misma fuerza elástica es proporcional a la potencia n de la densidad. En nuestra notación: $F \propto D^n$.

El siguiente teorema extiende la demostración anterior para un recipiente que se expande en tres dimensiones. En este caso obtiene que la fuerza elástica sobre una superficie igual en el recipiente original y expansionado es en nuestra notación: $F \propto \sqrt[3]{D^{n+2}}$. Evidentemente en el caso simple en que n=1, es decir suponiendo que la elasticidad es simplemente proporcional a la distancia entre partículas, la fuerza elástica queda proporcional a la densidad del aire.

Tal como afirma Hermann, éste es el resultado contenido en el escolio de la prop. XXIII del segundo libro de los *Principia*[105]. De hecho, la figura y los razonamientos que acompaña la demostración de Hermann son similares a los empleados por Newton.

En ambos casos se parte de la hipótesis de que la presión es inversa a la distancia intermolecular, que se toma como constante para todas las moléculas y no de forma estadística, dejando indeterminada la potencia n de dicha proporcionalidad. Con esto, se demuestra la proporcionalidad directa entre presión y densidad según el exponente n. Como la distancia intermolecular es inversamente proporcional a la densidad, estas demostraciones tienen un carácter tautológico. La primera deducción de la ley de Boyle a partir de la teoría cinética de las partículas, se encuentra en al *Hydrodynamica* de Daniel Bernoulli.

En la proposición XXIII establece que la relación entre presión y volumen corresponde a una hipérbola, y describe a continuación la experiencia que usa tubos en forma de J para comprobar la relación inversa entre volumen y presión. Experiencias, nos dice, ya realizadas cuidadosamente por Boyle[106], Mariotte, Bernoulli entre otros. Finalmente resuelve problemas en los que obtiene la altura del mercurio en un tubo de Torricelli que contiene aire encerrado junto con el mercurio y que, tal como muestra Hermann, equivalen a las encontradas por Jacob Bernoulli en su *De gravitate Aetheris* (Ámsterdam 1683).

4.4.3 Modelos atmosféricos

El capítulo VIII de la sección primera del segundo libro trata del estudio de la densidad del aire a diferentes alturas atmosféricas, y esto para cualquier hipótesis

---

105 Este teorema es el último de la sección V del segundo libro de los *Principia* que trata "Sobre la densidad y compresión de los fluidos: hidrostática". Newton llama a la elasticidad fuerza centrífuga. [NEWTON I. 1687 b. pp. 694-699]

106 Ver el cap. X. *Boyle's Experiments on the Compression and Dilatation of Air* [WEBSTER C. 1965; pp. 484-487]

sobre su elasticidad ("*De densitatibus aeris in diversis Atmosferae locis in omni possibili elasticitatum hypothesi.*") [*Phoronomia* pp. 197-212]. Destaquemos como de nuevo el teorema principal consiste en un principio energético (trabajos virtuales) en una situación estática.

Nos indica nada más comenzar que sólo considerará el peso como causa de los cambios de densidad del aire, y no tendrá en cuenta el efecto que sobre la misma inducen el calor o el frío[107].

Esta sección ilustra de nuevo el método general que sigue Hermann en su obra; desarrolla teoremas generales que usan el cálculo diferencial e integral en forma geométrica, para posteriormente obtener, como casos particulares, resultados ya conocidos y otros de su propia cosecha. Hacemos a continuación un resumen de sus resultados. Construye un gráfico (fig. 26) con 5 variables interconectadas:

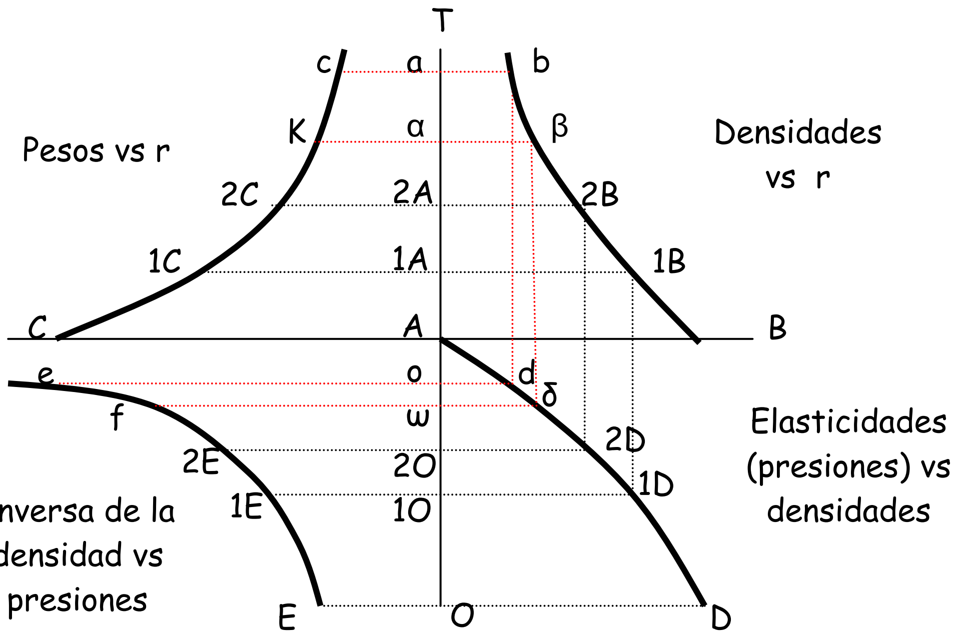


Fig. 26

[107] Tal como sabemos, el problema del estudio del aire requiere considerar la ecuación de estado de los gases que contiene las variables: presión, volumen, densidad y temperatura. Hermann hace su estudio sin tener en cuenta las variaciones de temperatura, es decir a T=cte.

- El eje vertical AT representa las alturas atmosféricas consideradas A, 1A, etc (que llamaremos r).
- La curva C (*Scala gravitatis variabilis*) expresa los valores de los pesos del aire 1A1C, etc. para cada altura de la atmósfera A, 1A, etc.
- La curva B (*Scala densitatum*) representa el valor de la densidad atmosférica para cada altura A, 1A, etc.
- La curva D (*Scala elasticitatis aeris*) representa los valores A1O, A2O, etc. de la elasticidad del aire para cada densidad OD= , 1OD, etc.
- La curva E (*Reciprocam scala elasticitatis*) representa los valores EO, 1E1O, etc. recíprocos de cada elasticidad OD, 1O1D, etc. De forma que el producto EO.OD = 1E1O.1O1D = etc.

Establece un axioma [*Phoronomia* p. 198 nº 358] que expresa la condición de equilibrio atmosférico, es decir, que el peso (p) de la atmósfera es en cualquier lugar equivalente a la elasticidad del aire (P) en ese lugar. Es decir $\frac{p}{\Delta S} = \mathrm{P}$

A partir del axioma y con la construcción anterior demuestra el teorema principal [*Phoronomia* p. 199 nº 359]. Considera primero un cambio diferencial de altura aα (en rojo en el dibujo), para después integrar, llegando al siguiente resultado de igualdad de áreas: ACca = OEeo. Y Esto para cualquier ca y eo.

En nuestro lenguaje constituye un "teorema energético virtual" (el trabajo del peso equivale al trabajo de compresión del aire): $\int_0^H p dr = \int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}} \frac{1}{\rho} \mathrm{dP}$

Donde p es el peso, r la altura, P la presión y la ρ densidad.

En el corolario I [*Phoronomia* p. 199 nº 360] supone que la curva de densidad es una parábola general de grado m, y que la del peso es una hipérbola general de grado n; esto implica que la curva inversa de la densidad es una hipérbola de grado m. Escribimos las hipótesis así:

$$\rho \propto P^{m} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \propto \frac{1}{P^{m}}$$

$$p \propto r^{-n}$$

De este modo Hermann deja abierta en su demostración la posibilidad de que la proporcionalidad entre densidad y presión, así como entre peso y distancia al centro de fuerzas, sea simple o compuesta.

A continuación realiza las integraciones de su teorema general siguiendo el algoritmo ya explicado por él[108], y obtiene una expresión que da la densidad en función de la altura r: $\rho \propto r^{\frac{mn-m}{m-1}}$

El interés de Hermann es mostrar que tanto los casos demostrados, como los citados y no demostrados por Newton en el escolio posterior a la proposición XXII del libro II de los *Principia*[109], se deducen como casos particulares de su teorema general. Para ello, particulariza la ecuación con n =2 (que corresponde a la ley newtoniana del inverso del cuadrado para el peso) y m variando según: m = ¾; m = 3/5; m = 3/2.

Estudia el caso m=1, que implica la proporcionalidad de la densidad con la presión (la curva de presiones es una recta), para el que la expresión anterior no es válida [Ibíd. nº 361], llegando a la conclusión de que la densidad forma una progresión continua.

Hermann deduce en un corolario posterior [Ibíd. nº 362], que con m=1 y en el caso general en que $p \propto \frac{1}{r^{n}}$, las densidades forman también una proporción continua.

De nuevo particulariza obteniendo los casos que corresponden a los estudiados o citados por Newton:

[108] Ver la exposición y discusión del algoritmo de integración en el capítulo dedicado al cálculo diferencial e integral.

[109] Newton trata la variación de la densidad del aire con la altura en ciertos casos en la sección V de segundo libro de los *Principia* dedicado a la Hidrostática [NEWTON I. 1687 b; pp. 687-699]

- n =1 [Ibíd. nº 363] que corresponde, nos dice, a la proposición XXI demostrada en los *Principia*[110].
- n = 2 [Ibíd. nº 364]. Corresponde a la demostración de la proposición XXII de los *Principia*[111].
- n = - 1 [Ibíd. nº 365]. Corresponde al caso citado sin demostración en el escolio posterior a la prop. XXII citada.
- n = 0 [Ibíd. nº 366]. Corresponde a considerar que el peso es constante, lo que es cierto para pequeñas alturas. En este caso deduce que la ley de densidad es logarítmica con el inverso de la altura r: $r \propto \log \frac{1}{\rho}$. En su lenguaje, la densidad decrece en progresión geométrica cuando la altura crece en progresión aritmética. Hermann nos indica que fue el caso estudiado por Halley[112], pero no dice que es también un caso citado por Newton sin demostración en el escolio posterior a la prop. XXII mencionada.

Finalmente, Hermann llega a la llamada fórmula barométrica [Ibíd. nº 369] para el último caso, es decir considerando el peso del aire constante con la altura (n=0) y su densidad proporcional a la presión o elasticidad (m=1).

En nuestro lenguaje la relación es: $\frac{r_1}{r_2} = \frac{\log \frac{\rho_0}{\rho_1}}{\log \frac{\rho_0}{\rho_2}}$. Hermann explica cómo, conocidas las alturas barométricas en tres lugares ρ_0, ρ_1 y ρ_2 y la altura r_1 entre las dos primeras, la proporción permite calcular la otra altura r_2. En un escolio final [Ibíd. nº 370] lo aplica a un ejemplo numérico que extrae de la obra *Tentamine De Natura Aeris* de Mariotte (pp. 194-195).

110 [NEWTON I. b 1687; p. 692]
111 [Ibid. p. 694]
112 Halley publica su fórmula barométrica en 1686. Halley, Edmund, "*On the height of the mercury in the barometer at di.erent elevations above the surface of the earth: and the rising and falling of the mercury on the change of weather*", Phil. Trans. Royal Soc. of London **16**, 104-116. Ver [BERBERAN N.M. (et al) 1997]

5 LA DINÁMICA EN LA FORONOMIA

La sección segunda del primer libro está dedicada al estudio del movimiento de cuerpos sólidos sometidos a solicitaciones continuas.

Hermann hace un estudio deductivo de la dinámica, mostrando primero unos principios generales o leyes, de los que obtendrá muchos de los resultados ya conocidos, pero deducidos de forma diferencial. Para ello hace primero un trabajo de construcción conceptual que tal como veremos es de gran riqueza, a pesar de que no establecerá nombres explícitos para algunos de los conceptos que maneja con profusión.

Las demostraciones de los principios generales son realizadas en referencia a construcciones geométricas, usando lo que caracterizamos como "geometría diferencial". Esta es la etapa previa al "álgebra diferencial" que caracteriza la "mecánica analítica" de Lagrange de 1788, que históricamente va desarrollándose hasta hacerse independiente de la geometría. Es interesante destacar que en Hermann se da una mezcla de ambas técnicas; veremos cómo algunas de las deducciones de Hermann son puramente algebraicas, lo que nos indica de qué modo se está produciendo la transición metodológica y conceptual hacia una mecánica analítica independiente de la referencia geométrica.

Hermann consigue en su exposición dinámica fundamentalmente tres cosas: definir conceptos mecánicos en su forma diferencial, establecer deductivamente los resultados sobre unos principios generales, y mostrar caminos de aplicación del cálculo diferencial a la mecánica. Mostraremos de qué modo lo consigue.

Veremos cómo Hermann procede a una reestructuración de los principios dinámicos en relación a los resultados representados en los *Principia,* y cómo muchos de los resultados dinámicos de la *Phoronomia* suponen una reformulación diferencial, pero también un intento de demostración más sólida, de problemas inaugurados por Newton. Estas tareas constituyen también objetivos de los principales actores de la reformulación mecánica, principalmente los hermanos Bernoulli y Varignon a comienzos del s. XVIII.

Compararemos el trabajo de construcción conceptual y metodológica de Hermann, con el que Varignon había realizado unos años antes. Para ello usaremos el análisis que hace M. Blay de las memorias de Varignon de 1689 y 1700 en su obra: *La naissance de la mecanique analitique. La science du mouvement au tournant des XVIIe et XVIIIe siècles*. [BLAY M. 1992].

Mostraremos cómo Hermann realiza una conceptualización y una construcción algorítimica independiente de la de Varignon, aunque ambos persiguen el objetivo de fundar una mecánica sobre las bases del cálculo diferencial leibniziano. Ambos desarrollan las imprescindibles herramientas conceptuales infinitesimales (fuerza y velocidad instantáneas). Será Hermann quien escriba la ley fundamental de la dinámica en la forma que adopta en nuestros libros de texto por primera vez. Y quien también por primera vez demuestre el teorema de las áreas usando el nuevo cálculo, y utilizando, como actualmente, la conservación del momento angular. Pero la diferencia que creemos fundamental con el trabajo de Varignon consiste para Hermann en considerar como fundamental un enfoque que ahora identificamos como "energético" (teorema trabajo-energía), y que él llama principio general de de igualdad de momentos. Los trabajos de ambos contienen los dos enfoques que adoptará la mecánica más elaborada, el que usa la segunda ley de Newton y el que utiliza la relación trabajo – energía. Herman usará ambos, pero haciendo hincapié en la potencia de uso del segundo en muchos de los temas tratados en este capítulo. Nos quedará por saber hasta qué punto ambos enfoques (y autores) sirven de inspiración a Euler y después a Lagrange en sus magnas construcciones.

Hemos dividido este capítulo de la monografía en dos apartados principales en los que Hermann establece las leyes generales del movimiento y las leyes básicas específicas de las fuerzas centrales. Hermann en los últimos capítulos de su dinámica se ocupará también de otros temas dinámicos, como la caracterización de las fuerzas centrales en órbitas móviles, las leyes del movimiento pendular y las leyes de los choques, así como el movimiento en medios resistentes, todos ellos tópicos del momento, pero que, dada la extensión de esta monografía, trataremos de modo esquemático, en espera de una mayor concreción.

5.1 LAS LEYES GENERALES DEL MOVIMIENTO Y SUS APLICACIONES

El capítulo I de esta segunda sección trata sobre las solicitaciones generales aplicadas continuamente, y del movimiento que estas originan en el vacío[113]. La dinámica general comienza con 12 definiciones [*Phoronomia* pp. 51-55], un postulado y un lema. En las primeras 7 definiciones establece la descomposición de fuerzas que usará en los estudios dinámicos, así como las escalas geométricas asociadas:

I. Define el vacío (*vacuum*) como el medio que no afecta al movimiento de los cuerpos. Ver el apartado 3.5 de este trabajo para una discusión del concepto de vacío y materia y la posición de Hermann sobre el éter.

II. Solicitaciones centrales o de gravedad variable *(Solicitationes centralis* o *solicitationes gravitatis variabilis)*: aquellas concurrentes en un punto llamado "centro de solicitaciones". Nos dice, también llamadas por Newton "fuerzas centrípetas". Vemos aquí como la terminología de de Hermann hace converger las de Newton y la de Leibniz[114]. Solicitación (Leibniz) equivale a fuerza (Newton), eliminando las distinciones poco prácticas de Leibniz.

[113] *De generalibus solicitationum continuatarum affectionibus, et de motibus in vacuo inde oriundur.*
[114] Ver el apartado 3.3 de este trabajo, en el que se discuten las interpretaciones de Newton, Leibniz y Hermann del concepto de fuerza.

III. Solicitaciones continuas *(Solicitationes continuari)*: aquellas continuamente aplicadas al cuerpo durante todo su trayecto. Se consideraba en el s. XVII y en la mitad del XVIII que la fuerza actuaba por impulsos repetidos sobre el móvil[115].

IV. Escala de solicitaciones centrales o de gravedad variable: en este caso y por primera vez usa las coordenadas polares para representar el valor de la fuerza central en cada punto de la trayectoria seguida por el móvil.

V. Solicitación tangencial: aquella parte de la fuerza central que empuja en la dirección tangencial en el punto de la curva que representa la trayectoria.

VI. Solicitación perpendicular: aquella parte de la fuerza central perpendicular a la tangente en cada punto de la trayectoria. Esta fuerza es la que desvía continuamente al cuerpo de la dirección tangente que describiría si no actuara la fuerza central. Es de hecho, nos dice, opuesta al impulso que intenta separar al cuerpo de la curva en cada punto. Así mismo, explica que no será necesaria una escala para estas fuerzas, ya que se equilibran en todo momento con el impulso de alejamiento.

VII. Escala de solicitaciones tangenciales: curva que representa en coordenadas polares la fuerza tangencial en cada punto de la trayectoria.

---

[115] Ver la nota anterior.

A continuación, representa las escalas en un diagrama múltiple (fig. 27), de forma que:

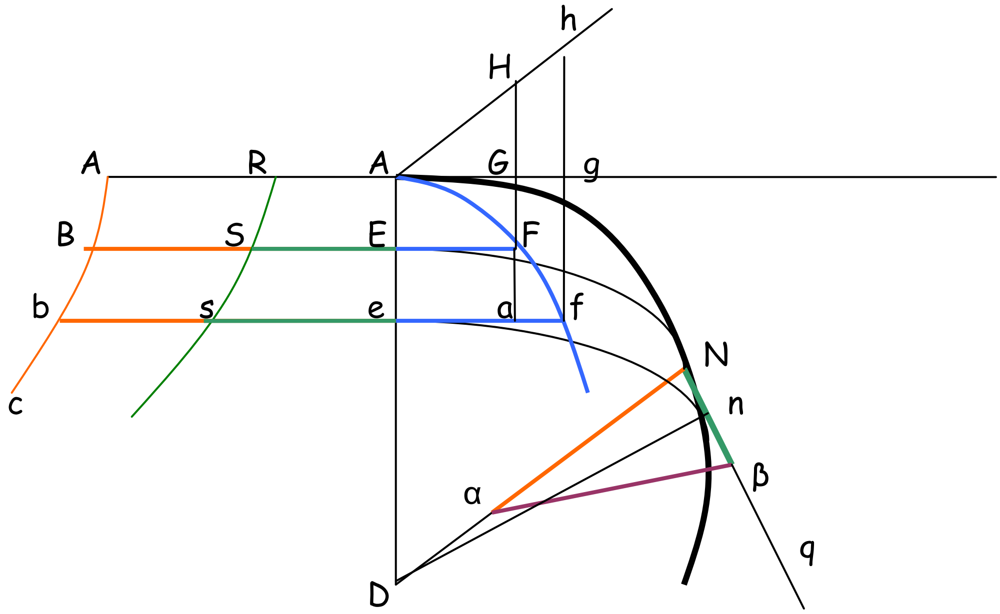


Fig. 27

- ANn (línea negra de la figura) es la trayectoria del móvil en la que se consideran dos puntos infinitamente próximos N y n cuyas distancias al centro de fuerzas D son ED = ND y eD = nD respectivamente.
- Nα = EB es la solicitación central en el punto N respecto del centro D. Igualmente eb representa la solicitación en n. La escala ABbc es la de fuerzas centrales para cada distancia a D representada en el eje vertical AO.
- Nα tiene las componentes: tangencial Nβ y perpendicular αβ
- La componente tangencial Nβ = ES y la que corresponde a nα = es. Por lo que la curva RSs es la escala de fuerzas tangenciales.

En las siguientes definiciones conceptualiza una serie de magnitudes asociadas a la aplicación de fuerzas y que necesitará para demostrar los principios generales de su dinámica:

VIII. Solicitación acelerante o retardante según el cuerpo descienda acercándose al centro O, o ascienda alejándose de O.

IX. Momento de una solicitación: producto de la fuerza por la distancia infinitesimal recorrida Nn. En el diagrama el momento de EB será BE.Ee (rectángulo BEe) y el momento de ES será ES.Ee (rectángulo SEe). La nueva magnitud definida por Hermann supone considerar el momento diferencial de una fuerza.

X. Escala de celeridades: curva AFf asociada a la de solicitaciones en cada punto N de la trayectoria.

XI. Momento de la celeridad: producto de la velocidad en un punto N por la variación infinitesimal de velocidad af entre dos puntos próximos N y n de la trayectoria. Este es un concepto original de Hermann que representa para nosotros un diferencial de energía cinética. Lo usará para la demostración de uno de sus teoremas principales, el que en lenguaje actual llamamos "de las fuerzas vivas", y que exponendremos enseguida.

XII. Representación algebraica del tiempo transcurrido: usa la simbología tAE para indicar el tiempo transcurrido desde que el móvil está en A hasta que llega a E, etc. Veremos a continuación que representa una variación infinitesimal de tiempo como dT y también como tNn, lo que nos indica una vez más la mezcla de símbolos geométricos y algebraicos que usa Hermann en toda su obra.

La representación del diferencial de tiempo como dt, ausente en la obra de Newton, aparece con Leibniz, tal como vemos por ejemplo en la demostración del problema de la curva isócrona planteada como reto a los cartesianos en el texto: *"Reponse de M. L. à la remarque de M. l'abbé D. C. contenue..."* que Leibniz publica en 1687 en *Nouvelles de la République des Lettres*[116]. También Varignon desde los artículos de 1698 representa un instante como dz[117].

Tal como explica M. Blay en la obra citada[118], la expresión algebraica del tiempo permitirá resolver cuestiones relativas a este parámetro físico básico, como los conceptos que aparecen como consecuencia de considerar sus variaciones temporales: la velocidad en un instante, la aceleración y la fuerza. El trabajo de Hermann está pues en la línea de estas avances conceptuales.

Tras la definición de magnitudes y escalas establece el postulado siguiente: podemos considerar que el movimiento es uniforme en un "elemento" (diferencial) de espacio Ee o Nn. Hermann explica que el movimiento no es de velocidad constante sino que sufre un incremento (o decremento) de velocidad infinitesimal, pero como este diferencial se puede suprimir al ser sumado (o restado) a una cantidad finita, podemos tomar la velocidad como constante. En símbolos diferenciales diríamos que: $v + dv = v$. Esta era una suposición común en la época, basada en la algoritmización diferencial de Leibniz.

Un corolario [*Phoronomia* p. 55 nº 128] establece las relaciones cinemáticas en un elemento de distancia donde el movimiento, como ha postulado, puede considerarse uniforme. Con sus símbolos (EF representa la velocidad) queda: tEe = Ee:EF y tNn = Nn.EF de donde Ee = EF. tEe y Nn = EF.TNn. Equivale a escribir tal como hace Hermann un poco más adelante de modo algebraico [*Phoronomia* pp. 64-65 nº 145]:

$$\mathbf{dt = dr:v \quad y \quad dr = v\,dt} \qquad \mathbf{5\text{-}a}$$

[116] Ver [BLAY M. 1992 pp 123-125]
[117] Blay Op. Cit. p. 156
[118] Ibíd. p. 112

Hermann está dando implícitamente la expresión de la velocidad en un instante[119] v o velocidad cuando se recorre un dr en un dt. Esto le permitirá escribir por primera vez en la historia la segunda ley de Newton en su forma diferencial idéntica a la actual.

Si comparamos el trabajo conceptual de Hermann con el que realizó Varignon en la memoria presentada a *l'Académie* en 1698 [120], en la que define explícitamente la velocidad instantánea como cociente de diferenciales v = dr:dt, vemos que Hermann dispone de las relaciones para la velocidad instantánea, ya que aunque no expresa en este capítulo la tercera expresión en la que la velocidad está aislada, sí la ha dado en su definición de velocidad (ver 3.2).

La inclusión de estas relaciones cinemáticas por parte de Hermann en el corolario de un postulado, permite pensar que para Hermann las relaciones diferenciales en un elemento de distancia se dan de forma natural. Varignon sin embargo convierte la definición explícita de velocidad instantánea en una de sus reglas básicas de cálculo.

Para Hermann no hay problema de homogeneidad de magnitudes en este caso, ya que Hermann había definido la velocidad en un movimiento uniforme como cociente entre espacio y tiempo en las definiciones preliminares de la *Phoronomia*[121]. Su extensión para un diferencial es inmediata.

Blay en la obra citada[122], ha analizado manuscritos de Leibniz relacionados con una memoria de 1689. En ellos Leibniz enuncia un "principio general" (*principium generale*) que expresa la relación diferencial dr = v dt que supone, en palabras de Blay, una definición operativa no explícita de la velocidad instantánea, y que supone "sólo" una

[119] Afirmamos que es "implícita" porque Hermann no usa los términos "velocidad instantánea", o como veremos a continuación en el caso de la fuerza, no usa la expresión "fuerza instantánea" pero sí sus expresiones algebraicas.
[120] La construcción del concepto de velocidad instantánea por Varignon ha sido analizado en la obra de M. Blay [BLAY M. 1992 pp. 153-179]
[121] Ver el apartado 3.2 de esta monografía donde se analiza el concepto de velocidad en Hermann.
[122] Ibíd. pp. 126-132

transposición algebraica y diferencial de las relaciones geométricas con las que trabajaron Galileo y Newton. Hermann establece en la *Phoronomia* una relación similar a la de Leibniz, añadiendo la expresión para dt = dr:v, aunque fue Varigon, unos años antes, quien explicita el concepto de velocidad instantánea y quien desarrolla algoritmos para obtener una de las magnitudes cinemáticas conociendo las otras, como analiza la obra de Blay.

Podemos esquematizar lo establecido por Hermann diciendo que:

- Descompone la fuerza central en tangencial y perpendicular[123].
- Usa la representación polar para las escalas: de la fuerza central, de su componente tangencial y de la velocidad en cada punto.
- Conceptualiza dos nuevas magnitudes: el momento de una fuerza (F.dr) y el de la velocidad (vdv) para un elemento de movimiento.
- Extiende la descripción a cualquier movimiento acelerante o retardante y a movimientos en línea recta AO o en una curva ANn.
- Establece algebraicamente la relación: *espacio = velocidad · tiempo* en un elemento de distancia recorrido y tiempo = espacio : velocidad, es decir, puede manejar la velocidad en un instante, sin explicitar su definición.

Un lema establece la relación entre las coordenadas polares, distancia r al centro de fuerzas D y el ángulo α, con el arco correspondiente. Diríamos con símbolos distintos de los de Hermann, que cualquier ángulo α puede ser expresado por el cociente entre el arco s y el radio r correspondiente (α= s:r).

- <u>Primera formulación histórica de la "ley fundamental de la dinámica" en su forma diferencial actual</u>

[123] Euler usará en su *mechanica* de 1736 la descomposición en coordenadas cartesianas, con la que resultará más fácil resolver problemas de cualquier tipo, al aplicar en cada eje, la que hoy conocemos como ley fundamental de la dinámica F_{neta} = m. a.

La proposición XVI y el escolio que le sigue constituyen la expresión detallada dada en lenguaje equivalente al actual, de la que hoy conocemos como segunda ley de Newton o ley fundamental de la dinámica. La proposición dice: "Toda solicitación actuando uniformemente, equivale al movimiento generado, divido por el tiempo en el que el movimiento mismo se produce."[124] Con los símbolos de Hermann: $G = \frac{\mathrm{M.V}}{\mathrm{T}}$ (Ibídem) donde T es el tiempo durante el que actúa la fuerza y:

- G es la solicitación continuamente replicada que nosotros llamaríamos "fuerza instantánea". Aquí Hermann indica que de no ser repetida sería una "fuerza muerta"[125] que no produciría movimiento.
- M.V es el producto de la masa por la velocidad del móvil, o "movimiento generado" ("*motus generandus*") que Hermann llama también "cantidad de movimiento" ("*motus quantitates*")

Supone la algebrización de la segunda ley de Newton presente en los *Principia* de forma retórica y ambigua, ya que en la definición de fuerza motriz es el cambio de movimiento en un tiempo dado y en la segunda ley como cambio de movimiento (movimiento equivale a cantidad de movimiento). Hermann tiene en cuenta la masa en el movimiento generado y considera el tiempo en el que se produce el cambio.

En el escolio posterior, Hermann generaliza el resultado anterior estableciendo la ecuación en su forma diferencial, válida para cualquier fuerza G[126] en un intervalo de tiempo dT. El razonamiento es el siguiente: supongamos que G es variable de cualquier modo; si consideramos su acción durante un intervalo infinitesimal de tiempo dT, el móvil adquiere una velocidad dV que al ser en un intervalo infinitesimal podemos suponer uniforme, por lo que tenemos la relación general:

[124] "*Omnis solicitatio uniformiter agens aequivalet motui genito, applicato ad tempus, quo motus iste producitur*." [*Phoronomia* p. 56 nº 130]

[125] Para Hermann como para Leibniz, si la fuerza actúa sólo en un instante no produce movimiento, se trata de fuerzas muertas. Ver el capítulo 3.3 de este trabajo donde se discute el concepto de fuerza.

[126] Hermann llama a G indistintamente: "solicitación central", "peso" (*pondus*) o "gravedad" (*gravitatem*), pero al generar cualquier movimiento rectilíneo o curvilíneo, puede ser cualquier tipo de fuerza.

$$G = \frac{M\,dV}{dT} \qquad \text{5-b}$$

Hermann expresa por primera vez después de los *Principia* de Newton, la ecuación fundamental de la dinámica en la forma general en que podemos encontrarla en los textos de física actuales. Recordemos Newton describe la segunda ley en los *Principia* verbalmente sin introducir símbolos algebraicos.

En este punto tenemos que comparar una vez más el esfuerzo de Hermann con el que unos años antes ha realizado Varignon, y que ha sido expuesto y analizado en la monografía de M. Blay [BLAY M. 1992]. Varignon y Hermann se proponen traducir en lenguaje diferencial los resultados de la dinámica de su época, en especial los resultados de los *Principia*, pero tenemos que resaltar que estos autores se esfuerzan también por encontrar principios generales a partir de los que poder deducir la mayor parte de resultados dinámicos.

Varignon presenta en 1700 dos memorias en l'Académie[127] que se publican en 1703. La primera, que integra los resultados de la memoria cinemática de 1698, y de la que hemos hablado a propósito del concepto de velocidad en un instante, estudia las fuerzas centrales para establecer un conjunto de relaciones entre las magnitudes: velocidad, espacio, tiempo y fuerza, de forma que puedan ser determinadas a partir del conocimiento de una de ellas. En este trabajo Varignon define a partir de la "velocidad en un instante", la variación de velocidad dv como $ddx{:}dt^2$ para dt constante. A partir de esta última expresión y apoyándose en el modelo galileano de caída de cuerpos, llega a la expresión de "fuerza en un instante" como: $F = dv : dt = ddx : dt^2$ [Ibíd. p. 185] que usará como una de las sus *"Règles générales des mouvemens*." para estudiar movimientos en línea recta y en curvas en su segunda memoria de 1700.

[127] [BLAY M. 1992 pp. 180-221]

Notemos que ni Hermann ni Varignon poseen como concepto diferenciado de la aceleración o variación de velocidad con el tiempo, aunque trabajen con la variación de velocidad. En [*Phoronomia* p. 102 nº 200] cuando hace el estudio del movimiento de los péndulos compuestos da la siguiente definición:

"Se dice que los péndulos compuesto CPQ o el simple CN aceleran igualmente, cuando la celeridad se incrementa infinitesimalmente por la solicitación central de la gravedad en cualquier pequeño tiempo mínimo ..."[128]

Desde Galileo se usa verbalmente *aceleratio*[129] como cambio de velocidad, pero sin que existan definiciones explícitas y sobre todo, sin que aparezca un símbolo algebraico diferenciado, señal de su conceptualización como objeto separado en la formulación mecánica.

Es evidente que Hermann sigue su propio modo de construcción deductiva de la dinámica independiente de la de Varignon, aunque éste último al disponer del concepto explícito de velocidad instantánea, puede dar una expresión de la fuerza con la diferencial segunda del espacio.

Hermann posee, así mismo, una expresión no explícita de la fuerza instantánea con la relación 5-b. Dispone pues de las relaciones para trabajar con la fuerza y la velocidad en un instante que, tal como veremos a continuación, le permitirán obtener resultados de forma diferencial muy potentes en el estudio dinámico de las fuerzas centrales. Exponemos a continuación los principales.

[128] "*Motus penduli composti CPQ et simplicis CN similiter accelerari dicuntur, cum celeritastis incrementa infinitesima a solicitationibus gravitatis centralibus quolibet tempusculo minimo ...*"
[129] [GALILEO G. 1988 p. 16]

- Teorema diferencial de las "fuerzas vivas"[130]: El momento de una fuerza cualquiera es igual al momento de la velocidad por la masa del cuerpo [*Phoronomia* p. 57 nº 132].

Hermann no le da ningún nombre, pero equivale al teorema que hoy conocemos como "de las fuerzas vivas" (o teorema trabajo-energía en otra denominación actual) en su forma diferencial: el trabajo realizado por la componente tangencial de la fuerza en un desplazamiento diferencial ds sobre cualquier curva, equivale al producto de la masa por vdv, que corresponde a nuestra conservación de la energía. Recordemos que las fuerzas perpendiculares a la trayectoria no hacen trabajo. Con símbolos actuales: $F_t\, ds = m\, v\, dv$ (5-c)

Consideramos significativo dar aquí la demostración de Hermann, ya que, aunque toma como referencia la figura, se realiza de modo puramente algebraico. Este teorema es una consecuencia directa de la ley fundamental establecida antes (para nosotros 2ª ley de Newton). Usaremos la simbología actual para facilitar la comprensión.

Parte de la ley fundamental que ha establecido (ver 5-b), y que es la segunda ley de Newton: $F = m\, dv{:}dt$.

La rescribe teniendo en cuenta que la componente tangencial F_t de la fuerza central es la única que interviene en la variación del movimiento, esto es:

$$F_t\, dt = m\, dv$$

Multiplica ambos lados por la velocidad v supuesta constante en un diferencial de tiempo, tal como justificó en el postulado inicial del capítulo:

[130] La denominación corresponde a la actual y está relacionada con la polémica de las "fuerzas vivas" que se desarrolla a finales del s. XVII, a partir de la crítica que hace Leibniz de la dinámica cartesiana. Leibniz llamará "fuerza viva" a lo que conocemos hoy por energía cinética. El debate, reavivado a partir de la publicación de la correspondencia Leibniz-Clarke en 1717, se extenderá a lo largo del s. XVIII. Su resolución será posible cuando se puedan construir los conceptos diferenciados de fuerza y de energía que permanecían mezclados en la polémica. Ver sobre la polémica: [DUGAS R.1954 pp. 466-483] y [HANKINS T. L. 1965]

$$F_t\, vdt = m\, vdv$$

Finalmente usa la relación en la que introdujo la velocidad en un instante (5-a) y llega a la expresión final: $\mathbf{F_t\ ds = m\ v\ dv}$

Hermann identifica al final el producto vdv con un fragmento del área del triángulo auxiliar que construye sobre la figura (fig. 27). Para representar el área que corresponde al momento de velocidad construye el triángulo auxiliar AGH, de modo que vdv = GHgh. Hermann necesitará esta asociación con una figura para hacer la integración, que en este caso sí será puramente geométrica.

Si la trayectoria es la recta AD, la fuerza central no tiene componentes, en este caso es la fuerza total la que hay que considerar en la ecuación. Con esto quedan cubiertas todas las opciones, tanto si las fuerzas centrales actúan en trayectorias curvas cualesquiera como si actúan en una misma dirección.

Señalemos que Varignon en la memoria de 1700 citada[131] muestra cómo, a partir de sus dos reglas en las que ha definido la velocidad y la fuerza en cada instante, puede deducir resultados de la cinemática galileana y de la dinámica newtoniana. En particular deduce la relación 5-c.

La diferencia con Hermann es que éste destaca como principio, tal como veremos un poco más adelante, la conservación de la energía, cuya potencia deductiva resulta más fácil en muchas situaciones en las que la segunda ley de Newton sería farragosa.

- Teorema integral de las "fuerzas vivas":

En el teorema de la prop. XIX [*Phoronomia* p. 57 nº 132] Hermann hace la integración del resultado diferencial anterior, llegando a las siguientes dos resultados:

[131] [BLAY M. 1992 pp. 153-179]

1º. Si dos móviles iguales sometidos a las mismas fuerzas centradas en D, pero uno de ellos moviéndose por o por la curva AN o cayendo por la recta AD, adquieren la misma velocidad si han recorrido la misma distancia r (equidistantes de D, nos indica Hermann) partiendo del reposo; En nuestro lenguaje, demuestra que dos móviles que caen desde la misma altura por distintos caminos alcanzan la misma velocidad.

2º. El cuadrado de la velocidad de cada uno de los móviles es igual al doble del área AZBEA para masa unidad. Es decir, en nuestro lenguaje:

$$v^2 = 2W \qquad (5\text{- d})$$

(Siendo W el trabajo necesario para alcanzar la velocidad v desde el reposo, que es la integral de Fdr, o área AZBEA). O como escribimos hoy: $\mathbf{W = \frac{1}{2}\, m\, v^2 = \Delta\, E_C}$ (el trabajo realizado por las fuerzas es igual a la variación de la energía cinética E_C). Observemos que Hermann ha tomado el valor unitario para las masas.

La demostración integral es puramente geométrica. Trabaja ampliando las áreas diferenciales en la figura, hasta obtener igualdad entre dos áreas finitas. No usa el algoritmo integral algebraico que desarrolló cuando se proponía estudiar las formas que adopta una cuerda sometida a fuerzas cualesquiera[132].

Estas relaciones están contenidas en los *Principia* en las proposiciones 39 y 40 del libro I [NEWTON 1687 pp. 122-127], donde Newton demuestra respectivamente que: la velocidad en un punto de la trayectoria es como la raíz cuadrada del la superficie que forma en la fuerza con el desplazamiento radial, y que las

[132] Ver en este trabajo el apartado "El cálculo diferencial e integral: entre la geometría y el álgebra"

velocidades de caída por distintas trayectorias serán iguales si los móviles recorren la misma altura[133].

La aportación de Hermann consiste en considerar está ecuación, tal como veremos a continuación, como una de las dos ecuaciones básicas de su modelo deductivo de la dinámica. Por un lado Hermann usa el nuevo concepto de "momento de velocidad" junto con el de "momento de fuerza" para las demostraciones que, por otro lado realiza en lenguaje diferencial.

Seguidamente expande los resultados para hacerlos completamente generales, ya que no dependen de la ley de fuerzas centrales supuesta, extendiendo todos los resultados a movimientos retardantes y al caso en que los móviles no partan del reposo.

Haciendo reversible el movimiento acelerado, nos indica en un corolario [*Phoronomia* p. 62 nº 141], que los cuerpos ascienden hasta la misma altura si parten de la misma velocidad tanto por la recta AD como por curva AN.

En otro corolario [*Phoronomia* pp. 62-63 nº 142] explica que la velocidad de caída es igual para móviles que caen desde la misma altura, también si estos distan infinitamente del centro de atracción. Sería el caso de gravedad constante en que podemos considerar el centro de la Tierra infinitamente alejado de nosotros.

Hermann explica que Galileo había postulado este último resultado como evidente en sus Diálogos. Después fue demostrado por Torricelli, y más tarde por Huygens en la prop. VI de la segunda parte de su *Horologium oscillatorium*[134], pero ambos de modo indirecto y sólo en la hipótesis de gravedad uniforme de Galileo.

---

[133] Estos resultados serán usados para demostrar en la proposición 41 [NEWTON 1687 b, pp. 127-129] que: dada cualquier ley de fuerzas centrales, y supuesta la cuadratura de las figuras curvilíneas se puede encontrar las curvas de la trayectoria seguida por el móvil

[134] *Horologium oscillatorium*. (F. Muguet, Paris, 1673) p. 31

❖ Los pesos y las masas son proporcionales

En el largo escolio I [*Phoronomia* pp. 63-64 nº 143-144] Hermann, explica que en las demostraciones anteriores ha supuesto masas M y A iguales. Demostrará que para que las velocidades sean iguales en la caída de dos móviles A y M por dos caminos distintos, las masas y los pesos tienen que ser proporcionales. Hermann nos dice que si las masas no fueran proporcionales a los pesos, las velocidades de caída en el vacío no serían iguales. Esta demostración completa la realizada por Hermann al comenzar su obra para gravedad constante, y que hemos analizado en el apartado 3.5 de este trabajo.

❖ Trascripción algebraico-diferencial de las ecuaciones generales:

En el escolio II [*Phoronomia* pp. 64-65 nº 145] Hermann traslada al lenguaje algebraico-diferencial los principios generales demostrados, estableciendo lo que él llama la primera y la segunda regla. Llamando *g* a la fuerza variable de la gravedad, dx el camino diferencial recorrido, u la velocidad durante ese trayecto infinitesimal y du a su diferencial, tenemos las dos fórmulas fundamentales de la dinámica siguientes:

- "Primera regla" (*prima formula*) equivalente a (5-c): **g dx=u du** (5-e)

(Equivale al teorema de la energía cinética o "ley de las fuerzas vivas" actual). Digamos que esta relación, como queda claro de su demostración, se deduce de ley fundamental de la dinámica, que Hermann considera como segunda ley en su exposición mecánica. Durante toda la obra señalará la potencia deductiva de esta regla *prima*.

- "Segunda regla" (*seconda formula*) equivalente a (5-b): **dt=m du:g** (5-f)

(Equivale a lo que llamamos ahora "segunda ley de Newton")

Tal como hemos comentado, Varignon había considerado como "reglas generales" la expresión de la velocidad instantánea (v = dx : dt) y la expresión de la fuerza instantánea (2ª ley de Newton), en tanto que Hermann considera que sus reglas generales son: también la segunda ley de Newton y la expresión de ley de la energía cinética que hoy también llamamos ley de las fuerzas vivas, y que representa la conservación de la energía, en tanto que toma la expresión diferencial de la velocidad (que para él no es velocidad instantánea de modo explícito) como un postulado.

Vemos pues que ambas algorizmaciones son independientes, lo que nos puede hacer pensar que Hermann no conocía las memorias en las que Varignon construye sus reglas básicas, o simplemente elebora las suyas.

Destaquemos que las reglas de Herman contienen las dos aproximaciones a la mecánica que se darán en años sucesivos; con Lagrange tendremos la aproximación energética, que se añadirá a la aproximación mediante el análisis de las fuerzas que a partir de la segunda ley de Newton había hecho Euler. La ley de las fuerzas requiere el tratamiento vectorial y la energética no, por lo que podemos afirmar que las leyes de Hermann represntan un planteamiento más completo y moderno que las de Varignon.

Tal como iremos mostrando, Hermann hace uso intensivo de la ley energética para resolver muchos de los problemas mecánicos que habían sido ya resueltos. Reconstruye muchas demostraciones y elabora algunas nuevas a partir de este principio, germen de lo que será la mecánica energética de Lagrange.

- <u>Ejemplos de aplicación de las leyes generales del movimiento</u>:

Hermann es explícito en cuanto a la generalidad de los principios y en cuanto al alcance que pueden tener:

"Hasta aquí se han presentado, acerca de los movimientos de cuerpos pesados, unos principios tan generales, que éstos no sólo atañen a todo lo que pueda descubrirse acerca de los movimientos de cualquier modo acelerados, sino que también evidencian mediante una actividad fácil qué hipótesis son posibles, y cuáles, por el contrario, la naturaleza rechaza que sean inferidas ."[135]

Hermann ilustra su afirmación considerando la hipótesis de Baliani[136] que supone que la velocidad es como el espacio recorrido [*Phoronomia* p. 65 nº 146], es decir u=x. Hermann demuestra que entonces uu = xx y diferenciando udu=xdx, por lo que aplicando su primera regla queda que g = x, esto es, si x = 0 entonces g = 0; por consiguiente si la gravedad es nula al principio, entonces su movimiento también es nulo; aplicando su segunda regla obtiene que dt = dx : x; cuya integral vale t = log x, de donde deduce que si x = 0 el valor de t se hace infinito (∞). Es decir, se requiere un tiempo infinito para recorrer en el comienzo un espacio nulo, por tanto el móvil quedará quieto para siempre, "*consequenter Baliani hypothesis impossibilis & imaginaria est.*"[137]

A continuación [*Phoronomia* p. 65 nº 147], analiza el caso más general en que la velocidad adquirida varía con la potencia n del espacio x ($u = x^n$ siendo n natural), llegando a la misma conclusión del caso anterior. Las leyes del movimiento muestran la imposibilidad de tales suposiciones para la variación de velocidad.

A continuación Hermann analiza dos hipótesis referentes a las leyes de variación de la fuerza central.

---

[135] "*Hactenus ostensa circa motus gravium adeo generalia sunt, ut ea non solum omnia, quae circa motus quomodocumque acceleratos excogitari possunt, attingunt, sed etiam facili negotio ostendant quaenam hypotheses possibiles sunt, et quas vice versa natura ferre recuset.*" [*Phoronomia* p. 64 nº 145]

[136] Baliani (Génoa 1582 – 1666) ver DSB I pp 424-5; Baliani publica *De motu naturali gravium solidorum* el mismo año 1638 en que Galileo publica sus *Discorsi*. En 1646 publica otra una revisión de su obra anterior titulada *De motu naturali gravium solidorum et liquidorum*. Para ver las diferencias y semejanzas entre las deducciones de Galileo y Baliani de las leyes de caída de graves ver el capítulo *La loi de Galilée et celle de Baliani* en [MOSCOVICI SERGE 1967, p 32].

[137] La hipótesis analizada analíticamente por Hermann, y que éste asocia a Baliani, equivale a la demostrada por Galileo en sus *Discorsi* de 1638. Galileo muestra por reducción al absurdo que la propuesta de que la velocidad en la caída libre crezca como el espacio recorrido, que pone en boca de Simplicio, es "falsa e imposible" [GALILEO G. 1988, pp. 57-59].

La primera [*Phoronomia* p. 66 nº 148-149] se refiere al caso en que la gravedad es como la distancia al centro de fuerzas D ($g = kx$, siendo k una constante). En esta hipótesis, demuestra que la escala de velocidades es una elipse ($kx^2 = v^2$).

El segundo caso [*Phoronomia* pp. 67 nº 150-152] es más interesante, ya que supone que la gravedad es uniforme, es decir, nos movemos cerca de la superficie terrestre. Es, tal como dice Hermann, el caso estudiado por Galileo, la caída libre en el vacío. Deduce en pocas líneas de sus principios generales los siguientes resultados galileanos:

- Dependencia velocidad – distancia. Demuestra que la curva de la velocidad es una parábola. Es decir: $v^2 = k\ x$, donde k es la constante de proporcionalidad o parámetro de la parábola que vale según Hermann 2 p/m, siendo p el peso y m la masa del cuerpo[138]:

$$v^2 = \frac{2m\,x}{p}$$

- El tiempo de caída es el doble del espacio dividido por la velocidad adquirida durante ese tiempo ($t = 2x/v$).

  Este resultado es el teorema de la velocidad media[139] para un móvil que parte del reposo: podemos asimilar un movimiento acelerado a un movimiento de velocidad uniforme tomando como v la media es decir v/2, siendo v la v final del recorrido; así, $v_m = x/t$, de donde $v:2 = x/t$, y por tanto $\mathbf{t = 2x/v}$.

[138] Corresponde a un resultado adicional del teorema II de los *Discorsi* de Galileo, en el que había demostrado la dependencia cuadrática del espacio con el tiempo en la caída libre. [GALILEO G. 1988, pp. 66-69].
[139] Corresponde al teorema I de los *Discorsi* de Galileo por el que éste reduce el estudio de un movimiento uniformemente acelerado al de uno uniforme equivalente [GALILEO G. 1988, pp. 64-66].

- Dependencia del tiempo con la distancia: el tiempo de caída es la raíz cuadrada del doble del espacio recorrido por la masa dividido por el peso del cuerpo[140]: $t = \sqrt{\dfrac{2x\,m}{p}}$
(m y p son la masa y el peso respectivamente)

- Dependencia del tiempo con la velocidad: el tiempo de caída es como la masa por la velocidad dividido entre el peso del cuerpo. $t = \dfrac{m\,v}{p}$

Hermann con sus dos principios generales, una combinación de los que llamaríamos en lenguaje actual la segunda ley de Newton y la ley energética que puede obtenerse de ella, deduce toda la cinemática galileana de forma simple y directa, analiza la imposibilidad de ciertas hipótesis como la de Baliani, y además muestra cómo derivar otros sistemas dinámicos a partir de considerar distintas hipótesis para las fuerzas.

Construye un sistema deductivo para la dinámica que supone además una reformulación diferencial de los conocimientos dinámicos. Es una etapa en la búsqueda de principios generales que permitan hacer una exposición deductiva de la creciente cantidad de resultados mecánicos.

5.2 LAS LEYES GENERALES DEL MOVIMIENTO CURVILÍNEO GENERADO POR FUERZAS CENTRALES Y SUS CONSECUENCIAS.

Después de exponer las dos reglas válidas para cualquier movimiento, dedica el capítulo II a demostrar las leyes que son aplicables a "Los movimientos curvilíneos en el vacío, para cualquier hipótesis de gravedad variable"[141]. Demuestra dos principios generales:

[140] Corresponde al teorema II de los *Discorsi* de Galileo, demostrado por éste en forma de proporción [GALILEO G. 1988, pp. 66-69].
[141] "*De motibus curvilineis in Vacuo, in quacumque gravitatis variabilis Hypothesi.*" [*Phoronomia* p. 68]

- La fuerza centrípeta en un punto de la trayectoria es el cociente entre el cuadrado de la velocidad y el radio de curvatura en ese punto.
- Si consideramos dos puntos cualesquiera de la trayectoria, el producto de la velocidad por la perpendicular a la tangente desde el centro de fuerzas, tiene el mismo valor en ambos puntos[142].

A partir de estos principios, y de los generales para cualquier movimiento del capítulo anterior, Hermann obtendrá los siguientes resultados:

- La igualdad de velocidad para dos cuerpos que caen desde la misma altura por la curva AN o la recta AE (ver fig. 28), como consecuencia de la segunda ley o relación energía-trabajo.
- La ley de las áreas o segunda ley de Kepler.
- Resuelve el problema directo de las fuerzas centrales. Dada la forma cónica de la trayectoria, deducir que la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro.
- La expresión general diferencial del radio de curvatura en un punto de la trayectoria en coordenadas polares.
- La demostración analítica del problema inverso de las fuerzas centrales. Dada la expresión de la fuerza deducir la forma de las trayectorias.

Construye una figura que muestra la trayectoria ANn (ver fig. 28) de un móvil en una curva cualquiera sometida en todo momento a una fuerza central en D de valor Nα, cuyas componentes tangencial y perpendicular son Nβ y αβ respectivamente.

En la figura incluye dos escalas de variables: escala de solicitaciones centrales GBb, y escala de velocidades HIFf. El valor EB=Nα representa por tanto la fuerza en N, y EF la velocidad en ese mismo punto. Las demostraciones de las relaciones que

[142] Tal principio, como veremos a continuación, equivale a la constancia de la magnitud que llamamos actualmente "momento angular", fundamental para tratar problemas de fuerzas centrales.

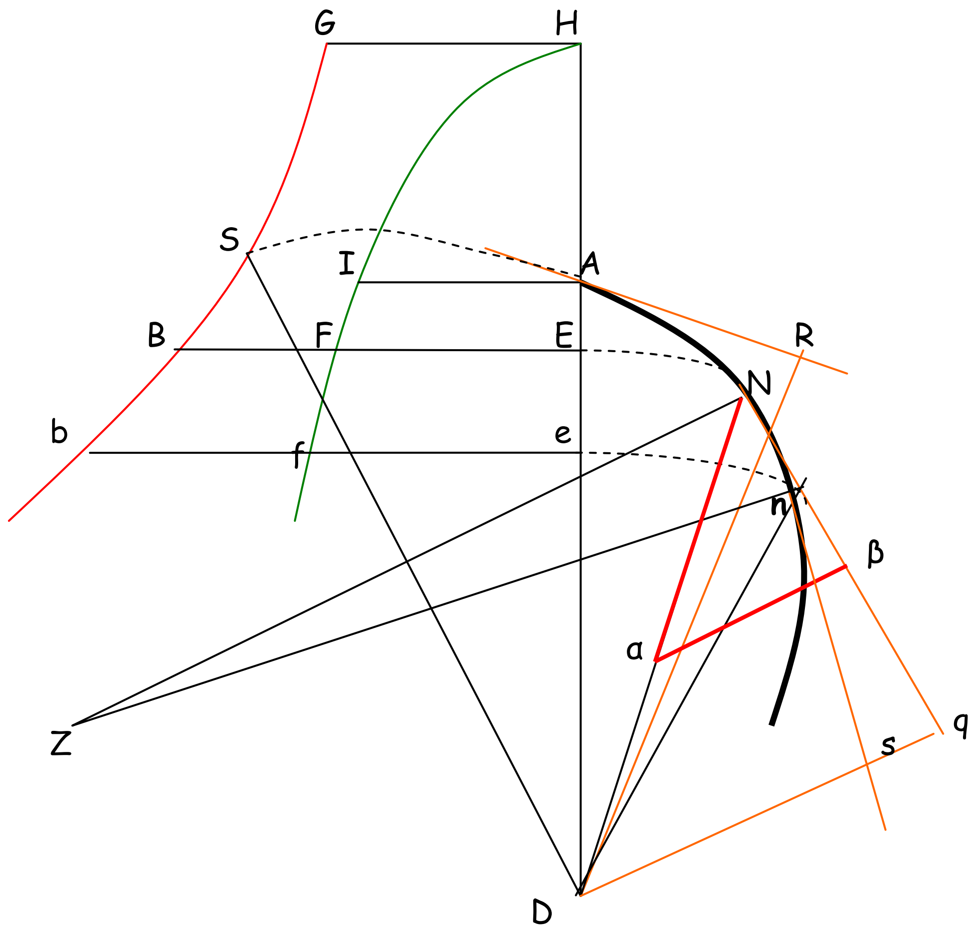


Fig. 28

describiremos a continuación se realizan, como es costumbre en la obra, a partir de segmentos diferenciales sobre la figura.

Se supone que el móvil está inicialmente en A moviéndose según la dirección AR (tangente a la trayectoria) con velocidad AI; velocidad producida la caer desde el reposo en H hasta A.

❖ <u>Valor de la fuerza centrípeta en un punto</u>:

La proposición XXI [*Phoronomia* pp. 68-69 nº 154] demuestra (fig. 28) que el cuadrado de la velocidad EF adquirida por un móvil de masa uno, en un punto N de su trayectoria y sometido a una fuerza central Nα, es igual al producto de la componente perpendicular αβ de la fuerza central por el radio nZ del círculo osculador entre n y N. Es decir:

$$\mathbf{EF^2 = nZ\ .\ \alpha\beta} \qquad (5\text{-}g)$$

Con símbolos actuales ha demostrado que: m $V^2 = R \cdot F_n$ (para m=1, siendo F_n la fuerza perpendicular o normal a la trayectoria en el punto N considerado y R el radio de curvatura en el punto considerado).

Para la demostración toma dos puntos de la curva infinitamente próximos N y n, cuyas tangentes son Nq y ns. Su demostración es geométrico diferencial, ya que trabaja con triángulos semejantes y desprecia los diferenciales de orden superior. Utiliza para la demostración el postulado de la velocidad en un instante (dt = dt:v) y su segunda regla (F = m dv:dt).

Este resultado es enunciado por primera vez sin demostración, para movimientos circulares, en la quinta parte del *Horologium Oscillatorium* (F. Muguet, Paris, 1673) de Huygens, concretamente en los tres primeros teoremas relativos a la fuerza centrífuga[143]. Posteriormente Newton hace la demostración en la proposición IV del libro I de los *Principia* [144] también en el caso de circunferencias. La demostración de Hermann es más general ya que se refiere a la caracterización de la fuerza centrípeta en cualquier curva. Da la expresión diferencial en cada punto o momento de la trayectoria.

- Ley de constancia del "momento angular"[145]:

Teniendo en cuenta que en la figura anterior, DR y Dq son las perpendiculares desde el origen de fuerzas centrales D a las tangentes AR y Nq, que representan respectivamente las direcciones en las que el cuerpo se mueve en cada instante,

[143] [HUYGENS C. 1888-1950; XVIII p. 361]
[144] [NEWTON I 1987b p. 178-180]
[145] El título corresponde a nuestra interpretación actual. Hermann no asigna nombre alguno en su demostración a la cantidad que demuestra permanece constante.

Hermann demuestra en el teorema XXII [*Phoronomia* pp. 69-70 nº 155] que para cualquier punto N de la curva del movimiento ANn se verifica la relación siguiente:

$$\mathbf{AI.DR = EF.Dq} \qquad (5\text{-h})$$

Hermann usa para la demostración dos de sus principios generales: el resultado del teorema anterior (5-g) que proporciona la expresión para calcular la fuerza perpendicular o centrípeta, y su primera regla general (5-f) demostrado en el capítulo anterior, que representa para nosotros el "teorema de las fuerzas vivas" o conservación de la energía, en su forma diferencial.

Si llamamos d a la perpendicular a la tangente desde el centro de fuerzas, podemos traducir algebraicamente la expresión de Hermann como: $v_0 \cdot d_0 = v \cdot d$

La interpretación actual sería la siguiente: podemos ver fácilmente que d se puede escribir como r · sen (r,v), siendo r la distancia desde el centro de fuerzas D hasta el punto considerado de la curva A o N, y (r,v) el ángulo que forman ambos segmentos. Así, La relación v·r sen (r,v) equivale pues a nuestro producto vectorial de vectores:

$$\left|\vec{r}\times\ \vec{\mathbf{v}}\right| = \mathbf{r\ v\ sen\ (r, v)}$$

Hermann, por tanto, ha demostrado que para cualesquiera dos puntos de la curva se verifica que el producto vectorial de r y v tiene el mismo valor:

$$\vec{r}_0 \times\ \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{0}}\ =\ \vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{v}}$$

Que corresponde, tomando para la masa del cuerpo la unidad, a la conservación del momento angular L, vector que definimos en física actual como:

$$\vec{\mathbf{L}}\ =\ \mathbf{m}\,\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{v}}$$

Newton demuestra este resultado en el corolario 1 de la proposición 1 del libro I de los *Principia* con este enunciado[146]:

[146] [NEWTON I b 1987 p. 174]

"La velocidad de un cuerpo atraído hacia un centro inmóvil en un espacio no resistente es inversamente como la perpendicular trazada desde el centro a la tangente de la curva".

Hermann sigue un procedimiento inverso al de Newton. El resultado en Newton es un corolario al teorema I en el que demuestra la ley de las áreas, sin embargo Hermann lo obtiene a partir de los dos principios generales para fuerzas centrípetas citados, para deducir de él la ley de las áreas tal como veremos a continuación. Este desplazamiento en la secuencia de resultados es interesante por cuanto establece qué principios pueden ser considerados más potentes en un sistema deductivo de la dinámica.

- Ley de las áreas (2ª ley de Kepler):

En el corolario II [*Phoronomia* pp. 70-71 nº 157] del teorema anteriormente descrito deduce la ley de las áreas o segunda ley de Kepler.

Como ha mostrado Guicciardini [GUICCIARDINI N. 1996], la demostración de Hermann constituye la primera que se hace analíticamente, ya que la de Newton en la prop. I, libro I de los *Principia.*, usa un modelo geométrico discreto (la curva es una serie de segmentos), para después hacer el tiempo infinitamente pequeño y obtener la curva[147], en un procedimiento que podríamos asimilar al del paso al límite de una sucesión. Tal como comenta Eloy Rada en la nota correspondiente a su traducción de la tercera edición de los *Principia*: "Pero esto comportaba, de paso, asimilar a la fuerza continua, la fuerza discreta compuesta de impulsos sucesivos. Quizá ahí estuviera la razón de los repetidos ensayos revisionistas de esta sección."[148]

[147] Hermann nos dice al final de la demostración que Newton ya lo demostró en la prop. I del lib. I, pero por métodos muy distintos. *"... sed ex diversissimo fundamento."* [*Phoronomia* p. 71 nº 157].
[148] [NEWTON I 1987a. n. 17 p. 174]

Tal como destaca Guicciardini [Ibidem p. 174], la demostración analítica es significativa ya que en ella se habían basado las demostraciones analíticas del llamado "problema inverso de las fuerzas centrales"[149], publicadas por el propio Hermann, por Johann Bernoulli y por P. Varignon en 1710[150]. Este es el argumento que da el propio Hermann en la carta citada en la discusión historiográfica (cap. 1)[151], que nace como respuesta a la acusación de plagio por parte de Keill sobre la demostración del problema inverso. Para una discusión del estilo usado en la *Phoronomia*, es significativo señalar que en la citada carta, Hermann reconstruye analíticamente en estilo algebraico-diferencial los resultados principales que conducen a la ley de las áreas, comenzando desde sus dos principios generales analizados en el cap. 5.1 (ecuaciones 5-3; 5-f). Haremos en el cap. 6 de esta monografía una discusión en relación con esta carta y los estilos de la obra, álgebra vs. geometría.

La demostración de Hermann en la *Phoronomia* se basa en los dos principios generales ya establecidos por él: el que ha tomado como postulado, la velocidad en un diferencial de tiempo (ec. 5-a), y el principio de conservación del producto de la velocidad por la perpendicular a la tangente (conservación del momento angular para fuerzas centrales para nosotros) (ec. 5-h).

De ellos deduce en pocas líneas la siguiente relación diferencial para un arco infinitesimal Nn (fig. 28): AI.DR. tNn = 2 NDn (recordemos que AI es la velocidad inicial y DR la perpendicular inicial a la tangente AR). Integrando en la figura, llega a la expresión que da el tiempo consumido en recorrer el arco AN:

$$\mathrm{tAN} = \frac{\mathrm{ADN}}{\frac{1}{2}AI.DR}$$

[149] Dada una ley inversa para la fuerza central, determinar las trayectorias posibles.
[150] J. Hermann *Mémoires de l'Académie des Sciences* (1710), 519-521. Johann Bernoulli *Mémoires de l'Académie des Sciences* (1710), 521-533. P. Varignon *Mémoires de l'Académie des Sciences* (1710), 533-544. Johann Bernoulli *Mémoires de l'Académie des Sciences* (1710), 521-533.
[151] *Journal Literaire* 9 (1717) p. 408

Como $\frac{1}{2}$AI.DR corresponde a un producto de valores iniciales y por tanto constantes en la expresión, concluye que el tiempo en recorrer un arco es proporcional al área ADN barrida por el radio vector DA (*radium vectorem* en palabras de Hermann) en ese tiempo.

Guicciardini nos indica en el texto citado, que Hermann reescribe la demostración de la *Phoronomia* en una carta a J. Keill que publica en 1717 en *Journal Literaire*[152], sustituyendo por diferenciales los símbolos que indican parejas de puntos en una figura (por ejemplo Nn = ds etc.).

La demostración de Hermann es un corolario de la conservación que expresa la ecuación general 5-h. Este hecho, no explicitado en el citado artículo de Guicciardini seguramente por seguir en su exposición la versión de la carta a Keill, coincide con el modo en que se demuestra en los libros actuales de física, donde la ley de las áreas es una consecuencia directa de la conservación del momento angular. Por ejemplo, en uno de los manuales de física más usados internacionalmente [P. A. TIPLER 1988, T I, p. 352] tenemos la siguiente ilustración (fig. 29) y demostración:

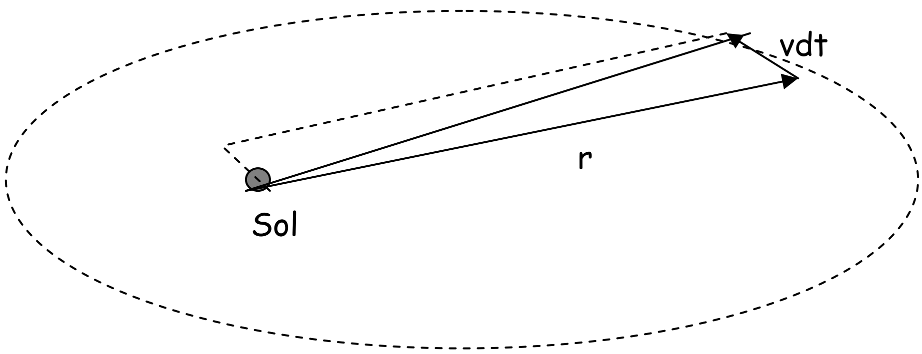


Fig. 29

El área A barrida por el radio vector r en un dt es la mitad del paralelogramo definido por el producto de r y ds (= vdt):

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left|\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\,\mathbf{dt}\right| = \frac{1}{2m}\left|\vec{\mathbf{r}} \times \mathbf{m}\,\vec{\mathbf{v}}\right|\mathbf{dt} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2m}}\mathbf{L\,dt}$$

[152] *Journal Literaire* 9 (1717), 406-415

Siendo L el momento angular del planeta. Obtenemos que: $$\frac{dA}{dt}=\frac{L}{2m}$$

Como L es constante en un sistema aislado, es decir, sin fuerzas externas, la variación de A con el tiempo es constante, es decir, la variación de A es proporcional a la variación temporal (dA = k dt).

- Problema directo de las fuerzas centrales:

El problema directo de las fuerzas centrales consiste en encontrar la ley de fuerzas a partir de la forma de las órbitas. Este problema está resuelto en los *Principia* en las proposiciones 11-13 de la sección III del primer libro [Newton 1687 pp. 53-55] en las que, una por una, demuestra qué solución corresponde a cada una de las cónicas. El planteamiento de Hermann es más global en el sentido de que busca primero una forma de expresar la fuerza central en función del radio vector y de la perpendicular a la tangente, para después introducir en ella la expresión de las cónicas y deducir la ley de fuerzas resultante.

La demostración de Hermann [*Phoronomia* p. 71 nº 158] parte de considerar el principio de conservación del momento angular (ec. 5-h). Traduce la ecuación al lenguaje algebraico llamando u a la velocidad y p a la perpendicular desde el centro a la tangente (recordemos que equivale a nuestro producto vectorial del radio vector z y de la velocidad u).

De 5-h tenemos: $u \cdot p = 1$ (toma la constante igual a 1). De donde $u^2 = 1/p^2$ y diferenciando se tiene que: $u\,du = -\,dp/p^3$.

A continuación Hermann aplica sus segunda principios generales, el que hemos llamado con su nombre actual de "las fuerzas vivas", es decir: u du = g dz, donde g es la fuerza central y z el radio vector, o expresado con sus palabras, el momento de la velocidad equivale al momento de la fuerza. Teniendo en cuenta que la variación de u es de signo contrario a la de z, obtiene la ecuación diferencial:

$$\mathbf{g = dp/p^3dz} \qquad (5\text{-}i)$$

Esta relación general permite, en palabras de Hermann[153], obtener el valor de la fuerza central g si conocemos la variación de p con z, es decir si conocemos la forma de la trayectoria del móvil. Lo ejemplifica así:

Exempli gratia: cuando la trayectoria es una hipérbola o elipse se verifica la relación $p^2 = c^2\, z / 2a \pm z$, siendo a el semilado transverso, y cumpliendo $c^2 = \pm (b^2 - a^2)$ con el signo superior para la hipérbola y el inferior para la elipse.

Rescribe la ecuación de las cónicas de modo que $1/p^2 = 2a \pm z / c^2\, z$; diferenciando queda $dp/p^3 = 2a\, dz / c^2\, z^2$, de donde por identificación con la ec. 5-i resulta:

$$g = a/c^2\, z^2$$

Dicho con sus palabras: "*hoc est solicitatio centralis, ad focum sectionum Conicarum directa, est ubique ut quadratum distantia mobilis ad foco inverse, quod jam passim constat ex aliis.*" [Ibíd.].

Hermann da a continuación [*Phoronomia* pp. 71-72 nº 160] una expresión alternativa de la expresión de la fuerza central, transforma la ecuación 5-i realizando un cambio de variables, de modo que en lugar de p y dp aparezcan los diferenciales del arco s, del ángulo t y del radio vector z: Nn = ds, y Pn = dt y dz = PN. Es decir, expresa la fuerza en coordenadas polares.

[153] "*Usus hujus formalae fatis expeditus est, nam ex equatione curvae datae quaeritur valor ipsus p in z & constantibus, cujusmodi determinatione etiam opus est in formula supra laudata.*" [*Phoronomia* p. 71 nº 159]

Recordemos que en la figura Nn son dos puntos próximos de la trayectoria, con sus respectivos radios vectores DN y Dn, y que la perpendicular a la tangente Ng es Dq que Hermann ha llamado p.

Despreciando diferenciales de tercer orden y usando la semejanza de triángulos Nnp y NDq obtiene el siguiente cambio de variable p/z = dt/ds (ver fig. 30). De este modo llega a la expresión final equivalente a 5-i:

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{dz\,ds^2dt + z\,ds^2\,ddt - z\,dt\,ds\,dds}}{\mathbf{z^3\,dt^3\,dz}}$$

Hermann resalta que ha deducido de sus principios generales esta expresión que no difiere salvo por el nombre con la que publicó Varignon[154] en su memoria de 1706. Ambos casos, dice Hermann, son completamente generales sin presuponer la constancia de las diferenciales dz, dt, ds.

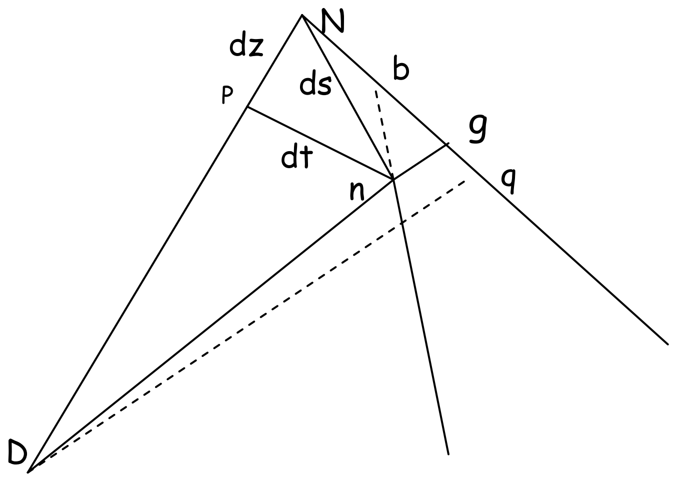


Fig. 30

❖ El problema inverso de las fuerzas centrales:

Tal como hemos indicado, el problema inverso trata de encontrar la forma de las trayectorias posibles de un móvil a partir de la ley de fuerzas y de datos iniciales.

Johann Bernoulli y Hermann plantean dudas a comienzos de s. XVIII sobre si Newton ha demostrado el problema inverso de forma satisfactoria en los *Principia*[155].

[154] P. Varignon : *Comparaison* d*es forces centrales avec le Pesanteurs Absolues des corps mus de vitesses variés a discrétion le long de telles courbes q'on voudra*. *Mémoires de l'Académie des Sciences* (1706), 178-235.

[155] Ver sobre las posiciones críticas independientes de Johann BERNOULLI y de Hermann la n. 35 en [MAZZONE S. 1996. p. 150]

Emprenden pues la demostración usando las nuevas técnicas diferenciales y Johann Bernoulli y Varignon, publican sus soluciones analíticas simultáneamente con la de Hermann en 1710[156]. Previamente y coincidiendo con el comienzo de su estancia en Italia, Hermann había enviado en carta a Zendrini (22-12-1707) una formulación diferencial del problema inverso[157].

De hecho, mientras está trabajando en la *Phoronomia* en Padua, Hermann escribe entre 1710 y 1713 y en italiano, cinco artículos sobre el problema inverso en la revista *Giornale de' Letterati d' Italia (GLI).* Hemos tratado en el capítulo "Jakob Hermann en la Historiografía" de esta monografía, el contenido de los artículos y la polémica que entabla Giuseppe Verzaglia con Hermann tras la publicación por parte de éste último del primer artículo en GLI[158].

Veamos cuál es la situación del problema inverso en los *Principia* y sus posteriores vicisitudes, tal como han sido analizadas en la historiografía reciente[159]. Nos servirá de contexto para analizar la formulación presente en la *Phoronomia.*

En la primera edición de los *Principia,* Newton trata el problema de Kepler en las secciones III y VIII. En la III demuestra en las proposiciones XI, XII y XIII que si la trayectoria de un cuerpo es una elipse, hipérbola o parábola respectivamente, entonces la ley de fuerzas ha de ser inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. A continuación el corolario I[160] afirma que se puede deducir de las anteriores proposiciones, que si la ley es inversa del cuadrado de la distancia y dadas unas condiciones iniciales, se puede afirmar que las trayectorias son secciones

---

[156] Ver ref. en n. 19. El interés de Vargnon se suscita por dos cartas que recibe de Johann Bernoulli y de Hermann en 1710.

[157] La carta está transcrita en el apéndice 14-1 de [MAZZONE S. y ROERO C.S. 1997] Hermann la publicará en [HERMANN J. 1711 c]

[158] Los estudios sobre la polémica con el análisis de las demostraciones de los artículos de Hermann y Verzaglia se encuentran en [Mazzone S. 1996] y [Mazzone S. y Roero C.S. 1997; pp. 100-101; 228-241]

[159] Sobre la historia del problema de Kepler y en particular sobre el debate en torno a la demostración de la ley inversa y a las polémicas generadas tras los *Principia* ver: [AITON 1964]; [De GRAND 1987]; [AITON 1989]; [BRAKENRIDGE 1989]; [POURCIAU 1991]; [WHITESIDE 1991]; [BLAY M. 1992 pp 216-221]; [BERTOLONI MELI 1993; pp. 208-216]; [GUICCIARDINI 1995]; [SPEISER 1996]; [MAZZONE 1996] y [MAZZONE S. Y ROERO C.S. 1997; pp. 100-101; 228-241]

[160] Primera edición. Londres [NEWTON 1687. p. 55]

cónicas. Falta pues por probar la unicidad de tales soluciones, por lo que la crítica de Hermann en su primer articulo de 1710 parece consistente.

En 1708 J. Keill, que pertenece al primer grupo de newtonianos, publica en la *Royal Society* el primer artículo[161] en el que se da la solución del problema inverso de las fuerzas centrales aplicando el cálculo diferencial. La solución de Keill usando geometría fluxional no muestra la unicidad de las soluciones cónicas, aunque como ha analizado Guicciardini en el artículo citado, esto no era un requerimiento habitual en las matemáticas del s. XVIII. Keill y Johann Bernoulli mantendrán una polémica entre 1714 y 1719. Keill proclama ser el primero en haber hecho la demostración del problema inverso contra la reclamación de Johann, pero además afirma que Newton ya lo había demostrado en la proposición 41 y en el corolario I de la segunda edición de los *Principia.*, siendo la demostración de Johann diferente en cuanto a la simbología[162].

Newton mismo, independientemente de las críticas de Hermann y Johann Bernoulli, pero después de la publicación de Keill, se había dado cuenta de la insuficiencia lógica del corolario. Informa en 1709 a Cotes[163] de la oportunidad de hacer algunos añadidos al corolario I, de forma que en la segunda edición de los *Principia* de 1713[164], el corolario contiene unas indicaciones más detalladas de cómo construir las soluciones cónicas. A partir de la posición del foco, de un punto de contacto y de la tangente se obtiene la curvatura que corresponde a las cónicas, teniendo en cuenta la ley inversa del cuadrado para la fuerza central.

El artículo de Pourciau citado analiza el nuevo corolario de Newton y argumenta que las indicaciones de Newton son suficientes para construir las cónicas como solución única concluyendo que:

---

[161] El artículo de Keill está analizado en [GUICCIARDINI 1995]. Este artículo es famoso porque en él Keill acusa a Leibniz por haber plagiado el cálculo de Newton.
[162] La polémica está analizada en [GUICCIARDINI 1995 pp. 561- 566]
[163] Publicada en [POURCIAU B. H. 1991]
[164] Segunda edición. Cambridge [NEWTON 1713. p. 53]. Ver p. 467 de [NEWTON I. 1687b]

"We find that his argument does indeed contain a flaw, it is a minor omission rather than a serious logical error. Having rectified this omission, we show how Newton's outline expands into a convincing proof that inverse-square orbits must be conics." [POURCIAU B. H. 1991. p. 159]

En el mismo artículo, Pourciau se pregunta *Could Newton have proved this proposition?,* refiriéndose a la unicidad de las soluciones cónicas. Su respuesta es *Definitely. How do we know? Because Book I of the Principia contains the proof of an even stronger result!* Pouciau se refiere a la prop. XLII de la sección VIII del primer libro, donde Newton encuentra la ecuación de la curva que verifica unas condiciones iniciales de la posición y de la velocidad en una dirección dada, para cualquier ley de fuerzas centrales conocida.

La primera de las demostraciones en el artículo de Johann Bernoulli de 1710[165] parte de la proposición 41 de la sección VIII de los *Principia*, en la que Newton estudia de un modo más general el problema inverso. En dicha proposición, Newton obtiene una ecuación de las curvas que sigue el móvil, supuesta un fuerza centrípeta de cualquier clase y estando garantizada la cuadratura de figuras curvilíneas. Reduce pues el problema inverso a cuadraturas de unas figuras auxiliares, pero no explica cómo realizarlas, a pesar de que, tal como indica Guicciardini en el artículo citado, Newton posee las técnicas del cálculo fluxional necesarias para cuadrar muchos tipos de curvas[166]. Johann BERNOULLI traduce en términos diferenciales la pop. 41, y particularizando para fuerzas que son como el inverso del cuadrado de la distancia, obtiene las ecuaciones de las cónicas.

En su artículo, Johann Bernoulli además de criticar la insuficiencia de la demostración de Newton, critica la solución que Hermann le ha enviado, por ser

[165] Johann Bernoulli hace en el mismo artículo una segunda demostración. Ambas analizadas en [GUICCIARDINI 1995 pp. 551-554]
[166] Entre 1691-1693 Newton compone el tratado de cálculo fluxional *De quadratura curvarum* que aparecerá en 1704 como apéndice de su *Opticks*.

complicada de integrar sin conocer las soluciones y por haber omitido la constante de integración.

Por tanto, la primera demostración de Hermann es criticada, por un lado, por Johann Bernoulli a quien responde en el tercer artículo de GLI, y por carta[167] explicitando la sustitución realizada y la posibilidad de anular la constante de integración con un sistema adecuado de coordenadas. Por otro lado, tal como hemos dicho, es criticado por Verzaglia.

La crítica de Verzaglia se basa en afirmar que el problema inverso ha sido totalmente resuelto en los *Principia*, ya que, tal como muestra en su artículo de 1710[168], la solución analítica que él hace y la construcción newtoniana contenida en la prop. 41 llevan a la misma ecuación diferencial para una fuerza arbitraria.

Hermann publica un segundo artículo en GLI[169] donde además de dar solución a un problema más general planteado por Johann BERNOULLI sobre fuerzas centrales en medios resistentes, vuelve a la solución newtoniana. Esta vez obtiene la solución considerando una fuerza central arbitraria, llegando a una expresión de las curvas equivalente a la de la proposición 41 de Newton, para después particularizar para fuerzas inversas del cuadrado de la distancia y obtener las cónicas. En el resto de artículos en GLI, Hermann defiende de las acusaciones de paralogismo y superficialidad.

Según los estudios historiográficos citados, podemos decir que las indicaciones de Newton en la segunda edición habrían sido fundamentalmente correctas para demostrar el problema inverso; aunque a las instrucciones del nuevo corolario habría que añadir la proposición 41 de los *Principia* donde se deduce la ecuación de las curvas que corresponden a una fuerza centrípeta general. Pero para los actores del

[167] [Hermann 1711 b] y traducción de la carta en n. 168 [MAZZONE S. Y ROERO C.S. 1997 p.88]
[168] [VERZAGLIA G. 1710]
[169] [Hermann 1711 a] Ver la demostración de Hermann en [MAZZONE S. Y ROERO C.S. 1997 pp. 94-98]

debate a comienzos del s. XVIII, por un lado las explicaciones del corolario de la primera edición fallan lógicamente, y por otro el resultado del teorema 41 depende de su particularización para fuerzas que son como el inverso del cuadrado y de su cuadratura.

El debate planteado entre los defensores de la suficiencia de Newton en sus demostraciones, como Verzaglia o J. Keill, y los que como Johann Bernoulli y Hermann, consideran que es necesario completarlas, aunque nunca se plantean que sus resultados sean incorrectos, impulsa la aplicación del nuevo cálculo a los problemas mecánicos. Esos debates contribuyen a crear nuevos métodos de cálculo diferencial e integral, así como a debatir en qué consiste el rigor matemático.

En lo que respecta a Hermann, podemos considerar que su posición final sobre el problema inverso es el tratamiento que de él hace en la *Phoronomia*.

La primera demostración que hace Hermann del problema inverso en la *Phoronomia* corresponde a la proposición 23, que plantea el mismo problema que figura en la prop. 41 de los *Principia*.: "dadas la solicitación central, la velocidad i la dirección inicial del móvil, definir y construir la curva describirá en el vacío el proyectil, supuesta la cuadratura de las figuras". [*Phoronomia* pp. 72 – 73, nº 162].

La demostración de esta proposición sigue la pauta de la contenida en la que le envió a Zendrini por carta en 1708, y ambas se parecen a la proposición 41 de los P*rincipia*. En ambas, Hermann comienza trabajando con segmentos de un gráfico representados por pares de puntos, y acaba expresando en un corolario mediante el álgebra diferencial [*Phoronomia* p. 73, nº 163] la ecuación diferencial de la curva (*aequatio differentialis curvae*) buscada.

En un escolio posterior, Hermann afirma que este problema fue resuelto primero por Newton en su proposición 41 y después por Johann Bernoulli de dos formas, por

Varignon y por él mismo. También declara que su demostración no difiere de la de Newton "*nisi in levibus nec essentialibus circumstantiis*" [Ibíd.].

Pero en el párrafo final del escolio explica qué queda por hacer y anuncia que será el quien primero lo resuelva, para dar con las soluciones algebraicas que corresponden a ciertas leyes de fuerza. Leamos sus palabras:

"Por lo demás, puesto que esta solución general presupone las cuadraturas también de esas curvas que no son cuadrables, por esta razón ese problema es en general trascendente, y no es algebraico, salvo por ciertas leyes de atracciones centrales. Cuáles, en verdad, deban ser en general estas leyes de gravedad variable, para que, una vez planteadas, resulten las curvas algebraicas de los proyectiles, el problema es, según se dice, minucioso y elegante pero a primera vista muy difícil, acerca del cual, que yo sepa, nadie hasta ahora ha reflexionado. Cómo deba ciertamente explicarse, ello se evidenciará con la siguiente proposición, tras el lema que enseguida se aportará."[170]

Hermann tratará el problema inverso de las fuerzas centrales en un contexto muy amplio; obtendrá una expresión de las fuerzas en función de coeficientes diferenciales que representan las diferenciales sucesivas como funciones del radio vector z y de ciertos parámetros. También obtendrá como serie de potencias la expresión general de las curvas, en función también del radio vector y de parámetros. Después, tras particularizar parámetros, obtendrá distintas leyes de fuerzas, no sólo las inversas del cuadrado, para finalmente obtener las ecuaciones de las curvas.

Esta estrategia generaliza el procedimiento usado en otras demostraciones del problema inverso no sólo las realizadas por él en los artículos de GLI citados sino las realizadas por Johann Bernoulli y Varignon. Un procedimiento general generará las curvas para las distintas hipótesis de fuerza. A continuación expondremos

[170] "*Caeterum, quia generalis haec solutio quadraturas praesupponit earum etiam curvarum quae quadrabiles non sunt, ideo problema istud generaliter suntum est trascendens, nec algebraicum sit, nisi pro certis legibus solicitationum centralium. Quae nam vero debeant esse in genere hae leges gravitatis variabilis, ut illis positis cuvae projectorum algebraicae evadant, problema est fatis curiosum et elegans sed prima fronte admodum difficile, de quo, sciam, nemo adhuc cogitavit. Quomodo vero debeat expediri, id i sequenti apparebit propositione, post lemma mox afferendum.* " [*Phoronomia* p. 74 , nº 164]

esquemáticamente cómo generaliza la resolución del problema inverso para llegar a las soluciones algebraicas.

Hermann construye en la proposición XXV [*Phoronomia* pp. 74 – 76, nº 167] una nueva figura asociada a la que representaba la trayectoria ANn (fig. 31 izquierda) de

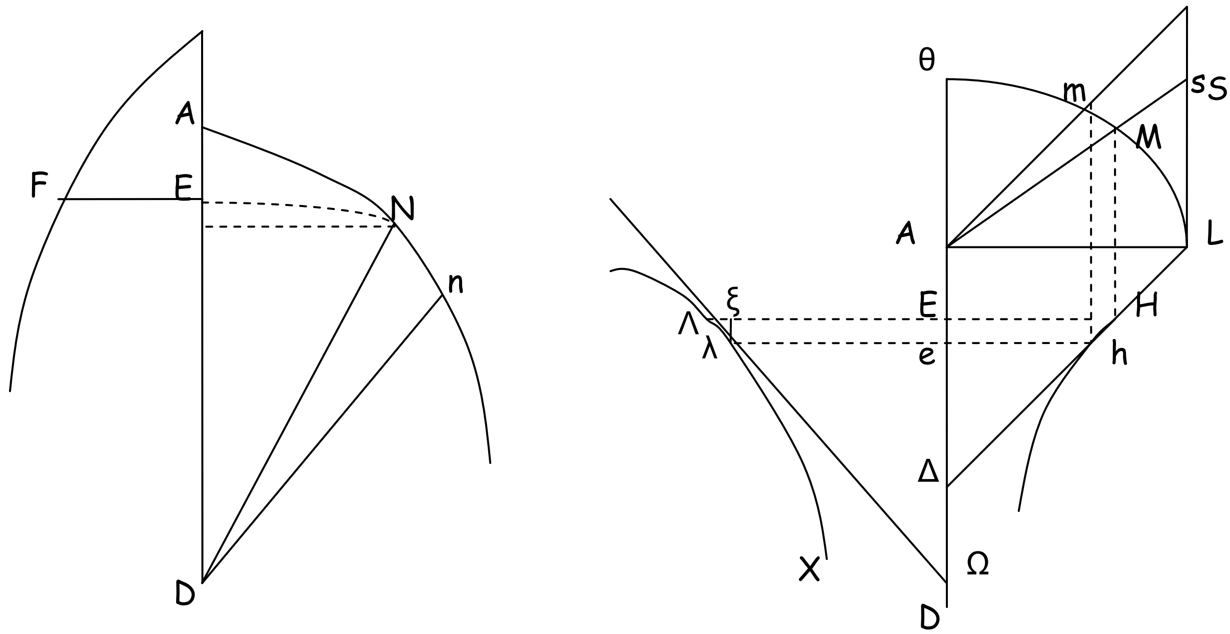


Fig. 31

un móvil sometido a una fuerza con centro en D (EF era la velocidad en un punto N). DA es el eje vertical en ambas figuras. Construye (fig. 31 derecha) un cuadrante Θml, de forma que el ángulo MAL está relacionado con el ángulo ADN que da la posición angular del móvil sobre la trayectoria Ann, mediante la relación ADN : MAL = 1/n donde n es cualquier número racional positivo. DE representa el radio vector desde D en ambas figuras. De este modo queda definida la curva LHh a partir de un radio AL constante y de las dos coordenadas polares MAL y DE.

Para cada punto H de la curva LHh representa la tangente HhΔ cuya subtangente es EΔ. Prolongando EH construye la curva ΛX haciendo que la subtangente EΔ = EΛ para cada radio vector DE.

Omitiendo los laboriosos detalles de la demostración, diremos que Hermann obtiene, usando lemas matemáticos auxiliares, una expresión de la velocidad EF en función de la subtangente EΔ de la curva LHh, de la tangente SL del semicírculo, del parámetro n y del radio vector DE.

$$\mathbf{EF^2 = \frac{n^2\ E\Delta^2\ SL^2}{AL^2\ DE^4} + \frac{1}{DE^2}} \qquad 5 - j$$

Diferenciando esta expresión de la velocidad en un punto de la trayectoria obtiene una expresión con 2 EF. d(EF), o según su notación 2 EF.af (ver fig. 31). A continuación usa su teorema general de igualdad de momentos de velocidad y fuerza (que hemos llamado de "las fuerzas vivas" para seguir la nomenclatura actual), y llega a una expresión general de la fuerza central *G* como función de los parámetros de la trayectoria del móvil. Dado que EF.af = *G*. Ee (en símbolos actuales v.dv = F.dr) y diferenciando la expresión 5 – j se obtiene[171]:

$$\mathbf{G = \frac{n^2\ E\Delta\left[DE.E\Delta.MG^2 - 2E\Omega.E\Delta.MG^2 + DE.E\Omega.AL^2\right]}{E\Omega.AG^2.\,DE^5} - \frac{1}{DE^3}}$$

En un corolario posterior [*Phoronomia* pp. 77 – 78, nº 169] supone que la ordenada EH = ± (e – *A*) donde e es una constante, y *A* una cantidad compuesta de cualquier forma de constantes y del radio vector z. De este modo toma d*A* = B dz, y dB = *C* dz, es decir las diferenciales sucesivas de *A*.

Algebriza la expresión anterior, usando los símbolos siguientes DE=z, AL = r (parámetro del cuadrante circular) y $r^2 - e^2 = c^2$. Sustituyendo los valores de la expresión anterior de la fuerza *G* por los correspondientes A, B y *C* queda:

$$\mathbf{G = \frac{1}{z^3} + \frac{n^2\ \left[2s^2\ B + s^2\ C\,z \mp e\,B^2\ z \pm 4\,e\,AB \pm 2\,e\,A\,C^2\ z + A\,B^2\ z - 2\,A^2\ B - A^2\ C\,z\right]}{B^3\ z^5}}$$

(5 – k)

[171] Los signos negativos que se obtienen al diferenciar son en Hermann positivos.

Vemos cómo Hermann usa aquí lo que Euler llamará, en su obra *Textos sobre el cálculo diferencial* de 1755 "coeficientes diferenciales", que tendrán un papel preponderante en su formulación de las diferenciales de orden superior, y que a decir de H. J. M. Bos [BOS H. J. M. 1984 p. 106], por ser implícitamente las derivadas de orden superior, prepararán el terreno para la sustitución de la diferencial por la derivada como concepto fundamental del cálculo.

Hermann ha llegado a una expresión de la fuerza central G en función del radio vector z, del parámetro n racional positivo que representa la relación entre el ángulo de posición ADN y el de la figura auxiliar MAL, de una función de z y constantes que ha llamado A, y de sus diferenciales sucesivas.

Particularizando A podemos obtener las distintas expresiones para la fuerza G que queramos considerar. No se limita a trabajar con G inversamente proporcional al cuadrado u otra hipótesis, sino que consigue una expresión válida en cualquier caso.

En otro corolario [*Phoronomia* pp. 77, nº 168], Hermann obtiene la relación que le permitirá deducir la ecuación de la trayectoria del móvil, a partir de las hipótesis particulares consideradas para la fuerza G. Veamos en qué consiste esta expresión que utiliza los desarrollos en serie de potencias de expresiones trigonométricas.

Establece las siguientes relaciones en las figuras anteriores: llama T = tg MAL y S = sec MAL; $z^2 = x^2 + y^2$ (coordenadas cartesianas de la posición z del móvil); por tanto tg ADN = r y:x; sec ADN = r z:x.

Toma como hipótesis que la relación entre los ángulos ADN y MAL, que había tomado como 1/n, es en general la siguiente: ADN : MAL = 1: n = μ:ν.

A continuación escribe el desarrollo en serie de potencias para sec [ν.ADN] y para la sec [μ.MAL], remitiendo a un artículo suyo publicado en Actas Eruditorum en 1706 p. 263[172]. Las expresiones son:

$$\sec [\nu.ADN] = r\, z^{\nu} : [\, x^{\nu} - o2\, \nu\, x^{\nu-2} + 04\, \nu\, x^{\nu-4} - \ldots \,]$$

$$\sec [\mu.MAL] = S^{\mu} : [\, r^{\mu-1} - o2\, \mu\, r^{\mu-2} + 04\, \mu\, r^{\mu-4} - \ldots]$$

Donde los números o2v, 04v,... y los de μ, o2 μ, 04 μ, etc. son los coeficientes binomiales correspondientes (p. ej. $02\, \nu = \nu\, (\nu - 1) : 2!$ Etc.)

Como ha supuesto que ADN : MAL = 1: n = μ:ν, implica que [ν.ADN] = [μ.MAL] y por tanto sus secantes también son iguales, de donde se deduce la siguiente ecuación general algebraica de la curva ANn:

$$\mathbf{S^{\mu} [x^{\nu} - o2\, \nu\, x^{\nu-2} + 04\, \nu\, x^{\nu-4} - \ldots] = r\, z^{\nu}\, [r^{\mu-1} - o2\, \mu\, r^{\mu-2} + 04\, \mu\, r^{\mu-4} - \ldots]} \qquad (5 - l)$$

Introduce el escolio final [*Phoronomia* pp. 78 – 81, nº 170] de este capítulo del modo siguiente:

"Para que destaque con claridad el uso de nuestra fórmula, la aplicaremos a un ejemplo particular. ... Estos valores, reemplazados en la fórmula del Coralario superior, darán una fórmula que, aun siendo particular con respecto a la otra, de la cual fue deducida, no obstante puede procurar en abundancia infinitas diversas curvas algebraicas, incluso, infinitas veces infinitas." [173]

Indica cómo las expresiones generales para la fuerza (5-k) y para la curva (5-l), pueden aplicarse para encontrar, a partir de una hipótesis particular para la fuerza

[172] *Disquisitio diptrica de curvatura Radiorum visivorum atmosphaeram trajicientium, cui accedit indefinita Sectio angularis ope Tangentium et secantium.* Actas Eruditorum (junio 1706 pp. 256-263)

[173] Introduce el escolio con estas palabras "*Ut appareat usus insignis nostrae formulae, exemplo cuidam particulari eandem applicare libet. .... Qui valores, in formula superioris Corolarii substituti, dabunt formulam quae etsi particularis est alterius respectu, ex qua deducta est, infinitas tamen diversas curvas algebraicas suppeditare potest, immo infiniteies infinitas.*" [Ibid.]

G, la ecuación de la trayectoria del móvil. Da varios ejemplos entre los que destacaremos el que corresponde a la hipótesis de una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

Está interesado en encontrar soluciones algebraicas y supone el grupo de casos para los que (z es el radio vector y a un parámetro):

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{z}^{\mathbf{m}}}{\mathbf{a}^{\mathbf{m-1}}}$$

Como las diferenciales sucesivas de A son de la forma: dA = B dz y que dB = C dz, obtiene: $B = m\,z^{m-1} : a^{m-1}$; $C = m\,(m-1)\,z^{m-2} : a^{m-1}$

De donde la expresión general de la fuerza central G (5-k) queda:

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{m^2 - n^2}}{\mathbf{m^2\, z^3}} \pm \frac{\mathbf{(m \pm 2)\, n^2\, e\, a^{m-1}}}{\mathbf{n^3\, z^{m+3}}} + \frac{\mathbf{(m+1)\, n^2\, s^2\, a^{2m-2}}}{\mathbf{m^2\ \ z^{2m+3}}} \qquad 5 - m$$

A partir de aquí, tomando valores para m y n, obtiene las distintas hipótesis para las fuerzas y de ellas la ecuación de la trayectoria correspondiente.

El primer caso que analiza es para m = - 1 y n = 1. Sustituyendo en 5-m obtiene que es $G = \pm\, e : a^2 z^2$, es decir, una fuerza inversa con el cuadrado de la distancia z al origen D.

Para estudiar la ecuación de la trayectoria, vemos que como 1: n = μ:ν, en este caso toma μ = ν = 1. Sustituyendo los valores en la ecuación general algebraica de la curva (5-l), tenemos que los términos binomiales desaparecen quedando:

$$S\,x = r\,z \qquad (5 - n)$$

Como $A = (z^m : a^{m-1}) = a^2 : z$, y como habíamos tomado EH = ± (e – A) tenemos ahora $EH = \pm\,(ez - a^2) : z$.

Como había supuesto en su construcción que la secante del ángulo MAL es tercera proporcional de EH y del radio del cuadrante circular AL = r, nos queda: S : r = r : EH y de aquí $S = r^2 z : ez - a^2$. Sustituyendo en (5-n) queda: $e z = a^2 \pm r x$, que es la ecuación de las secciones cónicas. Hermann analiza otras opciones tales como:

- $m = -2$ y $n = 2$ en que $G = - s^2 z : a^6$; cuyas trayectorias son cónicas
- $m = 1 = n = \mu = \nu$ en que $G = 2 s^2 : z^3$; trayectorias circulares
- $m = -1$ y $e = 0$ en que $G = 1 - n^2 : z^3$; trayectorias espirales que pueden ser algebraicas o trascendentes.

Señalemos que el último caso en el que la ley de fuerzas varía como el inverso del cubo, es analizado por Newton en el corolario III de la prop. 41 (1687) [174] donde obtiene ciertas soluciones del problema en un caso en que las condiciones iniciales están restringidas. Es evidente que no da la solución completa en éste tipo de problema inverso, ya que en la proposición 9 del libro I había encontrado que una órbita espiral equiangular corresponde a una fuerza inversa del cubo. Johann Bernoulli en su texto de 1710 había aducido este ejemplo mostrar que la generalidad de las soluciones no estaba garantizada en la primera redacción del corolario I de Newton.

El final del largo escolio de Hermann es elocuente sobre la potencia de su procedimiento:

"Y sin duda baste con haber citado estos pocos ejemplos para ilustrar la fórmula aducida desde el principio de este artículo; a partir de estos hechos el lector perspicaz ya puede advertir de cuánta inmensa utilidad es la solución general del problema propuesto y resuelto según el artículo 167 [nuestra ec. 5-k], puesto que una sola fórmula particular para el artículo 170 [nuestra ec. 5-l], poco antes citada, podía suministrar abundante materia para redactar un tratado razonable."[175]

---

[174] Ver sobre esto [GUICCIARDINI 1995 pp. 546 y 560]

[175] "Et quidem haec pauca exempla ad illustrationem formulae ab initio hujus articuli allatae adduxisse sufficiat; ex quibus factis jam perspicax Lector animadvertere potest, quam immensi pene usus sit generalis

5.3 LAS LEYES GENERALES DE LAS COLISIONES

El capítulo VI del primer libro de la *Phoronomia* trata de las "leyes del movimiento en la colisión de los cuerpos" [*Phoronomia* pp. 110-124]. En él Hermann seguirá los planteamientos de Leibniz organizándolos a partír de un solo principio (de nuevo energético) y ampliándolos a casos de choques oblícuos e inelásticos.

El estudio de las leyes de los choques es un centro de interés a partir de la teoría que expone Descartes en los *Principes de Philosophie* de 1644. En esta obra Descartes aplica al choque su principio general de conservación de la cantidad de movimiento (mv) y da las siete reglas que explican todos los casos de choque directo entre cuerpos. Este trabajo deja insatisfechos a muchos de sus lectores, ya que no concuerda con las experiencias conocidas. La importancia del problema se pone de manifiesto en que en 1668 la *Royal Society* pide a Huygens, Wren. Wallis y otros que aporten soluciones. Huygens envía ese año su solución al problema[176] considerando la conservación de la cantidad de movimiento pero teniendo en cuenta, a diferencia de Descartes, la direccionalidad de los movimientos. Establece que ha de conservarse también la cantidad mv^2 durante el choque para cuerpos elásticos, es decir aquellos que recuperan su estructura tras al choque.

Leibniz con el texto "*Brevis Demonstratio Erroris memorabilis Cartesii et aliorum circa legem Naturalem*" publicado en Actas Eruditorum en 1686 expone su crítica del sistema cartesiano[177]. En este texto Leibniz defiende la idea de que la ley cartesiana de conservación de la cantidad de movimiento (mv) es falsa y conduce a paradojas. Propone medir la fuerza que posee un cuerpo por los efectos que produce, por ejemplo al convertir un movimiento horizontal en ascensión libre vertical. En este

---

solutio problematis articulo 167 propositi et soluti, quandoquidem sola formula particularis articulo 170 paulo ante memorata justo tractatui conscribendo abundantem materiam subministrare posset." [Ibidem]

[176] *Extrait d'une lettre de M. Huygens à l'auteur du journal sur les règles du mouvement dans la rencontre des corps*. *Journal des Savants*. 1699.

[177] Para un anális de la posición cartesiana y de la crítica de Leibniz ver el apartado 4.3 *The laws of motion* en [GARBER D. 1995, p. 309]

caso muestra cómo el efecto de la fuerza de un cuerpo en movimiento depende de la altura alcanzada, que a su vez es, por las leyes de Galileo de caída libre, como el cuadrado de la velocidad. Argumenta, seguramente inspirado por las leyes de choque de Huygens, que la cantidad conservada es la que llama "fuerza viva" (*vis viva*), dada por mv^2. Muestra, así mismo, cómo en este caso, la cantidad de movimiento no se conserva, ya que dos cuerpos de valor 1 y 4 alcanzarían alturas de 4 y 1 respectivamente teniendo la misma *vis viva*, sin embargo tendrían velocidades de 2 y 1 respectivamente. La crítica leibniziana y la correspondiente "medida de la fuerza" da lugar a la polémica llamada de "las fuerzas vivas" que recorrerá todo el s. XVIII. La polémica de las "fuerzas vivas" se establece en un primer momento entre los cartesianos y Leibniz, para reactivarse tras la publicación de la correspondencia Leibniz – Clarke en 1717[178], un año después de que se edite la *Phoronomia.*

La exposición leibnizina de las leyes de los choques se encuentra en el ensayo "*Essay de dynamique sur les loix du Mouvement …"* escrito en la década de 1690 y publicado por primera vez por C.I. Gerhardt en 1860[179]. En este manuscrito Leibniz expone las tres leyes de conservación en línea recta siguientes[180]:

- Se conserva la "Fuerza absoluta"[181] en las colisiones elásticas, esto es, la suma de mv^2 antes y después del choque. Enfatiza que dichos valores son absolutos ya que no dependen de la direccionalidad de las velocidades, y que en los choques inelásticos una parte de la fuerza absoluta inicial se pierde en las partes internas de los cuerpos, aunque se conserva en conjunto.

- Para los choque elásticos se conserva la "Fuerza respectiva" o "Velocidad Relativa" de los cuerpos que colisionan en la misma dirección. Es decir, siendo (v, x) las velocidades de un cuerpo A antes y después del choque, y (y, z) las

[178] Ver para una historia de la polémica en el s. XVIII [HANKINS T. L. 1965]
[179] Traducción castellana en [LEIBNIZ G.W. 1991 pp. 99-125]
[180] Ibíd. pp. 117-120
[181] Leibniz llama aquí "Fuerza Absoluta" a lo que ha llamado "Fuerza Viva" (*vis viva*) o incluso "Fuerza Viva Absoluta" en otros textos como *SpecimenDyinamicum* publicado en AE en 1695.

velocidades antes y después del segundo cuerpo B, se cumple durante el choque que: v – y = z – x.

- Se conserva el "Progreso común" o "cantidad de movimiento" de los cuerpos durante cualquier tipo de choque teniendo en cuenta la direccionalidad de los movimientos.

Finalmente Leibniz muestra de forma algebraica cómo cualquiera de las tres leyes puede obtenerse de las otras dos, por lo que para resolver el problema del cálculo de la velocidad después del choque bastaría usar dos de ellas.

Veamos ahora cuál es el planteamiento del problema de los choques en la *Phoronomia*. Como hemos dicho, Hermann no interviene directamente en la polémica de las *vis viva,* pero en su dinámica de choques fija su posición y demuestra conocer los textos del debate.

Como ya es habitual, introduce una serie de definiciones relativas al problema tratado. En este caso, amplía la definición de colisión para el caso oblicuo (*in directionius obliquis*) y define los conceptos de velocidad propia y relativa así como el de fuerza absoluta:

- <u>velocidad propia</u> (*velocitates propiae*) la que tienen los cuerpos. <u>Velocidad relativa</u> (*velocitas relativa*) la que tienen al acercarse mutuamente y que será la suma de las propias si se acercan en sentido opuesto y la diferencia si se persiguen. Establece el sentido de las velocidades como positivo o negativo para tener en cuenta su dirección, propiedad que también indica, como en otros lugares, por el orden de los dos puntos que representan las velocidades (AD = - DA).

- Define la velocidad de los cuerpos antes del choque como la que habrían adquirido en caída libre por gravedad, y la de después como la velocidad inicial que tendrían al ascender verticalmente por gravedad (ver fig. 32).

- "Fuerza absoluta" (*vis absoluta*) de un cuerpo es la "altura" que alcanzarían en movimiento libre, al caer (antes de chocar) o al subir (después del choque). Ya hemos indicado que la "fuerza absoluta" equivale a la *vis viva* y ambas a lo que será la "energía cinética" del cuerpo, ya que la altura alcanzada en caída libre es proporcional al cuadrado de la velocidad.

  Recordemos que Leibniz justifica la denominación "absoluta" por cuanto esta cantidad se conserva en el universo, independientemente de la dirección de los cuerpos, en sustitución de la cartesiana "cantidad de movimiento" que, en su opinión, se conservaría en los choques pero no en general.

  Hermann, nunca usa la denominación *vis viva* en relación con la altura que virtualmente alcanzarían los cuerpos en su libre ascenso o descenso. Recordemos que en las definiciones que encabezan la obra que estamos analizando, nos dice que llamará simplemente fuerza (*vis)* a la fuerza viva (*vis viva)* productora de cambios en la velocidad[182]. Sigue pues la mencionada denominación de Leibniz que permite introducir con el lenguaje una distinción entre "fuerza" (*vis*) que incluye la *vis viva* y "fuerza absoluta" que se mediría de otro modo.

- Diagrama de fuerzas absolutas: Hermann representa mediante segmentos verticales las alturas equivalentes a cada "fuerza absoluta" del modo que indica la fig. 32. Antes de chocar EA representa la fuerza absoluta del cuerpo A, BF la del B. Después del choque las fuerzas absolutas son ea y fb. Estas verticales son para nosotros las energías cinéticas.

[182] Ver el apartado 3.3 de esta monografía.

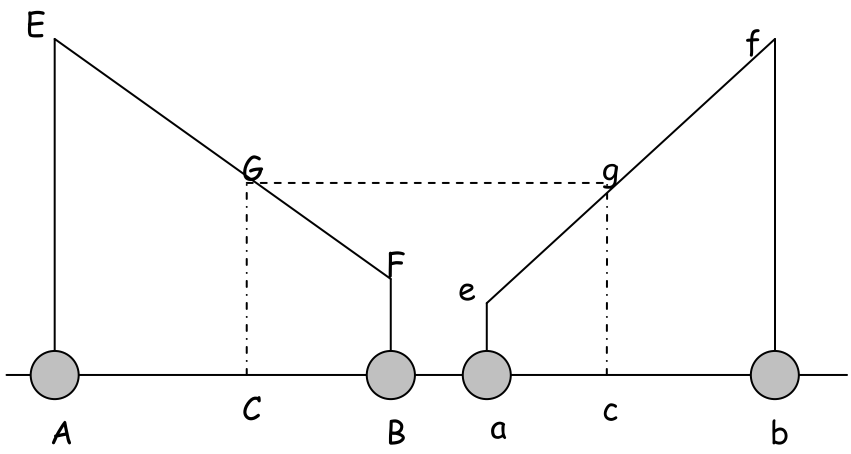


Fig. 32

- Cuerpos elásticos o activos (*corpora elastica aut actuosa*) como aquellos que poseen una fuerza activa o impulsora. Y cuerpos inertes o no elásticos (*corpora non elastica aut inertia)* que sólo son afectados por la fuerza de inercia.

Como vemos, las definiciones responden a una explicitación de la conceptualización leibniziana de las colisiones. Podemos considerar en los cuerpos elásticos o no, su "velocidad propia" y "relativa", y además su "fuerza absoluta" representable mediante un diagrama de alturas.

El estudio de los choques elásticos se basa para Hermann en la deducción de sus leyes a partir de un único principio o hipótesis que anuncia a continuación: "Cuando los cuerpos activos chocan entre sí, su fuerza absoluta tras la colisión es la misma que antes de chocar." [*Phoronomia* p. 112 nº 218]. Nos indica que esta hipótesis significa que las alturas del centro de gravedad (c. de g.) son la misma antes y después del choque. En el diagrama de fuerzas absolutas *CG* = *cg*.

En el largo comentario que sigue a de las definiciones y a la hipótesis expone sus ideas en relación a la polémica de las fuerzas vivas y a su propio planteamiento.

Nos dice que su hipótesis fue enunciada sin demostración por Leibniz, pero que puede demostrarse y que él mismo lo hará quizás en otra ocasión[183]. No ignora, afirma, que muchos hombres insignes han considerado que la medida de la fuerza ha de hacerse por la cantidad de movimiento. Se refiere explícitamente a Papin, que en su polémica con Leibniz afirma que la fuerza debe medirse por el tiempo y no por la altura alcanzada. [184]. También afirma que Huygens también adoptó en cierta medida su hipótesis.

Afirma sucintamente que el principio cartesiano es falso, ya que pretende que cuerpos con distintas velocidades ascenderán lo mismo por los impulsos de la gravedad producidos en tiempos iguales. Se refiere sin duda a razonamientos expuestos por Leibniz en su polémica. Si la "fuerza" se mide por la cantidad de movimiento, dos cuerpos que teniendo distintas velocidades tienen igual cantidad de movimiento, producirían el mismo efecto o altura en su ascensión libre.

Demuestra la ley de conservación de mv para choques inelásticos oblicuos y la conservación de la velocidad del centro de masas en cantidad y dirección [*Phoronomia* pp. 114-115 nº 220-221]. Muestra que para cuerpos elásticos su hipótesis equivale a la conservación de la cantidad mv^2 [*Phoronomia* pp. 115-116 nº 222].

A partir de la siguiente expresión: $A.AC.AB + C.\ CD^2 = A.\ ac.\ Ab + C.Dc^2$ [*Phoronomia* p. 116 nº 223], y considerando una variación de velocidad virtual infinitesimal durante el choque, demuestra que en la colisión elástica se conserva la velocidad del centro de gravedad y la velocidad relativa de los móviles.

[183] "… etsi apodictice demonstrari potest, ut forte alia id occasione ostendemus." [*Phoronomia* p. 113 nº 219]

[184] Recordemos que tras el citado artículo sobre los errores de Descartes que publica Leibniz, en 1686, los cartesianos Catelan y Papin intervienen defendiendo las posiciones cartesianas protagonizando las primeras escaramuzas de la polémica.

En el corolario IV [*Phoronomia* p. 119 nº 229], como aplicación de las dos leyes anteriores, da la expresión general que permite calcular las velocidades finales de los cuerpos en colisión a partir de sus masas m, n y de sus velocidades iniciales u y r:

$$v_A = u + \frac{(u-r)\,2\,n}{m+n} \qquad v_B = r + \frac{(u-r)\,2\,m}{m+n}$$

Una vez más, Hermann expone un tema mecánico de forma deductiva, a partir de la menor cantidad de principios, o con sus palabras de forma "simple y elegante". La diferencia con Leibniz es que, adoptando sus conceptos y sus leyes, contribuye a construir un sistema deductivo con ellas, ampliándolo además a los choques inelásticos y oblicuos.

Ha expuesto la teoría de los choques tomando para cuerpos elásticos una de las leyes de Leibniz como hipótesis. Esta ley equivale a la conservación de lo que será para nosotros la energía cinética, y para ellos la "fuerza absoluta" medida como una altura virtual. A partir de ella demuestra la conservación de la cantidad de movimiento y de la velocidad relativa, y estas dos ecuaciones bastan para obtener las soluciones en los choques. Hoy resolvemos este tipo de problemas con el par de ecuaciones de Hermann, ya que es más sencillo usar la conservación de la velocidad relativa, que la conservación de la energía cinética que contiene potencias[185].

5.4 EL DESCENSO DE CUERPOS POR CURVAS Y LOS PÉNDULOS

Hermann plantea el estudio del movimiento por curvas isócronas para cualquier hipótesis de fuerzas centrales y el movimiento de péndulos en el capítulo III de su obra [*Phoronomia* p. 81]. Su originalidad consiste, de nuevo, en el uso la primera regla dinámica general establecida por él (ver 5.1), es decir la conservación de la energía.

[185] Ver [TIPLER P. A. 1988 t. I pp.265-285]

Recordemos que está será una de las aproximaciones al estudio mecánico que culminará con Lagrange en s. XVIII: Reseñaremos sus principales resultados.

El teorema principal [*Phoronomia* pp. 81-84 nº 172] consiste en una caracterización de las curvas de descenso isócronas, es decir, curvas por las que un cuerpo desciende en igual tiempo para cualquier arco que se considere. El planteamiento de Hermann es el siguiente (ver fig. 33):

Sea BEA la curva isócrona por la que se mueve el cuerpo desde el reposo sometida a las fuerzas centrales, representadas por la escala (cha) según las distancias radiales BC, HE, Ve, etc. al centro de fuerzas O. Define una segunda escala ARD cuyas ordenadas HR se definen de modo que cada HR = √(2 HAah) correspondiente. Establecido esto, demuestra que: "Si AE = N·HR entonces la curva BEA es isócrona. Siendo N una constante."

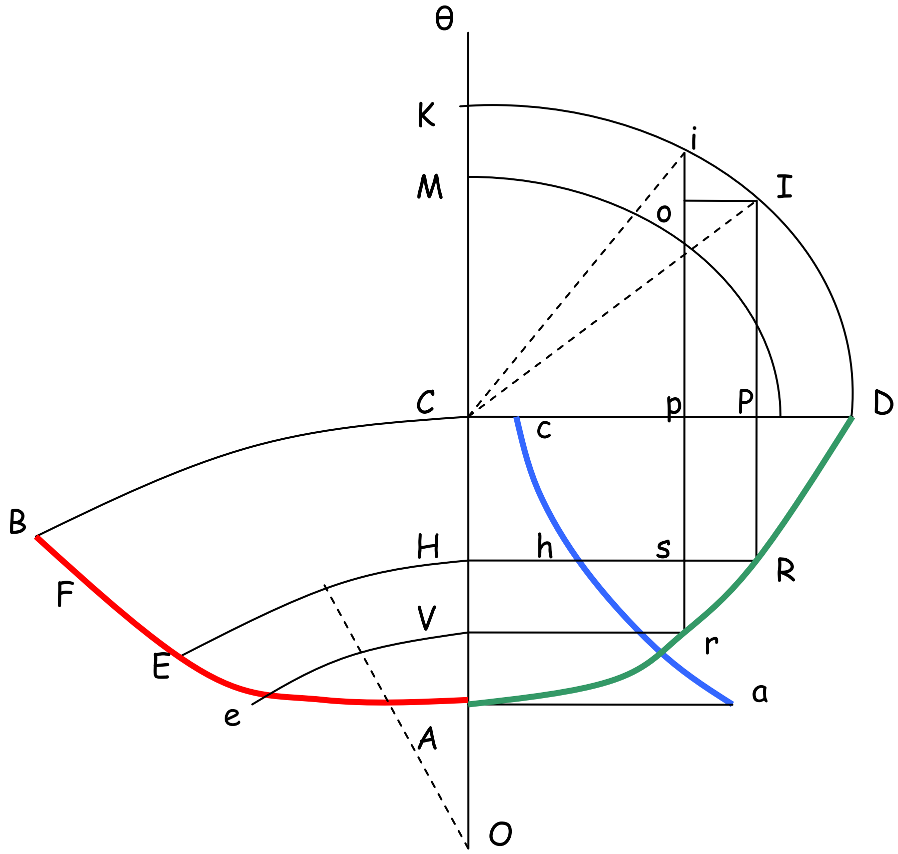


Fig. 33

Si analizamos el teorema vemos que la escala ARD es una curva que expresa el incremento de energía cinética entre los puntos de la curva H y el final A. Es decir, HR = √(2 HAah) = √(2 W_{HA}) donde W_{HA} representa en notación actual el trabajo de la fuerza central para ir desde H hasta A o desde E hasta A. Hermann construye la curva de energías correspondiente a la isócrona, siguiendo una vez más el teorema de la energía cinética que ha considerado como la primera de sus dos reglas fundamentales (ver ec. 5-e del apartado 5.1 de esta monografía). La curvas isócronas quedan pues caracterizadas por la condición de que un fragmento de arco AE es proporcional a la variación de energía cinética correspondiente HR.

Sin entrar en detalle en la demostración, podemos decir que usando teoremas energéticos del modo que acabamos de explicar, llega a la conclusión de que el tiempo dt de caída por un diferencial de curva Ee y que es ds/v, depende sólo de constantes y del ángulo iCI del cuadrante KCD asociado a la curva energética ARD. Haciendo la correspondiente integración, el tiempo t para recorrer toda la curva BEA es proporcional al ángulo del cuadrante KCD completo (diríamos hoy que vale π/2 radianes). El argumento final de Hermann es que si lo hiciéramos para otro fragmento de curva, por ejemplo para FEA, el resultado sería también el ángulo correspondiente a un cuadrante completo (de nuevo π/2 radianes), ahora para un radio más pequeño MCN.

El corolario I [*Phoronomia* p. 84 nº 173] considera un pequeño arco cercano al punto A inferior de la curva isócrona. En este corolario obtiene la expresión de la constante N usada en la demostración general citada pero ahora para pequeñas oscilaciones. N queda como función del radio de curvatura θA en A (para nosotros R) y del radio vector r o distancia al centro de fuerzas O. Si p_A es el peso del cuerpo en el punto más bajo A, N queda como:

$$N = \frac{Rr}{(R + r)\, p_A}$$

Un segundo corolario [*Phoronomia* pp. 84-85 nº 174] particulariza el problema tomando el radio de curvatura θA igual a la longitud del péndulo correspondiente colgado de θ. De este modo su teorema general de descenso por curvas isócronas sirve ahora para péndulos de longitud R= θA.

Razona del modo siguiente (actualizamos su notación ligeramente): si el teorema muestra que t_{BEA} = N √m · (un cuadrante KCD), una oscilación completa sería T = 4 t_{BEA} = N √m (2 π)[186]. Sustituye el valor de N obtenido en el corolario I, llegando a la expresión general para el periodo de un péndulo isócrono o para cualquier péndulo con oscilaciones pequeñas, en cualquier hipótesis de gravedad central:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m\, l\, r_A}{(l + r_A)\, p_A}}$$

m es la masa, l la longitud del péndulo o radio de curvatura R, r_A el radio vector desde A al centro de fuerzas O, y p_A el peso del cuerpo en A.

El tercer corolario [*Phoronomia* p. 85 nº 175] particulariza para gravedad constante en el que podemos considerar r como infinito en comparación con la longitud del péndulo l. Dado que ahora $l+r_A = r_A$ el periodo es en este caso, similar al que encontramos en nuestros textos:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m\, l}{p_A}}$$

Aquí refiere Hermann que su resultado está de acuerdo con el de la prop. L II del libro I de los *Principia*[187]. En este teorema Newton deduce la proporcionalidad directa del periodo de un péndulo con la raíz de su longitud, e inversa con el peso y la suma de longitud y radio para cualquier fuerza central. En los corolarios Newton particulariza

[186] En su notación 2 π es la longitud de la circunferencia dividida por el radio.
[187] [NEWTON I. b 1687 p. 553]

para el caso de gravedad constante estudiado por Wren y por Huygens, tal como hace Hermann.

Igualmente, Hermann expone en el mismo corolario III, cómo de la expresión del periodo para gravedad constante, pueden deducirse los resultados que Newton da en la prop. XXIV y sus corolarios, referidos a las proporciones entre las diversas magnitudes, longitud, masa, peso, al comparar dos péndulos.

La novedad es que Hermann ha obtenido las constantes de proporcionalidad y ha resuelto el problema usando su teorema energético. Este cambio es importante por cuanto marca un camino en el que los teoremas energéticos permiten resolver de modo más directo muchos de los problemas dinámicos. Este será el método que generalizará Lagrange.

El teorema energético le permite a Hermann resolver también el problema de Huygens [*Phoronomia* pp. 89-91 nº 179]. A saber, si la gravedad es uniforme la isócrona es la cicloide.

En este caso, la escala de fuerzas cha (ver fig. 33) es una recta vertical, y la escala que representa la variación de energía cinética del móvil que baja por la curva isócrona BEA, se convierte en una parábola. Recordemos que en su teorema principal $HR = \sqrt{(2\ HAah)}$ y por tanto en este caso $HR^2 = 2\ p\ h_A$, siendo p el peso constante del móvil y h_A la altura desde la que cae. Hoy diríamos que se trata de la expresión para gravedad constante de la igualdad entre energía cinética y potencial en la caída.

A continuación, en un escolio [*Phoronomia* pp. 91-93] Hermann resuelve algunos de los trece problemas planteados por Huygens en su *Horologium Oscillatorium* (Paris, 1673). Los cuatro primeros de Huygens corresponden, como es sabido, a la medida de la fuerza centrípeta como v^2/r (ver ec. 5-g) que demostró Hermann, y que ya comentamos en la sección 5.2. El quinto teorema de Huygens consiste en encontrar la relación entre la fuerza centrípeta y el peso. Hermann considera el movimiento circular generado en un péndulo cónico (fig. 34). C es la fuerza centípeta, G el peso, R el radio de giro, M la masa, v la velocidad equivalente a la caída libre desde la altura h = DM, T es el periodo o tiempo de una vuelta y p es el cociente entre la longitud de la circunferencia L y el radio R, que es el modo en el que se expresaba 2π.

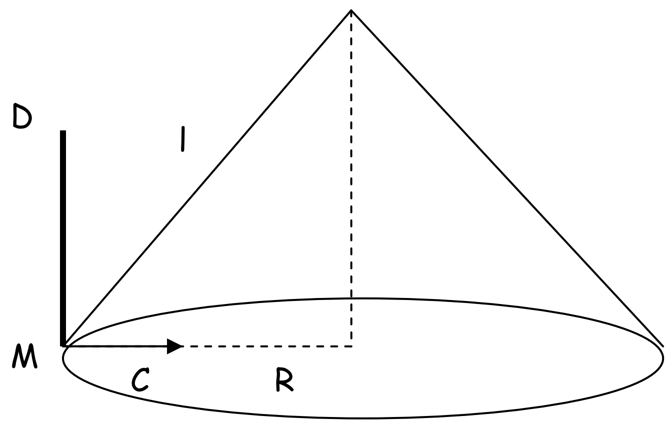


Fig. 34

Con estas definiciones y teniendo en cuenta como ecuación I la expresión que demostró para la fuerza centrípeta: $C\,R = v^2$, como ecuación II el periodo $T = p\,R/\,v$, y como ecuación III la velocidad en caída libre de Galileo $v^2 = 2G\,h$, obtiene con poco esfuerzo:

- Con las ec. I y III el teorema V de Huygens: $C/G = 2h/R$
- Con las ec. I y II y si $T_1 = T_2$: $C_1/C_2 = R_1/R_2$ (las fuerzas centrípetas son proporcionales a los radios)
- Con las ec. I y II y si T es proporcional a R^n tenemos que $C = p\,R^{1-2n}$ Si además consideramos que, como en el caso de la gravedad, C es proporcional a R^{-2} queda que $R^2 = R^{2n-1}$ de donde n= 3/2 y por tanto T es proporcional a $R^{3/2}$ que es la tercera ley de Kepler.

Tal como declara el propio Hermann, después de Huygens, L'Hospital da la demostración de estos teoremas en la memoria entregada a la *Académie* en 1700[188] de modo diferente a él. Podemos ver la solución de L'Hospital en [BLAY M. 1992, pp. 103-107]. La solución de Hermann difiere en cuanto que parte de una demostración general de la ley de la fuerza centrípeta (ec. 5-g) en cada punto de la curva, demostrada a partir de su segunda regla general (segunda ley de Newton). Basta después particularizar para obtener las reglas de Huygens de modo sencillo. El procedimiento de Hermann tiene el interés de contribuir a una algoritmización de la mecánica, es decir, resolver problemas a partir de principios generales, que en la solución de L'Hospital no está presente.

Otro trabajo de L'Hospital tiene que ver con un problema que había planteado Johann BERNOULLI públicamente en *Acta Eruditorum* en 1695. El problema se conoce como de la curva de igual presión o de la curva centrífuga, y consiste en encontrar la curva que cumple que en cada punto son iguales el peso del cuerpo que cae y la fuerza centrífuga o presión del mismo sobre la curva. Como de costumbre y según el contrato firmado con L'Hospital, Johann le había explicado por correspondencia al matemático francés los detalles físicos del problema, como el significado de la fuerza centrípeta, para que L'Hospital pudiera dedicarse a su resolución.

Hermann resuelve también este problema en [*Phoronomia* pp. 94-95; nº 185] de modo parecido al de L'Hopital, pero sin usar la expresión del radio de curvatura presente en *L'Analyse des infiniment petits* (París 1696).

En el capítulo V Hermann realiza el estudio del péndulo compuesto consistente en varios cuerpos conectados entre sí y oscilando. El objetivo es encontrar a partir del péndulo compuesto el "centro de oscilación" o punto del péndulo simple sincrónico del compuesto.

[188] *Solution d'un problème physico- mathématique*. Histoire de l'Académie 1700 (1703) 9-21

Tal como explica Hermann, el primero en tratar estos problemas fue Huygens en la cuarta parte de su obra sobre el reloj de péndulo, ya varias veces citada en este apartado. Huygens se basa en la hipótesis que dice que la altura del centro de gravedad de los diversos cuerpos que forman un péndulo compuesto es la misma al descender que al subir por el impulso de la gravedad. Johann Bernoulli escribe un trabajo relativo al péndulo compuesto en 1703[189], que también cita Hermann, en el que llega a calcular el centro de oscilación de un péndulo compuesto para gravedad uniforme a partir de considerar a las distintas partes del péndulo como una balanza.

Hermann demuestra en su teorema principal [*Phoronomia* pp. 105-106; nº 205] la hipótesis de Huygens relativa a la constancia de altura del centro de gravedad al subir y bajar en cualquier péndulo. Utiliza una vez más, además de lemas geométricos, los resultados obtenidos en su dinámica a partir de la conservación de la energía: igualdad de velocidad para cuerpos que caen desde la misma altura pero por distintos senderos, y relación entre la velocidad adquirida y la altura de partida. Usa así mismo los

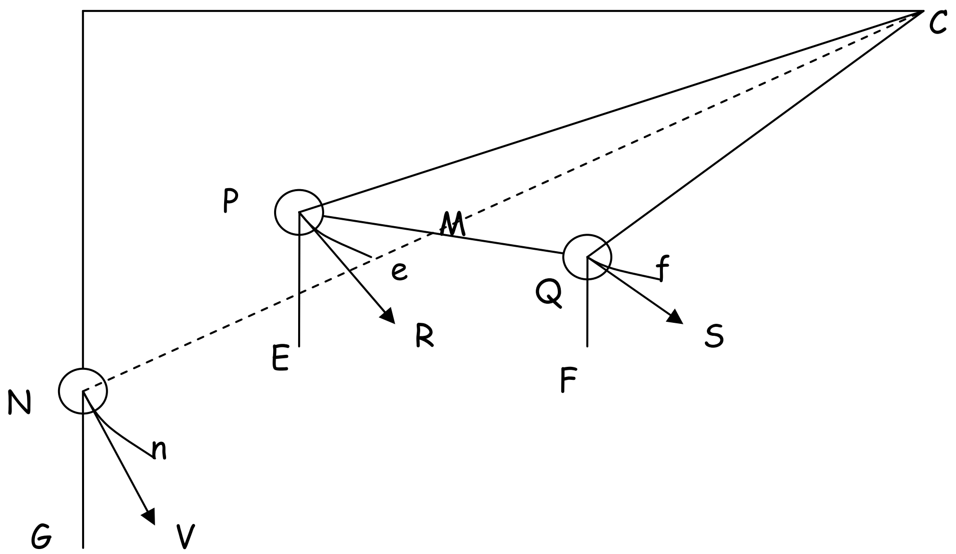


Fig. 35

[189] "*Démonstration générale du centre de Balancement & d'Oscillation, tirée de la nature du Levier*". *Pa r M. BERNOULLI, Professeur à Bâle. Lettre du 13. Mars 1703*
Histoire de l'Académie royale (1720) pp. 78-84

teoremas relativos a la caracterización de los centros de gravedad de sistemas de cuerpos, que ha expuesto en su estática.

Obtiene después como corolario [*Phoronomia* p. 106; nº 206], la posición CN (fig. 35) del centro de oscilación N del péndulo simple, equivalente al péndulo compuesto para dos masas P y Q conectadas mediante PQ. Toma E y F como los pesos específicos de cada masa P y Q. La masa total es M = E.P + F.Q, y G el peso del péndulo equivalente:

$$NC = \frac{(P.PC^2 + Q.QC^2)\,G}{M.MC}$$

El siguiente corolario [*Phoronomia* p. 106 ; nº 207] considera el caso particular de gravedad constante (pesos específicos iguales E = F = G) obteniendo (con M = P + Q):

$$NC = \frac{(P.PC^2 + Q.QC^2)}{M.MC}$$

El corolario posterior [*Phoronomia* p. 107 ; nº 208] extiende la relación al caso contínuo tomando como diferencial de masa dp = P = Q = … , obteniendo la ecuación de posición del centro de oscilación para un cuerpo sólido, que en la notación algebraica de Hermann y Johann Bernoulli (tomando x = CM; MP= MQ = … = y) es:

$$NC = \frac{\int (x^2 + y^2)\,dp}{\int xdp}$$

Expresión que coincide con la de Johann BERNOULLI en el artículo citado. Hermann, sin embargo, extiende la demostración al caso en que la gravedad no es constante, llega a ella mediante la demostración previa del teorema del centro de gravedad tomado por Huygens como postulado, y usa, una vez más, los resultados generales relativos a la conservación de la energía. Supone, tal como hemos dicho en otros apartados, un planteamiento basado en teoremas generales, una búsqueda de jerarquía en los principios mecánicos históricamente significativa.

5.5 EL MOVIMIENTO EN MEDIOS RESISTENTES

Como ilustración final de las aportaciones algorítmicas y conceptuales que hace Hermann en la *Phoronomia*, comentaremos sucintamente el largo estudio que hace del tema del movimiento de cuerpos en medios resistentes. Corresponde a la sección IV y penúltima del libro y consta de 84 páginas y 8 capítulos.

En la introducción [*Phoronomia* pp. 277-278], Hermann cita a los autores que han hecho aportaciones al tema, sin citar sus trabajos. Desde los orígenes de Galileo y Torricelli, hasta los desarrollos de Newton, Leibniz, Huygens y Wallis que son según Hermann parciales y a veces sin demostración, por lo que resultan difíciles para los novatos (*Tyrones*). Por último cita los trabajos de Varignon que en sus memorias presentadas a la *Académie* de París entre 1707 y 1710 parecen, dice, la culminación del tema. Sin embargo, nos dice Hermann, él persigue la brevedad y la claridad y para ello usará los principios establecidos en su dinámica general. Principalmente uno que permite simplificar y unificar las demostraciones y que no ha sido usado por otros autores: para Hermann se trata de la "ley de igualdad de momentos", para nosotros es el teorema diferencial de conservación de la energía o teorema trabajo-energía. Recordemos que se trata de (F_t ds = m v dv), considerada por Hermann como una de las dos leyes mecánicas principales, tal como hemos analizado en apartado 5.1 de esta monografía.

En el capítulo XIV, que trata "La teoría general del movimiento de cuerpos en medios resistentes", Hermann establece las definiciones necesarias:

- Distingue las dos clases de resistencia [*Phoronomia* p. 279 ; nº 477-478]: <u>absoluta</u> que es independiente de la velocidad de los cuerpos y que depende de la adherencia de las superficies en contacto, y <u>relativa</u> (*respectiva*) que proviene de los impactos de las partículas de fluido sobre el cuerpo en movimiento y que depende de la densidad y de la velocidad relativa.

- Define el movimiento primitivo como el que tendría el móvil sin tener en cuenta la resistencia. [*Phoronomia* p. 280 ; nº 480]
- Solicitación acelerante (*solicitatio acceleratrix*) es la suma o diferencia entre el peso y la resistencia, según el cuerpo ascienda o descienda. Equivale a la fuerza total que provoca el cambio de movimiento en cada caso.
- Define la velocidad terminal (*velocitas terminalis*) como la que alcanza un cuerpo en caída libre cuando se ha extinguido su fuerza acelerante, cuando la resistencia que crece con la velocidad iguala al peso.
- Distingue entre movimiento ordinario o general (*motus communis*) que tiene el móvil en su avance con su movimiento primitivo (sin considerar resistencia), el movimiento propio (*motus propius*) que será generado por la resistencia, y el movimiento absoluto (*motus absolutus*) que corresponde a la composición de los dos anteriores. Estudiará el movimiento mediante el análisis separado del general y del propio.

En el lema de la proposición LIV extiende la ley de igualdad de momentos (para nosotros de conservación de la energía), que estableció en el estudio de la dinámica general, al análisis dinámico en medios resistentes, "por lo que no se necesitan nueva demostración":

"Haec proposito eadem est cum prop. XVII Lib. I -132, ut adeao nova demonstratione non indigeat, nam solicitationibus nomine quacumque vires mortuae, sed continue appicatae, intelligi queunt. Propterea, si solicitatis gratia corpus in linia verticali moveri ponatur, spatiaque transmissa dicantur x, gravitas, g, resistentia aeris r, velocitas acquisita corpori decidenti vel resigua ascendentes u;..." [*Phoronomia* p. 281 ; nº 484]

Hermann expresa el su principio de igualdad del momento de la fuerza aceleradora (g±r) y de la velocidad u como:

$$g\,dx \mp r\,dx = u\,du \qquad (5\text{-}5\text{-}a).$$

Los signos corresponden respectivamente al ascenso o descenso vertical del cuerpo, considerando para el ascenso que el espacio no es el recorrido sino el complementario hasta la máxima altura.

Tal como mostraremos, Hermann usará el principio de conservación de la energía como ley básica para caracterizar las relaciones principales en el estudio del movimiento resistente.

Combinando esta ecuación (5-5–a) con la segunda ley de Newton (para él segunda regla principal, ver apartado 5.1) $dt = \frac{du}{g \mp r}$ y con su lema para la velocidad en un instante dt = dx : u, obtiene por integración, el tiempo correspondiente a cada movimiento en función de las fuerzas:

$$t = \int \frac{du}{g \mp r}$$

Tal como nos indica el propio Hermann, éstas son las relaciones generales en las que basará el estudio de los distintos casos, ya que no se ha especificado ninguna hipótesis para las fuerzas de resistencia r.

Para calcular el espacio recorrido, Hermann recurre al siguiente esquema: el espacio realmente recorrido (movimiento absoluto) es el que resulta de calcular el que habría recorrido sin resistencia (movimiento general), para después restarle el que corresponde a la disminución de velocidad debida a la resistencia del medio (movimiento propio) [*Phoronomia* pp. 282-284 ; nº 487-488-489].

En el escolio general final del capítulo introductorio [*Phoronomia* p. 286 ; nº 494], Hermann señala que, una vez establecidos los principios generales (*"ratadis jam generalibus principiis"*) y algunos lemas matemáticos referentes a propiedades de la curva logarítmica y de la hiperbólica, queda su aplicación a los distintos casos particulares. Comienza por considerar la "resistencia absoluta" (independiente de la velocidad). Este caso está resuelto, dice, trivialmente ya que es equivalente al de gravedad constante, tratado en los parágrafos 150-151 del cap. I de su dinámica.

Hermann estudia a continuación, en sucesivos capítulos, los movimientos correspondientes a cada una de las hipótesis de dependencia de la resistencia r con la velocidad u:

- Cap. XV: con la hipótesis de $r = k\,u$ estudia los movimientos primitivos:
    - Uniforme
    - Ascenso y descenso vertical por gravedad
    - Movimiento oblicuo (como compuesto de los dos anteriores)
- Cap. XVI: con la hipótesis de $r = k\,u^2$ estudia los movimientos primitivos:
    - Uniforme
    - Ascenso y descenso vertical por gravedad
- Cap. XVII: con la hipótesis de $r = ku + k'\,u^2$ estudia los movimientos primitivos:
    - Uniforme
    - Ascenso y descenso vertical por gravedad

El siguiente capítulo estudia el movimiento general en un medio con densidad Δ variable para cualquier hipótesis sobre la dependencia con la velocidad u.

- Cap. XVIII: con la hipótesis de $r = (ku^{m} + k'\,u^{m+1}).\Delta$, estudia los movimientos primitivos:
    - Uniforme
    - Ascenso y descenso vertical por gravedad

Aborda en el siguiente capítulo el estudio del movimiento ascendente o descendente por cualesquiera líneas curvas:

- Cap. XIX: leyes generales para el ascenso o descenso por curvas, con la particularización para las hipótesis: $r = k\ u^2$; $r = k\ u$; $r = k$; curva cicloide (equivalente a la prop. XXX del L. II de los *Principia*)

Finalmente, en el capítulo XX trata del movimiento por cualquier curva, con la resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad, pero considerando que el centro de fuerzas de gravedad está situado sobre una curva determinada, particularizando para gravedad con un único centro y para gravedad constante.

Para ilustrar el modo en que Hermann construye las demostraciones a partir del principio de conservación de la energía, expondremos el teorema que corresponde a la proposición LVIII [*Phoronomia* pp. 287-288 ; nº 495].

El objetivo es encontrar el tiempo y el espacio recorrido por un móvil que teniendo movimiento primitivo uniforme se mueve por el aire con una resistencia proporcional a la velocidad.

En la figura 36 suponemos que un móvil M se mueve en la dirección Q con velocidad uniforme NA. Sin embargo, como consecuencia de la resistencia del aire, esta velocidad NA disminuirá después de un tiempo en una cantidad DE para llegar a ser BD. El espacio “perdido” en ese mismo tiempo será NE.

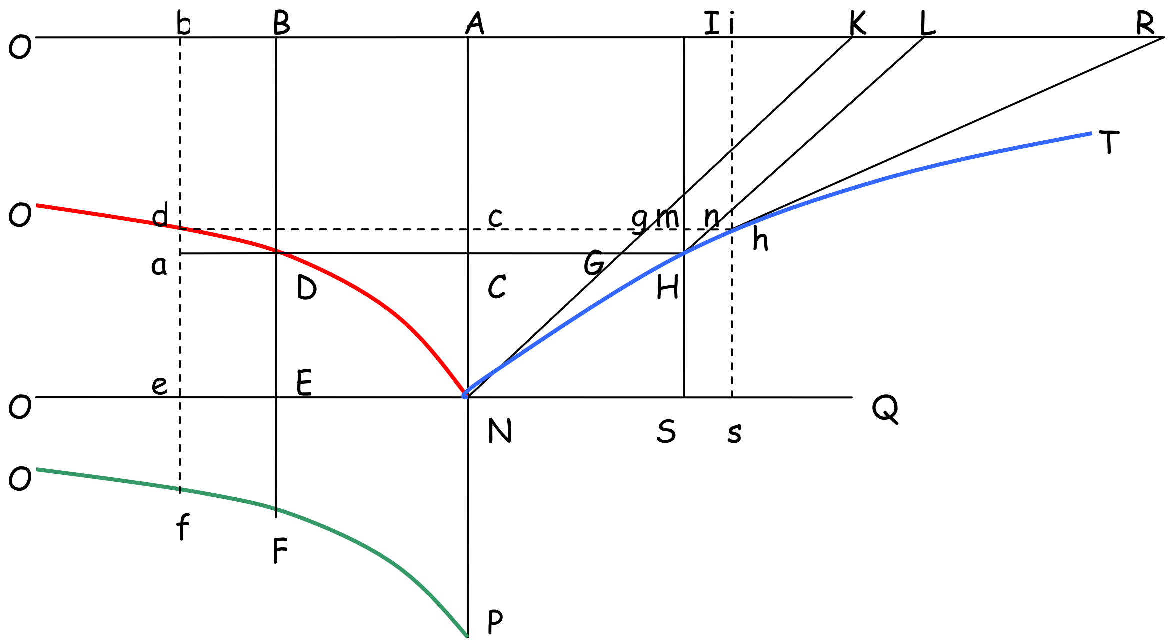


Fig. 36

La curva NDO representa por tanto las velocidades "propias" o "perdidas" ED, ed, etc. y también las velocidades efectivas DB = NA - ED, db, etc. La curva PFO representa las solicitaciones acelerantes FE, fe, etc. responsables de la disminución de la velocidad, en este caso debidas sólo a la resistencia del aire.

Como según la hipótesis, las resistencias y las velocidades son proporcionales, las curvas NDO y PFO son similares y BD. Bb = EF. Ee. Aplicando el teorema de igualdad de momentos F. dr = vdv (conservación de la energía) tenemos que EF. Ee = ED. ad. Por tanto: EF. Ee = ED. ad = BD. Bb. (ad es el incremento de velocidad dv y Ee el de espacio dr)

Se construye desde N la curva logarítmica NHT de forma que para la tangente NK la subtangente constante sea AK = AN (e igual a IR) y su ordenada IH = BD. Se traza la horizontal HCD que corta a la tangente NK en G, de forma que CD = EN = GH.

Trazamos HI paralela a la tangente NK. Como por construcción NE = GH y Ne = gh, restando ambas queda que Ee = nh (ver detalle en la fig. 37)

Demuestra que se verifica la igualdad de momentos, para la construcción de la logarítmica realizada: EF. Ee = ED. ad = EF. Nh

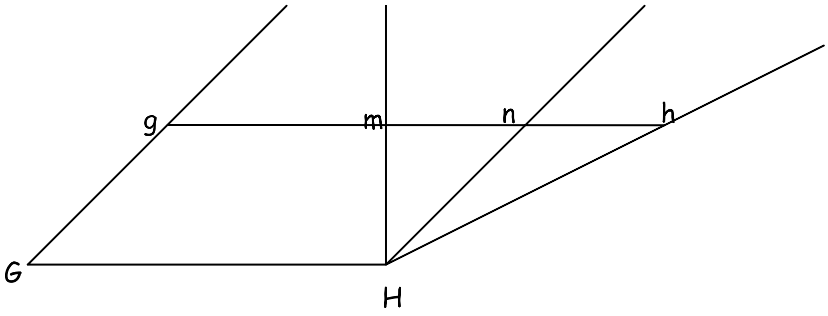


Fig. 37

Por semejanza de triángulos, nh: LR = mh: IR donde HR es la tangente en H. Como además (dt = dr:v =) Ee: De = nh : LR, el diferencial del tiempo queda dt = mh: IR, y por tanto, el tiempo para recorrer NE es:

$$t_{NE} = \int \frac{mh}{IR} = \frac{1}{IR} \int Ii = \frac{AI}{IR} = \frac{\log \frac{AN}{HI}}{IR\ (= AN)}$$

Que equivale con nuestros símbolos a: $t_{NE} = \dfrac{\log \frac{v_0}{v}}{v_0}$

Finalmente obtiene el espacio recorrido (Δx) como diferencia del que habría recorrido con movimiento uniforme AN.t_{NE} menos el perdido por resistencia NE.

$$\Delta x = AN.\ t_{NE} - NE = AN\ (AI: AN) - NE = AI - NE = CH\text{-}GH = CG = NC = DE$$

El espacio es pues como la velocidad perdida DE, es decir: $\Delta x = (v_0 - v)$.

Hermann usa la conservación de la energía para la construcción geométrica de la logarítmica y con ella obtiene la expresión del tiempo en función de la velocidad en cada instante y de la velocidad de partida v_0. Éste es el procedimiento general que usa en cada caso, lo que constituye una forma de construcción de algoritmos, en base al principio de conservación de la energía.

Para nosotros bastaría con sustituir la hipótesis correspondiente a la fuerza de resistencia F, que en el caso que hemos expuesto es F = k v, y realizar la integración:

$$t = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{-k\,v} = \frac{1}{k} \ln \frac{v_0}{v}$$

Y el espacio sería $\Delta x = \int_{v_0}^{v} \frac{v dv}{-k\,v} = \frac{1}{k}(v_0 - v)$ tal como ha encontrado Hermann por procedimientos geométricos-diferenciales.

¿Qué representa este trabajo de Hermann en 1716?

Las 3 primeras secciones del Libro II de los *Principia* están consagradas a analizar el movimiento en medios resistentes teniendo en cuenta las tres hipótesis para la resistencia y para los distintos movimientos primitivos.

Varignon publica entre 1707 y 1711 en *L'Académie Royal* una serie de 12 memorias relativas al movimiento en medios resistentes. En estas memorias Varignon aplica el nuevo cálculo a los resultados obtenidos por Newton, Huygens, Leibniz y Wallis[190].

Los artículos de Varignon y su comparación con los anteriores, especialmente los contenidos en los *Principia*, han sido analizados por M. Blay en [BLAY M. 1992. pp. 251-330][191]. Su estudio muestra cómo Newton construye las soluciones teniendo en cuenta las particularidades de cada caso, "*coup par coup*" dice Blay, sin embargo, Varignon en su primera memoria construye un procedimiento general que aplicará a

---

[190] Huygens : *Discourse de la cause de la pesanteur des corps*. p. 168. Wallis *Opera Mathematica*. T. II cap. 101. Leibniz : *Acta Eruditorum*. p. 39 1689.
[191] Podemos ver la lista de las memorias de Varignon en las pp 277-279 de la citada monografía de Blay.

los distintos casos. Establece la ecuación diferencial general del movimiento a partir de la segunda ley de Newton [Ibíd. pp. 280-289].

Sólo, nos dice Blay, "*l'introduction du calcul différentiel et intégral et a fortiori une conceptualisation différentielle de la science du mouvement permettront véritablement de mettre en place les équations générales du mouvement, et finalement, de résoudre par des procédures algorithmiques bien réglées de differèntiation et d'intégration les problèmes du mouvement dans les milieux résistants.* " [Ibíd. p. 277]

El trabajo de Hermann es también algorítmico diferencial. Pero la diferencia con Varignon es que mientras éste utiliza la segunda ley para trabajar cada situación, Hermann usa la conservación de la energía para las construcciones de cada caso, usando después la segunda ley de Newton (5-5–b) para calcular el tiempo. Es un trabajo paralelo al de Varignon que pone énfasis en el uso de la conservación de la energía. Este es su valor, ya que la búsqueda posterior de algoritmos, desembocará en los trabajos de Euler y de Lagrange y su uso de la energía por parte del último para replantear toda la mecánica.

5.6 EL CAPÍTULO FINAL DE LA *PHORONOMIA* Y LA TEORÍA CINÉTICA DE LOS GASES.

El último capítulo de la *Phoronomia* previo al apéndice se titula *De motu intestino fluidorum* [*Phoronomia* pp. 376-377], y constituye la primera enunciación histórica de la relación entre el calor y la velocidad de las partículas que constituyen el gas calentado. Esto fue señalado primero por Knowles Middleton en 1965 y después por C. Truesdell en 1968, sin que tuviera consecuencias en los textos científicos o históricos posteriores[192]. Ambos autores destacan la ausencia de referencias previas a esta importante contribución de Hermann. El corto capítulo consta de un párrafo introductorio, un teorema y un escolio:

- Un <u>comentario inicial</u> donde Hermann explica qué entiende por "movimiento interno", el producido en las partículas de los fluidos por causas externas y accidentales, como el calor en particular (… *sed is particularum motus, qui in fluidis a causis externis et accidentalibus excitari solet, quo calor praesertim est referendus,…)*.

- El <u>teorema</u> principal donde establece que, en cuerpos con la misma composición, el calor está en razón compuesta de la densidad del cuerpo caliente y del cuadrado de la agitación de sus partículas, que llama D y V respectivamente.

  "*Calor, caeteris paribus, est in composita ratione ex densitate corporis calidi, et duplicata ratione agitationis particularum ejusdem* "

  La demostración que le acompaña es de hecho un desarrollo detallado del enunciado. Así, entiende por "agitación" de las partículas la "velocidad media" de las mismas (*celeritas media inter celeritates particulares*).

Vale la pena traducir las explicaciones de Hermann: "Como el calor consiste en un mayor movimiento de las partículas, será como los impulsos de las partículas del cuerpo caliente sobre el otro cuerpo que recibe el calor. Pero estos impulsos están en razón compuesta del cuadrado de las velocidades y simple de la densidad, o como $D.V^2$" [193].

[192] Ver, por ejemplo el capítulo "La física de los gases" del texto "Introducción a los coneptos y teorías de las ciencias físicas" [HOLTON G. 1973, p. 460] o el capítulo *"Bernoulli: genios without a gadfly"* de *The Kinetic Theory of Gases. An anthology of classic papers with historical commentary*. [BRUSH S. G. 2003. p. 424-427]

[193] "*Jam, quia calor consistit in concitatiore particularum motu, calor erit, ut impressiones particularum corporis calidi in quopiam objecto corpore calorem excipiente, sed hae impressiones sunt in composita*

Truesdell[194] considera que Hermann al plantear que la presión es proporcional al calor y hablar de "impulsos", está estableciendo una ecuación para la "presión", tal como p = K $D.V^2$ siendo k una constante. Sin embargo Hermann no establece una igualdad, sino que habla de proporciones, afirmando que el calor es proporcional a $D.V^2$.

A partir del bosquejo de la teoría cinética de Hermann, Truesdell analiza la teoría de Euler de 1729[195], basada en una modificación de los vórtices de Descartes elaborada por Johann Bernoulli, y que llega a los mismos resultados. Truesdell la califica de teoría cinética pero no de estadística, ya que Euler considera que todas las partículas tienen la misma velocidad. A continuación, analiza la teoría cinética de Daniel Bernoulli expuesta en su *Hydrodynamica* de 1738[196]. Truesdell afirma que tanto "Hermann y Bernoulli concebían a las moléculas y sus velocidades de traslación como infinitamente diversas;"[197] Sin embargo, en la traducción inglesa del capítulo X ("*De affectionibus atque motibus fluidorum elasticorum, praecipue autem aëris.*") de la *Hydrodynamica* de D. Bernoulli[198] [BRUSH S. G. 2003. pp. 57-65], y en la exposición que del mismo capítulo hace Truesdell en [TRUESDELL C. 1968. pp. 272-282], observamos que Bernoulli considera que todas las partículas tienen la misma velocidad, por lo que la afirmación estadística previa de Hermann es particularmente valiosa.

Sin embargo, Daniel BERNOULLI deducirá a partir del movimiento de las partículas, no sólo la relación con el calor, sino también con la presión (ley de Boyle) que, sin embargo, Hermann, siguiendo el procedimiento de Newton en los *Principia*, había relacionado con una fuerza entre partículas que crece son su proximidad (ver 4.4.2 de esta monografía). Truesdell termina su artículo diciendo:

---

ratione ex duplicata celeritatum et simpla densitatum, se ut $D.V^2$. Ergo etiam calor est ut $D.V^2$. QED." [*Phoronomia* p. 376]

[194] [TRUESDELL C. 1968. p. 252]

[195] L. Euler. "Tentamen explicationis phaenomenorum aeris", *Comm. Acad. Sci. Petrop. 2(1727)*, 347-368.

[196] [Bernoulli D. 1738, secc. 10]

[197] Op. Cit. p. 281

[198] [BERNOULLI D. 1738. pp. 200-204]

"*Tus by 1738 three members of the Basel school of mathematicians, all of them working in Petrograd, had laid out in mathematical form the elements of the modern moecular concept of the gaseous state and had derived eqiations of state.*"[199]

Después de la lectura atenta de la *Phoronomia* que hemos realizado, podemos interpretar que Hermann "mide" los "impulsos" de las partículas, en relación a lo que él ha considerado la relación fundamental cuando ha estudiado los choques elásticos, es decir lo que llamó siguiendo a Leibniz conservación de la "fuerza absoluta"[200], o sea mv^2, o en el caso de las muchas partículas de los gases DV^2. Además introduce por primera vez en al historia de la mecánica un planteamiento estadístico, al considerar que las velocidades de las partículas en un gas no tienen porqué ser iguales.

Los desarrollos de Hermann o los posteriores más completos de Daniel Bernoulli, permanecerán ignorados, en favor de la teoría que hace del calor un fluido material de partículas sutiles (el calórico), algo así como el eter cartesiano. Es interesante señalar a este respecto, que Hermann ya había criticado la necesidad del eter como causa de la elasticidad del aire (ver el apartado 4.4.2 de esta monografía donde critica la teoría de A. Parent).

- En el escolio, Hermann aplica el teorema a un dispositivo que permitiría "medir" la velocidad media de las partículas. Describe cómo construir tal dispositivo, con un tubo lleno de mercurio hasta F, a la manera de un barómetro de Torricelli, pero cerrando el depósito del aire AB después (Fig. 38).

Tal artilugio le permitiría relacionar el calor adicional del aire calentado del depósito (proporcional a la velocidad cuadrática media y a la densidad), con la nueva altura I que alcanza el mercurio que estaba en H, cuando el aire se

[199] de [Truesdell D. 1968, p. 282]
[200] Ver el apartado 5.1 de esta monografía, donde se expone la formalización que hace Hermann de los choques.

expansiona desde F hasta E. El objetivo de Hermann es relacionar la velocidad media de las partículas de aire con la altura del mercurio a partir de su teorema. Hermann da una igualdad que expresa tal relación, pero tal como señala Middleton en su artículo[201], tal igualdad es sólo una proporción, ya que sería necesaria una constante de proporcionalidad. Por otro lado, tal como afirma Middleton, creemos que no podemos considerar este dispositivo como una mejora en el termómetro de aire de Guillaume Amontons[202] de 1702, tal como se ha interpretdo en algún texto[203]

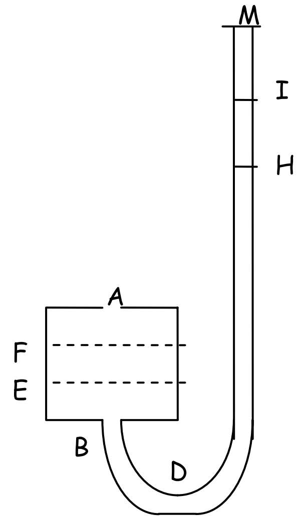


Fig. 38

Hermann ha establecido pues las ideas principales de lo que será la teoría cinética de gases como mecánica estadística, al considerar la energía cinética como principio básico, tal como, según hemos comentado en otros apartados, ha hecho en otros problemas mecánicos.

[201] [MIDDLETON W. E. 1965. p. 249]
[202] Guillaume Amontons, *Mem. Anal. Roy. Sci. Paris,* 1702, pp. 155-174
[203] La referencia de Middleton es: *Geschichte der Physik* Edmund Hoppe. Braunschweig 1926. p. 176

6 EL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: ENTRE LA GOMETRÍA Y EL ÁLGEBRA.

La *Phoronomia* no contiene una exposición de los algoritmos del cálculo diferencial, pero sí un algoritmo del cálculo integral que incluye la interconexión entre ambos cálculos y ejemplos de aplicación matemática.

Parece razonable suponer que no incluyera las definiciones y algoritmos del cálculo diferencial, a pesar de hacer un uso extenso del mismo, ya que en 1716 existía un conocimiento amplio del mismo a partir del manual de cálculo diferencial, fruto de las enseñanzas remuneradas que recibe de Johann Bernoulli, publicado por De L'Hôpital en 1696.

Johann Bernoulli es el autor, así mismo, del tratado más completo de cálculo integral en ese momento *Lectiones mathematicae de método integralium aliisque*[204], objeto de sus enseñanzas al Marques de l'Hôpital. Sin embargo, dicho material compuesto en su mayor parte alrededor de 1700, no fue publicado hasta la edición de sus trabajos escogidos en 1742, ya que el contrato con l'Hôpital le obligaba a no publicar lo que le estaba enseñando. Sabemos, sin embargo, que este texto era uno de los que llevaba Hermann cuando se trasladó a Padua[205].

Entre tanto, y dado el carácter heurístico y complejo de la integración, se suceden artículos publicados por los mejores matemáticos de la época, como los hermanos Bernoulli, Leibniz, L'Hôpital, Riccatti, etc. donde se exponen métodos adaptados a la resolución de clases especiales de ecuaciones diferenciales conectados con problemas mecánicos concretos.

---

[204] Johann Bernoulli. *Opera* 3, pp. 385-558
[205] [MAZZONE S. y ROERO C. S. 1997. p. 52]

Es significativo que Hermann exponga por primera vez, en un texto de mecánica racional, el teorema fundamental del cálculo en su expresión leibniziana y que dé ejemplos de su uso para el cálculo de integrales.

La exposición del cálculo integral de Hermann se hace en el cap. III de la sección I (estática) del libro I (mecánica de sólidos). Señalemos que la exposición se realiza de forma puramente algebraica sin referencia a figura alguna.

El lema básico dice: "Dadas cualesquiera fuerzas decrecientes A, B, C, D, E, se cumple que A-B + B - C + C - D + D - E = A - E, de donde si E = 0 la suma será igual a A, valor máximo de la serie". [*Phoronomia* p. 37 Nº 87]

Continúa con un largo escolio, donde Hermann expone el teorema fundamental del cálculo, añadiendo que "por brevedad ilustraremos el Cálculo integral con algunos ejemplos". Afirma así mismo que "El Cálculo integral o sumatorio es inverso del calculo diferencial" [206]. Podemos resumir el escolio en los siguientes términos:

Si en la curva que queremos cuadrar indicamos los ejes con x e y la cantidad ydx es un elemento de área. El área se encontrará si existe la cantidad A compuesta por la indeterminada x y constantes, tal que sustituyendo x sucesivamente por x-dx, x-2dx, x-3dx, etc. se forma una serie decreciente A, B, C, etc. tal que su primera diferencia A-B = y dx. La suma de todas las diferencias (A-B)+ (B-C) + … es el agregado de todas las ydx contenidas en el área y por tanto es el área total. Si la cantidad mínima de la serie es M, el área será igual a A-M. Podemos encontrar el mínimo de la serie sustituyendo x en A por x- n dx que cuando n se hace infinito nos dará cero. Por tanto para encontrar M bastará hacer x = 0.

[206] "Calculus integralis vel summatorius est inversus calculi differentialis, …" [*Phoronomia* p. 38 Nº 88]

Explica que de igual manera en el caso en que la sucesión A, B, C, etc. sea creciente, la integral o suma de diferencias B-A + C-B + D-C + … es igual a M-A siendo ahora M el valor máximo de la serie y A el mínimo.

Así mismo, dice, que lo que se ha explicado para el caso de cuadratura de área, vale para dimensiones sólidas. A continuación, Hermann desarrolla tres ejemplos; expondremos el primero para mostrar cómo opera el método de integración; los otros dos ejemplos integran la irracional $\frac{a^2\,xdx}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}$ las hipérbolas $x^{-a}\,dx$

Ejemplo I:

Queremos "sumar" $\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$

Sea A = $\sqrt{a^2+x^2}$. Sustituyendo x por x-dx, queda: B = $\sqrt{a^2+x^2}-\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$

Se forma la serie A, B, C, etc. de manera que A-B coincide con ydx que es igual a un elemento del área que queremos cuadrar. Su suma será A-M siendo M el valor más pequeño de la serie, que encontramos haciendo x=0. M= a, de este modo el área queda:

$$\int(A-B) = \int y\,dx = \int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = A - M = \sqrt{a^2+x^2}-a$$

La heurística necesaria para hacer integrales consiste en ser capaz de poner la expresión a integrar como diferencia de dos términos A-B, de forma que sustituyendo x por x-dx en A, nos dé B. De este modo tenemos A como resultado de la integral, salvo la constante de integración que sería el menor de los términos de la serie formada, o el mayor para una serie creciente.

El método que nos enseña Hermann sigue las ideas iniciales que guiaron a Leibniz en la invención del cálculo. Tal como explica H. J. M. Bos en [BOS H. J. M. 1984, pp. 83-86], del estudio de los manuscritos de 1675 se desprende que el estudio de las series numéricas, lleva a Leibniz al descubrimiento de que sumar series era fácil si se sabe cómo poner sus términos como diferencias. H. Bos cita el siguiente caso resulto por Leibniz: "Leibniz resuelve el problema planteado por Huygens en 1672 de sumar la serie 1/1, 1/3, 1/6, 1/10, 1/15. etc. donde los denominadores son los términos triangulares r(r+1)/2. Descubre que los términos de la serie pueden escribirse como diferencias" [Ibídem]:

$$\frac{2}{r(r+1)} = \frac{2}{r} - \frac{2}{r+1}$$

De donde la suma de los n primeros términos es la diferencia entre el primero y el último $\sum \frac{2}{r(r+1)} = 2 - \frac{2}{n+1}$. En particular, la serie infinita suma 2.

Leibniz aplica a la geometría de las curvas la idea, ya conocida, de que las sucesiones de diferencias y de sumas están íntimamente relacionadas. La diferencia de dos ordenadas sucesivas daría la tangente y la suma de ordenadas el área bajo la curva. Así pues, según H. Bos:

"La segunda idea principal de Leibniz, a pesar de lo imprecisa que era hacia 1673, sugería ya un cálculo infinitesimal de sumas y diferencias de ordenadas mediante el cual podrían ser determinadas cuadraturas y tangentes y en el que estas determinaciones aparecían como procesos inversos. La idea hacía asimismo plausible que, de la misma manera que en las sucesiones, las diferencias son siempre posibles, pero no las sumas, en las curvas las tangentes son siempre fáciles, pero no así las cuadraturas." [Ibid. p. 86]

Hermann usa su algoritmo de integración en varios lugares, por ejemplo cuando deduce las ecuaciones generales para un objeto flexible colgado por sus extremos y sometido a fuerzas de cualquier forma [Ver el apartado 4.2 de esta monografía], o en la deducción de la cicloide como curva isócrona en la hipótesis de gravedad constante [ver apartado 5.4 de esta monografía].

Sin embargo Hermann ha dado suficientes pruebas de dominio del nuevo cálculo tal como demuestran sus manuscritos sobre métodos de integración[207]. Recordemos que escribe en Padua mientras enseña allí pública y privadamente el nuevo cálculo.

M. Blay [BLAY M. 1992] ha estudiado la evolución matemática en el estudio de problemas mecánicos a finales del s. XVII, observando tres etapas hasta llegar a los textos de Varignon de 1698, que suponen un cambio conceptual y metodológico:

- Los problemas se resuelven (analiza textos de los Bernoulli y de l'Hôpital) en dos etapas: primero se trasladan los problemas de la ciencia del movimiento a cuestiones de "geometría pura", a decir de los autores, para después resolverlos usando cuando sea necesario conceptos del cálculo leibniziano. [Ibid. pp. 63-107].

- Método de transposición de Leibniz (en trabajos alrededor de 1690): consiste en plantear el problema geométricamente para después "transponer" los incrementos infinitesimales en elementos diferenciales de primer orden. Por ejemplo usa una "transposition sous une forme diffèrentielle, plus facilment maniable, de la définition opérante non explicite galiléo-newtonienne de la « vitesse instantanée. " [Ibid. p. 137], pero no posee aún una definición explícita y matemáticamente manejable de velocidad instantánea.

- Varios textos de Varignon publicados en la *Académie* de París entre 1698 y 1700 elaboran un procedimiento algorítmico para la resolución de los problemas del estudio del movimiento, a través de la conceptualización de los conceptos de velocidad en cada instante y de fuerza aceleradora en cada instante. Usa el formalismo del cálculo leibniziano. Para lo que discutimos es destacable, como indica Blay, que los gráficos de Varignon son sólo grafos ilustrativos del uso de sus algoritmos.

[207] Ver *Hermann manuscripts preserved in Venice,* en [MAZZONE S. y ROERO C. S. 1997. p. 54]

Tal como hemos mostrado en la exposición de los distintos temas mecánicos tratados por Hermann, en la *Phoronomia* se dan en general dos momentos o estilos distintos:

- El geometrico-diferencial: razonamientos usando pares de letras que representan segmentos finitos o infinitesimales sobre una figura geométrica referencial. Las integrales son áreas sobre la figura, aunque en ocasiones usa el símbolo de la integral.
- El algebraico-diferencial: trascripción en el lenguaje diferencial de las relaciones obtenidas geométricamente. Las integrales son tratadas algebraicamente como en el ejemplo que hemos trascrito al exponer su teoría de la integración.

Hermann ha buscado deliberadamente, tal como afirma en el prólogo[208], demostrar los principales resultados mediante la referencia a figuras por razones pedagógicas y por considerarlas más simples y elegantes "casi siempre". En las demostraciones de teoremas no se da una mezcla de geometría y álgebra diferencial como en los trabajos de Leibniz o los Bernoulli, analizados por M. Blay. La demostración de los resultados "principales" en la *Phoronomia* es puramente geométrico-diferencial, ya que busca construir desde la figura, relaciones diferenciales entre variables sin usar el formalismo leibniziano.

Hemos mostrado como en la *Phoronomia* se da una dependencia jerárquica entre ambos estilos. Después de extraer las relaciones principales de la incrementada evidencia que proporcionan las figuras geométricas, las traslada al lenguaje "algebraico-diferencial" para particularizarlas donde convenga. Podemos ver este tratamiento por ejemplo en la estática de objetos flexibles (ver 4.2) y en el estudio de los problemas de Kepler directo e inverso (ver 5.2) entre los tratados en esta monografía.

---

[208] Ver los comentarios al prefacio de la *Phoronomia* en el apartado 2 de esta monografía.

Esta opción será objeto de críticas por parte de Leibniz, Wolf y Johann Bernoulli. Este último entiende en carta a Leibniz (1717) que Hermann se muestra: "demasiado deferente con los ingleses, hasta el punto de que prácticamente a lo largo de todo el libro usa el estilo de demostración de Newton. El resultado es que las demostraciones que llama lineales muy a menudo requieren varias páginas, demasiadas para el cansancio y molestia del lector. Mientras que si hubiera usado el Análisis, podría haberlas resuelto en 3 o 4 líneas cada vez."[209]. El estilo se convierte en esos momentos en un arma entre distintos grupos en competencia, introduciendo factores externos en el desarrollo de la mecánica y de la matemática asociada. El estilo geométrico es visto no sólo como ligado a la tradición, o como más farragoso en ocasiones, sino como algo a evitar en tanto que es reivindicado por los newtonianos, que buscan además de la prioridad en la invención del nuevo cálculo (ver nota 140), legitimar el modo que le ha dado Newton.

Hasta entonces, como ha mostrado A. Malet en el caso de Wallis[210], el estilo algebraico se había observado como una taquigrafía que abreviaba las manipulaciones geométricas, representando "*rather than two conflicting views about the purpose and the actual working of 17-century mathematics, geometry and algebraic analysis were two layers of the mathematical discourse."* [Ibid. p. 6]. La consideración del álgebra como un lenguaje autónomo y más adecuado en la ciencia, será un desplazamiento que se producirá con el trabajo de Euler (*Mechanica* 1736), D'Alembert (*Encyclopédie* 1750) y con los cambios en la filosofía del lenguaje de Condillac [Ibid. pp. 7-8], que culminarán en la *Méchanique Analitique* de Lagrange en 1788[211].

[209] *"Etiam mihi videtur Hermanus in Libro suo nimium Anglis deferre, adeo quidem ut Newtoni morem demonstrandi affectet per torius fere Libri decursus: unde sit ut demonstratines, quas vocat lineares, saepissime magno legentium fastidio et fatigatione plures occupent paginas, cum si Analysi uti voluisset, eas quandoque 3 aut 4 lineis absolvere potuisset."* En [MAZZONE S. y ROERO C. S. 1997. p. 75]

[210] [MALET A. 2002-03]

[211] [PANZA M. 2003]

Podemos preguntarnos: ¿las demostraciones geométricas de Hermann pueden ser trasladadas fácilmente al lenguaje algebraico? ¿Son estos "estilos" fácilmente intercambiables? La respuesta no es simple, ya que cada estilo crea sus propias necesidades expresivas, haciendo que "visualicemos" o "prioricemos" aspectos distintos. Es evidente que podemos a posteriori hacer una correspondencia entre los "objetos expresivos" de cada estilo. Pero, a comienzos del s. XVIII el bagaje de resultados acreditados en estilo geométrico es enorme, lo que hace que sea visto como más sencillo o más didáctico, si esta es la intención, como en Hermann.

La demostración de la ley de las áreas de Kepler que hace Hermann, primera que se hace analíticamente (ver el apartado 5.2), es realizada en la *Phoronomia* de modo geométrico-diferencial. Sin embargo, tal como hemos explicado, un año más tarde Hermann envía una demostración en estilo algebraico-diferencial en carta a Keill publicada en *Journal Literaire*[212]. La carta es una respuesta a la acusación de plagio por parte de Keill en relación a la resolución del problema inverso de las fuerzas centrales. La respuesta de Hermann consiste en demostrar que su procedimiento es diferente, en tanto él basa su demostración en la deducción analítica previa de la ley de las áreas que Keill había tomado por demostrada.

Lo más interesante, en cuanto a considerar la transducción entre estilos, es que en este corto artículo dirigido esta vez solamente a intelectuales, expresa los desarrollos geométricos importantes de la *Phoronomia* en lenguaje algebraico-diferencial: "*Mais comme je n'ai presque donné que des démonstrations Synthetiques dans mon libre, en voici présentement l'analyse.*"[213] Ya no necesita que su texto sea comprensible también por los novatos, haciendo inecesarias ciertas alusiones geométricas.

[212] Lettre de M. Hermann. *Journal Literaire*. 9 (1717), 406-415. Analizada en [GUICCIARDINI N. 1996, pp. 175-178]
[213] Ibíd. p. 411

La secuencia demostrativa de la segunda ley de Kepler en el artículo de 1717 es la misma que podemos seguir en la *Phoronomia*:

- Establece sus dos principios dinámicos generales: Fds= vdv (ver 5-e), la conservación de momentos de fuerza y velocidad (relación trabajo-energia) y la, para nosotros, ley fundamental de Newton (ver 5-f); esta segunda integrada para fuerzas uniformes.
- Aplica estas leyes a las componentes intrínsecas de una fuerza central. La primera a la componente tangencial F_t ds = vdv. La segunda al movimiento de caída según la componente normal llegando a la expresión $F_n = v^2 : r$ (siendo r el radio de curvatura).
- Finalmente combinando las expresiones de las fuerzas tangencial y normal llega a la conservación de momento angular. De aquí tal como hemos explicado en la seccion 5.2 deduce la segunda ley de Kepler.

Sin embargo, las características que hacen interesante el artículo de 1717, es que en él Hermann procede a tres desplazamientos estilísticos en relación con la *Phoronomia*: los segmentos representados por pares de puntos son ahora símbolos algebraicos, además las integrales se "hacen" sin razonar sobre áreas en la figura (ver fig. 27) y, finalmente, construye algebraicamente las ecuaciones diferenciales que permiten obtener la expresión de la componenete normal de la fuerza, y la que por integración da la conservación del momento angular.

Para ilustrar estos desplazamientos de estilo expondremos la deducción de la conservación del momento angular en el texto de 1717 comparándola con la de la *Phoronomia*: Podemos observar que nuestra fig. 39, que corresponde al artículo de 1717, no contiene las escalas de variables que usa en la *Phoronomia* (ver fig. 28).

Parte de las dos expresiones para las componentes intrínsecas de la fuerza central que ha deducido (usaremos símbolos actualizados): - F_t ds = vdv y $F_c = v^2: r$;

dividiendo obtiene dv: v = - F_t ds : r F_c que como F_t: F_n = q:p (siendo p = DC y q = NC fig. 39) queda: dv: v = - q ds : r p (6-a)

Por la semejanza de los triángulos Cec y NOn (despreciando diferenciales de orden superior) qds = rdp; que puede escribirse también como – q ds /rp = - rdp/rp = - dp/p, que sustituyendo en la ecuación anterior 6-a desemboca en la ecuación diferencial: dv/v = - dp/p. Escrita como pdv + udp = 0 se integra dando pu = cte (Hermann toma la constante como 1). Es decir, el momento angular o producto de la velocidad por la proyección del radio vector sobre la tangente (p=DC) es constante. De cuya constancia deduce con poco esfuerzo la ley de las áreas de Kepler (ver sección 5.2 para más detalles).

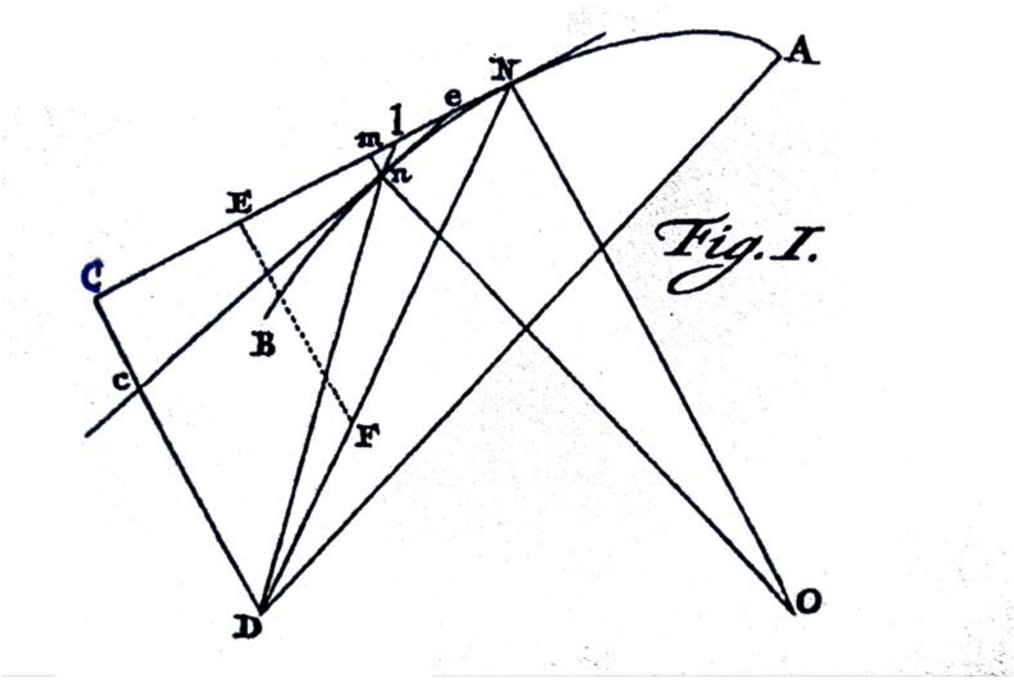


Fig. 39

Sin embargo, en la *Phoronomia* la descripción de la ecuación diferencial final es geométrica y también su integración basada en un lema geométrico que Hermann había demostrado previamente [*Phoronomia* p. **68** nº 153]. El lema muestra que si el cociente del incremento de una variable entre el decremento de otra es como el cociente entre esas variables, la relación entre las variables tiene las propiedades de la curva hipérbola analizada por Apolonio. Así se llega en la *Phoronomia* a la relación hiperbólica pu = cte.

El texto de 1717 nos indica la dirección en la que se está produciendo la algebrización como simplificación de procesos numéricos; se trata de buscar las ecuaciones diferenciales y de integrarlas directamente tomando como únicas referencias geométricas las relaciones de cantidades obtenidas por semejanza de triángulos (como en la fig. 39).

Hay algunas resultados importantes en la *Phoronomia* que Hermann expresa algebraicamente: la demostración del teorema de Guldin (ver 4.1), o la deducción de lo que Hermann considera su primera regla dinámica diferencial (Fdr = vdv) a partir de la segunda (F = m dv: dt) (ver 5.1).

En contraste con esto, la demostración del teorema integral de la energía en la *Phoronomia*, la realiza geométricamente (ver 5.1), mientras le habría bastado, de forma más abreviada, integrar directamente el teorema diferencial obtenido, integral trivial para Hermann, es decir:

$$\mathrm{F} \cdot \mathrm{dr} = \mathrm{v}\,\mathrm{dv} \qquad \Rightarrow \int \mathrm{F}\,\mathrm{dr} = \frac{\mathrm{v}^2}{2}, \text{ tomando } v_0 = 0$$

El significado de la integral indicada es incierto conceptualmente (trabajo de F para nosotros), pero puede representarse geométricamente mediante un área en la escala de fuerzas que es lo que hace Hermann. Vemos que es la conceptualización física la que permite avanzar en la algebrización ya que singulariza un "objeto" nuevo.

Podemos ver en la elección de estilo de la *Phoronomia* el tipo de dificultades existentes a comienzos del s. XVIII para desarrollar la mecánica analítica sin que la referencia a figuras sea determinante.

Existen pautas geométricas como la "observación" de la semejanza de triángulos o la construcción de figuras auxiliares que permiten avanzar en las demostraciones geométricas, sean estas finitas o infinitesimales, y que equivalen en algunos casos a cambios de variable. Sin embargo la algebrización, cuando no es simple, requiere el concepto fundamental de "función", ausente en el momento en que Hermann escribe, y la consideración concomitante de variables dependientes e independientes. Interconectando funciones algebraicamente y desarrollando las semejanzas de triángulos y las figuras auxiliares, como relaciones entre variables en distintos sistemas de coordenadas (cambios de variable), se puede dar la autonomía respecto de las figuras, para construir las ecuaciones diferenciales correspondientes, tal como acabamos de ver que Hermann hace un año después de publicada la *Phoronomia.*

Podemos ilustrar este razonamiento extraido del análisis de la *Phoronomia,* con un ejemplo muy simple presente en los textos fundadores del nuevo cálculo:

Geométricamente "vemos" por semejanza de triángulos, la relación entre el triángulo diferencial y el que forma la subtangente Δx de una curva en un punto (x,y): $dy : dx = y : \Delta x$

Algebraicamente, escribimos la ecuación de la recta tangente $y = m\,x + b$ siendo m la pendiente y b la ordenada en el origen. Podemos tomar la pendiente de la recta como $dy:dx$, ya que coincide con la de la curva en el punto de contacto. Si escribimos ahora la ecuación de la recta para $y = 0$, restando con la anterior tenemos:

$$y = dy{:}dx \cdot x + b$$
$$0 = dy{:}dx \cdot x' + b$$

$$y = dy{:}dx \cdot (x - x')$$

como $(x - x')$ es la subtangente, nos queda que $dy{:}dx = y{:}\Delta x$.

En este caso, la algebrización depende de considerar la recta como una ecuación o relación funcional. También es evidente, que la consideración algebraica funcional hace innecesaria la búsqueda de la subtangente, fundamental en el tratamiento prefuncional geométrico. El desarrollo de un estilo distinto requiere unas herramientas conceptuales diferentes (función) y lleva a focalizar los desarrollos sobre aspectos distintos, aunque finalmente traducibles.

Recordemos [BOS H. J. M. 1974-75; pp. 9-10] que la primera definición moderna de "función" se debe a Johann Bernoulli (1718), como "cantidad variable compuesta de cualquier modo de cantidades variables y constantes"; aunque la palabra "función" (*functionem*) había aparecido primero en un texto publicado por Leibniz en 1692 referido a las cantidades geométricas en una curva. Después Johann Bernoulli la usa para indicar las potencias de una variable o cualquier otra función en general en 1698. Es Euler quien extiende, usa y generaliza el concepto de función a partir de su primera definición de 1748. Tal como dice H. Bos, con Euler "[*function] became a concept connected with formulas rather than with figures*" [Ibid.]. Hermann no usa la palabra función, sólo en ocasiones enuncia que cierta variable está compuesta de constante y variables de modo diverso. Por ejemplo cuando trata el problema inverso de las fuerzas centrales [*Phoronomia* p. 77 nº 169]:

"*Si in Canone articuli 167 loco ordinatae EH ponatur ...e ...A, quaelibet quantitas composita ex data seu constante e, et variabile A, data tamen utlibet in x et quantitatibus constantibus,...* "

Hermann describe las relaciones entre variables a partir de la construcción de lo que llama "Escalas" (*Scala).* Las escalas son para Hermann curvas que representan "geométricamente" la correspondencia entre dos cantidades variables sin distinción. Tal como hemos mostrado en los temas tratados, utiliza las *scalas* en las demostraciones, combinándolas entre sí para obtener relaciones entre distintas variables o ecuaciones diferenciales.

Tal como hemos visto, Hermann usa tanto coordenadas cartesianas como intrínsecas al tratar el problema de la forma de un objeto flexible sujeto por sus extremos (ver

4.2). En los tratamientos dinámicos (ver 5.2 y 5.4) usa coordenadas polares[214] para las trayectorias y descomposición intrínseca de fuerzas.

Hermann sigue la pauta general de su época, al considerar que las cantidades presentes en sus ecuaciones tienen que ser homogéneas dimensionalmente, es decir, todos los términos han de ser de la misma dimensión, el producto de dos líneas ha de dar una superficie, etc. Esto es una consecuencia de pensar las cantidades geométricamente como líneas, áreas o volúmenes. Como ejemplo de la persistencia del requerimiento de homogeneidad dimensional, H. Bos cita una carta de reproche de Johann Bernoulli a otro matemático en 1720 [Ibid. p. 7 nota 6][215].

Por otro lado en la *Phoronomia* están presentes las relaciones entre variables como proporciones, pero también como "leyes relacionales" cuya expresión ya no es una proporción sino una ecuación (ver por ejemplo las dos reglas principales mecánicas o las leyes de caída libre en 5.1. o la definición de velocidad en 3.2, etc.). Recordemos que el paso de proporciones a ecuaciones cuando no sirven de definición para una magnitud derivada (p. ej. v= x:t), requiere el uso de constantes de proporcionalidad que indican las unidades de medida de las magnitudes relacionadas. Esta consideración surgirá con Euler en su *Mechanica* de 1736 tal como se analiza en [GONZÁLEZ REDONDO F. A. 2003]

7 EXPERIMENTACIÓN E INSTRUMENTOS. La razón práctica en al *Phoronomia.*

La P*horonomia* consiste en un intento de elaboración de una mecánica racional, basada en principios suficientemente generales para poder deducir una gran variedad de situaciones. Además, muchos de los capítulos contienen análisis de situaciones que

[214] El primero en usarlas fue Jacob Bernoulli a finales del s. XVII. Ver [BLAY M. 1992. p. 195]
[215] Para un análisis de las ventajas de este requerimiento que lo hicieron duradero, y para la justificación de su violación a partir de Descartes, en la resolución algebraica de ecuaciones, ver [BOS H. J. M. 1974-75; pp. 6-7]

atañen a experiencias, dispositivos e instrumentos. El análisis parte de considerar las situaciones prácticas como correlato del análisis mecánico general ya establecido. En ocasiones es crítico, modificando argumentaciones de otros autores. A veces es informativo, dando a conocer las últimas novedades en aparatos de medida. O creativo, aportando diseños originales. Veamos de qué modo Hermann disemina sus análisis prácticos, qué usos les da y qué papel tienen en la elaboración de su mecánica.

1. La mecánica racional confirmada por experiencias

Hermann demuestra al comienzo del cap. I, secc. I, libro II, tal como hemos explicado en el apartado dedicado a la hidrostática, que la presión sobre el fondo de un recipiente sólo depende (supuesto el mismo líquido) de la profundidad desde la superficie del líquido, y es por tanto independiente de la forma del recipiente. A continuación, en un escolio [*Phoronomia* p. 133 nº 256] señala que esta propiedad de los fluidos lleva a una paradoja: una pequeña cantidad de líquido gravita tanto, como otra masa del mismo líquido cientos o miles de veces mayor, para la misma altura.

Hermann, afirma a continuación: "Sin embargo esta verdad puede confirmarse por experiencias, para después ser probada;" ("*Ejus tamen veritas ipsa experimentia comprobata est, atque deinceps probari potest;*" [*Phoronomia* p. 134 nº 256].

Para Hermann el principio demostrado (una *veritas)*, puede ser confirmado mediante una experiencia, que él analizará después usando sus principios para mostrar cómo se desvanece la aparente paradoja. La experiencia tiene aquí un valor demostrativo e ilustrativo de un principio que va contra la intuición inmediata.

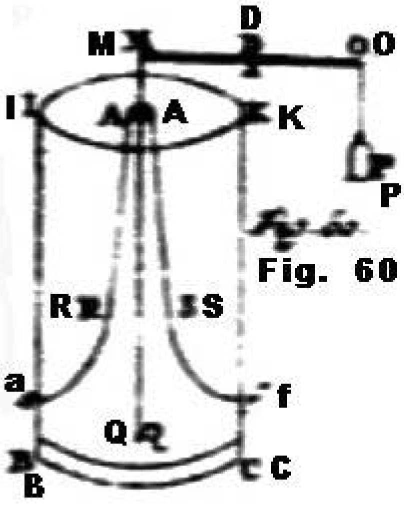


Fig. 40

El experimento anunciado consiste en considerar una balanza, en la que un plato P equilibra un recipiente que puede adoptar dos formas muy distintas, el cilindro IBCK y el puntiagudo ABC (ver Fig. 40). Hermann describe algunos detalles constructivos, como el cuidado necesario para realizar el dispositivo, de modo que en la misma base aBCf puedan encajar dos recipientes distintos, el cilíndrico IBCK y el conoide puntiagudo ABC, sin que perdamos líquido; una cuerda une el centro de la base aBCf con el brazo MD de la balanza, que es igual al otro brazo DO.

2. La mecánica racional explica el diseño de instrumentos de medida:

En el cap. III de la secc. I del segundo libro trata, como ya se ha dicho, del equilibrio de cuerpos sumergidos total o parcialmente. Recordemos que: demuestra el teorema de Arquímedes para fluidos heterogéneos, estudia el equilibrio resultante entre la fuerza ascensional y el peso del cuerpo sumergido. En el corolario V [*Phoronomia* p. 155 nº 295] muestra como consecuencia del principio de Arquímedes, la relación inversamente proporcional entre la parte sumergida de un cuerpo y la densidad del líquido en el que está sumergido.

En el escolio [*Phoronomia* pp. 155-157 nº 296] que sigue a los desarrollos teóricos citados, Hermann nos anuncia el interés que dichos resultados tienen, en concreto el último corolario citado, para "fundamentar" dispositivos que sirven para comparar pesos específicos:

"Los corolarios anteriores contienen los fundamentos de diversas máquinas hidrostáticas, con los que se suelen explorar las gravedades específicas de los diversos líquidos."[216]

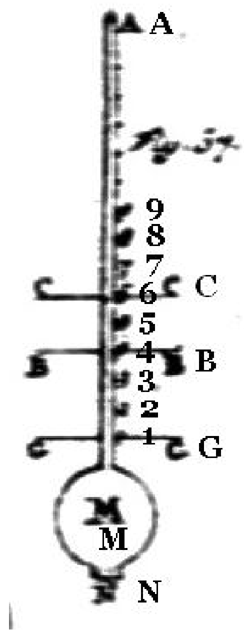


Fig. 41

[216] "*Corollarium praecedens fundamentun continet diversarum machinularum hygrostathmicarum, quibus diversorum liquorum specificae gravitates explorari solent.*" [*Phoronomia* p. 155 nº 256]

Pasa a describir, nos dice, un aparato "familiar" (Fig. 41) (equivalente a un tipo de densímetro que aún se usa), que consta de un bulbo M prolongado en un tubo delgado MA. El bulbo acaba en un pequeño saquito N que contiene un poco de mercurio cuya finalidad es que la máquina se mantenga vertical.

Describe con detalle el procedimiento para construir una tabla de valores usando un mismo líquido pero distintos pesos de mercurio en el bulbo M. Construye una tabla de dos entradas: el peso del mercurio introducido en M, y la marca en el tubo MA correspondiente a ese peso. De este modo, cuando se introduce la máquina en dos líquidos distintos A y O, ésta se hundirá hasta, por ejemplo, las marcas B y C. Como consecuencia del corolario V citado, podremos concluir que las densidades de los líquidos están en razón inversa de los pesos correspondientes a las marcas B y C, que tenemos en la tabla elaborada previamente.

Hagamos notar que Hermann, como se hacía en la época, establece relaciones entre dos medidas, y no una ecuación o relación directa entre la densidad y la parte sumergida de la máquina, ya que para esto necesitaría establecer un sistema de unidades, cosa que hasta Euler no se comenzará a hacer[217].

Posteriormente [*Phoronomia* pp. 159-160 nº 300], resuelve el problema de determinar la parte sumergida CB de una barra AB (ver fig. 42), que pende suspendida del extremo opuesto A al inmerso en el líquido B, conocida la relación de gravedades específicas entre el líquido y la barra. Y el problema inverso [*Phoronomia* p. 160 nº 301: dadas la longitud de la barra AB y la parte sumergida BC, podemos obtener la gravedad específica relativa barra- líquido.

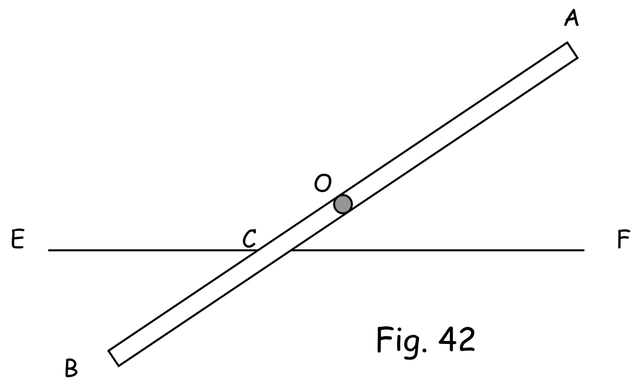


Fig. 42

[217] Para un estudio del paso de las proporciones a las ecuaciones que incluyen medidas en Euler, ver el trabajo: GONZÁLEZ REDONDO F. A. 2003

De modo que puede ser usada, dice, como instrumento hidrostático, que los franceses llaman *pese –liquen*, para medir gravedades específicas relativas de líquidos dividiendo la barra adecuadamente para líquidos distintos.

La mecánica racional proporciona para Hermann los fundamentos de aparatos de medida ya conocidos. El procedimiento para establecer las escalas de los instrumentos es experimental, pero los principios demostrados justifican ese procedimiento. En el caso del barómetro (cap. IV del segundo libro), que Hermann usa como experiencia decisiva que muestra que el aire pesa, deduce su funcionamiento del estudio del comportamiento de dos vasos comunicantes, que ha realizado en la estática general de fluidos, (ver apartado 4.4.1). Es la mecánica racional la que explica el funcionamiento del barómetro, como equilibrio de pesos.

3. La mecánica racional explica la imposibilidad práctica de ciertas máquinas:

Seguimos en el cap. III de la secc. I del segundo libro. Hermann resuelve el siguiente problema [*Phoronomia* pp. 157-158 nº 298], como aplicación del principio de flotabilidad de Arquímedes demostrado:

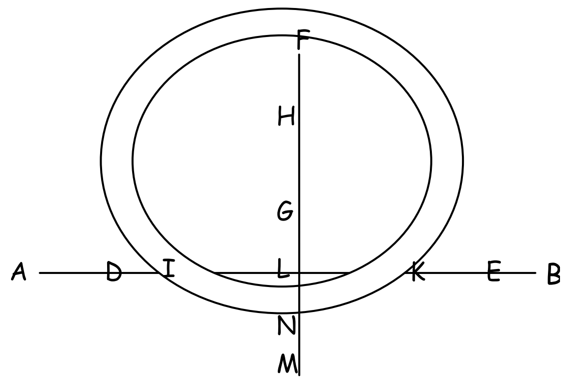


Fig. 43

Dados: (Fig. 43) el diámetro (FM = a) de una esfera metálica hueca que flota en un líquido hasta el nivel (AB), y la razón (n) entre las gravedades específicas del metal y del líquido homogéneo, determinar el diámetro interior (HN = x) requerido para que la esfera quede sumergida a una determinada profundidad (LM = c). La solución que obtiene Hermann tomando c=a:m, donde m es un número dado, es:

$$x = a \sqrt[3]{(m^3 - 3m\,n + 2n) : m^3}$$

En el corolario posterior reduce la relación encontrada al caso en que la esfera hueca esté sumergida totalmente en el líquido homogéneo. En este caso: $x = a \sqrt[3]{(1 - n)}$

Finalmente, en el mismo corolario, aplica la relación al caso en que la esfera esté sumergida en el aire. Como el aire, nos dice Hermann, es 800 veces más ligero que el agua y 7200 veces más ligero que el cobre[218], sustituyendo en la ecuación anterior: $x = a\sqrt[3]{\frac{7199}{7200}}$, y tomando logaritmos obtenemos un valor de x comprendido entre (0,99995 a) y (0,99996 a). Es decir el grosor FH del bronce igual a (a-x)/2 debería ser menor que 0,000025 veces el diámetro (a) de la esfera de bronce. Por tanto, dice Hermann, para por ejemplo una esfera de bronce de 1/114 partes de pie de grosor, necesitaríamos que tuviera un diámetro de 277 pies.

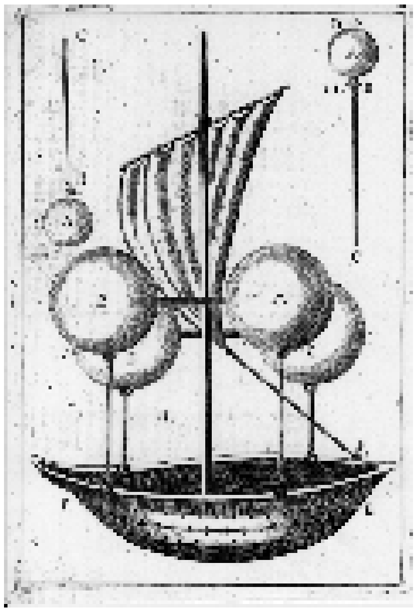


Fig. 44

Termina discutiendo el proyecto del Padre Francesco Lana[219] (ver fig. 44) para construir un globo de cobre con el que navegar por el aire, basándose en el principio de Arquímedes. Lana propone en *Magisterii Naturae et Artis* Tomo II. fol. 291, nos dice Hermann, un globo metálico de 25 pies de diámetro, lo que supondría un espesor del metal de 1/1600 partes de pie. Hermann explica que Leibniz en la p. 127 del tomo I de *Miscellaneorum berolinensium* ya analizó ejemplos similares y "demostró abundantemente, que debían abandonarse de antemano, todos los intentos de aceptar como exitosa la navegación con cobre, que había propuesto el egregio Lana." [*Phoronomia* p. 159 nº 299].

[218] Podemos considerar actualmente la densidad media del cobre 8,93 g/cm^3, y la densidad del aire seco a 15° C a la presión atmosférica estándar al nivel del mar 0,0013 g/cm^3, por lo que la densidad relativa aire-bronce nos daría un valor aproximado actual de 1/6869, que se aproxima al considerado por Hermann con un error de casi el 5%.

[219] Francesco Lana- Terzi. S.J. (Brescia 1631-1687). Magisterium Naturae et Artis. *Volume II* (Brescia 1684 y 1686. vol I y II; Parma 1692 vol. III). El título completo de la obra es: *Magisterium Naturae, Et Artis. Opus Physico-Mathematicum... In Quo Occultiora Naturalis Philosophiae Principia Manifestantur, Et Multiplici Tum Experimentorum, Tum Demonstationum Serie Comprobantur...* Obra que en nueve volúmenes, aunque sólo publicó tres, pretendía ser una enciclopedia de los conocimientos de las ciencias naturales de la época. Lana está considerado en las historia del vuelo, como el primer precursor que se plantea seriamente la posibilidad de construir una máquina voladora. Ver [Catholic Encyclopedia: http://www.newadvent.org/cathen/08772c.htm]

4. Mecánica racional y experimentos demostrativos falaces:

Las primeras reflexiones en el capítulo V del segundo libro, dedicado a estudiar el peso del aire, son para demostrar la falacia de un experimento, que Hermann retrotrae hasta Aristóteles, y que nadie anteriormente al trabajo de Jacob Bernoulli publicado en Actas de Leipzig en 1685 (p. 436) habría descubierto. El Filósofo, y sus comentadores posteriores, habían afirmado, en opinión de Hermann, que una piel pesa más cuando está inflada que cuando está flácida[220]. Esta sería la prueba de que el aire pesa.

Hermann nos dice que Jacob B ha deducido de los principios de la hidrostática que: "La piel o vejiga inflada no pesa más, que aplastada, aunque se suponga que el aire no ha sido privado de gravedad"[221], y nos anuncia que puede ser explicado en pocas palabras del siguiente modo:

Cuando pesamos una vesícula hinchada con aire dentro, se alza en contacto con ella una columna de aire determinada, de forma que el peso que actúa en un plato de la balanza es el del aire y el de la vesícula; si después expulso el aire y la peso de nuevo, el plato tendrá encima la misma columna de aire de antes, de forma que en todos los casos el peso que actúa sobre el plato tiene que ser el de la primera columna de aire y el de la vesícula.

El esfuerza didáctico de Hermann se amplía con la siguiente analogía: si pesamos un recipiente con agua, y después pesamos el recipiente vacío pero echando el agua que antes estaba en el recipiente en el plato de la balanza, pregunta Hermann, ¿no afirmaría todo el mundo que el peso no ha cambiado? Del mismo modo el peso de la vesícula vacía no difiere del de la hinchada con aire. Cualquier cambio de peso, nos

[220] "*Utrem inflatum plus trahere quam compressum et flaccidum existimavit* " [*Phoronomia* p. 170 nº 313]
[221] "*Utrem seu vesicam inflatam non esse gravioris ponderis, quam complicatam, licet aerem gravitate hand destitui praesupponas."* Ibid.

dice Hermann, debe atribuirse a que en las operaciones de hinchado y deshinchado la vesícula ha perdido partículas, y no al cambio de peso por ausencia de aire, como demuestra el razonamiento a partir de la hidrostática.

Señalemos como curiosidad no exenta de enseñanzas, que aún hoy, hay libros de física y química para escolares que proponen realizar esta experiencia para "demostrar" que el aire pesa.

"L'aire és un gas i també es pot pesar. Agafem, per exemple, una pilota desinflada i la pesem. A continuació la inflem i la tornem a pesar. Observem que pesa més que abans. La diferencia entre els dos pesos serà el pes de l'aire que hi ha dins la pilota." [222]

La falacia en este caso consiste en afirmar que de la diferencia de pesos obtenemos el peso del aire que hay en el interior. Sólo sería el aire correspondiente al exceso de presión que pudiera haber en la pelota o globo.

5. <u>Experiencias que establecen nuevas propiedades que serán explotadas por la mecánica racional</u>:

En este caso, las experiencias analizadas encabezan la mecánica racional, como fundamentos experimentales que ponen al descubierto nuevas propiedades de la materia. Propiedades que surgen en este caso de las nuevas preguntas que plantean las experiencias novedosas. Será la mecánica racional en un segundo momento quien tratará de responderlas, estableciendo modelos explicativos, y explotando sus consecuencias.

En el comienzo del capítulo V del segundo libro, dedicado a la fuerza elástica del aire, Hermann nos explica que esta nueva propiedad llamada *Elater*[223] o fuerza elástica, se

[222] A continuación el texto propone hacer una investigación con una balanza y globos. *Química. Ciències de la naturalesa*. 1r cicle d'ESO; ed. Teide (2002) p. 21
[223] Ver nota 8

desprende ocularmente de ciertas experiencias. Son para Hermann las pruebas evidentes de la nueva característica del aire.

"*Inter haec experimenta unum alterumve hoc loco recensebo, quod aeris elasticans ad oculum demosntrare existimo*" [*Phoronomia* p. 180 nº 325]

Las experiencias son tres [ibid. pp. 180-181]. Hermann las describe de forma simplificada, ya que eran bien conocidas:

- La vesícula de buey o porcina flácida atada por su extremo, que es introducida en una máquina pneumática, se hincha debido a la elasticidad del poco aire que hay en su interior[224].
- Un recipiente cerrado de finas paredes de cristal introducido en otro del que se ha extraído el aire, se rompe a menudo en múltiples fragmentos por la elasticidad del aire que hay en su interior.
- Dos semiesferas de las que se ha extraído el aire se separan con mucha dificultad, sin embargo pueden ser separadas fácilmente cuando contienen aire.

Boyle había usado la experiencia de la vejiga en la parte superior de un tubo de Torricelli como demostrativa de la elasticidad del aire, en su obra *Experiments Physico-Mechanical, Touching the Spring of the Aire.* Oxford 1660 [*Works*, vol. 1, p 13]. A continuación Boyle señala en la obra citada, que el resultado sería el mismo colocando la vejiga dentro del globo de cristal de la bomba pneumática.

La bomba pneumática (*Antlia Pneumatica*) es para Hermann la máquina fundamental que permite explorar la elasticidad del aire, tal como lo declara al comenzar su estudio del *Elater* del aire. La describe con detalle tal como se ha explicado en el

224 Experiencia realizada por primera vez por Roberval en 1647 introduciendo una vesícula animal cerrada, en la parte superior de un tubo de Torricelli. [WEBSTER C. 1965; p. 449]

apartado 4.4.2 para después establecer la relación que permita obtener el número de emboladas necesarias para enrarecer el aire en un grado determinado.

8 CONCLUSIONES

Hermann decide escribir un tratado de hidraúlica en 1709 mientras está comenzando su enseñanza pública y privada en Padua, trabajo que concluye en 1712 con la *Phoronomia*. Su objetivo explícito es escribir un texto sobre hidráulica (tema de larga tradición e interés en Padua), pero para hacerlo comprensible por los novatos considera necesario exponer en él los fundamentos de sus deducciones. Su texto se convierte pues en un tratado general de mecánica racional, uno de cuyos centros de interés está, tal como hemos mostrado, en la exposición secuenciada y estructurada de los conocimientos mecánicos dispersos en muchos textos de distintos autores (ver cap. 2).

En primer lugar procede a estructurar la estática de fluidos en continuidad con la de los sólidos rígidos y flexibles. Así puede calcular la fuerza y el momento de cualquier sistema de fuerzas actuante sobre objetos de cualquier forma (ver cap. 4), extendiendo su uso al estudio de las presiones en un líquido o sobre un objeto sumergido y acabando con el estudio del aire. Mientras en el anterior tratado de estática [ver *Mechanica (*1669) de Wallis en la introducción al cap. 4], Wallis estudia superficies de revolución, la aplicación por parte de Hermann de los métodos del nuevo cálculo diferencial e integral en ambos estilos, geométrico y algebraico, le permiten tratar casos más generales (ver cap. 4.1)

La estructuración de la estática, junto con la demostración de sus principales principios, basados en la consideración del equilibrio de fuerzas, supone en 1716, fecha de la publicación de la obra, una contribución a la visión unitaria de distintos campos como la hidrostática, el estudio del aire, y el equilibrio de sistemas de fuerzas en sólidos. Particularmente destacable es su estudio de sólidos flexibles sujetos por extremos (ver 4.2), para los que elabora una serie de ecuaciones diferenciales generales a partir de las que "deduce" los casos particulares de la catenaria, velaria, lintearia, y otros, es una agrupación de una clase de problemas previa a la que realizará Euler cuando los considere tipos de isoperimétricas. En la hidrostática, estudia el caso general de fluidos heterogéneos, particularizable para homogéneos (4.3).

Considerada globalmente, la estática de Hermann, sin embargo, no aparece aún como caso particular de leyes dinámicas generales, como será el caso de los principios variacionales que desarrollarán D'Alembert, Maupertuis y finalmente Lagrange durante el s. XVIII [PANZA M. 2003].

Merece una atención destacada la estructuración de la dinámica en la *Phoronomia*, ya que constituye un intento por establecer un conjunto de conceptos y de leyes relacionales, que proporcionan un tratamiento algorítmico de resolución de problemas mecánicos. Mientras la estática rígida se estructura en orden creciente de complejidad, desde conjuntos discretos a continuos de fuerzas, o desde sistemas planos a sólidos, la dinámica comienza estableciendo las leyes generales (5.1), para desplegarse después en el estudio de tipos de problemas mecánicos, como el estudio de fuerzas centrales o la caída libre (5.2), el movimiento de los ápsides en órbitas, las colisiones (5.3), el movimiento de cuerpos por curvas o el problema equivalente de los péndulos (5.4), o el movimiento en medios resistentes (5.5) y la cinemática de flujo de líquidos, en la parte de fluidos.

Su dinámica general se organiza a partir de dos principios y un postulado (5,1). El primer principio que hoy conocemos como segunda ley de Newton y que Hermann escribe por primera vez en su forma actual $F = m\, dv{:}dt$. El segundo es el que Hermann llama "principio de igualdad de momentos", que constituye para nosotros la conservación de la energía o teorema energía trabajo $Fds = vdv$; del que obtiene por integración $\int Fds = \frac{1}{2} m v^2$. El postulado particulariza su definición de velocidad uniforme para un diferencial de tiempo $dt = dx{:}v$.

Es significativa la consideración del principio energético en Hermann, primero por que la distingue y la hace independiente de la formulación algorítmica que ha realizado Varignon unos años antes (ver discusión en 5.1), basada, la de Varignon, en la segunda ley de Newton y en la definición de velocidad en un instante. Por otro lado, este principio energético se convierte en su obra, en la *prima formula* (5.1), fundamental en su planteamiento de problemas analizados en esta monografía, como movimientos por fuerzas centrales, descenso por curvas, péndulos, o la muy completa serie de capítulos dedicados al movimiento en medios resistentes (5.5). También se usa en el estudio de la ecuación barométrica que relaciona presión con altura atmosférica (ver 4.4.3 Modelos atmosféricos).

Aunque la expresión de su primera fórmula general ($\int Fds = \frac{1}{2}\, m\, v^2$), y la conservación de la "fuerza absoluta"[225] (mv^2) en los choques, contienen la misma cantidad, Hermann no las asocia; son vistos como contextos mecánicos distintos. En el estudio de los choques, Hermann hace referencia a la polémica de las fuerzas vivas defendiendo la posición de Leibniz.

Es destacable, en el contexto energético (*vis* viva) con el que trabaja, su hipótesis mecánico-estadística (5.6) en la que se postula por primera vez que la presión y la temperatura son proporcionales al cuadrado de la "velocidad media" y la "densidad" de las partículas de un gas. Hipótesis ignorada en los textos históricos de mecánica o de teoría cinética.

La *Phoronomia* es de principio a fin una mecánica racional escrita en el nuevo lenguaje del cálculo diferencial e integral. Hermann da incluso una versión del que llamamos "teorema fundamental del cálculo" y un algoritmo de cálculo integral (ver 6). Es más, el nuevo cálculo es la condición de posibilidad del nuevo desarrollo conceptual de la mecánica. Permite la creación de conceptos diferenciales como velocidad y fuerza en un instante dt, que Hermann usa sin darles nombre específico, y que permiten

[225] Recordemos que "fuerza absoluta" es otro nombre para *Vis viva,* ambos procedentes de Leibniz (ver 5.3)

desarrollar a partir de las leyes generales, las ecuaciones diferenciales de los temas tratados (hay múltiples ejemplos en el cap. 6).

Es un proceso de construcción algoritmico-diferencial emprendido de forma distinta por Varignon y por Hermann, en el que se incluyen resultados de los Bernoulli, de Leibniz, de Huygens y de L'Hopital. Varignon con el mérito de haber explicitado la velocidad y la fuerza en un instante y Hermann destacando el principio que después llamaríamos energético. Todos ellos pendientes del desafío de reescribir y completar los resultados de los *Principia* usando los nuevos métodos matemáticos de análisis local, pero también de enfrentar nuevos problemas impulsados por la potencia de los nuevos métodos; ésta será para ellos la mejor prueba de la validez de unos métodos que, por otro lado, estaban siendo puestos en cuestión.

Es en este proceso donde Hermann desarrolla nuevas demostraciones diferenciales, como la unificación de problemas de curvas flexibles sujetas por los extremos (4.2), la ley de las áreas, o el problema inverso de las fuerzas centrales (5.2) que desarrolla en toda su generalidad después de haber tratado el problema en una serie de artículos publicados en Italia. También hace un estudio general del problema de movimiento oblicuo en medio resistente valioso históricamente por su dificultad (5.5).

Otra dimensión importante que recorre la obra de Hermann, es su trabajo conceptual (ver cap. 3), ya mencionado al hablar de sus conceptos diferenciales, pero presente también en sus definiciones de las clases de fuerzas (ver la comparación conceptual entre Newton, Leibniz y Hermann en 3.3). Mantiene algunas de las distinciones verbales procedentes de la metafísica leibniziana y de la creencia de la época de que la fuerza actúa por impulsos continuados. Así, considera con distinto nombre a las fuerzas en un instante que aún no producen movimiento (*vis morta o solicitatio*), y a estas mismas repetidas continuamente (*vis viva* o simplemente *vis,* o en contextos estáticos *potentia*). Sin embargo vemos cómo en su propia obra se pierden en la práctica estas distinciones. No encontramos en la *Phoronomia* reflexiones sobre el debate de las fuerzas a distancia, su actitud sigue la de Newton sin hacerse eco de las críticas de Leibniz o Huygens.

Son valiosas, así mismo, las reflexiones presentes en la obra sobre la estructura de la materia en el contexto de la filosofía mecánica. Así, su moderna definición de masa como agregado de partículas (3.4) (éste es uno de los proyectos actuales considerados para sustituir al prototipo de kg; ver nota 65), sus distinciones entre: masa y peso (3.5 y 5.1), sólido (y su grado de resistencia frente a la rotura) y fluido (4.3), líquido y gas (4.4.1), la afirmación del vacío y la cuantificación de su grado (4.4.2), el razonamiento por el que considera que el movimiento del éter no tiene ningún papel para explicar la elasticidad del aire (4.4.1), y la ya citada relación entre el calor y la energía cinética media de las partículas del gas.

En la última década del s. XVII la elaboración de la mecánica por parte de los autores ya citados, se hace con una mezcla de estilos (ver 6). La presentación de los algoritmos fundadores del nuevo cálculo por Leibniz, favorece que se busque el estilo algebraico en el continente, mientras que el estilo de Newton hará que sus seguidores defiendan el estilo geométrico cuando elaboren mecánicas fluxionales. La polémica sobre la prioridad hará que las opciones sobre el estilo a usar, se conviertan además en una cuestión de pertenencia a bandos (ver comentario de Johann Bernoulli en 6), debate en el que Hermann no entra.

Hermann declara en el prefacio su intención de escribir la *Phoronomia* mezclando los estilos geométrico o "lineal" (en las demostraciones principales) y "especioso" (en la posterior particularización). Considera las construcciones geométricas más "simples" y "elegantes", además de ser más claras para los novatos. Es, sim embargo, muy significativa la reescritura algebracica que hace de sus principales resultados dinámicos en un artículo de 1717 (analizado en el apartado 6) porque nos permite comparlos con los contenidos en la *Phoronomia*. Es un escrito para defenderse de un plagio y por tanto, en esta ocasión, dirigido a intelectuales; por tanto no necesita hacer desarrollos geométricos detallados y puede ir directamente a las ecuaciones diferenciales y proceder a su integración.

Se da pues en su obra una mezcla de los estilos, newtoniano y leibniziano, tributaria de la tradición geométrica. Depender de los diagramas específicos de cada tipo de problemas, dificulta ir avanzar en la generalilzación de algoritmos. Por otro lado, es necesario desarrollar herramientas coneptuales nuevas, como la de "función" y la de variable dependiente, para una algebrización efectiva. Por esto, a pesar de contener la *Phoronomia* un grado de estructuración y algoritmación superior a los textos mecánicos anteriores, salvo el caso similar de Varignon ya citado, el joven Euler ve en 1736 que cada resultado parece responder sólo al problema planteado, dificultando su generalización. El título de su obra, *Mechanica, sive motus scientia analytice exposita,* y sus palabras son elocuentes del programa emprendido:

"De hecho, el lector aún persuadido de la verdad de las cosas demostradas, no las puede comprender clara y distintamente. Así es difícil poder resolver los mismos problemas cuando han cambiado sólo un poquito, si uno no los examina con la ayuda del análisis y si no desarrolla las proporciones según el método analítico. Esto es exactamente lo que me pasó a mí, cuando comencé a estudiar en detalle los *Principia* de Newton y la P*horonomía* de Hermann. De hecho, a pesar de haber comprendido bien las soluciones de numerosos problemas, no pude resolver problemas que eran un poco diferentes. Por tanto estudié el análisis presente detrás de esos métodos sintéticos para tratar las proposiciones en términos del análisis, para mis propósitos". [226][

La *Phoronomia* es pues representativa del proceso que conduce desde la magna obra de Newton hasta la expresión analítica de Euler, con sus dificultades y sus hallazgos parciales.

[226] *"Lectore, etiamsi de veritate eorum, quae proferuntur, conuincatur, tamen non fatis claram et distinctam eorum congnitionem assequatur, ita ut easdem quaestiones, si tantillum immutentur, propio marte vix resolvere valeat, nisi ipse in analysin inquirat, easdemque propositiones analytica methodo evoluat. Idem omnino mihi cum Newtoni Principia et Hermanni Phoronomiam perlustrare coepissem, usu venit, ut quamquis plurium problematum soluciones fatis percepisse mihi viderer, tamen parum tantum discrepatia problemata resoluere non potuerim. Illo igitur iam tempore, quantum potui, conatus sum analysin ex synthetica illa methodo elicere, easdemque propositiones at meam utilitatem analytice pertractare, quo negotio insigne cognitionis meae augmentum percepi." Praefatio* de la *Mechanica* [Euler 1736]

Para terminar me gustaría citar tres posibles extensiones de esta monografía: por un lado, estudiar las relaciones epistolares entre Hermann y Varignon para comprobar la influencia de éste último en la construcción conceptual y algorítmica de Hermann. Así mismo, sería interesante estudiar la difusión e influencia de la *Phoronomia* en autores como Daniel Bernoulli o Euler que coincidieron en S. Petesburgo con Hermann [Hermann entre 1724-1731 (ver cap. 1). Daniel BERNOULLI 1725-1733, y Euler 1727-1741], o en König, que formula en 1751 la ley de la energía cinética de un sistema de masas puntuales, y es discípulo de Hermann en Basel desde 1731 [DSB]. Finalmente, el uso de principios "energéticos" de Hermann ¿tiene alguna influencia en la mecánica de Lagrange que se construye con este mismo enfoque?

9 BIBLIOGRAFÍA

AITON E.J 1964 "The inverse problem of central forces". *Annals of Science* 16, pp.65-82

AITON E.J. 1989 "The contribution of Isaac Newton, Johann Bernoulli and Hermann to the inverse problem of central forces" *Studia Leibnitiana,* Sonderheft 17, Stuttgart, pp. 48-58.

BERBERAN N.M. (et al) 1997 "On barometric formula" *Am J. Phys.* 65 (5) pp. 404 – 12

BERNOULLI D. 1738 *Hydrodynamica sive de viribus et motibus fluidorum commentarii (…)* Argentorati

BERTOLONI MELI 1993 *Equivalence and priority. Newton versus Leibniz. Including Leibniz's unpublished manuscripts on the Principia.* Clarendon Press, Oxford.

BLAY M. 1986 "Deux moments de la critique du calcul infinitesimal : Michele Rolle et George Berkeley". *Rev. D'histoire des science.* T. XXXIX-3

BLAY M. 1992 *La naissance de la mecanique analitique. La science du mouvement au tournant des XVIIe et XVIIIe siècles.* Presses universitaires de France. Paris.

BOS H. J. M. 1974-75 "Differentials, Higher Order Differentials and the Derivative in the Leibnitian Calculus", *Archive for History of Exact Sciences,* XV, 1974-75, pp 1-90.

BOS H. J. M. 1984 "Newton, Leibniz y la tradición leibniziana" en I. GRATTAN-G. (Ed.) 1984 (1ª ed. 1980). Pp. -69-.124

BRAKENRIDGE J.B. 1989 "Newton's unpublished dynamical principles: a study in simplicity. *Annals of Science* 47, pp. 3-31

BRUSH S. G. 2003 *The Kinetic Theory of Gases. An Anthology of Clasis Papers with Historical Commentary.* Imperial college

Press. London.

COLUBÍ LÓPEZ M. 1999 — *Boscovic y la visión mecánica de la naturaleza (1740-1785).* Madrid. UAM

De GRAND 1987 — "Le problème inverse (prop. 39-41)" *Revue d'Histoire de les Sciences* 40, pp. 281-309

DENSMORE D. 1996 — *Newton's Principia. The central Argument.* Green Lion Press. New Mexico. 1995.

DIJKSTERJHUIS E.J. 1870 — *Simon Stevin. Science in the Netherlands around 1600.* Martinus Nuhodd. The Hague.

DIJKSTERJHUIS E.J. 1961 — *The mechanization of the World Picture*. New York. Oxford University Pres.

DUGAS R. 1954 — *La mécanique au XVII siècle*. Ed. du Griffon. Neuchatel. Suisse.

EULER 1736 — *Mechanica, sive motus scientia analytice exposita*. St. Petesburg: Academiae Scientiarum.

FELLMANN E. 1981 — *Hermann ,* DSB Vol. 6, pp. 304-305

GALILEO G. 1988 — *Galileo Galilei. La nueva ciencia del movimiento*. Selección, traducción y notas de C. Azcárate, M. García ▯atemá y J. Romo. UAB, Barcelona.

GARBER D. 1995 — "Leibniz: Physics and philosophy" en *The Cambridge Companion to Leibniz.* En Nicholas Jolley (ed.). Cambridge University Press.

GERHARDT C.J. ed. 1859 — *G.W. Leibniz'mathematische Schriften, IV* . Halle, 1859 pp. 253-413.

GONZÁLEZ REDONDO F. A. 2003 — "La contribución de Leonard Euler a la matematización de las magnitudes y las leyes de la mecánica, 1736-1765" *Llull,* vol. 26, 837-857

GRAY J. (ed.) 1987 — *Mathematical physics and the system of the world.* Open University. Block 3. Unit II.

GREENBERG J. H. 1995 — *The problem of Earth's Shape from Newton to Clairaut.*

Cambridge University Press.

GRUGNETTI L. 1992 “atemátic e fisica nel problema inverso delle forze centrali”. En Spertanza (ed.), *Epistemología della Matematica, Seminari 1989-1991. Cuaderno 10, pp. 203-214.*

GUICCIARDINI 1995 “Johann Bernoulli, John Keill and the problem of central forces”. *Annals of Science* 52, pp. 537-575

GUICCIARDINI N. 1996 “An Episode in the History of Dynamics: Hermann’s Prof. (1716-1717) of Proposition 1, BooK 1, of Newton’s *Principa* " . *Historia Mathematica, 23 (1996) 167-181*

HANKINS T. L. 1965 “Eighteenth-Century Attempts to Resolve the *Vis viva* controversy” *Isis*. Vol. 65, 3. No. 185 pp. 281-297

HANKINS T. L. 1990 *Jean d’Alembert. Science and the enlightenment*. Gordon and Breach. (1ª ed. Oxford University Press. 1970).

HARMAN F.M. 1993 “Geometry and Nature: Leibniz and Johann Bernoulli’s Theory of Motion” en *After Newton: essays on natural philosophy*. F.M. Harman. Variorum. Ashgate publishing company. Aldershot.

HERMANN J. 1717 *"Lettre de M. Hermann professeur en Mathematique à Franfort su l’Oder, aux Auterurs de ce Journal."*

HERMANN J. 1700 *Responsio ad Clarissimi Viri Bernh. Niewentijt Consideraciones secundas Circa Calculi differenitalis Principia editas*, J. C. a Mechel, Basilea.

HERMANN J. 1710 a “Metodo d’investigare l’orbite de atemát, nell’ipotesi che le forze centrli o pure le gravità …" *Giornale de’ Letterati d’Italia, 2.* pp. 447-467

HERMANN J. 1711 a “Continuazione dell’Articolo XV del Tom II di questo Giornale …" *Giornale de’ Letterati d’Italia, 5.* pp. 312-335

HERMANN J. 1711 b “Breve aggiunta agli Articoi XV e XVI, del secondo e quinto le gravità …" *Giornale de’ Letterati d’Italia, 6.* pp.

441-449.

HERMANN J. 1711 c — “Riflessioni geometriche in difusa dell’Articolo XVI …” *Giornale de’ Letterati d’Italia, 7.* pp. 173-229

HERMANN J. 1711 d — “Modo facile de determinare la legge delle force Centrali …” *Giornale de’ Letterati d’Italia, 13.* pp. 321-362

HERMANN J. 1716 — *Phoronomia sive de viribus et motivus corporum solidorum et fluidorum libri duo.* Amsterdam

HOLTON G. 1973 — *Introduction to concepts and theories in physical science.* Addison- Wesley 1973. 2d ed.; rev., and with new material, by Stephen G. Brush. (Edición castellana ed. Reverté 1989)

HUYGENS C. 1888-1950 — *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens*. Société hollandaise des sciences (27 vol.). La Haye : M. Nijhoff, 1888-1950.

I. GRATTAN-G. (Ed.) 1984 — *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910*. (1ª ed. 1980) Alianza Universidad. Madrid.

INDORATO L. NASTASI P. 1991 — “Riccati’s proof of the parallelogram of forces in the context of the vis viva controversy’”, *Physis* 28 (1991), 751-767

JOLLY N. (Ed.) 1995 — *The Cambridge Companion to Leibniz.* Cambridge University Press.

L’HÔPITAL 1696 — *Analyse des infinitament petits pour l’intelligence des llignes courbes.* París

LAGRANGE J. L. 1788 — *Mèchanique analitique.* La Veuve Desaint. París

LEIBNIZ G.W. 1684 — *Nova methodus pro maximis et minimis, … .* AE Octubre pp. 467-473.

LEIBNIZ G.W. 1687 — *De ▯atemátic recondita et … .* AE Junio pp. 292-300.

LEIBNIZ G.W. 1991 — *G.W. Leibniz. Escritos de dinámica.* (Estudio preliminar, traducción y notas de Juan Arana Cañedo-Argüelles) Ed.

Tecnos. Madrid.

MACH E. 1949 — *Desarrollo histórico-crítico de la mecánica.* (Versión de la séptima edición alemana por J. Babini). Espasa Calpe Argentina.

MAIERU L. 2001 — "La relazione tra la meccanica e la geometria in John Wallis". En *Atti del XXI Congresso Nazionale di Storia della Fisica e dell'Astronomia.* Pp. 246-256. Dipartimento di Fisica, Universita' della Calabria, Arcavacata di Rende (CS)

MALET A. 2002-03 — "Algebra as language: Wallis and Condillac on the nature of algebra." *Cronos,* **5-6**, 2002-2003,5-24

MALTESE G. (1992 — *La Storia di "F=ma". La seconda legge del moto nel XVIII secolo.* Biblioteca di "□atemát". Leo S. Olschi. Firenze.

MAZZONE S. 1996 — "Il problema inverso delle forze centrali nel vuoto: Hermann e Giuseppe Verzaglia" *Revista di Storia della Scienza*, Serie II, vol. 4 n. 1

MAZZONE S. y ROERO C. S. 1997 — *Hermann and the diffusion of the Leibnizian Calculus in Italy.* Leo S. Olschki. Firenze.

MAZZONE S. y ROERO C.S. eds. 1992 — *Guido Grande – Hermann Carteggio (1708-1714).* Olshki, Firenze

MIDDLETON W. E. 1965 — "Hermann and the kinetic theory" Br. J. Hist. Sci. pp. 247-250

MOSCOVICI SERGE 1967 — *L'Expérience du mouvement ; Jean-Baptiste Baliani disciple et critique de Galilée.* Paris : Hermann, 1967

NAGEL F. 1991 — "A catalog of the works of Hermann (1678-1733)", *Historia Mathematica,* XVIII, pp. 36-54

NEWTON I. 1987 a — *Principios matemáticos de filosofía natural.* Traducción al castellano y notas de Eloy Rada de la 3ª edición de los *Principia.* Editada por Koyre-Cohen (1971-72). 2T.

Alianza Universidad.

NEWTON I. 1687 b *The Principia: mathematical principles of natural philosophy* / Isaac Newton; a new translation by I. Bernard Cohen. University of California Press, 1999

NORDON M. 1992 *Histoire de l'hydraulique* 2T. Ed. Masson. París.

OKRUHLIK K. – BROWN J. R. (Ed.) 1985 *The Natual Philosophy of Leibniz.* D. Reidel Publishing Company.

P. A. TIPLER 1988 *Física.* Dos tomos. Barcelona: Reverté (trad. De la segunda edición inglesa 1987)

PALLADINO F. 1995 *"Le quantita utili al ragionamento e alla atemát. atemáticae e summatrice in un dibattito tra Nieuwentijt, Leibniz e Hermann"* en Panza M. y Roero S. (ed.) 1995.

PANZA M. 2003 *The Origins of Analytic Mechanics in the 18th Century,"* en *Hans Niels Jahnke (ed.), A History of Analysis , American Mathematical Society (2003), Chapter 5, 137-153*

PANZA M. y ROERO S. (ed.) 1995 *atemátic, Flussioni e differenziali. Tradizione e innovazione nella matematica del seicento.* La Citta del Sole. Napoli.

POURCIAU B. H. 1991 "On Newton's proof that inverse-square orbits must be conics" *Annals of Science,* 48 pp. 159-172

RADELET-DE GRAVE P. 1998 "La moindre action comme lien entre la philosophie naturelle et la mécanique analytique : continuités d'un questionnement " *Llull*, Vol. 21, 1998. pp. 439-484

ROBINET A. 1988 *G.W. Leibniz. Iter Italicum (Mars 1689-Mars 1690). La dynamique de la République des Letres. Nombreux textes inédits.* Olschki, Firenze

ROBINET A. 1991 a *L'Empire Leibnizien. La conquête de la chaire de mathématiques de l'Université de Padoue. Hermann et*

Nicolas Bernoulli. Lint, Trieste.

ROBINET A. 1991 b — "Leibniz. Phoranomus seu de potentia et legibus natuae Rome Juliet 1689" *Physis XXVIII*, pp. 429-885.

SPEISER D. 1996 — "The Kepler problem fron Newton to Johann Bernoulli". *Arch. Hist. Ex. Sc.* 50, pp. 103-116

TRUESDELL C. 1968 — *Essays in the History of Mechanics.* Springer Verlag 1968. (Ed. Castellana de Tecnos, 1975).

VERZAGLIA G. 1710 — "Modo di trovare l'orbita che descrivono i pianeti qualunque …. " GLI. 3 pp. 495-510

WAARD C. de 1936 — *L'expérience barométrique, ses antecedents et ses explications.* Thuars

WALLIS JOHN 1972 — *Opera Matemática*. Georg Olms 1972. Facsímil de la edición hecha en: Oxford, 1693-1699

WEBSTER C. 1965 — "The discovery of Boyle's law, and the concept of the elasticity of air in the seventeenth century", *Archive for History of Exact Sciences*. 2 (1965): 441-502.

WESTFALL R.S. 1971 — *Force in Newton's Physics.* Londres y New York.

WHITESIDE D.T. 1991 — "How powerful has a force proof to be? Newton's Principia Book I. Corolary I to propositions 11-13" *Physis* XXVIII pp. 727-749.