UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BARCELONA.

# La Ecuación de Beltrami.

## Máster Universitario de Modelización para la Ciencia y la Ingeniería.

Antonio L. Baisón Olmo.

Departamento de Matemáticas.

Barcelona, Agosto 2012.

# Índice general

# Capítulo 1

# Introducción.

Consideraremos la ecuación de Beltrami

$$\overline{\partial}\phi(z) = \mu(z)\partial\phi(z) \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{1.1}$$

donde $\mu$ será una función medible definida en $\mathbb{C}$ que cumpla la condición de elipticidad $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$, y a la que se le llamará *coeficiente de Beltrami.* Ya en 1938, Morrey en [9] estableció un resultado donde se garantiza que existe, modulo transformaciones de Möbius, un único homeomorfismo perteneciente a $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ solución de la ecuación. A dicho homeomorfismo solución se le llama *$\mu$-cuasiconforme* o *$K$-cuasiconforme*, donde $K := \frac{1+\|\mu\|_\infty}{1-\|\mu\|_\infty}$. Al resto de las soluciones de la ecuación en $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ se les llamará *$\mu$-cuasiregulares.*

Es sabido que, dado $\mu$ con soporte compacto, el método para encontrar la solución *$\mu$-cuasiconforme* de la ecuación de Beltrami consiste en tomar

$$\phi(z) = z + \mathcal{C}h(z) \tag{1.2}$$

con $\mathcal{C}$ la *transformada de Cauchy* y $h(z) = \overline{\partial}\phi(z)$. La solución dada por este método es conocida como *solución principal*, de la que se sabe que existe y es única.

Con un sencillo cálculo, puede verse que si $f$ es analítica y $\phi$ es una solución $\mu$-cuasiconforme de (1.1), entonces $f \circ \phi$ también es solución de (1.1). Podemos ir más allá. Mediante el *Teorema de Stoilow*, se asegura que *toda solución* de (1.1) es la composición de una función holomorfa y la aplicación cuasiconforme. Este teorema, nos permite centrarnos únicamente en encontrar la solución principal, ya que por composición con holomorfas podemos obtener el resto de soluciones.

Para encontrar el potencial $h$ de la representación (1.2), lo que hacemos es insertar este cambio de variables en la ecuación de Beltrami. Ello nos lleva a una ecuación integral para $h$,

$$h = \mu\mathcal{B}h + \mu$$

donde $\mathcal{B}$ es la *transformada de Beurling.* Equivalentemente,

$$(I - \mu\mathcal{B})\, h = \mu.$$

Ésto explica la profunda relación entre las aplicaciones cuasiconformes y la invertibilidad del operador $I - \mu\mathcal{B}$, que ha sido fuente de estudio de muchos autores, y también es el objeto central de este trabajo.

En un primer momento, Astala en [1] demuestra que si el coeficiente de Beltrami $\mu$ está en $L^\infty(\mathbb{C})$, entonces el operador $I - \mu\mathcal{B}$ tiene inverso acotado en $L^p(\mathbb{C})$ para $p \in (1 + k, 1 + \frac{1}{k})$ con $k = \|\mu\|_\infty$. Para ello, se basó en el *teorema de distorsión de Astala* [1] y argumentos de la teoría de pesos de Muckenhoupt. Por su parte, Iwaniec en [8] establece que cuando el coeficiente de Beltrami $\mu$ está en $VMO(\mathbb{C})$ con soporte compacto, entonces el operador $(I - \mu\mathcal{B})^{-1}$ es invertible en $L^p(\mathbb{C})$ para todo $p \in (1, \infty)$. Equivalentemente, la solución principal $\phi$ de (1.1) está en $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$ para todo $p \in (1, \infty)$. Por otro lado, Ahlfors muestra en [2] que en el caso de que $\mu$ pertenezca a $W^{1,p}(\mathbb{C})$ con $p > 2$ y con soporte compacto, entonces la solución principal $\phi$ es de $W^{2,p}_{loc}(\mathbb{C})$. Y finalmente Víctor Cruz, en [3] muestra que si $\mu \in B^\alpha_{p,q}(\mathbb{C})$ de soporte compacto con $0 < \alpha < 1$, $\alpha\, p > 2$ y $1 \leq q \leq \infty$ entonces la solución principal es $\phi(z) = z + \mathcal{C}h(z)$ con $h$ perteneciente a $B^\alpha_{p,q}(\mathbb{C})$.

Cabe mencionar también resultados referentes a coeficientes de tipo $\mu = \chi_\Omega \cdot \mu_0$, donde $\mu_0$ es una función globalmente regular, y $\Omega$ es un dominio con frontera suave. Véase para ésto las referencias [14] o [15].

Por otra parte, es de sobra conocido que si $\phi$ es una aplicación $\mu$-cuasiconforme, entonces el homeomorfismo inverso $\phi^{-1}$ también cumplirá una ecuación de Beltrmi

$$\overline{\partial}\phi^{-1} = \nu\partial\phi^{-1}$$

para un cierto coeficiente $\nu$ [6]. Este hecho, despierta nuestro interés en estudiar si la pertenencia de $\mu$ en ciertos espacios determina o no la pertenencia de $\nu$ en dichos espacios u otros.

Por nuestra parte, este trabajo se centrará en deducir propiedades del homeomorfismo principal $\phi$ del coeficiente de Beltrami $\nu$ y del homeomorfismo $\phi^{-1}$ según las propiedades que conozcamos del coeficiente de Beltrami $\mu$, así como saber si dichos resultados son optimos o no. Pero antes de entrar en materia, tenemos que dar algunos conocimientos previos con los que poder trabajar.

# Capítulo 2

# Preliminares.

## 2.1. Espacios de funciones.

Para poder estudiar las soluciones de la ecuación

$$\overline{\partial}\phi(z) = \mu(z)\partial\phi(z) \quad z \in \mathbb{C},$$

nos es necesario restringirnos a algún espacio de funciones en el cual trabajar. Por ello, primero daremos algunas definiciones de espacios de funciones que nos serán útiles a lo largo del trabajo. Como suele ser natural en el marco de las ecuaciones diferenciales, estaremos interesados principalmente en espacios medibles con algún grado de diferenciabilidad distribucional, como por ejemplo los espacios $W^{n,p}(\Omega)$ entre otros.

**Definición 2.1.1.** *Dado $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $0 < \alpha \leq 1$, se define el conjunto de las funciones* $\alpha$-Hölder continuas *como el conjunto de las funciones $f$ tales que*

$$|\, f(z_1) - f(z_2) \,| \leq C \,|\, z_1 - z_2 \,|^{\alpha} \quad \forall z_1, z_2 \in \Omega.$$

*Y se denotará por $C^{0,\alpha}(\Omega)$.*

**Definición 2.1.2.** *Dada una función $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ se define el soporte de $f$ como*

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{z \in \Omega \text{ tal que } f(z) \neq 0\}}.$$

**Definición 2.1.3.** *Con el fin de poder definir* la clase de Schwartz, *tomaremos una familia de seminormas sobre* $C_0^\infty(\mathbb{C})$. *Para cada par de índices* $\alpha$ *y* $\beta$, *se define la seminorma* $\rho_{\alpha,\beta}$ *de* $f$ *como*

$$\rho_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{z\in\mathbb{C}} \left| z^\alpha D^\beta f(z) \right|.$$

*Diremos que una función* $f$ *pertenece a* la clase de Schwartz *si* $\rho_{\alpha,\beta}(f) < \infty$ *para todo* $\alpha$ *y* $\beta$. *Esta clase se denotará por* $\mathcal{S}(\mathbb{C})$.

***Nota:*** *observemos que se tiene la siguiente inclusión de clases*

$$C_0^\infty(\mathbb{C}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{C}) \subset C^\infty(\mathbb{C}).$$

**Definición 2.1.4.** *Dado* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *y* $p \in [1,\infty)$, *se define el espacio de funciones* $L^p(\Omega)$ *como el conjunto de funciones medibles en* $\Omega$ *tales que*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left( \int_\Omega |f(z)|^p \; dA(z) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

*Para el caso* $p = \infty$ *se define* $L^\infty(\Omega)$ *como el conjunto de las funciones esencialmente acotadas en* $\Omega$, *es decir,*

$$\| f \|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup}_{z\in\Omega} | f | < \infty.$$

**Definición 2.1.5.** *Dado* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *y* $p \in [1,\infty]$, *se define el espacio de funciones* $L^p_{loc}(\Omega)$ *como*

$$L^p_{loc}(\Omega) := \{ f \text{ tales que } f \in L^p(K) \;\; \forall K \subset \Omega \text{ con } K \text{ compacto } \}.$$

**Definición 2.1.6.** *Dada una función medible* $f$ *y una bola* $B \subset \mathbb{C}$, *se denotará por* $f_B$ *al promedio de la función* $f$ *sobre la bola* $B$, *es decir,*

$$f_B := \frac{1}{|B|} \int_B f(z)\, dA(z).$$

*También puede hacerse la misma definición* $f_C$ *con* $C \subset \mathbb{C}$ *un cubo.*

**Definición 2.1.7.** *Se define el* espacio de funciones de oscilación media acotada, *que denotaremos por* $BMO(\mathbb{C})$, *como el subconjunto de* $L^1_{loc}(\mathbb{C})$ *donde las funciones cumplen*

$$\|f\|_{BMO(\mathbb{C})} \doteq \|f\|_* := \sup_{B\subset\mathbb{C}} \left\{ \frac{1}{|B|} \int_B | f(z) - f_B \,|\, dA(z) \right\} < \infty.$$

*dónde* $\|\cdot\|_*$ *es una seminorma en general. Y los elementos de* $BMO(\mathbb{C})$ *están definidas módulo constantes aditivas.*

**Definición 2.1.8.** *Se define el* espacio de funciones de oscilación media nula*, que denotaremos por $VMO(\mathbb{C})$, como*

$$VMO(\mathbb{C}) := \overline{C_c^\infty(\mathbb{C})}^{\|\cdot\|_*} = \overline{C_0^0(\mathbb{C})}^{\|\cdot\|_*}.$$

**Definición 2.1.9.** *Se define el espacio de funciones $VMO(\widehat{\mathbb{C}})$ como el subconjunto de $VMO(\mathbb{C})$ tales que el el límite*

$$f(\infty) := \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\pi R^2} \int_{\mathbb{D}_R} f(z)\, dA(z),$$

*existe y es finito.*

**Definición 2.1.10.** *Sean $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ y $k \in \mathbb{N}$. Se dice que $g$ es la* derivada distribucional de orden $k$ *de $f$, y se denotará por $D^k f \doteq g$, si*

$$\int_\Omega \left(D^k \phi(z)\right) f(z)\, dA(z) = (-1)^k \int_\Omega \phi(z) g(z)\, dA(z) \qquad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

**Definición 2.1.11.** *Dados $\Omega$, $k \in \mathbb{N}$ y $1 \le p < \infty$. Se define* el espacio de Sobolev *como*

$$W^{k,p}(\Omega) \equiv \{f \in L^p(\Omega) \text{ tales que } \forall \alpha \le k, D^\alpha f \in L^p(\Omega)\},$$

*y se le asociará la norma*

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{0\le\alpha\le k} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}.$$

***Nota:*** *$W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ será el conjunto de funciones que $\forall K \subset \Omega$ con $K$ compacto sean de $W^{k,p}(K)$.*

**Definición 2.1.12.** *Dados $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $1 \le p < \infty$, se define* el espacio Sobolev fraccionario *como*

$$W^{\alpha,p}(\mathbb{C}) = \{f \in L^p(\mathbb{C}) \text{ tales que existe } g \in L^p(\mathbb{C}) \text{ con } f = G_\alpha * g \in L^p(\mathbb{C})\}$$

*donde $G_\alpha := \mathcal{F}^{-1}\left((1+|\xi|^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\right)$ con $\mathcal{F}^{-1}$ la transformada inversa de Fourier. Y la función $g$ que cumple $f = G_\alpha * g$, determinará la norma de $f$ en este espacio. Concretamente*

$$\|f\|_{W^{\alpha,p}(\mathbb{C})} = \|g\|_{L^p(\mathbb{C})}.$$

***Nota:*** *[3]*

- *En el caso de tener $\alpha \in \mathbb{N}$, entonces los espacios de* Sobolev *y de* Sobolev fraccionario *coinciden.*

- *Para todo $0 < \beta < \alpha < 1$ y $p \in (1, \infty)$, se tiene la siguiente inclusión entre espacios de funciones*
$$W^{\alpha,p}(\mathbb{C}) \hookrightarrow W^{\beta,p}(\mathbb{C}).$$

- *Para todo $0 < \beta < \alpha < 1$, se tiene la siguiente cadena de inclusiones entre espacios de funciones*
$$W^{1,2}(\mathbb{C}) \hookrightarrow W^{\alpha,\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C}) \hookrightarrow W^{\beta,\frac{2}{\beta}}(\mathbb{C}) \hookrightarrow VMO(\mathbb{C}).$$

**Definición 2.1.13.** *Dados $0 < \alpha < 1$ y $1 \leq p, q \leq \infty$ se definen* los espacios de Besov $B^{\alpha}_{p.q}(\mathbb{C})$ *como las funciones $f$ tales que*

$$f \in L^p(\mathbb{C}) \quad \textit{y además}$$
$$\left(\int_{\mathbb{C}} \left(\int_{\mathbb{C}} \left(\frac{|f(z) - f(\omega)|}{|z - \omega|^{\frac{2}{q}+\alpha}}\right)^p dA(z)\right)^{\frac{p}{q}} dA(\omega)\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

**Definición 2.1.14.** *Consideremos una aplicación $\psi$ tal que*

$$\psi(z) = \begin{cases} 1, & si\ |z| \leq 1 \\ 0, & si\ |z| > \frac{2}{3} \end{cases}$$

*y construyamos a partir de ella la partición de la unidad $\{\psi_n\}$ como sigue:*

$$\psi_0 = \psi, \quad \psi_j = \psi\left(2^{-j}z\right) - \psi\left(2^{-j+1}z\right) \quad \textit{para toda } z \in \mathbb{C} \textit{ y } n \in \mathbb{N}.$$

*Entonces, dadas $0 < \alpha < 1$ y $1 \leq p, q \leq \infty$ se definen* los espacios de Triebel-Lizorkin $F^{p.q}_{\alpha}(\mathbb{C})$ *como las funciones $f$ tales que*

$$\|f\|_{F^{p,q}_{\alpha}(\mathbb{C})} = \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} \left[\mathcal{F}^{-1}\left(\psi_j \cdot \mathcal{F}(f)\right)\right]^q\right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p(\mathbb{C})} < \infty.$$

*Donde los símbolos $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{-1}$ representan la transformada de Fourier y su inversa respectivamenne.*

**Nota:** Se tienen las siguientes igualdades entre espacios de funciones

$$W^{\alpha,p}(\mathbb{C}) \equiv F_{\alpha}^{p,2}(\mathbb{C}), \quad F_{1}^{2,2}(\mathbb{C}) \equiv W^{1,2}(\mathbb{C}) \quad \text{y} \quad F_{0}^{\infty,2}(\mathbb{C}) \equiv BMO(\mathbb{C})$$

**Definición 2.1.15.** *Dado un espacio normado* $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ *se dice que es un* Espacio de Banach *si es un espacio completo para la norma asociada.*

**Proposición 2.1.1.** *Los siguientes espacios son Banach con su norma asociada.*

- $L^p(\Omega)$ *si* $1 \leq p < \infty$*.*
- $W^{\alpha,p}(\Omega)$ *si* $0 < \alpha < \infty$ *y* $1 \leq p < \infty$*.*

**Proposición 2.1.2.** *Los espacios* $L^2(\Omega)$ *y* $W^{n,2}(\Omega)$ *con* $n \in \mathbb{N}$ *son espacios de Hilbert con el producto escalar usual, a saber:*

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} f\, g,$$

$$\langle f, g \rangle_{W^{n,2}(\Omega)} := \sum_{k=0}^{n} \int_{\Omega} D^k f\, D^k g.$$

**Definición 2.1.16.** *Decimos que* $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ *es un* álgebra de Banach *si* $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ *es un espacio de Banach y dadas* $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$*,* $\exists C \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\|fg\|_{\mathcal{A}(\mathbb{C})} \leq C\|f\|_{\mathcal{A}(\mathbb{C})}\, \|g\|_{\mathcal{A}(\mathbb{C})}.$$

***Ejemplo:*** *los espacios* $W^{\alpha,p}(\Omega)$ *con* $\alpha p > 2$ *son* álgebras de Banach*. También lo son los espacios* $W^{\alpha,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$*, para todo* $\alpha \in (0,1)$ *y* $p \in (1,\infty)$*.*
***Nota:*** *el caso* $\alpha p \geq 2$ *se tiene además la inclusión a* $VMO(\mathbb{C})$*.*

## 2.2. Operadores entre espacios de funciones.

**Definición 2.2.1.** *Dada $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$, se define* la transformada de Cauchy *como*

$$\mathcal{C}\phi(z) := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\phi(\omega)}{z-\omega}\, dA(\omega).$$

Si $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$, puede demostrarse que

$$\|\mathcal{C}\phi\|_* \leq C\|\phi\|_{L^2(\mathbb{C})},$$

lo que nos dice que que toda transformada de Cauchy de un función de $L^2(\mathbb{C})$ es un elemento de $BMO(\mathbb{C})$.

Observemos que también podemos considerar la transformada de Cauchy como un operador de convolución

$$\mathcal{C}\phi(z) := \left(\frac{1}{\pi\omega} * \phi\right)(z).$$

Para $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$ se tiene

$$\begin{aligned}\overline{\partial}\mathcal{C}\phi(z) &= \overline{\partial}\left(\frac{1}{\pi\omega} * \phi\right)(z) = \left(\overline{\partial}\left(\frac{1}{\pi\omega}\right) * \phi\right)(z)\\ &= \phi(z)\end{aligned}$$

ya que $\frac{1}{\pi\omega}$ es la solución fundamental del operador $\overline{\partial}$. De aquí se deduce la siguiente proposición.

**Proposición 2.2.1.** *Si $f \in L^p(\mathbb{C})$ para $1 < p < \infty$ entonces se tiene que*

$$\overline{\partial}\mathcal{C}f = f.$$

**Proposición 2.2.2.** *Dado $p > 2$, el operador*

$$\mathcal{C} : L^p_0(\mathbb{C}) \mapsto W^{1,p}(\mathbb{C})$$

*es contínuo.*

**Proposición 2.2.3.** *El operador*

$$\mathcal{C} : C^\infty_0(\mathbb{C}) \mapsto C^\infty(\mathbb{C})$$

*es contínuo.*

**Definición 2.2.2.** *Dada* $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$ *se define* la transformada de Beurling *como el siguiente valor principal*

$$\mathcal{B}\phi(z) := -\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{|z-\omega|>\epsilon} \frac{\phi(\omega)}{(z-\omega)^2}\, dA(\omega).$$

Observemos que $\mathcal{B}$ puede considerarse como el operador de convolución

$$\mathcal{B}\phi(z) = \left( -VP\frac{1}{\pi\omega^2} * \phi \right)(z).$$

Nótese que para $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$, la transformada de Beurling y la de Cauchy se relacionan de la siguietne manera

$$\partial\mathcal{C}\phi(z) = \partial\left( \frac{1}{\pi\omega} * \overline{\partial}\phi \right)(z) = \left( \frac{1}{\pi\omega^2} * \overline{\partial}\phi \right)(z) = \mathcal{B}\phi(z).$$

**Definición 2.2.3.** *Dada* $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ *se define* la transformada adjunta de Beurling *como*

$$\mathcal{B}^*\phi(z) := \overline{\mathcal{B}\overline{\phi}(z)}.$$

**Proposición 2.2.4.** *Para toda* $n \in \mathbb{N}$, $p \in (1,\infty)$ *y* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, *se cumple que*

- $\mathcal{B} \circ \mathcal{B}^* \equiv I_{L^p(\mathbb{C})}$.
- *El operador* $\mathcal{B} : L^2(\mathbb{C}) \mapsto L^2(\mathbb{C})$ *es una isometría.*
- *Los operadores* $\mathcal{B}, \mathcal{B}^* : L^p(\mathbb{C}) \mapsto L^p(\mathbb{C})$ *son continuos e invertibles.*
- *Los operadores* $\mathcal{B}, \mathcal{B}^* : W^{n,p}(\mathbb{C}) \mapsto W^{n,p}(\mathbb{C})$ *son continuos e invertibles.*
- *Los operadores* $\mathcal{B}, \mathcal{B}^* : W^{\alpha,p}(\mathbb{C}) \mapsto W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ *son continuos e invertibles.*

**Proposición 2.2.5.** *La composición de* $N$ operadores de Beurling *con* $N \in \mathbb{N}$ *cumple que*

$$\|B^N\|_{L^p(\mathbb{C}) \mapsto L^p(\mathbb{C})} \leq C(p)N^2$$

*para* $1 < p < \infty$.

**Definición 2.2.4.** *Dados dos espacios de Banach* $\mathbb{E}$ *y* $\mathbb{F}$*, y un operador lineal*

$$T : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{F}$$

*se dirá que es un* operador compacto *cuando cumpla alguna de las dos condiciones siguientes:*

*(i)* $\forall \, \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{E}$ *acotada* $\Rightarrow \{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{F}$ *admite una subsucesión convergente.*

*(ii)* $T(B_{\mathbb{E}})$ *es relativamete compacto en* $\mathbb{F}$*.*

*Y al conjunto de todos los operadores compactos entre* $\mathbb{E}$ *y* $\mathbb{F}$ *se le denotará por* $\mathcal{K}(\mathbb{E},\mathbb{F})$*.*

**Proposición 2.2.6.** *Dados tres espacios de Banach* $\mathbb{E}$*,* $\mathbb{F}$ *y* $\mathbb{G}$*. Se cumple que:*

- $\mathcal{K}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ *es un subespacio cerrado de* $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$*.*
- *Dados los operadores* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ *y* $S \in \mathcal{L}(\mathbb{F},\mathbb{G})$ *si uno de los dos es compacto, entonces* $S \circ T$ *también.*
- $T \in \mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ *es compacto si y sólo si el adjunto* $T^* \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^*,\mathbb{E}^*)$ *lo es.*

**Proposición 2.2.7.** *[1]* (Capítulo 4)*. Dado* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un acotado medible entonces, los siguientes operadores son compactos.*

- *Para* $p \in (2,\infty]$ *y* $0 \leq \alpha < 1 - \frac{2}{p}$

$$\chi_\Omega \circ \mathcal{C} : L^p(\mathbb{C}) \mapsto C^\alpha(\Omega).$$

- *Para* $p \in [1,2]$ *y* $1 \leq s < \frac{2p}{2-p}$

$$\chi_\Omega \circ \mathcal{C} : L^p(\mathbb{C}) \mapsto L^s(\mathbb{C}).$$

**Lema 2.2.8.** *Supongamos que* $b$ *es de* $BMO(\mathbb{C})$ *y* $p \in (1,\infty)$*. Entonces el conmutador*

$$[\,\mathcal{B}, b\,] = \mathcal{B}b - b\mathcal{B}$$

*se extiende a un operador acotado de* $L^p(\mathbb{C})$ *en sí mismo con cota uniforme*

$$\|\,[\,\mathcal{B}, b\,]\,\phi\|_{L^p(\mathbb{C})} = \|(\mathcal{B}b - b\mathcal{B})\phi\|_{L^p(\mathbb{C})} \leq C_p\,\|b\|_*\,\|\phi\|_{L^p(\mathbb{C})}.$$

**Teorema 2.2.9.** *Dado una función $b \in VMO(\mathbb{C})$ el operador lineal*

$$[\,\mathcal{B}, b\,] : \phi \mapsto (\mathcal{B}b - b\mathcal{B})\phi$$

*es un operador compacto de $L^p(\mathbb{C})$ en sí mismo $\forall p \in (1, \infty)$.*

*Demostración.* Primero veremos el caso de $b \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ y luego razonaremos por densidad. Consideremos una función arbitraria $\omega \in L^p(\mathbb{C})$ y sea $f := \mathcal{C}\omega$. Entonces se cumple que

$$\partial(bf) = \mathcal{B}\overline{\partial}(bf).$$

Y por otro lado:

$$\begin{aligned}(b\mathcal{B} - \mathcal{B}b)\,\omega = b\partial f - \mathcal{B}\left(b\overline{\partial} f\right) &= \mathcal{B}\left(\left(\overline{\partial} b\right) f\right) - (\partial b)\, f = \\ &= \mathcal{B}\left(\left(\overline{\partial} b\right) \mathcal{C}\omega\right) - (\partial b)\, \mathcal{C}\omega\end{aligned}$$

de donde se deduce la compacidad cuando $b \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ gracias a la Proposición 2.2.7.

Para el caso general $b \in VMO(\mathbb{C})$ nos aproximaremos mediante una sucesión de funciones $\{b_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{C})$ tal que $b_j \to b$ en $BMO(\mathbb{C})$. Por tanto,

$$\begin{aligned}||\,(b\mathcal{B} - \mathcal{B}b) - (b_j\mathcal{B} - \mathcal{B}b_j)\,||_{L^p(\mathbb{C})\mapsto L^p(\mathbb{C})} &= ||\,(b - b_j)\,\mathcal{B} - \mathcal{B}\,(b - b_j)\,||_{L^p(\mathbb{C})\mapsto L^p(\mathbb{C})} \\ &\leq C_p ||b - b_j||_* \to 0\end{aligned}$$

con lo que se garantiza la compacidad del operador. □

**Definición 2.2.5.** *Dado un operador acotado $T : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{F}$ se dice que es de Fredholm si cumple que* $\operatorname{Ker}(T)$ *y* $\operatorname{Coker}(T)$ *son finito dimensionales.*

*Al conjunto de todos los operadores de Fredholm entre $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ se les denotará por $\mathcal{F}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.*

**Lema 2.2.10.** ***Caracterización de Atkinson:*** *Un operador acotado $T : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{F}$ es Fredholm si y sólo si*

$$\exists\, A \in \mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathbb{E}),\ \exists\, K_1 \in \mathcal{K}(\mathbb{E}) \ \ y \ \ \exists\, K_2 \in \mathcal{K}(\mathbb{F})$$

$$\textit{tales que } A \circ T \ = \ I_{\mathbb{E}} \ + \ K_1 \ \ y \ \ T \circ A \ = \ I_{\mathbb{F}} + K_2.$$

**Definición 2.2.6.** *Dado $T \in \mathcal{F}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ se define el índice del operador $T$ como:*

$$\operatorname{Ind}(T) := \dim(\operatorname{Ker}(T)) - \dim(\operatorname{Coker}(T)).$$

**Proposición 2.2.11.** *Sean $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ y $\mathbb{G}$ tres Espacios de Banach.*

1. *Si $T : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{F}$ y $S : \mathbb{F} \mapsto \mathbb{G}$ son operadores acotados y dos de los siguientes tres operadores $T$, $S$, $S \circ T$ son Fredholm, entonces el tercero también, y además*

$$\operatorname{Ind}( S \circ T ) \,=\, \operatorname{Ind}( S ) \,+\, \operatorname{Ind}( T ).$$

2. *$T \in \mathcal{F}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ si y sólo si $T^* \in \mathcal{F}(\mathbb{F}^*, \mathbb{E}^*)$, y además*

$$\operatorname{Ind}( T ) \,=\, \operatorname{Ind}( T^* ).$$

3. *Si $K \in \mathcal{K}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ y $T \in \mathcal{F}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ entonces $T + K \in \mathcal{F}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ y además*

$$\operatorname{Ind}( T \,+\, K ) \,=\, \operatorname{Ind}( T ).$$

4. *Si $T \in \mathcal{F}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ entonces $\operatorname{Ind}( T ) \,=\, 0$ si y sólo si $T = A + K$ para algún par de operadores $A, K$ con $A$ invertible y $K$ compacto.*

5. *Si $T \in \mathcal{F}(\mathbb{E})$ con $\operatorname{Ind}( T ) \,=\, 0$ e inyectivo, entonces $T$ es invertible.*

**Proposición 2.2.12.** ***Embedding Sobolev.***[3] *Dadas $n \geq 1$ y $p \in [1, \infty)$ se tienen las siguientes inclusiones continuas entre espacios de funciones:*

*(i)*

$$W^{n,p}(\mathbb{C}) \hookrightarrow L^q(\mathbb{C}) \;\; \textit{con } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{n}{2} \;\; \textit{si } \frac{1}{p} - \frac{n}{2} > 0.$$

*(ii)*

$$W^{n,p}(\mathbb{C}) \hookrightarrow L^q(\mathbb{C}) \;\; \textit{para toda } q \in [p, \infty) \;\; \textit{si } \frac{1}{p} - \frac{n}{2} = 0.$$

*(iii)*

$$W^{n,p}(\mathbb{C}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{C}) \;\; \textit{si } \frac{1}{p} - \frac{n}{2} < 0.$$

*(iv)*

$$W^{n,p}(\mathbb{C}) \hookrightarrow C^{\,0,\alpha}(\mathbb{C}) \;\; \textit{para } \alpha = n - \frac{2}{p} \in (0,1)\,.$$

# Capítulo 3

# Preliminares cuasiconformes.

A lo largo de este capítulo veremos algunos de los resultados más importantes sobre aplicaciones cuasiregulares. Nuestro objetivo en este capítulo, es llegar a recolectar todas las nociones y herramientas necesarias para demostrar el Teorema de Riemann que nos garantizan la existencia de un único homeomorfismo solución de la ecuación de Beltrami, y el Teorema de Stoilow que nos clasifica el resto de soluciones. Así, estas mismas herramientas no serán de gran utilidad en el resto de capítulos para llegar a probar los resultados que expondremos. Por ello, primero daremos algunas definiciones y propiedades sobre las aplicaciones cuasiregulares que nos serán necesarias.

## 3.1. Definiciones y Propiedades Básicas.

**Definición 3.1.1.** *Se define la ecuación de Beltrami como la siguiente ecuación en derivadas parciales*

$$\overline{\partial}\phi(z) = \mu(z)\,\partial\phi(z) \tag{3.1}$$

*dónde $\mu$ es una función dada con $|\mu(z)| < 1$ para casi todo $z \in \mathbb{C}$.*

**Definición 3.1.2.** *Una función $f$ se dice que es $\mu$-*cuasiregular *si es una función de $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ y es solución de la ecuación de Beltrami* (3.1).

**Definición 3.1.3.** *Una función $\phi$ se dice que es $\mu$-*cuasiconforme *si es un homeomorfismo perteneciente a $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ y es solución de la ecuación de Beltrami* (3.1).

**Definición 3.1.4.** *Una función $f$ se dice que es* débilmente cuasiregular *si es una función de $W^{1,q}_{loc}(\mathbb{C})$ para alguna $q > 1$ y cumple la desigualdad de distorsión*

$$\left|\overline{\partial} f\right| \leq k \left|\partial f\right|, \quad k < 1$$

*para casi toda $z \in \mathbb{C}$.*

**Definición 3.1.5.** *Dado un homeomorfismo $\phi$, diremos que es un homeomorfismo* normalizado *si cumple la condición*

$$\phi(0) = 0 \ \ y \ \ \phi(1) = 1. \tag{3.2}$$

*Así mismo, se llama* solución normalizada *de la ecuación de Beltrami* (3.1) *a toda aplicación $\mu$-cuasiconforme que satisfaga la condición* (3.2)*.*

**Definición 3.1.6.** *Dado $K \geq 1$, se dice que una función $\phi$ es $K$-cuasiconforme si $\phi$ pertenece a $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$, es biyectiva y satisface la condición de distorsión*

$$\max_{\alpha} |\partial_\alpha \phi| \leq K \min_{\alpha} |\partial_\alpha \phi|$$

*para casi toda $z \in \mathbb{C}$.*

Observemos un segundo que la condición de distorsión impuesta para las aplicaciones $K$-cuasiconformes es equivalente a

$$\left|\overline{\partial}\phi\right| \leq \frac{K-1}{K+1} \left|\partial\phi\right|$$

por lo que se puede asegurar que toda aplicación $\mu$-cuasiconforme con $\|\mu\|_\infty < 1$ es a su vez una aplicación $K$-cuasiconforme sin más que tomar

$$K = \frac{1 + \|\mu\|_\infty}{1 - \|\mu\|_\infty}.$$

Y recíprocamente, toda aplicación $K$-cuasiconforme es una aplicación $\mu$-cuasiconforme para cierta función medible $\mu$ tal que

$$\|\mu\|_\infty \leq \frac{K-1}{K+1} < 1,$$

concretamente la función $\mu$ viene expresada por

$$\mu(z) = \frac{\overline{\partial}\phi(z)}{\partial\phi(z)}.$$

La gran diferencia entre ambas definiciones radica en que mientras que dada una $K \geq 1$ pueden existir una multitud de aplicaciones $K$-cuasiconformes, dada una función $\mu$ existirá, módulo aplicaciones de Möbius, una única función $\mu$-cuasiconforme.

**Definición 3.1.7.** *Dado un homeomorfismo $\phi$, diremos que es un homeomorfismo* principal *si cumple la siguiente condición*

$$\lim_{|z|\to\infty} |\phi(z) - z| = 0. \tag{3.3}$$

*Así mismo, se llama* solución principal *de la ecuación de Beltrami* (3.1) *a toda aplicación $\mu$-cuasiconforme que satifaga la condición* (3.3)*.*

**Definición 3.1.8.** *Dada $\phi$ una función se define su* función de distorsión *como*

$$K(z) = \frac{|D\phi(z)|^2}{J(z,\phi)}.$$

Fijémonos que, en nuestro caso, la función de distorsión de toda solución de la ecuación de Beltrami 3.1 se puede expresar en términos de $\mu$ como sigue

$$\begin{aligned} K(z) &= \frac{|D\phi(z)|^2}{J(z,\phi)} = \frac{\left(|\partial\phi(z)| + \left|\overline{\partial}\phi(z)\right|\right)^2}{|\partial\phi(z)|^2 - \left|\overline{\partial}\phi(z)\right|^2} = \frac{|\partial\phi(z)| + \left|\overline{\partial}\phi(z)\right|}{|\partial\phi(z)| - \left|\overline{\partial}\phi(z)\right|} \\ &= \frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|} = 1 + \frac{2|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|}. \end{aligned}$$

**Proposición 3.1.1.** *[1]* (PAG. 79)*. El límite uniforme $f$ de aplicaciones cuasiconformes $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ normalizadas por las condiciones*

$$f_n(0) = 0 \ \ y \ \ f_n(1) = 1 \ \ \textit{para toda } n \in \mathbb{N},$$

*es un homeomorfismo cuasiconforme de la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$.*

**Definición 3.1.9.** *Diremos que un homemomorfismo $f$ satisface la condición $\mathcal{N}$ de Lusin si se cumple la siguiente implicación:*

$$|\,E\,| = 0 \Rightarrow |\,f\,(\,E\,)\,| = 0.$$

**Proposición 3.1.2.** *Un homeomorfismo $f$ cumple la condición $\mathcal{N}$ de Lusin si y sólo si $f$ preserva los conjuntos medibles Lebesgue.*

*Demostración.* Empezaremos con la implicación directa. Sea $A$ un conjunto medible, entonces existen dos conjuntos $B$ borel y $N$ de medida nula tal que $A = B \cup N$. Y al tratase $f$ de un homeomorfismo, se cumple que

$$f(A) = f(B) \cup f(N)$$

con $f(B)$ un borel y $f(N)$ un conjunto de medida nula por la condición $\mathcal{N}$. De aquí se sigue que $f(A)$ es medible. Con lo que terminamos la primera implicación.

Para la otra implicación, razonaremos por *(R.A.)* suponiendo que existe un conjunto $N$ de medida nula cuya imagen $f(N)$ tenga medida positiva. En tal caso, existe un conjunto no medible A tal que $A \subset f(N)$. Y definimos $H = f^{-1}(A) \cap N$. Entonces tendremos por un lado que

$$f(H) = A \cap f(N) = A \text{ no medible,}$$

y por otro que

$$H \subset N \text{ y } |N| = 0$$

lo que implica que $H$ es medible con medida nula. Por lo tanto, hemos construido un conjunto $H$ medible tal que $f(H) = A$ no medible, contradiciendo la tesis. □

**Definición 3.1.10.** *Diremos que un homeomorfismo $f$ satisface la condición $\mathcal{N}^{-1}$ de Lusin si se cumple la siguiente implicación:*

$$|E| = 0 \Rightarrow \left| f^{-1}(E) \right| = 0.$$

**Proposición 3.1.3.** *Un homeomorfismo $f$ cumple la condición $\mathcal{N}^{-1}$ de Lusion si para toda función medible $u$, la composición $u \circ f$ también es medible.*

*Demostración.* Primero, observemos que al tratarse $f$ de un homeomorfismo, entonces que $f$ cumpla la condición $\mathcal{N}^{-1}$ de Lusin es equivalente a que $f^{-1}$ cumpla la condición $\mathcal{N}$ de Lusin. Y por la Proposición 3.1.2, son equivalente que $f^{-1}$ envíe conjuntos medibles en medibles, ie, si $E$ es un conjunto medible, entonces $f^{-1}(E)$ es medible. Por lo que sólo habrá que probar que $f^{-1}$ conserva los conjuntos medibles.

Sea $E$ un conjunto medible, sabemos que $E$ es un conjunto medible si y sólo sí $\chi_E$ es una función medible. Definamos $u = \chi_E$, entonces por hipótesis $u \circ f$ es medible, y por construcción $(u \circ f) = \chi_{f^{-1}(E)}$ por lo que $f^{-1}(E)$ es un conjunto medible. □

## 3.2. El operador $I - \mu\mathcal{B}$ y el intervalo crítico.

Observemos que si tomamos una solución principal $\phi$ de

$$\overline{\partial}\phi(z) = \mu(z)\partial\phi(z) \qquad z \in \mathbb{C}$$

esta se puede escribir como $\phi(z) = z + \mathcal{C}h(z)$, y entonces sus derivadas parciales satisfacen

$$\partial\phi(z) = 1 + \mathcal{B}h(z)$$
$$\overline{\partial}\phi(z) = h(z).$$

Mediante estas relaciones, la ecuación de Beltrami, se convierte en la ecuación fundamental

$$(I - \mu\mathcal{B})h = \mu$$

lo que levanta nuestro interés en estudiar la invertibilidad del operador $I - \mu\mathcal{B}$. Si fuese tal el caso, entonces

$$h = (I - \mu\mathcal{B})^{-1}\mu.$$

Y la invertibilidad del operador nos permitirá transferir propiedades del coeficiente $\mu$ a la aplicación $h$ (y por ende a $\phi$). Por ello, nos es de vital importancia saber bajo que condiciones impuestas a $\mu$ se tendrá (o no) la invertibilidad del operador $I - \mu\mathcal{B}$ en un rango más o menos amplio de espacios $L^p(\mathbb{C})$ u otros.

Respecto a este estudio, hay, como ya habíamos enfatizado, dos aportaciones principales. Una es la de Astala [1] el cual no supone nada más que $\mu \in L^\infty(\mathbb{C})$ con soporte compacto. Y la otra es la de Iwaniec [8] para el caso de que $\mu \in VMO(\mathbb{C})$ en el cual nos adentraremos en breve en el Capítulo 4. Será el resultado de Astala el que daremos en esta sección, aunque primero puntualizaremos un par de resultados inmediatos facilmente deducibles mediante la serie de Neumann. Para saber más sobre cómo determinar el intervalo crítico, se recomienda la lectura del *Capítulo 14* de la referencia [1].

**Lema 3.2.1.** *Dado $A \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ con $\|A\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E})} < 1$, entonces el operador*

$$I_{\mathbb{E}} - A : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{E}$$

*es invertible.*

**Corolario 3.2.2.** *El operador*

$$I - \mu\mathcal{B} : L^2(\mathbb{C}) \mapsto L^2(\mathbb{C})$$

*es un operador invertible.*

**Definición 3.2.1.** ***Intervalo crítico:*** *Se sabe que la aplicación*

$$p \to \|\mathcal{B}\|_{L^p(\mathbb{C}) \mapsto L^p(\mathbb{C})}$$

*es una aplicación continua, y que* $\|\mathcal{B}\|_{L^2(\mathbb{C}) \mapsto L^2(\mathbb{C})} = 1$ *(véase [1], Pag 95). Por tanto, dado* $0 \leq k < 1$*, existirá todo un entorno de* $p = 2$ *para el cual todo operador* $I - \mu\mathcal{B}$ *con* $\|\mu\|_\infty \leq k$ *es un operador invertible de* $L^p(\mathbb{C})$ *con* $p$ *en dicho intervalo con cota dependiente sólo de* $p$ *y de* $k$*. Al mayor de todos estos intervalos se le conoce como* rango crítico *y lo denotaremos por* $(Q(k), P(k))$.

Puntualicemos que si $p$ es del rango crítico el operador $(I - \mu\mathcal{B})$ con $\|\mu\|_\infty \leq k$ es invertible, y por lo tanto su inverso, definido formalmente por la serie de Neumann

$$(I - \mu\mathcal{B})^{-1} = I + \mu\mathcal{B} + \mu\mathcal{B}\mu\mathcal{B} + \mu\mathcal{B}\mu\mathcal{B}\mu\mathcal{B} + ...$$

será un operador acotado de $L^p(\mathbb{C}) \mapsto L^p(\mathbb{C})$. Lo que nos asegura que

$$\| (I - \mu\mathcal{B})^{-1} \|_{L^p(\mathbb{C}) \mapsto L^p(\mathbb{C})} \leq C(k, p)$$

siempre y cuando $p$ pertenezca a $(Q(k), P(k))$.

**Teorema 3.2.3.** *[1] Para cada* $0 \leq k < 1$*, el* intervalo crítico *es*

$$p \in \left(1 + k, 1 + \frac{1}{k}\right) \equiv \left(\frac{2K}{K+1}, \frac{2K}{K-1}\right).$$

Este teorema, fue demostrado por K. Astala mediante su teorema de distorsión de área, argumentos con pesos de Muckenhuop y el Teorema de Factorización de Stoilow que veremos en la próxima sección. En particular, este teorema nos asegurará que la serie de Neumann que define al operador $(I - \mu\mathcal{B})^{-1}$, es convergente como serie de operadores de $L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C})$.

## 3.3. Teorema de la aplicación medible de Riemman.

Se sabe, que si la aplicación $\mu$ es de soporte compacto, entonces siempre existirá una solución principal, pero en caso de que $\mu$ no tenga soporte compacto, la solución principal podría no existir y hay que recurrir a las soluciones normalizadas para seguir encontrando homeomorfismos soluciones. Es el *Teorema de la aplicación de Riemman* el que nos asegurará la existencia de un homeomorfismo solución de la ecuación de Beltrami

$$\overline{\partial}\phi(z) = \mu(z)\,\partial\phi(z)\,,$$

para cualquier $\mu$ medible con $\|\mu\|_\infty = k < 1$. Para su demostración, necesitaremos resultados previos sobre existencia de soluciones de la ecuación de Beltrami no homogénea

$$\overline{\partial}f = \mu\partial f + \varphi$$

bajo ciertas condiciones sobre $\mu$ y $\varphi$. Para ello, nos basaremos en el libro [1].

**Teorema 3.3.1.** *Sean $\mu$ tal que $|\mu(z)| \leq k\,\chi_{\mathbb{D}_r}$ $k < 1$, $\varphi \in L^p(\mathbb{C})$ con soporte compacto y $p \in (Q(k), P(k))$, entonces la ecuación de Beltrami no homogénea*

$$\overline{\partial}f(z) \;=\; \mu(z)\,\partial f(z) \;+\; \varphi(z) \qquad \text{para casi todo } z \in \mathbb{C}$$

*admite una única solución $f$ tal que $D\,f \in L^p(\mathbb{C})$ y $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$. En particular, si $p > 2$, entonces tenemos que $f \in W^{1,p}(\mathbb{C})$.*

*Demostración.* Veamos primero la existencia. Como $p$ está en el rango crítico, tenemos que la función definida como $(I - \mu\mathcal{B})^{-1}\varphi$ pertenece a $L^p(\mathbb{C})$ y tiene soporte compacto. Por otro lado, si definimos

$$f = \mathcal{C}\left((I - \mu\mathcal{B})^{-1}\varphi\right),$$

entonces tendremos por un lado el comportamiento deseado en el infinito, y por el otro que

$$\overline{\partial}f = \overline{\partial}\mathcal{C}\,(I - \mu\mathcal{B})^{-1}\varphi = (I - \mu\mathcal{B})^{-1}\varphi \in L^p(\mathbb{C})$$
$$\partial f = \partial\mathcal{C}\,(I - \mu\mathcal{B})^{-1}\varphi = \mathcal{B}\,(I - \mu\mathcal{B})^{-1}\varphi \in L^p(\mathbb{C})\,.$$

Y si llamamos $\omega = (I - \mu\mathcal{B})^{-1}\varphi$ tenemos que

$$\overline{\partial}f = \omega = (I - \mu\mathcal{B})\,\omega + \mu\mathcal{B}\omega = \varphi + \mu\partial f.$$

Por lo que sigue que $f$ tiene derivadas en $L^p(\mathbb{C})$ y cumple la ecuación. Además si $p > 2$, al ser $f$ la imagen mediante Cauchy de una función de soporte compcato, por la Proposición 2.2.2 se asegura que $f$ pertenece a $W^{1,p}(\mathbb{C})$.

Para ver la unicidad sólo hay que observar que dadas dos soluciones $f_1, f_2$ entonces, $h = f_1 - f_2$ cumple la ecuación

$$(I - \mu\mathcal{B})\,\overline{\partial}h \,=\, \overline{\partial}h - \mu\partial h \,=\, 0.$$

Y como $(I - \mu\mathcal{B})$ es invertible, tiene nucleo trivial, es decir, $\overline{\partial}h = 0$ y haciendo Beurling tenemos que $\mathcal{B}\overline{\partial}h = \partial h = 0$. Por esto, afirmamos que $h$ es una constante, y por el comportamiento en el infinito que $h$ hereda de $f_1$ y $f_2$, podemos asegurar que dicha constante es cero. ☐

**Teorema 3.3.2.** *Dada $\mu$ tal que $|\mu(z)| \leq k\chi_{\mathbb{D}_R}$ con $0 \leq k < 1$ exite una única $\phi \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ que cumpla:*

$$\overline{\partial}\phi\,(z) = \mu\,(z)\,\partial\phi\,(z)$$

$$\lim_{|z|\to\infty} \phi\,(z) - z = 0.$$

*Además, $\phi \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$ para todo $2 \leq p < P\,(k)$.*

*Demostración.* Fijemos $2 \leq p < P\,(k)$. Aplicando el Teorema 3.3.1, con $\varphi = \mu$, obtendremos una única $f$ con $Df \in L^p(\mathbb{C})$ que es solución de

$$\overline{\partial}f \,=\, \mu\,\partial f \,+\, \mu$$

y además puede construirse como $f \,=\, \mathcal{C}\left(\,(\,I \,-\, \mu\,\mathcal{B}\,)^{-1}\,(\,\mu\,)\right)$, es decir la transformada de Cauchy de una función $L^p(\mathbb{C})$ con soporte compacto. Por otro lado, tomando $\phi\,(z) \,=\, z \,+\, f\,(z)$ tendremos que

$$\begin{cases} \phi \in L^p_{loc}\,(\mathbb{C}) \quad \text{por la Proposición 2.2.7,} \\ \lim_{|z|\to\infty} \phi\,(z) - z = 0 \\ \overline{\partial}\phi \,=\, \overline{\partial}f \,=\, \mu\partial f \,+\, \mu \,\in L^p(\mathbb{C}), \\ \partial\phi \,=\, 1 \,+\, \partial f \,\in L^p_{loc}(\mathbb{C}), \\ \phi \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C}). \end{cases}$$

Y además $\phi$ cumple la ecuación

$$\overline{\partial}\,\phi \,=\, \mu\,\partial\phi\,,$$

consiguiendo así la prueba de la existencia.

Para asegurar la unicidad, supongamos que tenemos otra solución $\phi_2(z) \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$. Si defino $f_2(z) = \phi_2(z) - z$, entonces $f_2$ cumple la ecuación

$$\overline{\partial} f = \mu\, \partial f + \mu,$$

y $Df_2 \in L^2(\mathbb{C})$. Por otro lado, si defino $h = f - f_2$, entonces tendremos que

$$(I - \mu\mathcal{B})\, \overline{\partial} h = 0.$$

Y al tratarse $\mathcal{B} : L^2(\mathbb{C}) \mapsto L^2(\mathbb{C})$ de una isometría, necesariamente

$$\partial h = \mathcal{B}\overline{\partial} h = 0.$$

Por lo que $h$ es una constante perteneciente a $L^2(\mathbb{C})$ y esa constante tiene que ser cero, y por tanto $f = f_2$ y $\phi = \phi_2$. $\square$

Observemos que de forma implicita, el Teorema 3.3.1 y el Teorema 3.3.2 nos dan la expresión constructiva de la *solución principal* $\phi = z + \mathcal{C}\left(\overline{\partial}\phi\right)$. Recordemos que si $f$ es la solución del Teorema 3.3.1 con $\varphi = 0$, entonces $\phi(z) = z + f(z)$ es solución del Teorema 3.3.2. Y además $f$ y $\phi$ cumplen que

$$\begin{cases} \overline{\partial} f = \mu + \mu\partial f, \\ \overline{\partial}\phi = \mu\partial\phi, \\ \partial f = \mathcal{B}\left(\overline{\partial} f\right), \\ \overline{\partial}\phi = \overline{\partial} f, \\ \partial\phi = 1 + \partial f. \end{cases}$$

Por lo que podemos asegurar que

$$\begin{aligned} \overline{\partial}\phi &= \overline{\partial} f = \mu + \mu\partial f = \mu + \mu\mathcal{B}\overline{\partial} f \\ &= \mu + \mu\mathcal{B}\overline{\partial}\phi = \mu + \mu\mathcal{B}\mu + \mu\mathcal{B}\mu\mathcal{B}\mu + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu\mathcal{B})^k(\mu). \end{aligned}$$

Ya que claramente la serie converge en $L^p(\mathbb{C})$ para todo $p \in (Q(k), P(k))$, podemos asegurar la igualdad de la segunda línea. Y además, de las expresiones anteriores puede deducirse que

$$\partial\phi = 1 + \mathcal{B}\overline{\partial}\phi$$

$$\phi(z) = z + \mathcal{C}\overline{\partial}\phi(z).$$

De donde sale la expresión para la solución principal.

**Lema 3.3.3.** *Sean* $|\mu_1|, |\mu_2| \leq k\chi_{\mathbb{D}_R}$ *con* $0 \leq k < 1$. *Y consideremos las soluciones principales* $\phi_1, \phi_2$ *de las ecuaciones de Beltrami*

$$\overline{\partial}\phi_i = \mu_i \partial \phi_i \quad con \;\; i = 1, 2.$$

*Entonces para todo par de números* $p, s$ *tales que* $2 \leq p < p \cdot s < P(k)$ *se tiene que*

$$\|\overline{\partial}\phi_1 - \overline{\partial}\phi_2\|_{L^p(\mathbb{C})} \leq C(p, s, k, R) \|\mu_1 - \mu_2\|_{L^{\frac{ps}{s-1}}(\mathbb{C})}.$$

*Demostración.* Observemos que por el Teorema 3.3.2, tenemos que $\overline{\partial}\phi_i = \mu_i + \mu_i \mathcal{B}\partial\phi_i$ para $i = 1, 2$. Entonces

$$\begin{aligned}\overline{\partial}\phi_1 - \overline{\partial}\phi_2 &= \mu_1 - \mu_2 + \mu_1 \mathcal{B}\overline{\partial}\phi_1 - \mu_2 \mathcal{B}\overline{\partial}\phi_2 \\ &= (\mu_1 - \mu_2)\chi_{\mathbb{D}_R} + (\mu_1 - \mu_2)\mathcal{B}\overline{\partial}\phi_1 + \mu_2 \mathcal{B}\left(\overline{\partial}\phi_1 - \overline{\partial}\phi_2\right),\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\overline{\partial}\phi_1 - \overline{\partial}\phi_2 = (I - \mu_2\mathcal{B})^{-1}\left[(\mu_1 - \mu_2)\left(\chi_{\mathbb{D}_R} + \mathcal{B}\overline{\partial}\phi_1\right)\right]$$

y así

$$\|\overline{\partial}\phi_1 - \overline{\partial}\phi_2\|^p_{L^p(\mathbb{C})} \leq \|\,(I - \mu_2\mathcal{B})^{-1}\,\|^p_{L^p(\mathbb{C})\mapsto L^p(\mathbb{C})}\|\,(\mu_1 - \mu_2)\left(\chi_{\mathbb{D}_R} + \mathcal{B}\overline{\partial}\phi_1\right)\|^p_{L^p(\mathbb{C})}.$$

Y gracias a la invertibilidad del operador $(I - \mu_2\mathcal{B})^{-1} : L^p(\mathbb{C}) \mapsto L^p(\mathbb{C})$ y a la desigualdad de Hölder en la norma de $L^p(\mathbb{C})$ tenemos que

$$\begin{aligned}\|\overline{\partial}\phi_1 - \overline{\partial}\phi_2\|^p_{L^p(\mathbb{C})} &\leq C(p, k)\left(\int |\mu_1 - \mu_2|^{\frac{ps}{s-1}}\right)^{\frac{s-1}{s}}\left(\int \left|\chi_{\mathbb{D}_R} + \mathcal{B}\overline{\partial}\phi_1\right|^{ps}\right)^{\frac{1}{s}} \\ &= C(p, k)\|\mu_1 - \mu_2\|^p_{L^{\frac{ps}{s-1}}(\mathbb{C})}\left(\int \left|\chi_{\mathbb{D}_R} + \mathcal{B}(I - \mu_1\mathcal{B})^{-1}\mu_1\right|^{ps}\right)^{\frac{1}{s}} \\ &= C(p, k, s, R)\|\mu_1 - \mu_2\|^p_{L^{\frac{ps}{s-1}}(\mathbb{C})}.\end{aligned}$$

□

**Lema 3.3.4.** *Sean* $\mu \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ *con* $\|\mu\|_\infty = k < 1$ *y* $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ *para algún* $p \in (2, P(k))$, *ambas funciones de soporte compacto. Y planteamos la ecuación diferencial*

$$\overline{\partial}f = \mu\partial f + \varphi.$$

*Entonces, la solución* $f$ *de la ecuación cumple que* $f \in W^{2,p}(\mathbb{C})$.

*Demostración.* Observemos que las hipótesis de este Teorema son un caso particular de las hipótesis del Teorema 3.3.1, por lo que aplicando éste, deducimos que $\exists!\ f \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ solución del problema planteado con $2 < p < P(k)$. Además si actuamos como lo hicimos en el Teorema 3.3.1 (con $2 < p < P(k)$) definiendo $\omega = \mathcal{C}(I - \mu\mathcal{B})^{-1}\varphi$, tendremos como en dicho teorema que

$$\begin{cases} \omega \in W^{1,p}(\mathbb{C}) \ \text{ por la Proposición 2.2.2,} \\ \overline{\partial} f = \omega, \\ \partial f = \mathcal{B}\omega. \end{cases}$$

Y como $\mathcal{B} : W^{1,p}(\mathbb{C}) \mapsto W^{1,p}(\mathbb{C})$ es invertible por la Proposición 2.2.4, tenemos que

$$f \in W^{1,p}(\mathbb{C}),\ \partial f \in W^{1,p}(\mathbb{C}) \quad \text{y} \quad \overline{\partial} f \in W^{1,p}(\mathbb{C}),$$

por lo que tenemos que efectivamente $f \in W^{2,p}(\mathbb{C})$. □

**Lema 3.3.5.** *Sean $\mu, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ con $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$, y $2 < p < P(k)$, y planteamos la ecuación diferencial*

$$\overline{\partial} f = \mu \partial f + \varphi.$$

*Entonces, la solución $f$ es de $C^\infty(\mathbb{C})$.*

*Demostración.* Definamos $\omega = \mathcal{C}(I - \mu\mathcal{B})^{-1}\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{C})$, y observemos que por el Lema 3.3.4 tenemos que

$$f \in W^{2,p}(\mathbb{C}).$$

Y por ser solución de la ecuación, para todo operador diferencial $D$ se tiene

$$\begin{aligned} D\overline{\partial} f &= \mu D \partial f + D\varphi + (D\mu)\,\partial f \qquad \text{o equivalentemente,} \\ \overline{\partial} D f &= \mu \partial D f + D\varphi + (D\mu)\,\mathcal{B}\omega \end{aligned}$$

donde trivialmente $D\varphi + (D\mu)\,\mathcal{B}\omega$ es de $W^{1,p}(\mathbb{C})$, por lo que podemos aplicarle a $Df$ el Lema 3.3.4 para concluir que $Df \in W^{2,p}(\mathbb{C})$ y por tanto $f \in W^{3,p}(\mathbb{C})$. Reiterando el razonamiento, se sigue que $f \in W^{k,p}(\mathbb{C})$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y por tanto que $f \in C^\infty(\mathbb{C})$. □

**Lema 3.3.6.** *Sea* $\mu \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ *con* $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$ *para todo* $z \in \mathbb{C}$*, y consideremos* $\phi \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ *la solución principal de*

$$\overline{\partial}\phi = \mu\partial\phi.$$

*Entonces,* $\phi \in C^\infty(\mathbb{C})$ *y además* $J\,(\,z\,,\,\phi\,) > 0$ *para todo* $z \in \mathbb{C}$.

*Demostración.* Gracias al Lema 3.3.5, podemos asegurar $\phi \in C^\infty(\mathbb{C})$ sin más que suponer $\varphi = 0$. Por tanto, sólo tendremos que asegurarnos que $J\,(\,z\,,\,\phi\,)$ sea distinto de cero. Para ello, consideremos la ecuación auxiliar

$$\overline{\partial}f = \mu\partial f + \partial\mu$$

que para $2 < p < P\,(k)$ tiene una única solución $f \in W^{1,p}(\mathbb{C}) \cap C^\infty(\mathbb{C})$ gracias a el Teorema 3.3.1 y el Lema 3.3.4. Además, como $f \in W^{1,p}(\mathbb{C}) \cap C^\infty$ con $f\,(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)$ cuando $z \to \infty$, se tiene que $e^f - 1 \in W^{1,p}(\mathbb{C})$, y de aquí se sigue que

$$\begin{aligned} e^f - 1 &= \mathcal{C}\left(\overline{\partial}\left(e^f - 1\right)\right) = \mathcal{C}\left(\mu\partial f e^f + \partial\mu e^f\right) \\ &= \mathcal{C}\left(\partial\left(\mu e^f\right)\right) = \mathcal{B}\left(\mu e^f\right), \end{aligned}$$

y por tanto

$$\mathcal{B}\left(\mu e^f\right) = e^f - 1. \tag{3.4}$$

Por otro lado, consideremos también la función auxiliar

$$F\,(\,z\,) \,=\, z \,+\, \mathcal{C}\left(\,\mu e^f\,\right)(\,z\,),$$

que al tratarse $\mu$ de una función de $C_0^\infty(\mathbb{C})$, por la Proposición 2.2.3, podemos asegurar que $F \in C^\infty(\mathbb{C})$. Además $F$ así definida cumple que

$$\overline{\partial}F \,=\, \mu e^f, \text{ y } \partial F \,=\, 1 + \mathcal{B}\left(\,\mu e^f\,\right) \,=\, e^f$$

dónde en la última igualdad hemos usado la equación (3.4). De aquí se deduce que $F$ es solución de $\overline{\partial}F = \mu\partial F$ y por la unicidad de solución del Teorema 3.3.2, aseguramos que $\phi \equiv F$. Y ya para terminar, observemos que

$$\begin{aligned} J\,(\,z\,,\,\phi\,) = J\,(\,z\,,\,F\,) &= |\partial F|^2 \,-\, \left|\overline{\partial}F\right|^2 \\ &= \left|e^{2f}\right|\left(\,1 \,-\, |\mu|^2\right) > 0 \text{ para toda } z \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

con lo que concluimos la demostración. $\square$

**Teorema 3.3.7.** *Sea* $\mu \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ *con* $\|\mu\|_\infty = k < 1$*, entonces la* solución principal $\phi \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ *de la ecuación de Beltrami*

$$\overline{\partial}\phi = \mu\partial\phi$$

*es un* $C^\infty$*-difeomorfismo de* la Esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$.

*Demostración.* Por el Teorema 3.3.6, ya tenemos que $\phi \in C^\infty(\mathbb{C})$ y $J(z, \phi) > 0$, lo que en particular nos dice que $\phi$ es un homeomorfismo local. Por lo que sólo nos queda ver que es también homeomorfismo global.

Como $\widehat{\mathbb{C}}$ es compacto, existe un recubrimiento finito por bolas de $\widehat{\mathbb{C}}$, y como $\phi$ es un homeomorfismo local, $\phi$ es inyectiva en cada una de dichas bolas. Por otro lado no es dificil probar que el conjunto de puntos con una única preimagen es un conjunto a la vez abierto y cerrado en $\widehat{\mathbb{C}}$. Por lo tanto, dicho conjunto debe ser vacío o $\widehat{\mathbb{C}}$ y como $\phi \in C^\infty(\mathbb{C})$ la opción de que el conjunto sea vacía queda descartada. □

**Teorema 3.3.8.** *Supongamos que tenemos una función* $f \in W^{1,q}_{loc}(\Omega)$ *para alguna* $q \in (Q(k), P(k))$ *y que satisface la desigualdad de distorsión*

$$\left|\overline{\partial} f(z)\right| \leq k\,|\partial f(z)|, \quad \textit{para casi todo } z \in \Omega.$$

*Entonces* $f \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ *para toda* $p \in (Q(k), P(k))$*, en particular* $f$ *es contínua y además, para toda funcióin* $\eta$ *Lipschitz con soporte compacto en* $\Omega$ *se cumple la desigualdad de Caccioppoli*

$$\|\eta Df\|_{L^p(\Omega)} \leq C(p,k)\,\|f\nabla\eta\|_{L^p(\Omega)}.$$

Aún teniendo ya las herramientas necesarias para ver la demostración del teorema, remitiremos al lector o bien al libro [1] o bien a la demostración del Teorema 4.2.1, ya que el argumento de la prueba es el básicamente el mismo en ambos teoremas, salvo que en el Teorema 4.2.1 podemos aplicar el resultado a toda $p$ perteneciente al intervalo $(1, \infty)$ y en este caso sólo podemos hacer valer la prueba para el intervalo crítico.

**Teorema 3.3.9.** ***Teorema de la aplicación medible de Riemann.***
*Sea* $|\mu| \leq k < 1$ *con soporte compacto y definida en* $\mathbb{C}$. *Entonces existe una única* solución principal $\phi$ *de la ecuación de Beltrami*

$$\overline{\partial}\phi\left(z\right) = \mu\left(z\right)\partial\phi\left(z\right) \quad \textit{para casi toda } z \in \mathbb{C}.$$

*Además la solución* $\phi$ *está en* $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$ *para todo* $p \in \left(Q\left(k\right), P\left(k\right)\right)$ *y es un homeomorfismo de* $\mathbb{C}$.

*Demostración.* Vamos a definir una aproximación a la identidad. Primero tomemos la función

$$\Psi\left(z\right) = C \exp\left(\frac{1}{\left|z\right|^2 - 1}\right)\chi_{\mathbb{D}}$$

con $C$ tal que $\int_{\mathbb{C}} \Psi = 1$. Y tomamos la aproximación como

$$\Psi_\epsilon\left(z\right) = \epsilon^2\Psi\left(\frac{z}{\epsilon}\right).$$

Si definimos $\mu_\epsilon\left(z\right) := \Psi_\epsilon * \mu\left(z\right)$, entonces $\mu_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{C})$ con $\|\mu_\epsilon\|_\infty \leq k$ para todo $\epsilon > 0$ y además $\mu_\epsilon \to \mu$ en todos los espacios $L^q(\mathbb{C})$ con $1 \leq q < \infty$ cuando $\epsilon \to 0$ por el Teorema de Lebesgue.

Ahora fijemos $p$ y $s$ tales que $2 \leq p < ps < P\left(k\right)$, obviamente $\mu_\epsilon \to \mu$ en $L^{\frac{ps}{s-1}}(\mathbb{C})$. Y definamos $\phi_\epsilon$ como la única solución principal de la ecuación

$$\overline{\partial}\phi_\epsilon\left(z\right) = \mu_\epsilon\left(z\right)\partial\phi_\epsilon\left(z\right),$$

que por el Teorema 3.3.7, cada $\phi_\epsilon$ es un $C^\infty$-difeomorfismo de $\widehat{\mathbb{C}}$.

Del Lema 3.3.3 se sigue que

$$\|\overline{\partial}\phi_\epsilon - \overline{\partial}\phi\|_{L^p(\mathbb{C})} \leq C(p,s,k,R)\|\mu_\epsilon - \mu\|_{L^{\frac{ps}{s-1}}(\mathbb{C})} \to 0$$

con $R$ el radio de un disco centrado en el origen que contenga al soporte de $\mu$.

Por otro lado, de la expresión que tenemos para la imagen de la $\overline{\partial}$-derivada mediante Beurling de una solución principal, tenemos que

$$\begin{aligned}\|\partial\phi_\epsilon - \partial\phi\|_{L^p(\mathbb{C})} &\leq \left\|1 + \mathcal{B}\overline{\partial}\phi_\epsilon - 1 - \mathcal{B}\overline{\partial}\phi\right\|_{L^p(\mathbb{C})} = \left\|\mathcal{B}\overline{\partial}\phi_\epsilon - \mathcal{B}\overline{\partial}\phi\right\|_{L^p(\mathbb{C})} \\ &\leq \|\mathcal{B}\|_{L^p(\mathbb{C})\mapsto L^p(\mathbb{C})}\left\|\overline{\partial}\phi_\epsilon - \overline{\partial}\phi\right\|_{L^p(\mathbb{C})} \to 0.\end{aligned}$$

Por lo que tenemos que $\phi_\epsilon$ y $\phi$ son las transformadas de Cauchy de sus $\overline{\partial}$-derivadas, y por lo tanto

$$\begin{aligned}\phi_\epsilon - \phi &= \mathcal{C}\left(\overline{\partial}\phi_\epsilon - \overline{\partial}\phi\right)(z) = \mathcal{C}\left(\mu_\epsilon \partial\phi_\epsilon - \mu\partial\phi\right)(z)\\ &= \mathcal{C}\left(\left(\mu_\epsilon - \mu\right)\partial\phi_\epsilon\right)(z) + \mathcal{C}\left(\mu\left(\partial\phi_\epsilon - \partial\phi\right)\right)(z) \to 0.\end{aligned}$$

Donnde la convergencia se tiene por la Proposición 2.2.7, que nos asegura que es convergencia uniforme en $\mathbb{C}$ ya que $\overline{\partial}\phi_\epsilon = \mu_\epsilon\partial\phi_\epsilon$ y $\overline{\partial}\phi = \mu\partial\phi$ de dónde tenemos el soporte compacto. Por esto, tenemos que $\phi$ es el límite de $\phi_\epsilon$, en particular es el límite de la sucesión de homoeomorfismos cuasiconformes y por la Proposición 3.1.1, aseguramos que $\phi$ es efectivamente un homeomorfismo. □

**Teorema 3.3.10.** *Sea $\mu$ con $\|\mu\|_\infty = k < 1$ para toda $z \in \mathbb{C}$, entonces existe una única función $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ homoeomorfismo quasiconforme y solución de la ecuación del Beltrami*

$$\overline{\partial}\phi = \mu\partial\phi$$

*normalizada con las condiciones*

$$\phi(0) = 0, \;\; \phi(1) = 1, \;\; y \;\; \phi(\infty) = \infty.$$

Este teorema no lo demostraremos ya que nuestro interés está centrado en el caso de $\mu$ con soporte compacto.

## 3.4. La Factorización de Stoilow.

El teorema de factorización de Stoilow será la herramienta que nos permitirá clasificar todas las soluciones de la ecuación de Beltrami con cierta regularidad. Estas soluciones, se buscarán entre las llamadas funciones *débilmente causiregulares.*

Este teorema usa resultados de topología que atestiguan que toda aplicación abierta y discreta $h$ es topologicamente equivalente a una función analítica. Es decir, $h = g \circ f$ con $f$ un homeomorfismo del plano y $g$ un holomorphismo.

**Teorema 3.4.1.** ***Factorización de Stoilow*** *Sea $\phi : \Omega \to \Omega'$ un homeomorfismo solución de la ecuación de Beltrami*

$$\overline{\partial}\phi = \mu\partial\phi, \qquad \phi \in W^{1,1}_{loc}(\Omega),$$

*con $|\mu| \leq k < 1$ para casi todo $z \in \Omega$. Y supongamos que $g \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ es otra solución de la ecuación de Beltrami, entonces existe un holomorfismo $\Phi : \Omega' \to \mathbb{C}$ tal que*

$$g(z) = \Phi(\phi(z)), \qquad \text{para } z \in \Omega.$$

*Y recíprocamente, si $\Phi$ es un holomorfismo en $\Omega'$ entonces $\Phi \circ \phi$ es una $W^{1,2}_{loc}(\Omega)$-solución de la ecuación de Beltrami.*

**Corolario 3.4.2.** *Si $f$ es una aplicación cuasiregular definida en un subdominio $\Omega \subset \mathbb{C}$, entonces*

1. *$f$ es o bien abierta y discreta, o bien constante.*

2. *$f$ es Hölder-continua con exponente $\alpha = \frac{1-k}{1+k} = \frac{1}{K}$.*

3. *$f$ cumple las condiciones $\mathcal{N}$ y $\mathcal{N}^{-1}$.*

4. *$f$ es diferenciable con Jacobiano no nulo en casi todo punto.*

**Corolario 3.4.3.** *Sea $f$ cuasiregular y definida en un dominio simple $\Omega$, entonces $f = \Phi \circ \phi$ con $\Phi$ holomorfa en $\Omega$ y $\phi$ cuasiconforme que puede tomarse bien $\phi : \Omega \mapsto \Omega$, o bien, $\phi : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$.*

# Capítulo 4

# Resultados para $\mu \in VMO(\mathbb{C})$.

## 4.1. Mejora del intervalo crítico.

Una de las limitaciones de la resolubilidad de la ecuación de Beltrami en $L^p(\mathbb{C})$ consiste en que el rango de valores admisibles para $p$ depende de la elipticidad. Concretamente, hemos mencionado antes que si $\mu \in L^\infty(\mathbb{C})$ y $\|\mu\|_\infty = k < 1$ entonces el operador

$$I - \mu\mathcal{B} : L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C})$$

es invertible siempre y cuando $1 + k < p < 1 + \frac{1}{k}$. Además, este rango es óptimo. Veremos en este capítulo que, sin embargo, hipótesis adicionales sobre $\mu$ pueden mejorar sensiblemente el rango. La idea fundamental es de T. Iwaniec [8], y está basada en argumentos de compacidad de commutadores e invertibilidad de operadores de Fredholm.

**Lema 4.1.1** (Desigualdad Isoperimétrica, [1]). *Sea $\Omega$ un dominio de Jordan acotado, tal que $\partial\Omega$ es rectificable. Entonces se cumple que*

$$\mathcal{H}^2(\Omega) \leq \frac{1}{4\pi}(\mathcal{H}^1(\partial\Omega))^2$$

*dónde $\mathcal{H}^2$ es la medida de área y $\mathcal{H}^1$ la medida de longitud.*

**Lema 4.1.2.** *[16] Sea una función $g$ perteneciente a $W^{1,1}_{loc}(\mathbb{C})$, donde su Jacobiano $J(\,\cdot\,,\,g\,)$, y su función de distorsión $K(\,\cdot\,,\,g\,)$ cumplen que*

$$\begin{cases} J(\,\cdot\,,\,g\,) \in L^1_{loc}(\mathbb{C}) \\ K(\,\cdot\,,\,g\,) \in L^1_{loc}(\mathbb{C}) \\ |\,Dg\,(\,\cdot\,)\,|^2 \le K(\,\cdot\,,\,g\,)\;J(\,\cdot\,,\,g\,) \quad \textit{en casi todo punto.} \end{cases}$$

*Entonces la función $g$ o bien es constante, o bien es una función discreta y abierta.*

**Teorema 4.1.3.** *[7],[8]. Supongamos que $g$ es localmente integrable, perteneciente a $\dot{W}^{1,p}(\mathbb{C})$ con $p > 2$ y tal que su función de distorsión $K(z,g)$, es finita en casi todo punto. Supongamos, además, que*

$$\frac{1}{\pi R^2}\int_{\mathbb{D}_R} K(z,g) \le K_\infty, \qquad \textit{para toda } R > R_0 > 1$$

*con $R_0$ suficientemente grande, y que $J(\cdot,g)$ es localmente integrable y además pertenece a $L^q(\mathbb{C})$ para alguna $1 < q \le \frac{\mathcal{K}_\infty}{\mathcal{K}_\infty - 1}$. Entonces $g$ es constante.*

*Demostración.* Primero observemos que dadas las hipótesis sobre $g$, $K(\cdot,g)$ y $J(\cdot,g)$ podemos asegurar que $g$ es una función o bien discreta y abierta, o bien constante por el Lema 4.1.2. Por tanto, supondremos que $g$ no es constante. Y además, cómo $g$ está en $\dot{W}^{1,p}(\mathbb{C})$ con $p > 2$, en particular $g$ es una función continua y como ya habíamos indicado, también es abierta, por tanto $g$ cumple que

$$g(\partial E) \equiv \partial\left(g(E)\right), \quad \text{para todo conjunto } E \subset \mathbb{C}.$$

Para simplificar, denotaremos $J := J(z,g)$ y $K := K(z,g)$.
Usando el Lema 4.1.1 (con $\Omega = g(\mathbb{D}_t)$) obtendremos que

$$|g(\mathbb{D}_t)| \le \frac{1}{4\pi}|\partial(g(\mathbb{D}_t))|^2 = \frac{1}{4\pi}|g(\partial\mathbb{D}_t)|^2$$

que en términos del Jacobiano y la diferencial queda

$$\int_{\mathbb{D}_t} J(z,g)\,dA(z) \le \frac{1}{4\pi}\left(\int_{\partial\mathbb{D}_t} |Dg|\,|dz|\right)^2$$

y como $|\mathbb{D}_t| = \pi t^2$ y $|\partial\mathbb{D}_t|^2 = 4\pi^2 t^2$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbb{D}_t|}\int_{\mathbb{D}_t} J(z,g)\,dA(z) &\le \left(\frac{1}{|\partial\mathbb{D}_t|}\int_{\partial\mathbb{D}_t} |Dg|\,|dz|\right)^2 \\ &\le \left(\frac{1}{|\partial\mathbb{D}_t|}\int_{\partial D_t} \frac{Dg}{K}\,|dz|\right)\left(\frac{1}{|\partial\mathbb{D}_t|}\int_{\partial D_t} K\,|dz|\right) \\ &= \left(\frac{1}{|\partial\mathbb{D}_t|}\int_{\partial\mathbb{D}_t} J\,|dz|\right)\left(\frac{1}{|\partial\mathbb{D}_t|}\int_{\partial\mathbb{D}_t} K\,|dz|\right). \end{aligned}$$

De aquí, deducimos que

$$\frac{1}{|\mathbb{D}_t|}\int_{\mathbb{D}_t} J\,dA(z) \leq \left(\frac{1}{|\partial\mathbb{D}_t|}\int_{\partial\mathbb{D}_t} J\,|dz|\right)\left(\frac{1}{\partial\mathbb{D}_t}\int_{\partial\mathbb{D}_t} K\,|dz|\right). \tag{4.1}$$

Definamos, como hemos visto en (4.1)

$$h(t) := \frac{1}{\partial\mathbb{D}_t}\int_{\partial\mathbb{D}_t} K\,|dz| \quad \text{y} \quad \phi(t) := \int_{\mathbb{D}_t} J(z,g)\,dA(z) = \int_{\mathbb{D}_t} J\,dA(z).$$

y observemos que

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\phi(t+\epsilon)-\phi(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left(\int_{\mathbb{D}_{t+\epsilon}} J\,dA(z) - \int_{\mathbb{D}_t} J\,dA(z)\right) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\int_{\mathbb{D}_{t+\epsilon}\setminus\mathbb{D}_t} J\,dA(z) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\int_t^{t+\epsilon}\int_0^{2\pi} J(re^{i\theta})r\,d\theta\,dr \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\int_0^{2\pi}\left(\int_t^{t+\epsilon} rJ(re^{i\theta})dr\right)d\theta = \int_0^{2\pi} J(te^{i\theta})td\theta = \int_{\partial\mathbb{D}_t} J(z,g)\,|dz|.
\end{aligned}$$

Luego, reescribiendo (4.1) obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\mathbb{D}_t|}\phi(t) \leq \frac{1}{|\partial\mathbb{D}_t|}\phi'(t)h(t) \quad &\Rightarrow \quad \phi(t) \leq \frac{|\mathbb{D}_t|}{|\partial\mathbb{D}_t|}\phi'(t)h(t) \\
&\Rightarrow \quad \phi(t) \leq \frac{t}{2}\phi'(t)h(t)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Probamos a continuación que

$$\phi(t) = o(t^{\frac{2}{K_\infty}}) \text{ cuando } t\to\infty. \tag{4.3}$$

Observemos que $\forall E \subset \mathbb{D}_t$ se cumple que

$$\begin{aligned}
\phi(t) &:= \int_{\mathbb{D}_t} J\,dA(z) = \int_{\mathbb{D}_t\setminus E} J\,dA(z) + \int_E J\,dA(z) \leq \\
&\leq |\mathbb{D}_t\setminus E|^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{\mathbb{D}_t\setminus E} J^q\,dA(z)\right)^{\frac{1}{q}} + |E|^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_E J^q\,dA(z)\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

de donde se tiene que

$$\frac{\phi(t)}{|\mathbb{D}_t|^{1-\frac{1}{q}}} \leq \left(\frac{|\mathbb{D}_t\setminus E|}{|\mathbb{D}_t|}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{\mathbb{D}_t\setminus E} J^q\,dA(z)\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|E|}{|\mathbb{D}_t|}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_E J^q\,dA(z)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ahora tomamos $\limsup_{t\to\infty}$, y tenemos en cuenta que por hipótesis $J \in L^q(\mathbb{C})$. Obtenemos:

$$\limsup_{t\to\infty}\phi(t)t^{\frac{2}{q}-2} \leq \pi^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{\mathbb{C}\setminus E} J^q\,dA(z)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Por otro lado

$$1 < q \leq \frac{K_\infty}{K_\infty - 1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{2}{K_\infty} \geq 2 - \frac{2}{q} > 0 \Leftrightarrow$$

de modo que

$$t^{\frac{2}{K_\infty}} \geq t^{2-\frac{2}{q}} > 1$$

lo que concluye la demostración de (4.3) ya que el conjunto $E$ puede tomarse arbitraio.

Ahora, procedemos a definir una nueva variable y dos nuevas funciones, y veremos como quedan las fórmulas (4.2),(4.3), en cuestión de estas definiciones.

$$s := t^2 \quad , \quad H(t^2) := \frac{h(t)}{K_\infty} \quad , \quad \phi(t) := (\Psi(t^2))^{\frac{1}{K_\infty}}.$$

(4.2) se reescribe como

$$\Psi(s) \leq s\Psi'(s)H(s) \tag{4.4}$$

y (4.3) se reescribe como

$$\limsup_{s\to\infty} \frac{\Psi(s)}{s} \leq \pi^{K_\infty - \frac{K_\infty}{q}} \left( \int_{\mathbb{C}\setminus E} J^q \, dA(z) \right)^{\frac{K_\infty}{q}} \tag{4.5}$$

de dónde se deduce que: $\Psi(s) = o(s)$ cuando $s \to \infty$.

Trabajemos ahora con la hipótesis sobre $K(z, f)$ ie,

$$\frac{1}{\pi R^2} \int_{\mathbb{D}_R} K(z, g) dz \leq K_\infty \quad \forall R > R_0 > 1$$

para $R_0$ suficientemente grande. Se tiene

$$\begin{aligned} K_\infty &\geq \frac{1}{\pi t^2} \int_{\mathbb{D}_t} K(z, g) dz = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \left( \int_0^{2\pi} tK d\theta \right) dt = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \left( \int_{\partial \mathbb{D}_t} K \, |dz| \right) dt \doteq \\ &\doteq \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r 2\pi t h(t) dt = \frac{2}{r^2} \int_0^{r^2} h(\sqrt{u}) du = \frac{2}{s} \int_0^s K_\infty H(u) du \geq \\ &\geq \frac{1}{s} \int_0^s K_\infty H(u) du, \end{aligned}$$

obteniendo por tanto

$$1 \geq \frac{1}{s} \int_0^s H(u) du \quad \forall s > 0. \tag{4.6}$$

Por otro lado $\phi(t)$ es absolutamente continua, por tanto $\Psi(s)$ también y gracias a (4.4) tendremos que:

$$\frac{\Psi'(s)}{\Psi(s)} \geq \frac{1}{sH(s)} \Rightarrow \log(\Psi(s)) - \log(\Psi(a)) \geq \int_a^s \frac{du}{uH(u)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Psi(a) \leq \Psi(s) e^{-\int_a^s \frac{du}{uH(u)}} \;\; \forall s > 0. \tag{4.7}$$

Por tanto, si conseguimos probar que $\int_a^s \frac{du}{uH(u)} \geq \log(s) - C(a)$ tendríamos la demostración ya que (4.7) se traduce como

$$\Psi(a) \leq C(a)\frac{\Psi(s)}{s} \qquad \forall s > 0$$

y tomando $\limsup_{s\to\infty}$, por (4.5), tenemos

$$\Psi(a) \equiv 0 \;\; \forall a > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \phi(a) \equiv 0 \;\; \forall a > 0$$

y de la definición de $\phi(t)$ sale la demostración de que $g$ es constante.

Procedamos por tanto, a probar que efectivamente $\int_a^s \frac{du}{uH(u)} \geq \log(s) - C(a)$.

Definamos $G(s) := \int_a^s H(u)du$. Por (4.6) tenemos:

$$1 \geq \frac{1}{s}\int_a^s H(u)du \;\; \forall s > 1 \Rightarrow 0 \leq G(s) \leq s \;\; \forall s > 1$$

Y de la desigualdad genérica $H + \frac{1}{H} \geq 2$ tenemos que:

$$\frac{H}{u} + \frac{1}{uH} \geq \frac{2}{u} \Rightarrow \frac{1}{uH} \geq \frac{2}{u} - \frac{H}{u}$$

Por lo tanto

$$\int_a^s \frac{du}{uH(u)} \geq 2\int_a^s \frac{du}{u} - \int_a^s \frac{H(u)du}{u} = 2\,\log\left(\frac{s}{a}\right) - \frac{G(s)}{s} - \int_a^s \frac{G(u)\,du}{u^2} \geq$$
$$\geq 2\,\log\left(\frac{s}{a}\right) - 1 - \int_a^s \frac{du}{u} = \log(s) - (1 + \log a)$$

como queríamos demostrar. □

En este teorema, se pueden relajar las hipótesis para conseguir el mismo resultado en un marco más general. Para verlo se recomiendan las referencias [7] y [8].

**Teorema 4.1.4.** *Dada $\mu \in VMO(\mathbb{C})$ con $\|\mu\|_\infty = k < 1$, entonces el operador*

$$I - \mu\mathcal{B} : L^p(\mathbb{C}) \mapsto L^p(\mathbb{C})$$

*es un operador de Fredholm, con* $\operatorname{Ind}(I - \mu\mathcal{B}) = 0$ *para todo $p \in (1, \infty)$.*

*Demostración.* Primero recordemos que la Proposición 2.2.5 nos asegura que $\exists\, m \in \mathbb{N}$ para el cuál se tiene $\|\mu^m \mathcal{B}^m\|_{L^p(\mathbb{C}) \mapsto L^p(\mathbb{C})} < 1$. Esto es debido a que

$$\begin{aligned} \|\mu^n \mathcal{B}^n\|_{L^p(\mathbb{C}) \mapsto L^p(\mathbb{C})} &\leq \|\mu^n\|_{L^\infty(\mathbb{C})} \|\mathcal{B}^n\|_{L^p(\mathbb{C}) \mapsto L^p(\mathbb{C})} \leq \|\mu\|^n_{L^\infty(\mathbb{C})} \|\mathcal{B}\|^n_{L^p(\mathbb{C}) \mapsto L^p(\mathbb{C})} \\ &\leq k^n n^2 \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty. \end{aligned}$$

Con ésto, por el Lema 3.2.1 se deduce que $I - \mu^m \mathcal{B}^m$ es invertible en $L^p(\mathbb{C})$.

Por otro lado, definiendo

$$P_m := \sum_{n=0}^{n=m-1} (\mu \mathcal{B})^n$$

obtendremos que:

$$P_m \left(I - \mu \mathcal{B}\right) = \left(I - \mu \mathcal{B}\right) P_m = I - (\mu \mathcal{B})^m = \left(I - \mu^m \mathcal{B}^m\right) + \left(\mu^m \mathcal{B}^m - (\mu \mathcal{B})^m\right),$$

donde el primer sumando es un operador invertible en $L^p(\mathbb{C})$. Sólo falta ver que $\mu^m \mathcal{B}^m - (\mu \mathcal{B})^m$ es un operador compacto.

Recordemos que el Teorema 2.2.9. nos dice que $\mathcal{B}\mu = \mu \mathcal{B} + K$ con $K$ un operador compacto. Por tanto

$$\begin{aligned} (\mu \mathcal{B})^m &= \mu \mathcal{B} \mu \mathcal{B} ... \mu \mathcal{B} \mu \mathcal{B} = \mu(\mu \mathcal{B} + K) \mathcal{B} ... \mu \mathcal{B} \mu \mathcal{B} = \\ &= \mu \mu \mathcal{B} \mathcal{B} ... \mu \mathcal{B} \mu \mathcal{B} + \mu K \mathcal{B} ... \mu \mathcal{B} \mu \mathcal{B} \end{aligned}$$

dónde el último sumando es un operador compacto (ya que $K$ lo es). Por tanto, podemos asegurar que permutar el orden de $\mu$ y $\mathcal{B}$ puede hacerse a costa de un operador compacto. Y como $m \in \mathbb{N}$, sólo hace falta una cantidad finita de permutaciones para que partiendo de $(\mu \mathcal{B})^m$ se obtenga $\mu^m \mathcal{B}^m + \widehat{K}$, con $\widehat{K}$ la suma de todos y cada uno de los operadores compactos que genera cada permutación. Y cómo el número de permutaciones puede tomarse finito, $\widehat{K}$ será un operador compacto. En definitiva,

$$\mu^m \mathcal{B}^m - (\mu \mathcal{B})^m = \mu^m \mathcal{B}^m - \mu^m \mathcal{B}^m - \widehat{K} = \widehat{K}$$

con $\widehat{K}$ un operador compacto. El valor nulo del índice se deduce de su invarianza topológica, dado que se tiene una homotopía

$$t \mapsto I - t\mu \mathcal{B}, t \in [0, 1]$$

entre $I$ e $I - \mu \mathcal{B}$. $\square$

**Teorema 4.1.5.** *Sea $\mu \in VMO(\widehat{C})$ con $\|\mu\|_\infty = k < 1$. Entonces, el operador $I - \mu\mathcal{B}$ es invertible en $L^p(\mathbb{C})$ si $p \geq 2$.*

*Demostración.* Puntualicemos antes de nada dos hechos. El primero es que, dado que $I - \mu\mathcal{B}$ es un operador Fredholm con índice cero, gracias a la Proposición 2.2.11 tendremos que el operador es invertible sin más que demostrar que es inyectivo. En segundo lugar, si $p = 2$ entonces la inyectividad es immediata. En efecto, y dado que $\|\mathcal{B}\|_{L^2(\mathbb{C})} = 1$, se tiene que $\|\mu\mathcal{B}\|_{L^2(\mathbb{C})\mapsto L^2(\mathbb{C})} \leq k < 1$ y gracias a la Proposición 3.2.1 se deduce que $I - \mu B$ es inyectivo en $L^2(\mathbb{C})$. Así pues, supondremos de ahora en adelante que $p > 2$.

Veremos que, dada una función $\Psi \in L^p(\mathbb{C})$ tal que $(I - \mu\mathcal{B})\Psi = 0$, entonces $f := \mathcal{C}\Psi$ resuelve la ecuación de Beltrami

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - \mu(z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \tag{4.8}$$

e intentaremos aplicar Teorema 4.1.3 para deducir que $f$ es constante. Ello concluye la demostración, dado que $\Psi = \overline{\partial} f$ y por lo tanto $\Psi = 0$.

Veamos primero que

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\pi R^2} \int_{\mathbb{D}(0,R)} |\mu(z) - \mu(\infty)| = 0. \tag{4.9}$$

Sean $R$ y $\epsilon > 0$ fijados y $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ tal que $\|\mu - \varphi\|_* < \epsilon$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi R^2}\int_{\mathbb{D}_R} &|\mu(z) - \mu(\infty)| \leq \\
&\leq \frac{1}{\pi R^2}\int_{\mathbb{D}_R} \Big|(\mu-\varphi) - (\mu-\varphi)_{\mathbb{D}_R}\Big| + \frac{1}{\pi R^2}\int_{\mathbb{D}_R} (\,|\varphi - \varphi_{\mathbb{D}_R}| + |\mu_{\mathbb{D}_R} - \mu(\infty)|\,) = \\
&\leq \|\mu - \varphi\|_* + |\mu_{\mathbb{D}_R} - \mu(\infty)| + \frac{1}{\pi R^2}\int_{\mathbb{D}_R} |\varphi - \varphi_{\mathbb{D}_R}| \\
&\leq \epsilon + |\mu_{\mathbb{D}_R} - \mu(\infty)| + \frac{1}{\pi R^2}\int_{\mathbb{D}_R} |\varphi - \varphi_{\mathbb{D}_R}|\,.
\end{aligned}$$

Observemos que el segundo sumando converge a 0 si $R \to \infty$, por definición de $\mu(\infty)$. Finalmente, la integral también converge a 0 cuando $R \to \infty$ dado que $\varphi \in VMO$. Luego

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{\pi R^2}\int_{\mathbb{D}_R} |\mu(z) - \mu(\infty)| \leq \epsilon,$$

lo que concluye la demostración de (4.9). Por otro lado,

$$\begin{aligned}|\mu(\infty)| &= \left|\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi R^2}\int_{\mathbb{D}(0,R)}\mu(z)dz\right| \leq \\ &\leq \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi R^2}\int_{\mathbb{D}(0,R)}|\mu(z)|dz \leq \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi R^2}\int_{\mathbb{D}(0,R)}k\,dz = k\end{aligned}$$

Sea ahora $f$ una solución de (4.8) con $\overline{\partial}f, \partial f \in L^p(\mathbb{C})$, y definamos

$$\begin{aligned}\phi(z) &= z - \mu(\infty)\overline{z},\\ g(z) &= (f\circ\phi)(z).\end{aligned}$$

Claramente, $\phi$ es un homeomorfismo $C^\infty(\mathbb{C})$ que cumple $\phi(\mathbb{D}_R) \subset \mathbb{D}_{2R}$ para todo $R$. Por hipótesis, $\overline{\partial}f, \partial f \in L^p(\mathbb{C})$, por tanto, $\nabla g \in L^p(\mathbb{C})$ y por la regla de la cadena se sigue que

$$\begin{aligned}\overline{\partial}g(z) &= \partial f(\phi(z))\,\overline{\partial}\,\phi(z) + \overline{\partial}f(\phi(z))\,\overline{\partial\phi(z)} = \overline{\partial}f(\phi(z)) - \mu(\infty)\partial f(\phi(z)) = \\ &= \partial f(\phi(z))\,\left[(\mu\circ\phi)(z) - \mu(\infty)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial g(z) &= \partial f(\phi(z))\;\partial\phi(z) + \overline{\partial}f(\phi(z))\;\partial\overline{\phi}(z) = \partial f(\phi(z)) - \overline{\mu(\infty)}\,\overline{\partial}f(\phi(z)) = \\ &= \partial f(\phi(z))\,\left[1 - \overline{\mu(\infty)}\,(\mu\circ\phi)(z)\right]\end{aligned}$$

y por tanto $g$ cumple la ecuación de Beltrami

$$\overline{\partial}g(z) = \widehat{\mu}(z)\,\partial g(z)$$

con

$$\widehat{\mu}(z) = \frac{(\mu\circ\phi)(z) - \mu(\infty)}{1 - \overline{\mu(\infty)}(\mu\circ\phi)(z)}.$$

Nótese que al tratarse de una transdormación de Möbius, entonces $\|\widehat{\mu}(z)\|_\infty = \widehat{k} < 1$ y que además $\widehat{\mu}(\infty) = 0$ ya que

$$\begin{aligned}|\widehat{\mu}(\infty)| &\leq \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi R^2}\int_{\mathbb{D}_R}|\widehat{\mu}(z)|\;dA(z) = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi R^2}\int_{\mathbb{D}_R}\left|\frac{(\mu o\phi)(z) - \mu(\infty)}{1 - \overline{\mu(\infty)}(\mu o\phi)(z)}\right|\,dA(z)\\ &\leq \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi R^2}\frac{1}{1-k^2}\int_{\mathbb{D}_R}|(\mu\circ\phi)(z) - \mu(\infty)|\;dA(z)\\ &\leq \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi R^2}\frac{1}{(1-k^2)^2}\int_{\phi(\mathbb{D}_R)}|\mu(z) - \mu(\infty)|\;dA(z)\\ &\leq \lim_{2R\to\infty}\frac{4}{\pi(2R)^2}\frac{1}{(1-k^2)^2}\int_{\mathbb{D}_{2R}}|\mu(z) - \mu(\infty)|\;dA(z) = 0.\end{aligned}$$

Vamos ahora que $g$ cumple las condiciones del Teorema 4.1.3. Por un lado,

$$\begin{aligned} K(\cdot, g) &:= \frac{|Dg(\cdot)|^2}{J(\cdot, g)} = \frac{\left(|\partial g(\cdot)| + |\overline{\partial} g(\cdot)|\right)^2}{|\partial g(\cdot)|^2 - \left|\overline{\partial} g(\cdot)\right|^2} = \frac{1 + |\widehat{\mu}(\cdot)|}{1 - |\widehat{\mu}(\cdot)|} = 1 + \frac{2\widehat{\mu}(\cdot)}{1 - \widehat{\mu}(\cdot)} \\ &\leq 1 + \frac{2}{1 - \widehat{k}} \widehat{\mu}(\cdot) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{\pi R^2} \int_{\mathbb{D}(0,R)} K(z, g) dz = 1.$$

Por otro lado, sabemos que $J(\cdot, g) \in L^q(\mathbb{C}), 1 < q = \frac{p}{2} < \infty$ por construcción. Luego, podemos aplicar el Teorema 4.1.3 y deducir que $g$ es constante, con lo que acabamos la demostración. $\square$

**Teorema 4.1.6.** *Supongamos que $\mu \in VMO(\widehat{\mathbb{C}})$ y que $\|\mu\|_\infty < 1$. Entonces los operadores*

$$I - \mu\mathcal{B} \ \ e \ \ I - \mathcal{B}\mu,$$

*son operadores invertibles en $L^p(\mathbb{C})$ para todo $p \in (1, \infty)$.*

*Demostración.* Si $p > 2$, entonces ya sabemos que $I - \mu\mathcal{B}$ es invertible en $L^p(\mathbb{C})$ gracias al Teorema 4.1.5. Pasando al adjunto

$$(I - \mu\mathcal{B})^* = I - \mathcal{B}^*\overline{\mu}$$

obtenemos que $I - \mathcal{B}^*\overline{\mu}$ es invertible en $L^q(\mathbb{C})$ para $q \in (1, 2]$ por la Proposición 2.2.11. Además tenemos la igualdad de operadores

$$\overline{(I - \mathcal{B}\mu)(\cdot)} \equiv (I - \mathcal{B}^*\overline{\mu})\overline{(\cdot)}$$

por lo que deducimos que $I - \mathcal{B}\mu$ es invertible en $L^p(\mathbb{C})$, para $p \in (1, 2]$. Por otro lado, sabemos que los operadores $\mathcal{B}, \mathcal{B}^*$ son invertibles en $L^p(\mathbb{C})$, para todo $p \in (1, \infty)$, con $\mathcal{B}\mathcal{B}^* = I$. Por lo tanto,

- $I - \mu\mathcal{B} \equiv \mathcal{B}^*(I - \mathcal{B}\mu)\mathcal{B} \Longrightarrow I - \mu\mathcal{B}$ es invertible en $L^p(\mathbb{C})$ con $p \in (1, 2]$.
- $I - \mathcal{B}\mu \equiv \mathcal{B}(I - \mu\mathcal{B})\mathcal{B}^* \Longrightarrow I - \mathcal{B}\mu$ es invertible en $L^p(\mathbb{C})$ con $p \in [2, \infty)$.

$\square$

## 4.2. Automejora de la regularidad.

**Teorema 4.2.1.** *Dada $\mu \in VMO(\mathbb{C})$, entonces las soluciones débilmente cuasiregulares $f$ de la ecuación de Beltrami $\overline{\partial} f(z) = \mu(z)\partial f(z)$ cumplen que $f \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$ $\forall p \in (1, \infty)$.*

*Demostración.* Supongamos que tenemos una función $f$ solución de la ecuación en $W^{1,q}_{loc}(\mathbb{C})$ para alguna $q \in (1, \infty)$. Para cada conjunto acotado $E \subset \mathbb{C}$, tomamaremos un disco $\mathbb{D}_R$ tal que $E \subset \mathbb{D}_R$ para $R$ suficientemente grande, y una función $\eta$ de $C^\infty(\mathbb{C})$ con soporte compacto conteniendo a $E$ y tal que

$$\begin{cases} \eta(z) = 1 \text{ para toda } z \text{ en un entorno de } E \\ |\eta| \leq \chi_{\mathbb{D}_{R+1}}. \end{cases}$$

Por otro lado, definamos $F = \eta f$ que está en $W^{1,q}(\mathbb{C})$ y además cumple la ecuación

$$\overline{\partial} F = \mu \partial F + \left(\overline{\partial}\eta - \mu\partial\eta\right) f.$$

Y al tratarse $F$ de una función de soporte compacto, es la transformada de Cauchy de su $\overline{\partial}$-derivada. Y por ello, si denotamos $\psi = \left(\overline{\partial}\eta - \mu\partial\eta\right) f$ se cumple que

$$\begin{aligned} \overline{\partial} F &= (I - \mu\mathcal{B})^{-1}\psi \\ \partial F &= \mathcal{B} \circ (I - \mu\mathcal{B})^{-1}\psi, \end{aligned}$$

consiguiéndose así la desigualdad

$$|DF| \leq \left|(I - \mu\mathcal{B})^{-1}\psi\right| + \left|\mathcal{B} \circ (I - \mu\mathcal{B})^{-1}\psi\right|. \tag{4.10}$$

Observemos antes de continuar que la integrabilidad global de $F$ determina la integrabilidad local de $f$ al tratase $\eta$ de una función de $C^\infty(\mathbb{C})$ arbitraria. Concretamente, dada dado un conjunto acotado $E \subset \mathbb{C}$ se tiene que

$$\int_E |f|^p = \int_E |\eta f|^p = \int_E |F|^p \leq \int_{\mathbb{D}_R} |F|^p$$

$$\int_E |Df|^p = \int_E |D(\eta f)|^p = \int_E |DF|^p \leq \int_{\mathbb{D}_R} |DF|^p$$

para toda $p \in (1, \infty)$ y todo conjunto $E$ acotado. Por tanto, probando que $F$ pertenece a $W^{1,p}(\mathbb{C})$ para toda $p \in (1, \infty)$ se tendrá que $f$ pertenece a $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $p \in (1, \infty)$.

Supongamos que $q > 2$, entonces por el embeging de Sobolev ( Proposición 2.2.12), tendremos que $F$ pertenece a $L^\infty(\mathbb{C})$. Por ello, $f$ pertenece a $L^p_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $p \in (1, \infty)$ y por tanto $\Psi$ pertenece a $L^p(\mathbb{C})$ para toda $p \in (1, \infty)$ y por la invertibilidad del operador $I - \mu\mathcal{B} : L^p(\mathbb{C}) \mapsto L^p(\mathbb{C})$ se sigue que efectivamente $F$ pertenece a $W^{1,p}(\mathbb{C})$ para toda $p \in (1, \infty)$ y por lo tanto $f \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $p \in (1, \infty)$.

Supongamos que $q < 2$, por construcción $F$ perteneces a $W^{1,q}(\mathbb{C})$ y entonces, por la Proposición 2.2.12, tendremos que $F \in L^{q*}(\mathbb{C})$ con $q* = \frac{2q}{2-q} > 2$. Por otro lado, de la definición de $F$, se sigue que $f$ está en $L^{q*}_{loc}(\mathbb{C})$ y por tanto $\Psi$ pertenece a $L^{q*}(\mathbb{C})$. Ahora, por la invertibilidad del operador $I - \mu\mathcal{B} : L^p(\mathbb{C}) \mapsto L^p(\mathbb{C})$ para toda $p \in (1\infty)$, se tiene que $F$ pertenece a $W^{1,q*}(\mathbb{C})$ con $q* > 2$, por lo que podemos aplicar el párrafo anterior y concluir la demostración.

$\square$

Anteriormente mencionábamos un teorema análogo a éste (ver Teorema 3.3.8) válido incluso sin las hipótesis de $\mu \in VMO(\mathbb{C})$ cuya demostración sigue estas mismas líneas. Al relajar las hipótesis sobre el coeficiente de Beltrami se cobra un precio: el intervalo crítico se reduce dráticamente, éste pasa a ser de $(1, \infty)$ a quedarse simplemente en $(1 + k, 1 + \frac{1}{k})$. Para la demostración del Teorema 3.3.8, solo hay que observar que el criterio de invertibilidad del operador $(I - \mu\mathcal{B})$ sólo puede usarse en el intervalo crítico y no en todo el intervalo $(1, \infty)$. Por ello, en dicho teorema sólo tenemos pertenencia en $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$ para $p$ en el intervalo crítico. Por su parte, la desigualdad del Teorema 3.3.8 es una consecuencia de la desigualdad (4.10) que vimos más arriba, y de que en el intervalo crítico $(Q(k), P(k))$ el operador $I - \mu\mathcal{B}$ es un operador acotado e invertible con constantes dependientes sólo de $p$ y $k$.

# Capítulo 5

# Resultados para $\mu \in W^{1,p}(\mathbb{C})$.

En este capítulo seguimos estudiando como la regularidad de $\mu$ condiciona la regularidad esperada de la solución principal de la solución de Beltrami asociada a dicha $\mu$. Para ello, nos centraremos en algunos resultados generales suponinendo que la regularidad de $\mu$ es de tipo Sobolev, es decir, $\mu \in W^{1,p}(\mathbb{C})$. Este estudio nos dará una guía para demostrar resultados similares para otros espacios más generales como los espacios de Besov o de Sobolev fraccionario. Concretamente, Cruz en [3] prueba que si $\mu \in B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$ de soporte compacto con $0 < \alpha < 1$, $\alpha\, p > 2$ y $1 \leq q \leq \infty$ entonces la solución principal es $\phi(z) = z + \mathcal{C}h(z)$ con $h$ perteneciente a $B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{C})$ y parte de las ideas que llevan a tal resultados se basan en lo que expondremos acontinuación.

## 5.1. $W^{1,p}$ con $p > 2$.

**Lema 5.1.1.** *[2]* (Pag. 94) *Sean $p$ y $q$ dos funciones continuas con derivadas distribucionales localmente integrables en $\mathbb{C}$, y que cumplan que $\overline{\partial} p = \partial q$. Entonces existe $f \in C^1(\mathbb{C})$ tal que*

$$\begin{cases} \overline{\partial} f = q \\ \partial f = p. \end{cases}$$

*Demostración.* Aplicando el Teorema de Stokes y el Lema de Poincaré, se ve que para probar el Lema, sólo es necesario llegar a probar la igualdad:

$$\int_{\partial R} p\, dz + q\, d\overline{z} = 0 \text{ para todo rectángulo } R \subset \mathbb{C}.$$

Para ello, haremos uso una regularización. Para cada $\epsilon > 0$ definimos el operador $\delta_\epsilon(z) = \frac{1}{\pi\epsilon^2}$ cuando $|z| \leq \epsilon$, $\delta_\epsilon(z) = 0$ cuando $z > \epsilon$. Entonces los operadores $(p * \delta_\epsilon * \delta_{\epsilon'})$ y $(q * \delta_\epsilon * \delta_{\epsilon'})$ son de clase $C^2$, y además cumplen

$$\overline{\partial}\left(p * \delta_\epsilon * \delta_{\epsilon'}\right) = \partial\left(q * \delta_\epsilon * \delta_{\epsilon'}\right).$$

Y por lo tanto

$$\int_\lambda \left(p * \delta_\epsilon * \delta_{\epsilon'}\right) dz + \left(q * \delta_\epsilon * \delta_{\epsilon'}\right) d\overline{z} = 0,$$

y sin mas que tomar $\epsilon$ y $\epsilon'$ tendiendo a 0 se consigue el resultado, debido a la regularidad de $p$ y $q$. $\square$

**Lema 5.1.2.** *Sea $\mu \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ con $2 < p$, $\|\mu\|_\infty = k < 1$ y con soporte compacto, entonces la solución principal $\phi$ de la ecuación de Beltrami*

$$\overline{\partial}\phi = \mu\partial\phi$$

*es un homeomorfismo y además $\phi \in C^1(\mathbb{C})$.*

*Demostración.* Antes de empezar con la demostración, tenemos que puntualizar, que debido a que $\mu$ está en $W^{1,p}(\mathbb{C})$ con $p > 2$, en particular, $\mu$ es de $VMO(\mathbb{C})$. Por ello el operador $(I - \mu\mathcal{B})^{-1}$ es invertible de $L^q(\mathbb{C})$ en sí mismo para toda $q \in (1, \infty)$.

Veamos que $\exists\,\lambda$ tal que

$$\partial\phi = \lambda \quad \text{y} \quad \overline{\partial}\phi = \mu\lambda$$

en caso de que exista, se ha de cumplir que

$$\overline{\partial}\lambda = \partial(\mu\lambda) = \mu\partial\lambda + \lambda\partial\mu$$

o equivalentemente

$$\overline{\partial}(\log\lambda) = \mu\partial(\log\lambda) + \partial\mu. \tag{5.1}$$

Por un lado, definamos $h = (I - \mathcal{B}\mu)^{-1}(\mathcal{B}\partial\mu)$ que trivialmente está en $L^p(\mathbb{C})$ con $p > 2$. Por otro, definamos $g = \mathcal{C}(\mu h + \partial\mu)$, que al tratarse de la transformada de Cauchy de una función con soporte compacto de $L^p(\mathbb{C})$ con $p > 2$, es de $W^{1,p}(\mathbb{C})$ con $p > 2$, y en particular, es continua. Además $g$ cumple que

$$\overline{\partial}g = \mu h + \partial\mu \in L^p(\mathbb{C}) \text{ con } p > 2 \text{ y de soporte compacto,}$$
$$\partial g = \mathcal{B}(\mu h + \partial\mu) = h \in L^p(\mathbb{C}) \text{ con } p > 2.$$

Por tanto, $g$ satisface la ecuación

$$\overline{\partial} g = \mu \partial g + \partial \mu. \tag{5.2}$$

Y por el Teorema 3.3.1, podemos asegurar que $g$ existe y es única. Además, la ecuación (5.1) coincide con la ecuación (5.2) que cumple $g$, y por la unicidad de solución tendremos que $\log \lambda = g$ y por tanto $\lambda = e^g = \partial \phi$. En particular, tenemos que $\lambda$ existe, y por el Lema 5.1.1, $\phi \in C^1(\mathbb{C})$ y cumple $\overline{\partial}\phi = \mu \partial \phi$. El hecho de que $\phi$ sea un homeomorfismo se sigue del Teorema 3.3.9. □

Observemos que de hecho acabamos de ver que

$$\partial \phi = e^g \text{ con } g \in W^{1,p}(\mathbb{C}).$$

Es decir, la prueba del resultado anterior nos dice que para todo $p > 2$, se cumple que

$$\mu \in W^{1,p}(\mathbb{C}) \;\Rightarrow\; \log(\partial \phi) \in W^{1,p}(\mathbb{C}).$$

Este resultado, nos será muy últil en los dos últimos capítulos. También es importatne observar que la prueba descarta el caso $\mu \in W^{1,2}(\mathbb{C})$. Efectivamente, si tal fuese el caso, el tomar $g = \mathcal{C}(\mu h + \partial \mu)$ no nos garantiza que $g = \log \partial \phi$ sea de $W^{1,2}(\mathbb{C})$ por ser la transformada de Cauchy de una función de $L^p(\mathbb{C})$ con soporte compacto. Sin embargo, podemos tomar directamente $g$ como la solución principal de de la ecuación de Beltrami

$$\overline{\partial} g = \mu \partial g + \partial \mu,$$

y por la serie de Neumann, deducir que efectivamente $\overline{\partial} g \in L^2(\mathbb{C})$ con soporte compacto. Mediante la igualdad $\mathcal{B}\overline{\partial} g = \partial g$, se consigue que $\partial g \in L^2(\mathbb{C})$ y por lo tanto, mediante la igualdad $\mathcal{C}\overline{\partial} g = \overline{\partial}\mathcal{C} g = g$ se consigue por fin que $g \in L^2(\mathbb{C})$. De hecho, usando la proposición 2.2.7, se deduce que efectivametne $g \in L^s(\mathbb{C})$ para toda $1 \leq s < \infty$.

**Teorema 5.1.3.** *[4] Sea $\mu \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ con soporte compacto contenido en $\mathbb{D}$, tal que $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$. Entonces la aplicación $\mu$-quasiconforme $\phi$ pertenece a $W^{2,p}_{loc}(\mathbb{C})$.*

*Demostración.* Razonando como en el Lema 5.1.2, podemos construir una función $g \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ tal que $\partial \phi = e^g$. Y como $g$ en particular es contínua, existirá una constante $C$ tal que

$$\frac{1}{C} \leq |e^g| \leq C.$$

Y para finalizar, sólo hay que observar que

$$\overline{\partial}\partial\phi = \overline{\partial}\left(e^g\right) = e^g\overline{\partial}g,$$

y por tanto

$$\left|\overline{\partial}\partial\phi\right| = |e^g|\left|\overline{\partial}g\right| \leq C\left|\overline{\partial}g\right| \in L^p_{loc}(\mathbb{C}).$$

Y con esto se concluye que $D^2\phi \in L^p_{loc}(\mathbb{C})$. $\square$

## 5.2. $W^{1,p}(\mathbb{C})$ para $p \leq 2$.

La gran diferencia entre el caso de tener el coeficiente de Beltrami en un espacio de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{C})$ con $p > 2$ o tenerlo en $p \leq 2$ radica principalmente en que en el primer caso tenemos continuidad del coeficiente $\mu$ que se transmite a las derivadas de la cuasiconforme. Nótese que, sin embargo, existen funciones $\mu$ continuas para las que $\phi$ no tiene derivadas continuas. Es decir, lo importante no es ser continua, lo importante es ser Hölder-continuas. Ahora ya no tenemos tanta regularidad de las primeras derivadas por lo que el resultado que obtendremos será menor.

**Teorema 5.2.1.** *[4] Sea $\mu \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ con soporte compacto contenido en $\mathbb{D}$, tal que $\|\mu\|_\infty \leq \frac{K-1}{K+1}$. Y sea $\phi(z)$ una aplicación $\mu$-quasiconforme, entonces se tiene:*

*a) Si $p = 2$ entonces $\phi(z) \in W^{2,q}_{loc}(\mathbb{C})$ $\forall q < 2$.*

*b) Si $\frac{2K}{K+1} < p < 2$ entonces $\phi(z) \in W^{2,q}_{loc}(\mathbb{C})$ $\forall q < q_0$ donde $\frac{1}{q_0} := \frac{1}{p} + \frac{K-1}{2K}$.*

*Demostración.*

b) Probaremos primero este apartado ya que para el apartado a) nos basaremos en parte de éste.

Tomemos $\Psi_n \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ una aproximación a la identidad tal que $0 \leq \Psi_n \leq 1$, $\int \Psi_n = 1$ con $\operatorname{supp}(\Psi_n) \subset \mathbb{D}$ y que cumpla $\Psi_n(z) = n^2\Psi(nz)$.

Y sea $\mu_n := \mu * \Psi_n$, entonces $\mu_n \in C_0^\infty$ con $\operatorname{supp}(\mu_n) \subset 2\mathbb{D}$ y $\|\mu_n\|_\infty \leq \|\mu\|_\infty$, entonces $\mu_n$ converge a $\mu$ en $W^{1,p}(\mathbb{C})$.

Y definamos

$$\phi_n(z) := z + \mathcal{C}h_n(z), \quad h_n := \mu_n\mathcal{B}h_n + \mu_n,$$

$$\phi(z) := z + \mathcal{C}h(z), \quad h := \mu\mathcal{B}h + \mu.$$

La existencia de $h_n$ y $h$ está garantizada gracias a que el operador $I-\mu_n\mathcal{B}$ es invertible para todos los espacios $L^p(\mathbb{C})$ con $p \in \left(\frac{2K}{K+1}, \frac{2K}{K-1}\right)$, y además tenerse las expresiones $h_n = (I-\mu_n\mathcal{B})^{-1}\mu_n$ y $h = (I-\mu\mathcal{B})^{-1}\mu$. entonces, observemos que

$$\begin{aligned} |h_n - h| &= \left|(I-\mu_n\mathcal{B})^{-1}\mu_n - (I-\mu\mathcal{B})^{-1}\mu\right| \\ &\leq \left|(I-\mu_n\mathcal{B})^{-1}(\mu_n-\mu)\right| + \left|\left((I-\mu_n\mathcal{B})^{-1} - (I-\mu\mathcal{B})^{-1}\right)\mu\right| \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned} \|h_n - h\|_{L^p(\mathbb{C})} \leq \| &(I-\mu_n\mathcal{B})^{-1}\|_{L^p(\mathbb{C})\mapsto L^p(\mathbb{C})}\|\mu_n-\mu\|_{L^p(\mathbb{C})}+ \\ &+\|(I-\mu_n\mathcal{B})^{-1} - (I-\mu\mathcal{B})^{-1}\|_{L^p(\mathbb{C})\mapsto L^p(\mathbb{C})}\|\mu\|_{L^p(\mathbb{C})}. \end{aligned}$$

Y observemos que la sucesión de operadores $(I-\mu_n\mathcal{B})$ cumple que

$$\|(I-\mu_n\mathcal{B}) - (I-\mu\mathcal{B})\|_{L^r(\mathbb{C})\mapsto L^r(\mathbb{C})} = \|(\mu-\mu_n)\mathcal{B}\|_{L^r(\mathbb{C})\mapsto L^r(\mathbb{C})} \to 0$$

para toda $r \in (1,\infty)$ y además son invertibles. Por tanto, tendremos convergencia como operadores de las inversas de la sucesión, es decir de la sucesión de operadores $(I-\mu_n\mathcal{B})^{-1}$, allá dónde se tenga la invertibilidad. Concretamente en $L^p(\mathbb{C})$ para toda $p$ perteneciente al intervalo crítico. De aquí se sigue que $\|h_n - h\|_{L^p(\mathbb{C})} \to 0$ en $L^p(\mathbb{C})$ para toda $p \in \left(\frac{2K}{K+1}, \frac{2K}{K-1}\right)$ y también lo que nos asegura que $\phi_n \to \phi$ en $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $p$ en el rango crítico, en particular para $p=2$.

Por otro lado, de la ecuación $\overline{\partial}\phi_n = \mu_n\partial\phi_n$ se consigue derivando que

$$\begin{aligned} \partial\overline{\partial}\phi_n - \mu_n\partial\partial\phi_n = \partial\mu_n\partial\phi_n &\Rightarrow \frac{\overline{\partial}\partial\phi_n}{\partial\phi_n} - \mu_n\frac{\partial\partial\phi_n}{\partial\phi} = \partial\mu_n \Rightarrow \\ &\Rightarrow \overline{\partial}\log(\partial\phi_n) - \mu_n\partial\log(\partial\phi_n) = \partial\mu_n \Rightarrow (\overline{\partial}-\mu_n\partial)(\log(\partial\phi)) = \partial\mu_n \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\overline{\partial}\partial\phi_n}{\partial\phi_n} = (I-\mu_n\mathcal{B})^{-1}(\partial\mu_n) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \overline{\partial}\partial\phi_n = \partial\phi_n(I-\mu_n\mathcal{B})^{-1}(\partial\mu_n). \end{aligned}$$

Teníamos que $\partial\phi_n \to \partial\phi$ en $L^r_{loc}(\mathbb{C})$ para $r \in (\frac{2K}{K+1}, \frac{2K}{K-1})$. Y fijado $\frac{2K}{K+1} < p < 2$ tenemos que

$$\|\overline{\partial}\partial\phi_n\|_{L^q(\mathbb{C})} \leq \|(I-\mu_n\mathcal{B})^{-1}(\partial\mu_n)\|_{L^p(\mathbb{C})}\|\partial\phi_n\|_{L^r(\mathbb{C})}$$

con $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$ y tomando los valores máximos para $p, r$ tendremos que

$$\frac{1}{q_0} = \frac{1}{2} + \frac{K-1}{2K} \Rightarrow q_0 = \frac{2K}{2K-1}$$

por lo que se tiene que $\left\{\overline{\partial}\partial\phi_n\right\}$ es una sucesión acotada en $L^q_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $1 \leq q < q_0$. Para terminar, como tenemos la convergencia de $\phi_n$ y de $D\phi_n$ en $L^r_{loc}(\mathbb{C})$ para $r \in (\frac{2K}{K+1}, \frac{2K}{K-1})$, nos es suficiente ver que $\left\{\overline{\partial}\partial\phi_n\right\}$ es una sucesión de Cauchy $L^q_{loc}(\mathbb{C})$ con $q < \frac{2K}{2K-1}$ y por lo tanto $\phi_n \to \phi$ en $W^{2,q}_{loc}(\mathbb{C})$ para todo $q < \frac{2K}{2K-1}$. Veámoslo:

$$\begin{aligned}\left\|\overline{\partial}\partial\phi_n - \overline{\partial}\partial\phi_m\right\|_{L^q(\mathbb{C})} &= \left\|\partial\phi_n \cdot (I-\mu_n\mathcal{B})^{-1}\partial\mu_n - \partial\phi_m \cdot (I-\mu_m\mathcal{B})^{-1}\partial\mu_m\right\|_{L^q(\mathbb{C})} \\ &\leq \left\|(\partial\phi_n - \partial\phi_m)\cdot(I-\mu_n\mathcal{B})^{-1}\partial\mu_n\right\|_{L^q(\mathbb{C})} \\ &+ \left\|\partial\phi_n \cdot \left((I-\mu_n\mathcal{B})^{-1}(\partial\mu_n - \partial\mu_m)\right)\right\|_{L^q(\mathbb{C})} \\ &+ \left\|\partial\phi_m \cdot \left((I-\mu_n\mathcal{B})^{-1} - (I-\mu_m\mathcal{B})^{-1}\partial\mu_m\right)\right\|_{L^q(\mathbb{C})}.\end{aligned}$$

Y razonando como antes con los mismos exponentes $p < 2$ y $r < \frac{2K}{K-1}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\left\|\overline{\partial}\partial\phi_n - \overline{\partial}\partial\phi_m\right\|_{L^q(\mathbb{C})} &\leq \|\partial\phi_n - \partial\phi_m\|_{L^r(\mathbb{C})} \cdot \left\|(I-\mu_n\mathcal{B})^{-1}\partial\mu_n\right\|_{L^p(\mathbb{C})} \\ &+ \|\partial\phi_n\|_{L^r(\mathbb{C})} \cdot \left\|(I-\mu_n\mathcal{B})^{-1}(\partial\mu_n - \partial\mu_m)\right\|_{L^p(\mathbb{C})} \\ &+ \|\partial\phi_m\|_{L^r(\mathbb{C})} \cdot \left\|(I-\mu_n\mathcal{B})^{-1} - (I-\mu_m\mathcal{B})^{-1}\partial\mu_m\right\|_{L^p(\mathbb{C})} \to 0.\end{aligned}$$

a) $p = 2$. Razonando como en el apartado b) se vuelve a llegar a que

$$\overline{\partial}\partial\phi_n = \partial\phi_n(I-\mu_n\mathcal{B})^{-1}(\partial\mu_n)$$

y con un simple Hölder tendremos que para $q < r$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$ se cumpe que:

$$\|\partial\phi_n(I-\mu_n\mathcal{B})^{-1}(\partial\mu_n)\|_{L^q(\mathbb{C})} \leq \|\partial\phi_n\|_{L^r(\mathbb{C})}\|(I-\mu_n\mathcal{B})^{-1}(\partial\mu_n)\|_{L^p(\mathbb{C})}.$$

Además, ahora los operadores $I - \mu\mathcal{B}$ y $I - \mu_n\mathcal{B}$ son invertbiles en $L^p(\mathbb{C})$ para toda $p \in (1, \infty)$. Veamos ahora, dónde converge $h_n := (I-\mu_n\mathcal{B})^{-1}\mu_n$

$$\|(I-\mu_n\mathcal{B}) - (I-\mu\mathcal{B})\|_{L^p(\mathbb{C})\mapsto L^p(\mathbb{C})} = \|(\mu_n - \mu)\mathcal{B}\|_{L^p(\mathbb{C})\mapsto L^p(\mathbb{C})} \to 0$$

para todo $p \in (1, \infty)$. Por lo que tendremos también la convergencia de la sucesión de los operadores inversos en dichos espacios, es decir $(I-\mu_n\mathcal{B})^{-1} \to (I-\mu\mathcal{B})^{-1}$ en como operadores de $L^p(\mathbb{C})$ a $L^p(\mathbb{C})$. De aquí se sigue que $h_n \to h$ en $L^p(\mathbb{C})$ para toda $p \in (1, \infty)$ y por lo tanto $\partial\phi_n \to \partial\phi$ en $L^p_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $p \in (1, \infty)$.

Haciendo el mismo razonamiento sobre $\overline{\partial}\partial\phi_n$ que hicimos antes, pero ahora para $q < 2$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2}$, se vuelve a cumplir, gracias a que ahora $\{\partial\phi_n\}$ es convergente en

$L^r_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $r \in (1,\infty)$, que

$$\begin{aligned}\left\|\overline{\partial}\partial\phi_n - \overline{\partial}\partial\phi_m\right\|_{L^q(\mathbb{C})} \leq \|\partial\phi_n - \partial\phi_m\|_{L^r(\mathbb{C})} \cdot \left\|(I-\mu_n\mathcal{B})^{-1}\partial\mu_n\right\|_{L^2(\mathbb{C})} \\ + \|\partial\phi_n\|_{L^r(\mathbb{C})} \cdot \left\|(I-\mu_n\mathcal{B})^{-1}(\partial\mu_n - \partial\mu_m)\right\|_{L^2(\mathbb{C})} \\ + \|\partial\phi_m\|_{L^r(\mathbb{C})} \cdot \left\|(I-\mu_n\mathcal{B})^{-1} - (I-\mu_m\mathcal{B})^{-1}\partial\mu_m\right\|_{L^2(\mathbb{C})} \to 0.\end{aligned}$$

Y por lo tanto

$$\overline{\partial}\partial\phi_n \to \partial\phi(I-\mu\mathcal{B})^{-1}(\partial\mu)$$

en $L^q_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $q < 2$. □

## 5.3. Optimalidad del Resultado.

Si planteamos la siguiente ecuación de Beltrami

$$\overline{\partial}\phi(z) = \mu(z)\,\partial\phi(z), \quad \text{con } \mu(z) = \frac{z}{\overline{z}} \cdot \frac{1}{2\log|z| - 1} \in W^{1,2}(\mathbb{C})$$

obtendremos como solución a

$$\phi(z) = z(1 - \log|z|) \in W^{2,q}_{loc}(\mathbb{C}) \quad \text{para toda } q < 2.$$

Además $D^2\phi \notin L^2_{loc}(\mathbb{C})$, lo que nos asegura que el teorema anteior es óptimo en el caso $p = 2$. Para el caso $p < 2$, tomaremos la ecuación de Beltrami

$$\overline{\partial}\phi(z) = \mu(z)\,\partial\phi(z), \quad \text{con } \mu(z) = \frac{1-K}{1+K} \cdot \frac{z}{\overline{z}} \in W^{1,p}(\mathbb{C}) \quad \text{para todo } p < 2.$$

Y tendremos como solución

$$\phi(z) = z \cdot |z|^{\frac{1}{K}-1} \in W^{2,q}_{loc}(\mathbb{C}) \quad \text{para toda } q < \frac{2K}{2K-1}.$$

Además $D^2\phi \notin L^{\frac{2K}{2K-1}}_{loc}(\mathbb{C})$, con lo que tenemos dos contraejemplos que nos dicen que no deberíamos esperar la pertenencia de $D^2\phi$ en algún $L^p_{loc}(\mathbb{C})$ más hallá de lo que nos dice el teorema.

**Problema abierto** ¿Qué ocurre cuando $\mu \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ con $p < \frac{2K}{K+1}$? ¿Cómo podríamos actuar en este caso?. En este caso ya no tenemos ni la inyectividad del operador $(I - \mu\mathcal{B})$, por lo que hay que buscar un camino alternativo para encontrar la regularidad de la solución principal. Es más, la expresión que tenemos de la solución principal como

$$\phi(z) = z + \mathcal{C}\,h, \quad \text{con } h = (I - \mu\mathcal{B})^{-1}\,\mu$$

deja de garantizarnos que podamos tener $\phi - z \in W^{2,1}(\mathbb{C})$, aunque podamos saber por otros medios que $\phi - z \in W^{1,2}(\mathbb{C})$ y por el Teorema 3.3.8 que esté en todos los $W^{1,q}(\mathbb{C})$ con $q$ en el intervalo crítico.

# Capítulo 6

# Resultados para $\mu \in W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$.

Una de las más importantes generalizaciones de los *espacios de Sobolev*, son los llamados *espacios de Sobolev fraccionarios*. El nombre de dichos espacios viene de un intento de generalizar el concepto mismo de derivada. Para más información sobre dichos espacios nos remitiremos al libro [11].

Recordemos que en el capítulo anteirior, distinguíamos tres casos así estubiésemos trabajando en $W^{1,p}(\mathbb{C})$ con $p > 2, p = 2$ o $p < 2$. Esta separación proviene de que cuando $p > 2$, tenemos continuidad de la función en cuestión, si $p = 2$ perdemos la continuidad pero el espacio en sí mismo es confortable para trabajar, y en el caso $p < 2$ perdemos todas estas buenas propiedades. Ahora, para el caso de Sobolev fraccionario $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ con $\alpha \in (0, 1)$, tendremos una separación similar según $\alpha p > 2$, $\alpha p = 2$ ó $\alpha p < 2$. Esta separación viene promovida por un teorema de tipo Embedding para Sobolev fraccionario que nos relaciona $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ con otros espacios, igual que pasaba en el Embedding Sobolev para el caso con derivadas enteras (ver Proposición 2.2.12).

## 6.1. Los espacios $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$.

**Definición 6.1.1.** *Los espacios Sobolev Fraccionarios son:*

$$W^{\alpha,p}(\mathbb{C}) = \{f \in L^p(\mathbb{C}) \text{ tales que existe } g \in L^p(\mathbb{C}) \text{ con } f = G_\alpha * g\},$$

*donde $G_\alpha$ es el nucleo de Bessel definido como*

$$G_\alpha = \mathcal{F}^{-1}\left(\left(1 + |\xi|^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}}\right) \quad \text{con } \mathcal{F}^{-1} \text{ la transformada inversa de Fourier.}$$

*La norma que se le asocia al espacio es:*

$$\|f\|_{W^{\alpha,p}(\mathbb{C})} = \|g\|_{L^p(\mathbb{C})}$$

En esta sección daremos varias nociones de la derivada fraccionaria. Todas ellas darán lugar al mismo espacio $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$. Aunque primero, daremos un resultado análogo al *Teorema de Embedding de Sobolev* (ver Proposición 2.2.12) para el caso fraccionario.

**Teorema 6.1.1.** ***Embedding Sobolev Fraccionario*** *Dada $0 < \alpha < 1$ y $p \in [1, \infty)$, se tienen las siguientes inclusiones continuas entre espacios de funciones:*

*(i)*

$$W^{\alpha,p}(\mathbb{C}) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\mathbb{C}) \quad \text{con } \beta = \alpha - \frac{2}{p} \text{ siempre que } \alpha p > 2.$$

*(ii)*

$$W^{\alpha,p}(\mathbb{C}) \hookrightarrow VMO(\mathbb{C}) \quad \text{con } \alpha p = 2.$$

*En particular, las funciones de $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ están localmente en $L^q(\mathbb{C})$ para toda $q \in [1, \infty)$.*

*(iii)*

$$W^{\alpha,p}(\mathbb{C}) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{C}) \quad \text{con } p^* = \frac{2p}{2 - \alpha p} \text{ siempre que } \alpha p < 2.$$

**Proposición 6.1.2.** *Para toda función $f$ de $W^{\alpha,p}(\mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{C})$ con $p > 1$ y $0 < \alpha < 1$ se cumple la siguiente cota de normas.*

$$\|f\|_{W^{\alpha\theta,\frac{p}{\theta}}(\mathbb{C})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{C})}^{1-\theta} \|f\|_{W^{\alpha,p}(\mathbb{C})}^{\theta}$$

*para toda $\theta \in [0, 1]$.*

Este resultado sale automaticamente al hacer una interpolación compleja entre $L^\infty(\mathbb{C})$ y $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$.

Veamos la primera noción de derivada fraccionaria. Viene dada en términos de cocientes incrementales, y sirve para caracterizar los espacios $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ siempre que $\frac{2}{\alpha+1} < p$.

**Lema 6.1.3.** *[3].**Primera caracterización de** $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$.*

*Sean $0 < \alpha < 1$ y $\frac{2}{\alpha+1} < p$, denotemos*

$$D^{\alpha} f(z) := \left( \int_{\mathbb{C}} \frac{|f(z) - f(\omega)|^2}{|z-\omega|^{2+2\alpha}} dA(\omega) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

*Entonces, una función $f$ pertenece al espacio $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ si y solo sí*

$$f \in L^p(\mathbb{C}) \quad \text{y además} \quad D^{\alpha} f \in L^p(\mathbb{C}).$$

*Más aún, se tiene la equivalencia de normas*

$$\|f\|_{W^{\alpha,p}(\mathbb{C})} \cong \|f\|_{L^p(\mathbb{C})} + \|D^{\alpha} f\|_{L^p(\mathbb{C})}.$$

Uno de los obstáculos de la derivada fraccionaria es la ausencia de una regla de Leibnitz. Sin embargo, existen generalizaciones a dicha regla. La siguente se refiere al operador $D^{\alpha}$ que acabamos de definir.

**Lema 6.1.4.** *Para toda $\alpha \in (0,1)$ se tiene que:*

- *Si $f, g \in C_0^{\infty}(\mathbb{C})$ entonces se tiene la desigualdad*

$$\|D^{\alpha}(f \cdot g)\|_{L^p(\mathbb{C})} \leq \|f \cdot D^{\alpha} g\|_{L^p(\mathbb{C})} + \|g \cdot D^{\alpha} f\|_{L^p(\mathbb{C})}.$$

- *Si $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4}$, $1 < p_1, p_3 < \infty$ y $1 \leq p_2, p_4 \leq \infty$, entonces se tiene la desigualdad*

$$\|D^{\alpha}(f \cdot g)\|_{L^p(\mathbb{C})} \leq \|f\|_{L^{p_1}(\mathbb{C})} \cdot \|D^{\alpha} g\|_{L^{p_2}(\mathbb{C})} + \|g\|_{L^{p_3}(\mathbb{C})} \cdot \|D^{\alpha} f\|_{L^{p_4}(\mathbb{C})}.$$

A continuación, veremos una segunda noción de derivada fraccionaria. Esta vez, la derivada vendrá formulada en términos de la transformada de Fourier.

**Lema 6.1.5.** *[3].**Segunda caracterización de** $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$. Sea $0 < \alpha < 1$, denotemos*

$$d^{\alpha} f(z) := \mathcal{F}^{-1}\left(|\xi|^{\alpha} \cdot \mathcal{F}(f(\xi))\right)$$

*entonces una función $f$ pertenece al espacio $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ si y solo sí*

$$f \in L^p(\mathbb{C}) \quad \text{y además} \quad d^{\alpha} f \in L^p(\mathbb{C}).$$

*Más aún, se tiene la equivalencia de normas*

$$\|f\|_{W^{\alpha,p}(\mathbb{C})} \cong \|f\|_{L^p(\mathbb{C})} + \|d^{\alpha} f\|_{L^p(\mathbb{C})}.$$

**Proposición 6.1.6.** *Dadas dos funciones $f$ y $g$ pertenecientes a $C_0^\infty(\mathbb{C})$, se cumplen las siguientes cotas en normas:*

*a* *Dados $\alpha \in (0,1)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,\alpha]$ tales que $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ y dados $p \in (1,\infty)$, $p_1, p_2 \in (1,\infty)$ tales que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, tenemos que*

$$\|d^\alpha (fg) - fd^\alpha (g) - gd^\alpha (f)\|_{L^p}(\mathbb{C}) \leq C\|d^{\alpha_1} f\|_{L^{p_1}(\mathbb{C})}\|d^{\alpha_2} g\|_{L^{p_2}(\mathbb{C})}$$

*con $C := C(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, p, p_1, p_2)$.*

*b* *Dados $\alpha \in (0,1]$, $p \in (1,\infty)$, $p_1 \in (1,\infty]$, y $p_2 \in (1,\infty)$ tales que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ se sigue que*

$$\|d^\alpha (f \circ g)\|_{L^p(\mathbb{C})} \leq C\| (Df) \circ (g)\|_{L^{p_1}(\mathbb{C})}\|d^\alpha g\|_{L^{p_2}(\mathbb{C})}$$

*con $C := C(\alpha, p, p_1, p_2)$.*

*c* *Dados $\alpha \in (0,1)$ y $p \in (1,\infty)$ entonces:*

$$\|d^\alpha (fg) - fd^\alpha g - gd^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{C})} \leq C\|d^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{C})}\|g\|_{L^\infty(\mathbb{C})}$$

*con $C := C(\alpha, p)$.*

En lo que sigue, gracias a las las caracterizaciones que tenemos de $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ y a la equivalencia de normas que nos dan dichas caracterizaciones, haremos un abuso de notación y usaremos indistintamente una noción de dervida fraccionaria u otra así nos convenga en unos casos u otros. Efectivamente, una vez probada la pertenencia de una noción de derivada fracionaria (bien $d^\alpha f$ o bien $D^\alpha f$) en un cierto espacios $L^p(\mathbb{C})$, se tiene automátciamente la pertenencia a dicho espacio $L^p(\mathbb{C})$ de la otra noción.

## 6.2. $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ con $\alpha p > 2$.

Este es el caso más sencillo que nos ocupa ya que en este caso tenemos por el *Embedding Sobolev Fraccionario* continuidad del coeficiente $\mu$ y por lo tanto, pertenencia en $VMO(\mathbb{C})$. Este hecho nos ahorra mucho esfuerzo al tener ya probada la invertibilidad del operador

$$I - \mu\mathcal{B} : L^p(\mathbb{C}) \mapsto L^p(\mathbb{C})$$

para toda $p \in (1, \infty)$, aunque no para $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$.

Fue Cruz en su tesis doctoral [3] el que prueba el siguiente teorema que nos da la regularidad esperada de $\phi$ la solución principal de la ecuación de Beltrami

$$\overline{\partial}\phi = \mu\partial\phi.$$

**Teorema 6.2.1.** *[3], Supongamos que tenemos $0 < \alpha < 1$ y $\mu \in W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ con $\alpha p > 2$, de soporte compacto y satisfaciendo la condición de elipticidad $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$. Entonces, la solución principal $\phi$ de la ecuación de Beltrami*

$$\overline{\partial}\phi = \mu\partial\phi$$

*es de la forma*

$$\phi\,(z) = z + \mathcal{C}h\,(z)$$

*con $h(z)$ perteneciente a $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$.*

Para demostrar este resultado, Cruz se basa en dos resultados que él mismo prueba en su tesis. El primero de ellos nos asegura que el operador $I - \mu^n\mathcal{B}^n$ es invertible en $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ con $\alpha p > 2$ para algún $n \in \mathbb{N}$, el segundo que el operador comnutador $[\mu, \mathcal{B}]$ es compacto en espacios $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ si $\alpha p > 2$. Con esto, actuando de forma similar a Iwaniec en [8] consigue demostrar que $h = (I - \mu\mathcal{B})^{-1}\mu$ es precisamente una función de $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$. Para saber más sobre este estos resultados y muchos otros, remitimos al lector a la referencia [3] *(Capítulo 2)*.

## 6.3. $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ con $\alpha p < 2$.

En este caso, ya no tenemos la invertibilidad del operador $(I - \mu\mathcal{B})$ en todos los $L^p(\mathbb{C})$ como teníamos en el caso de Cruz. Tampoco tenemos continuidad del coeficiente. Pero aún así, con ayuda del Lema 6.1.6, se demuestra en [3] el siguiente resultado.

**Teorema 6.3.1.** *[5]. Sean $\alpha \in (0,1)$ y $\mu \in W^{\alpha,2}(\mathbb{C})$ con soporte compacto en $\mathbb{D}$ tal que $|\mu| \leq \frac{K-1}{K+1}$. Y sea $\phi : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ la solución principal de*

$$\overline{\partial}\phi = \mu\,\partial\phi.$$

*Entonces se cumple que:*

- $\phi(z) - z \in W^{1+\theta\alpha,2}(\mathbb{C})\ \forall\theta \in \left(0, \frac{1}{K}\right)$.
- $\|D^{1+\theta\alpha}\,(\phi - z)\,\|_{L^2(\mathbb{C})} \leq C\|\mu\|^{\theta}_{W^{\alpha,2}(\mathbb{C})}$ *con* $C = C(K, \theta, \alpha)$.

*Demostración.* Consideremos $\Psi_n \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ una aproximación a la $Id.$ tal que $\Psi_n(z) = n^2\Psi(nz)$. Y definamos $\mu_n := \mu * \Psi_n$ que cumple que $sop(\mu_n) \subset \frac{n+1}{n}\mathbb{D}$. Observemos antes de nada que $\|\mu_n - \mu\|_{W^{\alpha,2}(\mathbb{C})} \to 0$. Ya que:

$$\|\mu_n - \mu\|_{L^2(\mathbb{C})} \to 0 \text{ por el Teorema de Lebesgue.}$$

Y por otro lado, al ser $\mu, \mu_n \in W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$, tenemos que existen $g$ y $g_n$ tales que

$$\begin{aligned} \mu_n &= G_\alpha * g_n \quad \text{y además} \quad \|\mu_n\|_{W^{\alpha,2}(\mathbb{C})} = \|g_n\|_{L^2(\mathbb{C})}, \\ \mu &= G_\alpha * g \quad \text{y además} \quad \|\mu\|_{W^{\alpha,2}(\mathbb{C})} = \|g\|_{L^2(\mathbb{C})}, \end{aligned}$$

de donde se deduce que $g_n = g * \Psi_n$ y por tanto

$$\begin{aligned} \|\mu_n - \mu\|_{W^{\alpha,2}(\mathbb{C})} &= \|g_n - g\|_{L^2(\mathbb{C})} \\ &= \|g * \Psi_n - g\|_{L^2(\mathbb{C})} \to 0 \qquad \text{por el teorema de Lebesgue.} \end{aligned}$$

Y de la Proposición 6.1.2 se deduce que $\{D^{\alpha\theta}\mu_n\}$ es una sucesión acotada en $L^{\frac{2}{\theta}}(\mathbb{C})$ para toda $\theta \in [0,1]$.

Por otro lado, para cada $\mu_n$ existe una única solución normalizada $\phi_n$, la cual cumple que

$$\phi_n(z) = z + \mathcal{C}h_n(z),$$

dónde $h_n(z)$ es la única solución en $L^2(\mathbb{C})$ de $h_n = \mu_n \mathcal{B} h_n + \mu_n$ que además hace que $h_n = (I - \mu\mathcal{B})^{-1}\mu_n$. Por tanto $h_n \in L^p(\mathbb{C})$ para todo $p \in (\frac{2K}{K+1}, \frac{2K}{K-1})$ y además su norma en el espacio $L^p(\mathbb{C})$ cumple que $\|h_n\|_{L^p(\mathbb{C})} \le C$ con $C = C(K,p)$ independiente de $n \in \mathbb{N}$.

Y de la definición de $\phi$ y de las Proposiciones 2.2.2 y 2.2.4 se sigue que

$$\begin{cases} \phi_n(z) - z = \mathcal{C}h_n(z) \in L^p(\mathbb{C}) \text{ con } p \in \left(\frac{2K}{K+1}, \frac{2K}{K-1}\right), \\ \partial\phi_n(z) - 1 = \mathcal{B}h_n \in L^p(\mathbb{C}) \text{ con } p \in \left(\frac{2K}{K+1}, \frac{2K}{K-1}\right), \\ \overline{\partial}\phi_n(z) = h_n(z) \in L^p(\mathbb{C}) \text{ con } p \in \left(\frac{2K}{K+1}, \frac{2K}{K-1}\right). \end{cases}$$

Por lo que efectivamente $\phi_n(z) - z \in W^{1,p}(\mathbb{C})$.

Ahora definiremos

$$H_n(z) \;=\; \phi(z) - z \;=\; \mathcal{C}h_n(z) \in W^{1,p}(\mathbb{C}) \text{ con } p \in \left(\frac{2K}{K+1}, \frac{2K}{K-1}\right)$$

que cumple la ecuación

$$\overline{\partial}H_n(z) = \mu_n \partial H_n(z) + \mu_n.$$

De donde deduciremos que $\phi_n - z \in W^{1+\alpha\theta,2}(\mathbb{C})$.

Sean $\beta = \alpha\,\theta$ y $D^\beta$, entonces

$$D^\beta \overline{\partial} H_n = D^\beta(\mu_n \partial H_n) + D^\beta \mu_n$$

y existirá un $E_n^\beta := D^\beta(\mu_n\partial H_n) - (D^\alpha\mu_n)\partial H_n - \mu_n D^\beta \partial H_n + D^\beta\mu_n$ perteneciente a $L^2(\mathbb{C})$, cómo veremos más adelante, tal que:

$$\begin{aligned} D^\beta\overline{\partial}H_n \;&=\; \mu_n D^\beta \partial H_n + \left(D^\beta \mu_n\right)\, H_n + E_n^\beta \\ D^\beta\overline{\partial}H_n - \mu_n D^\beta\partial H_n \;&=\; \left(D^\beta\mu_n\right)\, H_n + E_n^\beta \\ (I - \mu_n\mathcal{B})\left(\overline{\partial}D^\beta H_n\right) \;&=\; D^\beta\mu_n \partial H_n + E_n^\beta \end{aligned} \tag{6.1}$$

Y por la Proposición 6.1.6 se puede afirmar que para $p_1, p_2$ tales que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$ se tiene que:

$$\|E_n^\beta\|_{L^p(\mathbb{C})} \le C_0 \|D^\beta\mu_n\|_{L^{p_1}(\mathbb{C})} \|\partial H_n\|_{L^{p_2}(\mathbb{C})},$$

por lo que tomando $\theta \in \left(0, \frac{1}{K}\right)$, $p_1 = \frac{2}{\theta}$ y $p_2 = \frac{2}{1-\theta} \in \left(2, \frac{2K}{2K-1}\right)$ se consigue que

$$\|E_n^\beta\|_{L^2(\mathbb{C})} < \infty,$$

es más

$$\| \left(D^{\beta}\mu_n\right)\partial H_n + E_n^{\beta}\|_{L^2(\mathbb{C})} \leq (C_0+1)\,\|D^{\beta}\mu_n\|_{L^{\frac{2}{\theta}}(\mathbb{C})}\|\partial H_n\|_{L^{p_2}(\mathbb{C})}.$$

Y ya sabemos que $(I-\mu\mathcal{B})$ es un operador invertible de $L^2(\mathbb{C})$ y que además puede probarse (mediante la Serie de Neumman) que $\|\,(I-\mu\mathcal{B})^{-1}\,\|_{L^2(\mathbb{C})\mapsto L^2(\mathbb{C})} \leq \frac{K+1}{2}$.

Por tanto, de la Fórmula 6.1, de la cota en norma de $E_\beta$ y la invertibilidad de $(I-\mu\mathcal{B})$ en $L^2(\mathbb{C})$, se sigue que

$$\|\overline{\partial}D^{\beta}H_n\|_{L^2(\mathbb{C})} \leq \frac{1}{2}\,(K+1)\,(C_0+1)\,\|D^{\beta}\mu_n\|_{L^{\frac{2}{\theta}}(\mathbb{C})}\|\partial H_n\|_{L^{p_2}(\mathbb{C})}.$$

Y por construcción de $H_n(z)$ teníamos que

$$\begin{aligned}\|\partial H_n\|_{L^{p_2}(\mathbb{C})} =& \|\partial\mathcal{C}h_n\|_{L^{p_2}(\mathbb{C})} = \|\mathcal{B}h_n\|_{L^{p_2}(\mathbb{C})}\\ \leq& \|\mathcal{B}\|_{L^{p_2}(\mathbb{C})\mapsto L^{p_2}(\mathbb{C})}\|h_n\|_{L^{p_2}(\mathbb{C})} \leq C\,(p_2,K,\theta)\,.\end{aligned}$$

Que juntándolo con lo anterior y usando la Proposición 6.1.2, se llega a

$$\|\overline{\partial}D^{\beta}H_n\|_{L^2(\mathbb{C})} \leq (C_0+1)\,C(K,\theta)\|\mu_n\|^{\theta}_{W^{\alpha,2}(\mathbb{C})}.$$

Ahora, haciendo uso de un argumento de compacidad estándar, se obtiene que:

$$\|\overline{\partial}D^{\beta}\,(\phi-z)\,\|_{L^2(\mathbb{C})} \leq (C_0+1)\,C\,(K,\theta)\,\|\mu\|^{\theta}_{W^{\alpha,2}(\mathbb{C})}$$

por lo que $\phi(z)-z\in W^{1+\beta,2}(\mathbb{C})\equiv W^{1+\alpha\theta,2}(\mathbb{C})$ cómo queriamos ver. Y además se tiene la cota

$$\|D^{1+\alpha\theta}\,(\phi-z)\,\|_{L^2(\mathbb{C})} \leq C\|\mu\|^{\theta}_{W^{\alpha,2}(\mathbb{C})} \;\text{ con }\; C=C\,(K,\alpha,\theta) \;\text{ y }\; \theta\in\left(0\,,\frac{1}{K}\right).$$

$\square$

Démonos cuenta de que la demostración anterior puede repetirse con $\mu\in W^{\alpha,p}$ con $p\in\left(1+k,1+\frac{1}{k}\right)$. El único obstaculo con el que nos encontramos es en el paso de ver que efectivamente el error $E_\beta^n$ pertenece a $L^p(\mathbb{C})$. Para ello, usabamos la desigualdad general

$$\|E_n^{\beta}\|_{L^p(\mathbb{C})} \leq C_0\|D^{\beta}\mu_n\|_{L^{p_1}(\mathbb{C})}\|\partial H_n\|_{L^{p_2}(\mathbb{C})},$$

y tomando los valores adecuados para $p_1$, $p_2$ y $\theta$ se obtenía que $E_n^{\beta}$ pertenecía a $L^2(\mathbb{C})$ y de la cota para la invertibilidad del operador $(I-\mu\mathcal{B})$ en $L^2(\mathbb{C})$ conseguíamos los resultados. Ahora, podremos extender el resultado siempre y cuando $p_2$ perdenezca al intervalo crítico, que es dónde tenemos convergencia de $\partial H_n$. Por ello, si tomamos $p_1 = \frac{p}{\theta}$, $p_2 = \frac{p}{1-\theta}$ y $\beta = \alpha\theta$, tendremos convergencia cuando $p_2 \in \left(\frac{2K}{K+1}, \frac{2K}{K-1}\right)$. Es decir siempre y cuando

$$\frac{2K}{K+1} < \frac{p}{1-\theta} < \frac{2K}{K-1} \quad \text{o simplemente cuando} \quad 0 \leq \theta < 1 - \frac{K-1}{2K} \cdot p$$

Es decir, tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 6.3.2.** *Dada $\mu \in W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ con $p \in \left(\frac{2K}{K+1}, \frac{2K}{K-1}\right)$, $0 < \alpha < 1$, de soporte compacto contenido en $\mathbb{D}$ y tal que $|\mu| \leq \frac{K-1}{K+1}$. Y sea $\phi : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ la solución principal de la ecuación de Beltrami*

$$\overline{\partial}\phi = \mu\partial\phi.$$

*Entonces se cumple que:*

$$\begin{cases} \phi - z \in W^{1+\theta\alpha,p}(\mathbb{C}) & \text{para toda } \theta < 1 - \frac{K-1}{2K} \cdot p. \\ \left\| D^{1+\alpha\theta} \left(\phi - z\right) \right\|_{L^p(\mathbb{C})} \leq C \left\|\mu\right\|^{\theta}_{W^{\alpha,p}(\mathbb{C})} & \text{con } C = C\left(K, \theta, \alpha, p\right). \end{cases}$$

La constante de la cota sale al tenerse en cuenta que ahora la constante de invertibilidad del operador $(I - \mu\mathcal{B})$ depende de $K$ y de $p$ y no sólo de $K$. Observemos, que mientras en el caso $\mu \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ con $p < 2$, se tenía $\phi \in W^{2,q}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $q$ menor que una $q_0$ dada (ver Teorema 5.2.1), ahora en cambio podemos mantener la misma integrabilidad pero a costa de reducir el orden de derivación. Como antes, la cuestión de si se pudiera ganar un orden de derivabilidad mayor o igual que $\alpha$ admitiendo una pérdida en la integrabilidad queda sin respuesta. La demostración del teorema falla si se intenta tomar un orden de derivación $\beta$ superior a $\alpha$.

**Problema abierto:** ¿Son óptimos estos índices para estos casos?.

## 6.4. El caso crítico $\alpha \cdot p = 2$

A la luz de este último Teorema y de la discrepancia con su homólogo en el caso Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{C})$ con $p < 2$ nos hace dudar de si en el caso límite $\alpha p = 2$ se pudieran mantener simultáneamente la derivabilidad y la integrabilidad o no. Sabemos que si $\mu \in W^{1,2}(\mathbb{C})$, entonces se gana todo un grado de derivabilidad para $\phi$ y como mucho se pierde el extremo de integrabilidad. En el espacio $W^{\alpha,\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})$ tenemos la inclusión a $VMO$, lo que nos será suficiente para probar el siguiente teorema.

**Proposición 6.4.1.** *Sea $\mu$ perteneciente a $W^{\alpha,\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})$ con $0<\alpha<1$, de soporte compacto contenido en $\mathbb{D}$ y que satisfaga la condición de elipticidad $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$. Y sea $\phi$ la solución principal de la ecuación del Beltrami*

$$\overline{\partial}\phi = \mu\partial\phi.$$

*Entonces, $\phi \in W^{1+\beta,\frac{2}{\alpha}}_{loc}(\mathbb{C})$ para todo $\beta\in(0,\alpha)$. Y además se tiene la siguiente cota de normas:*

$$\|D^{1+\beta}(\phi - z)\|_{L^{\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})} \leq C\|\mu\|^{\frac{\beta}{\alpha}}_{W^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{C})} \quad \text{con } C = C(k,\alpha,\beta) \;\; y \;\; \beta\in(0\,,\,\alpha)\,.$$

*Demostración.* Para ser formales en la demostración, habría que volver a hacer uso de regularizaciones la misma forma que hicimos en el Teorema 6.3.1. En enfecto, si seguimos la prueba allí mostrada, se observa que sigue siendo aplicable a nuestro caso e incluso en un marco más general. De ahí la mejora de este nuevo resultado. Recordemos que el esquema de aquella prueba consistía tomar una ecuación de Beltrami equivalente

$$\overline{\partial}\phi = \mu\partial\phi \Longleftrightarrow \overline{\partial}H = \mu\partial H + \mu.$$

Donde ahora, $H\in W^{1,r}(\mathbb{C})$ para toda $r\in(1,\infty)$. Luego aplicabamos una a $D^\beta$-derivada esta nueva ecuación de Beltrami con $0<\beta<\alpha$ para obtener así que

$$\begin{aligned}\overline{\partial}H = \mu\partial H + \mu \Rightarrow D^\beta\overline{\partial}H &= D^\beta\mu\cdot\partial H + \mu D^\beta\partial H + D^\beta\mu + E^\beta\\ \Rightarrow (I-\mu\mathcal{B})\,D^\beta\overline{\partial}H &= D^\beta\mu + D^\beta\mu\cdot\partial H + E^\beta,\end{aligned}$$

con $E^\beta$ un cierto error que sabemos que para totdo $\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}$ se cumple la desigualdad de normas:

$$\|E\|_{L^p(\mathbb{C})} \leq C\left\|D^\beta\mu\right\|_{L^{p_1}(\mathbb{C})}\cdot\|\partial H\|_{L^{p_2}(\mathbb{C})}$$

Y sín más que tomar $p_1=\frac{2}{\beta}$, $p_2=\frac{2}{\alpha-\beta}$ y $p=\frac{2}{\alpha}$, gracias a que el operador $I-\mu\mathcal{B}$ ahora es invertible en todos los $L^p(\mathbb{C})$ se tiene el resultado.

□

Observemos la discrepancia de este caso extremo $\alpha p = 2$ con el anterior $\alpha p < 2$. Antes, pudimos mantener la integrabilidad a costa de una pérdida grande en la derivabilidad, ahora mantendremos la integrabilidad a costa a lo sumo del extremo en la derivabilidad. La prueba ha sido una copia de la demostración del Teorema 6.3.1 simplemente teniendo en cuenta que ahora podemos dilatar la automejora en las derivadas de $\phi$ hasta $\theta < \alpha$ y no sólo hasta $\theta < 1 - \frac{K-1}{2K}p$ con $K = \frac{1+k}{1-k}$. Resumidamente, para $\|\mu\|_\infty \leq k$ con soporte compacto, $\alpha p < 2$ y $\alpha q > 2$ se cumple que:

$$\begin{cases} \mu \in W^{\alpha,p}(\mathbb{C}) \Rightarrow \phi \in W^{1+\theta\alpha,p}_{loc}(\mathbb{C}) \quad \text{para toda } \theta \in \left(0, 1 - \frac{k}{k+1} \cdot p\right). \\ \mu \in W^{\alpha,\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C}) \Rightarrow \phi \in W^{1+\theta\alpha,\frac{2}{\alpha}}_{loc}(\mathbb{C}) \quad \text{para toda } \theta \in (0,1)\,. \\ \mu \in W^{\alpha,q}(\mathbb{C}) \Rightarrow \phi \in W^{1+\alpha,q}_{loc}(\mathbb{C}). \end{cases}$$

# Capítulo 7

# Resultados para $\phi^{-1}$.

Es sabido que si tenemos un homeomorfismo K-cuasiconforme $\phi$, entonces $\phi^{-1}$ será también un homeomorfismo $K$-cuasiconforme. Por tanto, $\phi^{-1}$ pertenecerá a $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$, lo que nos asegurará la existencia de las primeras derivadas de $\phi^{-1}$ y por tanto que el coeficiente de Beltrmi $\nu$ de $\phi^{-1}$ estará bien definido. A lo largo de esta sección, nuestro interés estará enfocado a deducir propiedades de $\nu$ según el coeficiente de Beltrami $\mu$ de $\phi$ esté en un espacio de funciones u otro.

Antes de poder entrar en materia, necesitaremos algunos resultados previos sobre operadores de composición.

## 7.1. Operadores de composición con aplicaciones cuasiconformes.

**Teorema 7.1.1.** *[13] Sea $\phi$ una aplicación cuasiconforme, y definamos el operador de composición*

$$\begin{aligned} T_\phi : & X \mapsto X \\ & u \mapsto T_\phi(u) := u \circ \phi. \end{aligned}$$

*Entonces los operadores*

$$\begin{aligned} T_\phi, T_{\phi^{-1}} : W^{1,2} &\mapsto W^{1,2} \\ T_\phi, T_{\phi^{-1}} : BMO &\mapsto BMO \end{aligned}$$

*son acotados.*

**Corolario 7.1.2.** *Dada $\phi$ una aplicación cuasiconforme, entonces los operadores de composición*

$$T_\phi\,,\, T_{\phi^{-1}} : W^{\alpha,\frac{2}{\alpha}} \mapsto W^{\alpha,\frac{2}{\alpha}}$$

*son acotados para toda $\alpha \in (0,1)$.*

*Demostración.* Para demostrar este corolario, sólo hay que observar por un lado que

$$F_\alpha^{p,2} = W^{\alpha,p}, \quad F_1^{2,2} = W^{1,2}, \text{ y } F_0^{\infty,2} = BMO,$$

y por otro que por el Teorema 7.1.1 tenemos acotación para $F_1^{2,2}$ y $F_0^{\infty,2}$. Y ya sin más que aplicar la interpolación compleja

$$\left[F_1^{2,2}, F_0^{\infty,2}\right]_\alpha = F_\alpha^{\frac{2}{\alpha},2} = W^{\alpha,\frac{2}{\alpha}},$$

se consigue el resultado. □

**Teorema 7.1.3.** *[13] Sea $\phi$ una homeomorfismo de clase $W^{1,1}_{loc}(\mathbb{C})$, y definimos el operador de composición*

$$\begin{aligned} T_{\phi^{-1}} :& X \mapsto X \\ & u \mapsto T_{\phi^{-1}}(u) := u \circ \phi^{-1}. \end{aligned}$$

*Se cumple que:*

- *Si $T_{\phi^{-1}}$ es acotado para $X = W^{1,2}$ ó $X = BMO$ entonces $\phi$ es cuasiconforme.*
- *Si $T_{\phi^{-1}}$ es acotado para $W^{\alpha,p}$ para toda $\alpha \in (0,1)$ y para toda $p \in (1,\infty)$, entonces $\phi$ es Bilipschitsz.*

**Teorema 7.1.4.** *Dada $\phi$ una aplicación $K$-cuasiconforme, definamos $T_{\phi^{-1}}$ como el operador de composición*

$$\begin{aligned} T_{\phi^{-1}} :& X \mapsto X \\ & u \mapsto T_{\phi^{-1}}(u) := u \circ \phi^{-1}. \end{aligned}$$

*Se cumple cumple que*

*(a) si $\phi$ es Lipschitz, entonces $T_{\phi^{-1}} : W^{\beta,p} \mapsto W^{\beta,p}$ es un operador acotado para todo $\beta \in [0,1]$ y $p < 2$.*

*(b) si $\phi$ es Bilipschitz, entonces $T_{\phi^{-1}} : W^{\beta,p} \mapsto W^{\beta,p}$ es un operador acotado para todo $\beta \in [0,1]$ y $p \in (1,\infty)$.*

*Demostración.*

(a) Por un lado, si $\phi$ es Lipschitz, entonces $J(z,\phi) \leq C < \infty$ para casi todo $z \in \mathbb{C}$ con $C$ una constante. Además al ser $\phi^{-1}$ una aplicación $K$-cuasiconforme, tenemos asegurado que $\left|D\phi^{-1}\right|^2 \leq K \cdot J\left(z,\phi^{-1}\right)$ y por lo tanto, tomando $\omega = \phi^{-1}(z)$ tendremos que

$$\int_{\mathbb{C}} \left|\left(u \circ \phi^{-1}\right)(z)\right|^p \, dA(z) = \int_{\mathbb{C}} u^p(\omega)\, J(\omega,\phi)\, dA(\omega) \leq C \int_{\mathbb{C}} u^p(\omega)\, dA(\omega).$$

Y además $D\left(u \circ \phi^{-1}\right)(z) = (Du)\left(\phi^{-1}(z)\right) \cdot \left(D\phi^{-1}\right)(z)$, por lo que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} \left|D\left(u \circ \phi^{-1}\right)(z)\right|^p \, dA(z) &= \int_{\mathbb{C}} \left|(Du)\left(\phi^{-1}(z)\right)\right|^p \left|D\phi^{-1}(z)\right|^p \, dA(z) \\
&\leq K^{\frac{p}{2}} \cdot \int_{\mathbb{C}} \left|(Du)\left(\phi^{-1}(z)\right)\right|^p J\left(z,\phi^{-1}\right)^{\frac{p}{2}} \, dA(z) \\
&= K^{\frac{p}{2}} \cdot \int_{\mathbb{C}} |Du(\omega)|^p \, J(\omega,\phi)^{1-\frac{p}{2}} \, dA(\omega) \\
&\leq C \cdot K^{\frac{p}{2}} \cdot \int_{\mathbb{C}} |Du(\omega)|^p \, dA(\omega)
\end{aligned}$$

donde en el último paso, hemos usado que $p < 2$. Y de ambas desigualdades se deduce que para todo $p < 2$ los operadores

$$\begin{aligned}
T_{\phi^{-1}} &: L^p(\mathbb{C}) \;\mapsto\; L^p(\mathbb{C}) \quad \text{y} \\
T_{\phi^{-1}} &: W^{1,p}(\mathbb{C}) \mapsto W^{1,p}(\mathbb{C}).
\end{aligned}$$

son acotados, y por interpolación se consigue el resultado.

(b) Como $\phi$ es Bilipschitz, entonces existe una constante $C$ que depende de $K$ tal que

$$\frac{1}{C} \leq J(z,\phi)\ ,\ J\left(\omega,\phi^{-1}\right) \leq C$$

dónde $\omega = \phi^{-1}(z)$. Y al igual que antes, tendremos que

$$\int_{\mathbb{C}} \left|\left(u \circ \phi^{-1}\right)(z)\right|^p \, dA(z) = \int_{\mathbb{C}} u^p(\omega)\, J(\omega,\phi)\, dA(\omega) \leq C \int_{\mathbb{C}} u^p(\omega)\, dA(\omega),$$

y de la regla de la cadena deducimos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} \left|D\left(u\circ\phi^{-1}\right)(z)\right|^p \, dA\,(z) &= \int_{\mathbb{C}} \left|(Du)\left(\phi^{-1}(z)\right)\right|^p \left|D\phi^{-1}(z)\right|^p \, dA\,(z)\\ &= \int_{\mathbb{C}} \left|(Du)\left(\phi^{-1}(z)\right)\right|^p J\left(z,\phi^{-1}\right)^{\frac{p}{2}} \, dA\,(z)\\ &= \int_{\mathbb{C}} \left|Du\,(\omega)\right|^p J\,(\omega,\phi)^{1-\frac{p}{2}} \, dA\,(\omega)\\ &\approx C\int_{\mathbb{C}} \left|Du\,(\omega)\right|^p \, dA\,(\omega),\end{aligned}$$

dónde las equivalencias entre normas son con constantes dependientes sólo de $K$ y el último paso puede darse independientemente de $p$. Por tanto, tenemos que los operadores

$$\begin{aligned} T_{\phi^{-1}} &: L^p(\mathbb{C}) \ \mapsto \ L^p(\mathbb{C}) \quad \text{y}\\ T_{\phi^{-1}} &: W^{1,p}(\mathbb{C}) \mapsto W^{1,p}(\mathbb{C}).\end{aligned}$$

son acotados para todo $p\in(1,\infty)$ y por interpolación se consigue el resultado. □

## 7.2. Coeficiente de la composición y del inverso.

**Teorema 7.2.1.** *[1]. Supongamos que tenemos $f:\Omega\mapsto\Omega'$ cuasiconforme y $g:\Omega\mapsto\mathbb{C}$ cuasiregular con coeficientes de Beltrami $\mu_f.\mu_g$ respectivamente. Entonces, la composición $\left(g\circ f^{-1}\right)$ es cuasiregular en $\Omega'$ con coeficiente de Beltrami.*

$$\mu_{g\circ f^{-1}}(\omega) = \frac{\mu_g(z)-\mu_f(z)}{1-\mu_g(z)\overline{\mu_f(z)}}\frac{\partial f(z)}{\overline{\partial f(z)}} \qquad \textit{donde } \omega := f(z).$$

*Demostración.* Calcularemos primero las parciales de $f^{-1}$ y con ellas, las de $h=\left(g\circ f^{-1}\right)$, que nos permitirán conocer el coeficiente de Beltrami de la composición, es decir $\mu_{g\circ f^{-1}}$.

Sea $\omega=f(z)$. Por la regla de la cadena tenemos que

$$\partial Id(z) = \partial f^{-1}(\omega)\cdot\partial f(z) + \overline{\partial} f^{-1}(\omega)\cdot\overline{\overline{\partial} f(z)} = 1 \quad \text{y} \tag{7.1}$$

$$\overline{\partial} Id(z) = \partial f^{-1}(\omega)\cdot\partial f(z) + \overline{\partial} f^{-1}(\omega)\cdot\overline{\partial f(z)} = 0. \tag{7.2}$$

De donde haciendo

$$\begin{aligned}&\overline{\partial} f(z)\cdot(7.1) - \partial f(z)\cdot(7.2) \quad \text{y}\\ &\overline{\partial f(z)}\cdot(7.1) - \overline{\overline{\partial} f(z)}\cdot(7.2)\end{aligned}$$

obtenemos que

$$\overline{\partial} f^{-1}(\omega) = \frac{\overline{\partial} f(z)}{\left|\overline{\partial} f(z)\right|^2 - |\partial f(z)|^2} \quad \text{y}$$

$$\partial f^{-1}(\omega) = \frac{-\overline{\partial f(z)}}{\left|\overline{\partial} f(z)\right|^2 - |\partial f(z)|^2}.$$

Tomemos ahora $h(\omega) = \left(g \circ f^{-1}\right)(\omega)$, por la regla de la cadena

$$\partial h(\omega) = \frac{\overline{\partial} g(z) \cdot \overline{\overline{\partial} f(z)} - \partial g(z) \cdot \overline{\partial f(z)}}{\left|\overline{\partial} f(z)\right|^2 - |\partial f(z)|^2}$$

$$\overline{\partial} h(\omega) = \frac{\partial g(z) \cdot \overline{\partial} f(z) - \overline{\partial} g(z) \cdot \partial f(z)}{\left|\overline{\partial} f(z)\right|^2 - |\partial f(z)|^2}.$$

Y sin más que recordar que por definición

$$\overline{\partial} g = \mu_g \partial g, \quad \overline{\partial} f = \mu_f \partial f, \quad \overline{\overline{\partial} f} = \overline{\mu_f}\,\overline{\partial f},$$

ya puede deducirse que

$$\mu_{(g \circ f^{-1})}(\omega) = \frac{\overline{\partial} h(\omega)}{\partial h(\omega)} = \frac{\mu_f(z) - \mu_g(z)}{\mu_g(z) \cdot \overline{\mu_f(z)} - 1} \cdot \frac{\partial f(z)}{\overline{\partial f(z)}}.$$

□

Observemos, que gracias a este teorema, sin más que tomar

$$f(z) = \phi(z), \qquad g(z) = z \text{ con lo que obtenemos:}$$

$$\mu_f(z) = \mu(z), \qquad \mu_g(z) = 0, \qquad \nu := \mu_{g \circ f^{-1}}$$

se consigue una expresión siempre válida para $\nu$ coeficiente de Beltrami de $\phi^{-1}$. Concretamente:

$$\nu(z) = -\mu\left(\phi^{-1}(z)\right) \cdot \frac{\partial \phi}{\overline{\partial \phi}}\left(\phi^{-1}(z)\right).$$

Será esta expresión la que usaremos a lo largo de este capítulo y la que nos ayudará a localizar al coeficiente $\nu$ según al espacio al que pertenezca $\mu$. De entrada, la fórmula nos indica que $\nu \in L^\infty(\mathbb{C})$ con soporte compacto. Ahora entraremos a estudiar la regularidad de $\nu$ según la regularidad de $\mu$.

**Teorema 7.2.2.** *Consideremos una aplicación $\phi$ que sea $\mu$-cuasiconforme con coeficiente de Beltrami $\mu \in W^{1,2}(\mathbb{C})$, $\|\mu\|_\infty = k < 1$ y $\operatorname{supp}(\mu) \subset \mathbb{D}$. Entonces, $\phi^{-1}$ será una apliacación $\nu$-cuasiconforme con $\nu \in W^{1,2}(\mathbb{C})$.*

*Demostración.* Por un lado, de las observaciones hechas tras la prueba del Lema 5.1.2, podemos asegurar que $\exists g$ tal que $\partial\phi = e^g$ que además cumple $g \in W^{1,2}(\mathbb{C})$. Y por el otro, de las definiciones se sigue que $\nu$ y $\nu \circ \phi$ tienen soporte compacto y además

$$\begin{aligned}
&\nu\left(\phi(z)\right) = -\mu(z)\frac{\overline{\partial\phi(z)}}{\partial\phi(z)} = -\mu(z)e^{2iImg(g(z))} \in L^{\infty}(\mathbb{C}),\\
&D\left(\nu \circ \phi\right) = -\left(D\mu(z)\right)e^{2iImg(g(z))} - 2iD\left(Img\left(g(z)\right)\right)\mu(z)e^{2iImg(g(z))} \quad \text{y}\\
&\left|D\left(\nu \circ \phi\right)\right| \leq \left|D\mu\right| + 2\left|\mu\right|\,\left|D\left(Img(g)\right)\right|,
\end{aligned}$$

donde ambos sumandos están en $L^2(\mathbb{C})$. Por tanto $(\nu \circ \phi) \in W^{1,2}(\mathbb{C})$. Y gracias al Teroema 7.1.1, se consigue finalmente que $\nu \in W^{1,2}(\mathbb{C})$ por composición por cuasiconforme. $\square$

Si $\mu \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ con $p > 2$, la misma demostración nos sirve para asegurar que también $\nu \in W^{1,p}(\mathbb{C})$. Por contra, si $p < 2$, la demostración anterior falla. Concretamente, ya no está asegurado que exista una función $g \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ tal que $\partial\phi = e^g$. Esto nos despierta el interés por saber qué pasa cuando $\mu$ pertenece a otros espacios $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ con $0 < \alpha < 1$. Antes daremos un lema que nos permitirá destapar alguna propiedad de $\nu$ para el caso fraccionario.

**Lema 7.2.3.** *Dada $0 < \alpha < 1$, una función $f \in W^{\alpha,p}_{loc}(\mathbb{C})$ y una función Lipschitz $F$, entonces la composición $F \circ f \in W^{\alpha,p}_{loc}(\mathbb{C})$.*

*Demostración.* La pertenencia de $F \circ f$ en $L^p_{loc}(\mathbb{C})$ es inmediata por la continuidad de $F$. Para ver la pertencia a $W^{\alpha,p}_{loc}(\mathbb{C})$ haremos uso de la definición de la $D^\alpha$-derivada dada por la caracterización del Lema 6.1.3.

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}\left(F \circ f\right)(z) &= \left(\int_{\mathbb{C}} \frac{\left|\left(F \circ f\right)(z) - \left(F \circ f\right)(\omega)\right|^2}{\left|z - \omega\right|^{2+2\alpha}} dA\left(\omega\right)\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C\left(F\right)\left(\int_{\mathbb{C}} \frac{\left|f\left(z\right) - f\left(\omega\right)\right|^2}{\left|z - \omega\right|^{2+2\alpha}} dA\left(\omega\right)\right)^{\frac{1}{2}} \in L^p_{loc}(\mathbb{C})
\end{aligned}$$

donde $C\left(F\right)$ es la constante Lipschitz de $F$. $\square$

**Teorema 7.2.4.** *Consideremos una aplicación $\phi$ que sea $\mu$-cuasiconforme con coeficiente de Beltrami $\mu \in W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ con $\alpha\, p > 2$, $\|\mu\|_\infty = k < 1$ y $supp\left(\mu\right) \subset \mathbb{D}$. Entonces, $\phi^{-1}$ será una aplicación $\nu$-cuasiconforme con $\nu \in W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$.*

*Demostración.* En primer lugar, la expresión que nos da el Teorema 7.2.1 de $\nu(z)$, nos dice que $\nu \in L^{\infty}(\mathbb{C})$. Por otro lado, $\mu \in W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ con $\alpha\, p > 2$, por lo que se deduce del Teorema 6.2.1 que

$$\phi \in W^{1+\alpha,p}_{loc}(\mathbb{C}), \quad \text{por tanto} \quad D\phi \text{ es Localmente Bilipchipsz.}$$

Luego, existen $C, M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tales que

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} &\leq J\,(\,\cdot\,,\,\phi\,) \leq C \quad \text{en compactos,} \\ \frac{1}{M} &\leq \frac{|\phi(z)-\phi(\omega)|}{|z-\omega|} \leq M. \quad \text{Idem para } \phi^{-1}. \end{aligned}$$

Si conseguimos ver que

$$(\nu \circ \phi)\,(z) = -\mu\,(z) \cdot \frac{\partial\phi}{\overline{\partial\phi}}$$

está en $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$, habremos terminado la demostración. Efectivamente, si tal fuese el caso, como $\phi$ es Bilipschitz, el Teorema 7.1.4 nos garantizará que $\nu \in W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$. Para ello, tengamos primero en cuenta que los espacios $W^{\alpha,p}(\mathbb{C}) \cap L^{\infty}$ son un álgebra de Banach. Y segundo, que al ser $p > 2$ tenemos que $\partial\phi$ no se anula en ningún punto, y como la función $F\,(z) = \frac{z}{\bar{z}}$ es Lipschitz lejos del 0, tenemos por el lema anterior que $\frac{\partial\phi}{\overline{\partial\phi}} \in W^{\alpha,p}_{loc}(\mathbb{C}) \cap L^{\infty}(\mathbb{C})$. Por tanto $\nu \circ \phi \in W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$, y por composición por cuasiconforme tenemos que $\nu \in W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$. $\square$

## 7.3. Relación con el $\log\,(\partial\phi)$.

Nuestro interés es poder estudiar la ecuación de Beltrami

$$\overline{\partial}\phi^{-1} = \nu\partial\phi^{-1}$$

mediante los conocimientos previos que tengamos sobre la ecuación de Beltrami

$$\overline{\partial}\phi = \mu\partial\phi$$

dónde $\phi^{-1}$ es el homeomorfismo inverso de $\phi$. Ya sabemos que la función $\nu$ cumplirá la misma condición de elipticidad que $\mu$ y además que siempre tendremos las expresiones puntuales:

$$\nu(z) = -\mu\left(\phi^{-1}(z)\right) \cdot \frac{\partial\phi}{\overline{\partial\phi}}\left(\phi^{-1}(z)\right) \quad \text{y}$$

$$(\nu \circ \phi)(z) = -\mu(z) \cdot \frac{\overline{\partial \phi(z)}}{\partial \phi(z)} = -\mu(z) \cdot \frac{\overline{e^{g(z)}}}{e^{g(z)}} = -\mu(z) \cdot e^{2i \cdot Img(g)}.$$

donde hemos llamado $g = \log \partial\phi$. Esta función $g$ está bien definida en casi todo punto y es medible. Más aún, los argumentos que hemos visto muestran que

$$\mu \in W^{1,p}(\mathbb{C}),\ p > 2 \quad \Rightarrow \quad g \in W^{1,p}(\mathbb{C}).$$

E incluso se tiene para $p = 2$

$$\mu \in W^{1,2}(\mathbb{C}) \quad \Rightarrow \quad g \in W^{1,2}(\mathbb{C}).$$

La regularidad de $g$ permite deducir la de $\nu$. En efecto, la representación

$$\nu \circ \phi = -\mu \cdot e^{2i \cdot Img(g)}$$

y las propiedades del álgebra $W^{\alpha,p}(\mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{C})$ permiten obtener la regularidad de $\nu \circ \phi$. La de $\nu$ se obtiene automáticamente por medio de la acción del operador de composición

$$u \mapsto u \circ \phi$$

en el espacio de Sobolev adecuado.

Nada se sabía con anterioridad sobre estas cuestiones en espacios fraccionarios. Sin embargo, acabamos de demostrar que

$$\mu \in W^{\alpha,p}(\mathbb{C}),\ \alpha \cdot p > 2 \quad \Rightarrow \quad \nu \in W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$$

y conjeturamos que la misma implicación será cierta si $\alpha \cdot p = 2$. Para demostrar esta conjetura, basta responter afirmativamente a la siguiente pregunta.

**Pregunta:** ¿Es cierto que $\mu \in W^{\alpha,\frac{2}{\alpha}(\mathbb{C})}$ implica $g \in W^{\alpha,\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})$?

Efectivamente, supongamos que la respuesta es afirmativa. Entonces, la representación

$$\nu \circ \phi = -\mu e^{2i \cdot Img(g)},$$

corresponde a un producto de elementos de $W^{\alpha,\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{C})$, que es un álgebra invariante por composición de cuasiconforme. Ello implicaría, pues, que $\nu \in W^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{C})$.

Nótese que:

- Este argumento, sirve incluso si $\alpha = 1$ y también para $\mu \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ con $p > 2$.

- No importa la regularidad de $\partial\phi$, si no la de su logaritmo $g = \log \partial\phi$.

- Desconocemos, de momento, si las implicaciónes

$$\mu \in VMO(\mathbb{C}) \quad \Rightarrow \quad \nu \in VMO(\mathbb{C})$$

$$\mu \in VMO(\mathbb{C}) \quad \Rightarrow \quad g \in VMO(\mathbb{C})$$

  son ciertas, o no. Y de serlo, tampoco sabemos si nos aportaría alguna información al respecto.

# Nomenclatura

- $\mathbb{N}$ conjunto de los números naturales.
- $\mathbb{Q}$ cuerpo de los números racionales.
- $\mathbb{R}$ cuerpo de los números reales.
- $\mathbb{C}$ cuerpo de los números complejos.
- $\widehat{\mathbb{C}}$ esfera de Riemman, ie, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .
- $\Omega$ conjunto abierto y conexo del plano complejo. Puede ser $\mathbb{C}$.
- $\partial\Omega$ la frontera del conjunto $\Omega$.
- $\overline{\Omega}^{\tau}$ cierre de $\Omega$ en la topología $\tau$.
- $|E|$ la medida lebesgue del conjunto $E$ (en la dimensión que corresponda).
- $\mathbb{D}$ disco con radio la unidad en $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{D}_R$ disco de centro cero y radio $R$ en $\mathbb{C}$.
- $B_{\mathbb{E}}$ la bola unidad del espacio $\mathbb{E}$.
- $f \doteq g$ igualdad entre $f$ y $g$ dada bien por definición, o bien por un cambio de notación.
- $C(a)$ constante que depende únicamente de otra constante $a$ definida anteriormente. Idem para $C(a,b), C(a,b,c)$, etc. Cuando la constante es absoluta se usará $C$.
- $\mathcal{C}f$ transformada de Cauchy de la función f.

- $\mathcal{B}f$ transformada de Berling de la función f.
- $C^0(\Omega)$ el espacio de las funciones contínuas en $\Omega$.
- $C^k(\Omega)$ el subconjunto de $C^k(\Omega)$ tal que todas sus derivadas de orden igual o inferior a $k$ están en $C^0(\Omega)$.
- $C^\infty(\Omega)$ el subconjunto de las funciones de $C^0(\Omega)$ tales que tienen derivadas de cualquier orden en $C^0(\omega)$.
- $C_c^k(\Omega)$ el subconjunto de $C^k(\Omega)$ con $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ y soporte compacto.
- $C_0^k(\Omega)$ el subconjunto de $C^k(\Omega)$ con $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tales que valen cero en $\partial\Omega$, o que tiendan a cero en el infinito en el caso de $\Omega$ no acotado.
- $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ la clase de Schwartz.
- $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ el conjunto de las aplicaciones lineales y continuas de $\mathbb{E}$ a $\mathbb{F}$.
- $\mathbb{E}^*$ el dual topológico del espacio $\mathbb{E}$.
- $T^*$ el operador adjunto del operador $T$.

# Bibliografía


[1] K. Astala, T. Iwaniec and G. Martin, " *Elliptic Partial Difeferential Equations and Quasiconformal Mappings in the Plane*".

[2] L. V. Ahlfors, "*Lectures on Quasiconformal Mappings*".

[3] Víctor Cruz, "*Soluciones de la ecuación de Beltrami con coeficiente regular*".

[4] A. Clop, D. Faraco, J. Mateu, J. Orobitg, and X. Zhong, "*Beltrami equations with coefficient in the Sobolev Space* $W^{1,p}$". Publ. Mat. **53** (2009), 197-230.

[5] A. Clop, D. Faraco and Alberto Ruiz, "*Stability of Calderón's inverse conductivity problem in the plane for discontinuous conductivities*". Inverse Problems and Imaging, Volume 4, No. 1, 2010, 49-91.

[6] S. Hencl and P. Koskela, "*Regularity of the inverse of a Planar Sobolev Homeomorphism*". Arch. Rational Mech. Anal. 180(2006) 75-95.

[7] S. Müller, T. Qi and B.S. Yan, "*On a new class of elastic deformations not allowing for cavitation*", Annales de l'I.H.P., section C, tome 11, n°2(1994), p. 217-243.

[8] K. Astala, T. Iwaniec and E. Saksman, "*Beltrami Operators in the Plane*".

[9] C. B. Morrey, "*On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equartions*". Trans. Amer. Math. Soc., **43**(1938), 126-166.

[10] D. R. Adams and L. I. Hedberg, "*Function Spaces and Potential Theory*". Grundlehren der mathematuschen Wissenschaften.

[11] R. A. Adams and J. F. Fournier, "*Sobolev Spaces*".

[12] E. M. Stein. "*Singular Intregrals and Differentiability Properties of Function*". Princenton University Press.

[13] H.M. Reimann and T. Rychener, "*Funktionen beschränkter mittlerer Oszillation*".

[14] J. Mateu, J. Orobitg, J. Verdera, "*Extra cancellation of even Calderón-Zygmund kernels and quasiconformal mappings*", J. Math. Pures Appl. (9) 91 (2009), no. 4, 402?431.

[15] V. Cruz, J. Mateu, J. Orobitg, "*Beltrami equation with cofficient in Sobolev and Besov spaces*".

[16] T. Iwaniec and V. Sverak. "*On Mapping with Integrable Dilatation*".

[17] "*Notex on Fredholm (and compact) operators*". Universiteit Utrecht.

[18] Camila Frantzen "*Diffun2, Fredholm Operators*".