L'Esquema universal de clústers de 2-seccions d'una família de superfícies

Pau Brustenga i Moncusí

17 de juny de 2013

A totes les persones que m'han ajudat a realitzar
aquest treball i, en especial, al meu tutor
el Professor Joaquim Roé,
moltes gràcies...

Índex

Introducció

Intuïtivament una *família de superfícies* és un morfisme $\pi : \mathcal{S} \to B$ exhaustiu pel que totes les fibres $\mathcal{S}_t := \pi^{-1}(t)$, amb $t \in B$, són una superfície, per abús de notació, l'esquema $\mathcal{S}$ també es diu *família de superfícies.* A l'esquema B se l'hi diu la *base* de la família de superfícies. Una *secció* d'una família de superfícies és un morfisme $\sigma : B \to \mathcal{S}$ tal que $\pi \circ \sigma = Id_B$, és a dir, un morfisme que a cada punt t de la base li assigna un punt de la fibra $\mathcal{S}_t$ de la família de superfícies.

Donat un esquema B, dintre de la categoria d'esquemes hi ha el concepte de *esquema relatiu* a B o *B-esquema.* Aquest consisteix en un esquema $\mathcal{S}$ junt amb un morfisme $\pi : \mathcal{S} \to B$. En aquest cas els punts de $\mathcal{S}$ com a B-esquema, anomenats *B-punts*, no són els elements de $\mathcal{S}$ com a conjunt sinó que són els morfismes $\sigma : B \to \mathcal{S}$ que són seccions de π. Amb aquestes nocions una família de superfícies és una B-superfície i una secció de π és un B-punt de $\mathcal{S}$.

Sovint el conjunt de totes les seccions d'una família de superfícies π, que és $Hom_{B-Sch}(B, \mathcal{S})$, es pot veure com el conjunt de punts tancats d'un esquema X que anomenem *família universal de seccions* de π. L'esquema X es pot definir per una propietat universal, que no garanteix la seva existència, equivalent a què representi un cert functor associat a la família de superfícies π com mostra la proposició 1.2.6.

Informalment podem entendre el *blowup* d'un esquema X amb centre un subesquema $Y \subseteq X$ (secció 1.3) com l'esquema $\tilde{X}$ que resulta de "substituir" en l'esquema X el subesquema Y pel fibrat normal de Y en X, sense canviar res més en X. A més de l'esquema $\tilde{X}$, en un blowup, tenim un morfisme $\Pi : \tilde{X} \to X$ que essencialment envia els punts de X que no hem tocat a ells mateixos i cada punt τ del fibrat normal $\mathcal{N}_{Y/X}$ l'envia al punt $y \in Y$ a la fibra del qual pertany τ. És a dir, $\Pi|_{\tilde{X} \setminus \Pi^1(Y)}$ és un isomorfisme i $E := \Pi^{-1}(Y)$ és una família sobre Y que s'anomena *divisor excepcional* i en la que cada fibra E_y és isomorfa a la fibra sobre y del fibrat normal de Y en X. Com en el cas de les famílies de superfícies, direm indistintament blowup de X amb centre Y tant a $\tilde{X}$ com el morfisme $\Pi : \tilde{X} \to X$, tot i que estrictament el blowup és el morfisme. En el concepte de blowup són tan importants el centre Y com l'entorn X. Per exemple en el blowup d'un pla amb centre un punt el fibrat normal és isomorf a $\mathbb{P}^1$ mentre que si l'entorn és un espai de dimensió 3 aleshores ho és a $\mathbb{P}^2$.

Si l'esquema Y està format per un sol punt de X, els punts de E es diu que són punts *pròxims* al punt Y, també es diu que E forma el *primer entorn infinitesimal* de Y, es defineix de forma recursiva el k-èsim entorn infinitesimal de Y com el conjunt de punts que pertanyen al primer entorn infinitesimal de algun punt que pertany el $(k-1)$-èsim entorn infinitesimal de Y i un punt es diu *infinitament proper* a Y si pertany algun entorn infinitesimal de Y.

El cas de blowup que considerem majoritàriament és quan l'entorn és una família de superfícies $\pi : \mathcal{S} \to B$ i el centre és la imatge d'una secció σ. En aquest cas el blowup resultant, que denotem per $\mathcal{S}_\sigma$, és de forma natural una nova família de superfícies amb base B, concretament si el blowup és $\Pi : \mathcal{S}_\sigma \to S$ la nova família de superfícies és $\pi_\sigma := \pi \circ \Pi : \mathcal{S}_\sigma \to B$ i cada fibra $(\mathcal{S}_\sigma)_b$ és exactament el blowup de la fibra $\mathcal{S}_b$ amb centre $\sigma(b)$.

Un *clúster* sobre una varietat X és un conjunt K finit de punts tant de X com d'algun blowup de X o d'algun blowup d'algun blowup de X... On cada blowup ha de tenir com a centre un punt i si un punt $p \in K$ i p es pròxim a q, és a dir, p pertany al primer entorn infinitesimal de q, aleshores $q \in K$ també.

Donada una varietat S, els conjunts ordenats de r punts de S estan parametritzats per l'obert U de S^r complementari de la "diagonal gran". Però fins i tot quan S és projectiva U no ho és mai. Per moltes aplicacions rellevants resulta important construir compactificacions de U que "recordin" la "direcció" en què subconjunts de punts coincidents s'han trobat.

Kleiman en [12] introdueix els blowups iterats, unes varietats X_r que parametritzen de forma natural els clústers ordenats de r-punts d'una superfície S, per cada r, i que són una compactificació projectiva de U. En el present treball trobem la construcció que es dona en [22, III.2], on s'estudia l'estratificació de X_r donada per la proximitat.

Aquí generalitzem el concepte de clúster de punts d'una superfície a clúster de seccions d'una família de superfícies per passar al cas relatiu, és a dir, a clústers de B-punts d'una B-superfície. Que per dos B-punts σ i τ, el B-punt τ sigui pròxim a σ té la clara interpretació de que τ ha de ser una secció de $\mathcal{S}_\sigma$ amb tota la seva imatge continguda al divisor excepcional i així és com generalitzen els conceptes de k-èsim entorn infinitesimal i infinitament proper per B-punts. Donad una parella de seccions (σ, τ) de la mateixa família de superfícies π hi ha casos en els que no hi ha cap secció ω de π_σ tal que $\omega(B)$ sigui igual a la transformada estricta de $\tau(B)$. En aquest casos la parella (σ, τ) no forma un clúster de seccions, ja que ni podem veure τ com un B-punt de $\mathcal{S}_\sigma$ ni σ com un B-punt de $\mathcal{S}_\tau$. Quant això no passi direm que (σ, τ) és una *parella de seccions admissibles*, o direm que τ és admissible respecta σ. En la definició de clúster de seccions hem de tenir en compte que en un clúster sols poden apareixer seccions admissibles unes respecta les altres però sense usar la noció de admissiblitat.

Definició 0.0.1. Un *clúster ordenat de seccions sense base fixada* sobre una família de superfícies $\pi : \mathcal{S} \to B$ és una successió finita de seccions $\{\sigma_n\}_n$ tal que per tot n, σ_n és secció de $\pi_n : S_n \to B$ on $S_n := \mathrm{Bl}_{\sigma_{n-1}(B)}(S_{n-1})$ i $\pi_n := \mathrm{bl}_{\sigma_{n-1}(B)} \circ \pi_{n-1}$ amb $S_0 := \mathcal{S}$ i $\pi_0 := \pi$.

Definició 0.0.2. Fixada una secció σ de π, un *clúster ordenat de seccions amb base* σ sobre $\pi : \mathcal{S} \to B$ és un clúster ordenat de seccions $\{\sigma_n\}_n$ sense base fixada sobre π tal que per tot n, σ_n és infinitament propera a σ.

Un clúster de seccions generalitza el concepte de clúster de punts ja que si considerem una família de superfícies amb base un punt, aleshores $\mathcal{S}$ és una superfície i les seccions són punts d'aquesta.

Aquesta generalització segueix la filosofia general que Grothendieck exposa en els "Élements de Géométrie Algébrique" ([EGA]), un ha d'intentar desenvolupar els conceptes de la geometria algebraica en un context relatiu. En comptes de treballar sobre un cos base fixat, i considerar propietats d'una varietat cada vegada, un hauria de considerar un morfisme d'esquemes $\pi : \mathcal{S} \to B$ i estudiar les propietats del morfisme.

Els blowups iterats ha resultat ser una eina molt útil en el estudi de sistemes lineals amb punts múltiples imposats i en la geometria enumerativa (de corbes planes). Veure [1], [2], [5], [20] i [21] per veure les aplicacions dels blowups iterats en el estudi de sistemes lineals amb punts múltiples i veure [12], [14], [11] per les aplicacions en la geometria enumerativa. Una altre eina molt útil són les famílies o degeneracions de superfícies, veure [3].

El passar de clústers de punts a clústers de B-punts busquem generalitzar la construcció dels blowups iterats X_r de Kleiman al cas relatiu, pretenent unir les dues tècniques, els blowups iterats i les famílies o degeneracions de superfícies. Esperem que la comprensió de com interaccionen les dues tècniques permeti progressar en la comprensió d'aquests problemes.

En el treball introduïm la noció de *família universal de clústers de 2-seccions* per una família de superfícies $\pi : \mathcal{S} \to B$, que denotem per $Cl_2(\mathcal{S})$. Aquesta serà un esquema que parametritza tots els clústers ordenats de dos seccions. Fixada una secció σ de π, tenim dues famílies universals de seccions X i $\tilde{X}_\sigma$, la de π i la de π_σ respectivament. Llavors el conjunt de punts tancats de $Cl_2(\mathcal{S})$ és

$$\bigsqcup_{\sigma \in X} \tilde{X}_\sigma(\mathbb{C}).$$

La definició que trobem de $Cl_2(\mathcal{S})$ deixa veure, tenint present la construcció del X_r de Kleiman, com podria ser la definició de *família universal de clústers de r-seccions* que denotaríem per $Cl_r(\mathcal{S})$, però aquesta és una pregunta oberta per aquest treball. Aquestes definicions utilitzen una propietat universal, en el treball demostrem la seva existència per alguns casos. Però amb això no n'hi ha prou, el que és interessant és donar una construcció el més explícita possible d'aquests $Cl_r(\mathcal{S})$. En un inici el treball buscava donar una construcció general per cada r. Ràpidament varem veure que seria molt difícil fer-ho en el context d'un treball de final de màster i ens varem centrar en el cas $r = 2$. Tot i això el camí que varem seguir es fonamentava en un teorema intuïtivament clar però al desenvolupar els exemples ens varem adonar que era fals. La intuïció que dona la construcció dels X_r d'en Kleiman ha resultat no servir de molt per els $Cl_r(\mathcal{S})$, ja que les diferències són notables. Per exemple la dimensió dels X_r és finita i creixent respecte de r mentre que no té per que ser-ho per els $Cl_r(\mathcal{S})$. En l'exemple II, que és la família de superfícies $\pi : \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ on π és la projecció sobre la segona component, tenim que $Cl_1(\mathcal{S}) \cong X$, on X és la família universal de seccions de π, i X és un esquema quasiprojectiu de dimensió infinita i la seva descomposició en components connexes i irreductibles és donada per una unió infinita de varietats quasiprojectives X_d amb $d \in \mathbb{N}$, cada una de dimensió finita d. En canvi, per una secció $\sigma \notin X_0$, la família universal de seccions de π_σ, $\tilde{X}_\sigma$ és buida i, al final, $Cl_2(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2) \cong \mathrm{Bl}_\Delta(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)$ que té dimensió 4.

En el treball trobem que la construcció de $Cl_2(\mathcal{S})$ és possible i que aquesta s'ha de fer en termes de blowups a partir de $X \times X$. Primer comencem fixant una secció σ de π i veiem que $\tilde{X}$, la família universal de seccions de π_σ, es pot construir a partir de X en termes de blowups. Concretament, hi ha un morfisme $f_\sigma : \tilde{X} \to X$ que ens permet descriure $\tilde{X}$ com la unió disjunta d'un tancat, $f_\sigma^{-1}(\sigma)$, i el seu complementari, U, un obert. El tancat és isomorf a la família universal de seccions de $E_\sigma \to B$, que són les seccions infinitament properes a σ. A més,

Teorema 0.0.3. *Donada una component irreductible de $\tilde{X}$, $\tilde{X}^0$, definim $U_0 := \tilde{X}^0 \cap U$ Aleshores $f_\sigma|_{U_0}$ és isomorfisme amb la seva imatge.*

Teorema 0.0.4. *Existeix una estratificació de $X = \cup_p X^p$ tal que*

1) $\{\sigma\}$ és un estrat

2) Si existeix una $\tau \in X^{p_0}$ amb τ admissible respecte σ aleshores tot element de X^{p_0} és admissible respecte σ.

3) Cada component irreductible $X_0^{p_0}$ de l'estrat X^{p_0} és isomorf al U_0 d'una component irreductible $\tilde{X}_\sigma^0$ de $\tilde{X}$.

Aquests teoremes venen a dir que,

- Si $\tilde{X}^0 \subseteq f_\sigma^{-1}(\sigma)$, totes les seccions són infinitament properes a σ.
- Si $\tilde{X}^0 \subseteq U$, $\tilde{X}^0$ és isomorfa a un estrat X^p per f_σ.
- Si $\tilde{X}^0$ no està continguda en $f_\sigma^{-1}(\sigma)$ ni en U. Llavors $\tilde{X}^0$ és birracional a un estrat X^{p_0} per f_σ.

Aleshores sabem que pel tercer cas tindrem el següent diagrama, que ens diu que podem construir $\tilde{X}_\sigma$ a partir de X amb un blowup.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X}^0 \arrow[r, hook] & \mathrm{Bl}_?(\overline{X^{p_0}}) \arrow[r, "\mathrm{bl}_?"] & \overline{X^{p_0}} \\
U_0 \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[rr, "\cong"] & & X^{p_0} \arrow[u, phantom, "\cup"]
\end{tikzcd}$$

El blowup ha de tenir per centre un ideal amb suport σ i per completar la construcció caldria conèixer aquest ideal "a priori", però aquesta és una pregunta oberta per aquest treball.

Això no és necessari per veure que $Cl_2(\mathcal{S})$ es pot construir en termes de blowups a partir de $X \times X$, però sí que ajuda molt a entendre-ho, ja que el camí és pràcticament igual. En aquest cas veiem que hi ha un morfisme $F : Cl_2(\mathcal{S}) \to X \times X$ que, igual que abans, ens permet descriure $Cl_2(\mathcal{S})$ com la unió d'un tancat, $F^{-1}(\Delta_X(X))$ on $\Delta_X : X \to X \times X$ és la diagonal, i el seu complementari, un obert V. El tancat està format per els clústers de 2-seccions pels que la segona secció és infinitament propera a la primera. A més,

Proposició 0.0.5. *Donada una component irreductible de $Cl_2(\mathcal{S})$, C^0, definim $V_0 := C^0 \cap V$. Aleshores $F|_{V_0}$ és isomorfisme amb la seva imatge.*

Proposició 0.0.6. *Existeix una estratificació de $X \times X = \cup_p XX^p$ tal que*

- *$\Delta_X(X)$ és un estrat.*
- *Donat un estrat XX^{p_0} si existeix una $(\sigma, \tau) \in XX^{p_0}$ una parella de seccions admissibles aleshores tot element de XX^{p_0} és una parella de seccions admissibles.*
- *Cada component irreductible $XX_0^{p_0}$ de XX^p és isomorfa a un V_0 d'una component irreductible C^0 de $Cl_2(\mathcal{S})$.*

Per les components irreductibles de $Cl_2(\mathcal{S})$, C^0, aquests teoremes ens permeten dir,

- Si $C^0 \subseteq F^{-1}(\Delta_X(X))$, està format per clústers de 2-seccions en que la segona secció és infinitament propera a la primera.
- Si $C^0 \subseteq V$, C^0 és isomorf a un estrat XX^p per F.
- Si C^0 no està continguda en $F^{-1}(\Delta_X(X))$ ni en V. En aquest cas C^0 és birracional a un estrat XX^{p_0} per F.

Un altre cop, aquest teoremes ens permeten dir,

$$\begin{tikzcd} C^0 \arrow[r, hook] & \mathrm{Bl}_?(\overline{XX^{p_0}}) \arrow[r, "\mathrm{bl}_?"] & \overline{XX^{p_0}} \\ \cup & & \cup \\ V_0 \arrow[rr, "\cong"] & & XX^{p_0} \end{tikzcd}$$

Sabem que el blowup ha de tenir per centre un ideal amb suport $\Delta_X(X)$ però no coneixem aquest ideal i seria molt interessant tenir alguna descripció d'aquest ideal, però aquesta també és una pregunta oberta per aquest treball.

El context del treball és la teoria de les varietats i esquemes complexos, tal com s'exposa al llibre [10]. No obstant, donat que les famílies universals de seccions són esquemes sovint no noetherians, m'he hagut d'introduir en bibliografia més avançada, com Grothendieck [6, 7, 8], Vakil [25]...

El treball s'estructura en tres capítols. El primer consta d'un seguit de definicions, proposicions... Que busquen establir les bases del treball i donar rellevància a les propietats que més usarem dels objectes amb els que treballarem. El segon capítol és la part teòrica. En les primeres seccions trobem totes les definicions introduïdes per aquest treball, així com la construcció dels blowups iterats X_r de Kleiman. Les dues ultimes seccions, Blowups relatius i Clústers de dos seccions, és on es presenten els resultats originals que hem obtingut.
Finalment el tercer capítol consta de tres exemples dels quals hem tret la intuïció per la part teòrica. A més intentem desenvolupar-los de forma que es mostrin els resultats obtinguts al capítol dos. Són casos de famílies de superfícies per les que és relativament fàcil descriure la família universal de seccions i de cap manera busquen exemplificar tots els cassos possibles. El criteri per escollir-les ha sigut que siguessin fàcils d'estudiar.

Capítol 1

Definicions i primeres propietats

En aquest capítol definirem tots el conceptes que apareixeran al llarg del treball. Aquest no pretén ser un treball auto contingut, les definicions i propietats esmentades tan sols busquen fixar les bases del treball. Principalment seguirem el llibre [10].

1.1 Definicions generals

Definició 1.1.1. Donat $\mathcal{F}\colon\mathcal{C} \to Set$ un functor contravariant entre la categoria $\mathcal{C}$ i la categoria de conjunts Set, direm que $C \in Obj(\mathcal{C})$ *representa* $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}$ és naturalment isomorf a $Hom_{\mathcal{C}}(\_, C)$.

Exemple 1.1. Considerem l'auto-functor contravariant $P\colon Set \to Set$ que envia cada conjunt X al conjunt de les seves parts $P(X)$ i cada aplicació $f\colon X \to Y$ a la aplicació

$$\begin{array}{cccc} P(f) & : & P(Y) & \longrightarrow & P(X) \\ & & S & \longmapsto & f^{-1}(S) \end{array}.$$

El conjunt $\{0,1\}$ representa el functor P, on per cada conjunt X, l'isomorfisme natural entre $P(X)$ i $Hom_{Set}(X, \{0,1\})$ és el que envia cada $S \in P(X)$ a la funció característica de S.
Per un cos K en la categoria de K-espais vectorial el pas al dual es correspon el functor $Hom_{K-e.v.}(\_, K)$, és a dir K com a K-e.v. representa el auto-functor pas al dual en la categoria de K-e.v.

Definició 1.1.2. Sigui X un espai topològic i $T \subseteq X$ un tancat. T és *irreductible* si no pot ser expressat com la unió $T = T_1 \cup T_2$ de dos subconjunts propis i tancats de T.

Exemple 1.2. Per exemple en $\mathbb{R}^n$ amb la topologia usual els únics tancats irreductibles són els conjunts formats per un únic punt.
En l'espectre d'un anell commutatiu R els $V(I) := \{P \in \mathrm{Spec}(R) \text{ tal que } I \subset P\}$ per $I \subset R$ un ideal primer són tancats irreductibles, a més, si l'anell R també és noetherià, aquest són els únics tancats irreductibles. .

Definició 1.1.3. Sigui X un espai topològic definim la *dimensió* de X, com el suprem de tots els enters n tal que existeix una cadena d'inclusions estrictes $T_0 \subset T_1 \subset \cdots \subset T_n$ de tancats irreductibles continguts en X. La dimensió d'un espai topològic pot ser un nombre natural o $+\infty$ i la denotarem com $\dim(X)$.

Exemple 1.3. Seguint amb els mateixos exemples tenim que $\dim(\mathbb{R}^n) = 0$, ja que les úniques cadenes de tancats irreductibles possibles són $\{p_0\}$ amb $p_0 \in \mathbb{R}^n$. Clarament la dimensió de $\mathrm{Spec}(R)$ és exactament la dimensió de Krull de l'anell R.

Definició 1.1.4. Siguin X, Y i Z espais topològics amb $X, Y \subseteq Z$, definim la *codimensió* de Y com a subespai de X com el suprem de tots els enters n tal que existeix una cadena d'inclusions estrictes $T_0 \subset T_1 \subset \cdots \subset T_n$ de tancats irreductibles amb $X \cap Y \subseteq T_0$ i $T_n \subseteq X$. La denotarem com $Codim_X(Y)$

Exemple 1.4. Si X és un esquema afí i íntegre de tipus finit sobre un cos K, i si $Y \subseteq X$ és un subconjunt tancat i irreductible, llavors $Codim_X(Y) = \dim(X) - \dim(X \cap Y)$. Veure [10, II,3.2.8].

Definició 1.1.5. Un *espai topològic noetherià* X és un espai topològic tal que tota cadena decreixent de tancats $X \supset X_0 \supset \cdots \supset X_n \supset \ldots$ estaciona. X és *localment noetherià* si per tot $x \in X$ existeix un entorn obert U de x tal que U, amb la topologia induïda per la de X, és un espai topològic noetherià.

Exemple 1.5. L'espectre d'un anell noetherià R és un espai topològic noetherià.

Al llarg del treball trobem espais topològics noetherians i localment noetherià, similars a $\bigsqcup_{n\geq 0} \mathbb{A}^n$.

Definició 1.1.6. Donat un morfisme $f \in Hom_{\mathcal{C}}(S, B)$ una *secció* de f és un morfisme $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, S)$ tal que $f \circ g = Id_B$, és a dir, un invers per la dreta. Un morfisme invers per l'esquerra (que no necessitarem) s'anomena *retracció*.

Definicions Algebro-geomètriques

En tot el treball un esquema serà un $\mathbb{C}$-esquema. Denotem Sch la categoria de $\mathbb{C}$-esquemes. Utilitzarem la nocions de esquema i $\mathbb{C}$-esquema que trobem en [10].

Definició 1.1.7. Un *esquema afí* és un espai localment anellat $(X, \mathcal{O}_X)$ isomorf al espectre d'algun anell. Un *esquema* és un espai localment anellat $(X, \mathcal{O}_X)$ tal que cada $p \in X$ té un entorn obert U amb $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ un esquema afí. Fixat un esquema S, un *esquema sobre* S o un *S-esquema* és un esquema X junt amb un morfisme d'esquemes $f : X \to S$.

Si S és un $\mathbb{C}$-esquema i X és un S-esquema llavors $X \to S \to \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ és el morfisme que dona estructura de $\mathbb{C}$-esquema a X.

Definició 1.1.8. Donat S un esquema i un S-esquema X, un S-punt de X és una secció del morfisme $X \to S$ i un $\mathbb{C}$-punt és una secció de $X \to S \to \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$. Es denota per $X(\mathbb{C})$ i $X(S)$ els conjunts de $\mathbb{C}$-punts de X i de S-punts de X, respectivament. Notem que $X(\mathbb{C})$ està en bijecció amb el conjunt de punts tancats de X.

Fixat un esquema S hi ha el que s'anomena functor de punts. És el functor que envia a cada S-esquema X a $X(S)$.

Definició 1.1.9. Un esquema X és *íntegre* si per tot obert $U \subseteq X$, l'anell $\mathcal{O}_X(U)$ és un domini d'íntegre.

Definició 1.1.10. Sigui X un esquema. Per qualsevol punt $p \in X$, *l'espai tangent de Zariski* T_p de X en p és el dual del $k(p)$-espai vectorial $\mathcal{M}_p/\mathcal{M}_p^2$, on $\mathcal{M}_p$ és l'ideal maximal del anell local $\mathcal{O}_p$.

Definició 1.1.11. Donada X una varietat no singular, es defineix el *feix tangent* de X com $\mathcal{T}_X := Hom_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/\mathbb{C}}, \mathcal{O}_X)$, on $\Omega_{X/\mathbb{C}}$ és és el feix de diferencials relatives de X sobre $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$. El feix tangent és un feix localment lliure de rang $n = \dim(X)$.

Definició 1.1.12. Donada Y una subvarietat no singular d'una varietat no singular X, definida pel feix d'ideals $\mathcal{I}$. El feix $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ és localment lliure i es diu *feix conormal* de Y en X. Al seu dual $\mathcal{N}_{Y/X} = Hom_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, \mathcal{O}_Y)$ es diu el *feix normal* de Y en X i és localment lliure de rang $r = Codim_X(Y)$

Un esquema noetherià no és un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ en el que l'espai topològic X és un espai topològic noetherià, sinó que,

Definició 1.1.13. Un *esquema localment noetherià* és un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ pel que existeix un recobriment per oberts afins $\mathrm{Spec}(A_i)$, amb cada A_i un anell noetherià. X és *noetherià* si és localment noetherià i quasicompacte.

Si un esquema és noetherià aleshores el seu espai topològic també ho és, però la implicació contraria és falsa. Hi ha exemples d'esquemes no noetherians pels que el seu espai topològic si que ho és.

Definició 1.1.14. Un morfisme d'esquemes $f : X \to Y$ és *localment de tipus finit* si existeix un recobriment de Y per oberts afins $V_i = \mathrm{Spec}(B_i)$, tal que per cada i, l'obert $f^{-1}(V_i)$ pot ser recobert per oberts afins $U_{i,j} = \mathrm{Spec}(A_{i,j})$ on cada $A_{i,j}$ és una B_i-àlgebra finitament generada. El morfisme f es diu de *tipus finit* si a més cada $f^{-1}(V_i)$ pot ser recobert per un nombre finit d'oberts $U_{i,j}$.

Una família d'esquemes es defineix com les fibres d'un morfisme, però a més, volem que certs invariants numèrics de les fibres siguin constants en la família, tals com la dimensió de les fibres. Per aquestes nocions, en geometria algebraica, resulta ser bàsica la noció de morfisme pla.(veure [10, III,9])

Definició 1.1.15. Donat un morfisme d'esquemes $f : X \to Y$ i $\mathcal{F}$ un feix de $\mathcal{O}_X$-mòduls. Diem que $\mathcal{F}$ és *pla sobre Y en un punt $x \in X$*, si el stalk $\mathcal{F}_x$ és un $\mathcal{O}_{y,Y}$-mòdul pla via el morfisme natural $f^{\#} : \mathcal{O}_{y,Y} \to \mathcal{O}_{x,X}$, on $y = f(x)$. Diem que X és pla sobre Y si $\mathcal{O}_X$ ho és en tot punt.

Definició 1.1.16. Donat $f : X \to Y$ un morfisme d'esquemes localment de tipus finit. Es diu que f és de *dimensió relativa d* si totes les fibres X_s no buides són equidimensionals de dimensió d.

Exemple 1.6. Si el morfisme $f : X \to Y$ és pla la dimensió de les fibres és localment constant, és més, si Y és connex aleshores és constant, o dit d'una altra forma, per cada component connexa Y_i de Y existeix un d_i tal que $f|_{f^{-1}(Y_i)} : f^{-1}(Y_i) \to Y_i$ és de dimensió relativa d_i.

Definició 1.1.17. Donats dos S-esquemes X, Y es defineix el *producte fibrat* de X per Y sobre S, denotat per $X \times_S Y$, com el limit invers del sistema invers següent

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & S \end{tikzcd}$$

On f, g són els morfismes que donen estructura de S-esquema a X i Y respectivament.

Notem que el producte fibrat, si existeix, llavors és únic llevat de isomorfisme únic, ja que és un limit invers.

Teorema 1.1.18. *Donat S un esquema, per qualsevol parella de S-esquemes X i Y, el producte fibrat $X \times_S Y$ existeix.(veure [10, II,3.3])*

Per la propietat universal del limit invers un S-morfisme $\alpha : W \to X \times_S Y$ ve determinat per dos S-morfismes $f : W \to X$ i $g : W \to Y$, i denotem $f \times_S g := \alpha$. Donats dos S-morfismes $f : W \to X$ i $g : Z \to Y$ denotem també amb $f \times_S g : W \times_S Z \to X \times_S Y$ el morfisme $(f \circ pr_W) \times_S (g \circ pr_Z)$, on pr_W i pr_Z són els morfismes del limit invers $W \times_S Z$ corresponents a W i a Z respectivament.

Exemple 1.7. Si els esquemes X, Y i S són esquemes afins $\mathrm{Spec}(A)$, $\mathrm{Spec}(B)$ i $\mathrm{Spec}(R)$ respectivament, aleshores $X \times_S Y = \mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$.

Definició 1.1.19. Donat un morfisme d'esquemes $f : X \to Y$, el morfisme *diagonal* és l'únic morfisme $\Delta : X \to X \times_Y X$ pel qual la composició amb les dues projeccions, $pr_1, pr_2 : X \times_Y X \to X$ és el morfisme identitat de X. Un morfisme $f : X \to Y$ és separat si el morfisme diagonal és una immersió tancada. En aquest cas es diu que X és *separat* sobre Y i un esquema es diu *separat* si es separat sobre $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$.

Amb aquesta notació observem que $X \times_S Y$ és l'antiimatge pel morfisme $f \times g : X \times Y \to S \times S$ de la imatge de la diagonal $\Delta : S \to S \times S$. Per tant si S és separat aleshores $X \times_S Y$ és un tancat de $X \times Y$, que intuïtivament, almenys a nivell de punts tancats, podem pensar com les parelles $(x, y) \in X \times Y$ tals que $f(x) = g(y)$.

Cada $s \in S$ té un entorn obert afí $U \cong \mathrm{Spec}(A)$ per algun anell A, si P és l'ideal primer de A corresponent a s, llavors $k(s) := (A/P)_P$ és el *cos de fraccions de s*. El morfisme canònic $A \to A/P \to k(s)$ indueix un morfisme d'esquemes $i_s : \mathrm{Spec}(k(s)) \to S$ que és la inclusió de $\{s\}$ en S. És a dir, el punt $s \in S$ com esquema d'un sol punt és $\mathrm{Spec}(k(s))$ i el morfisme d'esquemes que envia aquest esquema d'un sol punt al punt $s \in S$ és i_s. Llavors l'esquema $Y_s := Y \times_S \operatorname{Spec}(k(s))$ és *la fibra sobre s pel morfisme g*.

Tret que ho indiquem, el producte fibrat serà sobre $\operatorname{Spec}(\mathbb{C})$ i les notacions de $k(s)$ i Y_s les mantindrem al llarg de tot el treball.

Una aplicació important del producte fibrat és la noció de extensió de base. Per un S-esquema X i un morfisme $S' \to S$, l'esquema $X \times_S S'$ és un esquema sobre S' i es diu que X' s'obté a partir de X per *l'extensió de base* $S' \to S$. Notem que l'extensió de base és transitiva: Si $S'' \to S' \to S$ són dos morfismes, aleshores $(X \times_S S') \times_{S'} S'' \cong X \times_S S''$.

Una varietat serà un esquema connex, reduït, separat i de tipus finit i una superfície serà una varietat de dimensió dos. Observem que les varietats es poden considerar també espais analítics ja que estan definides sobre $\mathbb{C}$. Més precisament, tenim un functor plenament fidel de la categoria de varietats a la categoria d'espais analítics, veure [23].

Definició 1.1.20. Un morfisme $f : X \to Y$ és *propi* si és separat, de tipus finit i universalment tancat. Un morfisme és *tancat* si la imatge de qualsevol subconjunt tancat és tancada. Un morfisme $f : X \to Y$ és *universalment tancat* si és tancat i per per qualsevol morfisme $Y' \to Y$, el morfisme $f' : X' \to Y'$ corresponent a la extensió de base, també és tancat.

Definició 1.1.21. Donat un esquema Y, el *n-espai projectiu sobre* Y és l'esquema $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})} Y$ i es denota per $\mathbb{P}^n_Y$. Un morfisme $f : X \to Y$ és *projectiu* si, per algun n, existeix una immersió tancada $i : X \to \mathbb{P}^n_Y$ tal que el següent diagrama commuta,

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{P}^n_Y \arrow[dr, "pr"] & \\ X \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "f"] & & Y \end{tikzcd}$$

on pr és la projecció. Un morfisme $f : X \to Y$ és *quasiprojectiu* si, per algun n, existeixen una immersió oberta $j : X \to X'$ i un morfisme projectiu $g : X' \to Y$ tal que el següent diagrama commuta,

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[ur, "j"] \arrow[rr, "f"] & & Y \end{tikzcd}$$

Definició 1.1.22. Sigui X un esquema noetherià, íntegre, separat i en el que cada anell local $\mathcal{O}_x$ de dimensió 1 és regular. Un *divisor primer* sobre X és un subesquema Y tancat íntegre i de codimensió 1. Un *divisor de Weil* és un element del grup abelià lliure $\operatorname{Div}(X)$ generat pels divisors primers. Un divisor de Weil es pot escriure com $D = \sum n_i Y_i$ on els Y_i són divisors primers diferents, els n_i són enters i sols hi ha una quantitat finita de $n_i \neq 0$. Es diu que D és un *divisor de Weil efectiu* si tot $n_i \geq 0$.

Exemple 1.8. Sigui X un esquema noetherià, integre, separat i en el que cada anell local $\mathcal{O}_x$ de dimensió 1 és regular. Y un divisor primer de X i $\mu \in Y$ el seu punt genèric, aleshores $\mathcal{O}_{\mu,X}$ és un anell de valoració discreta amb cos de fraccions K, el cos de fraccions de X. Llavors diem v_Y a la valoració d'aquest anell, que determina Y. Llavors per qualsevol $f \in K^*$, $v_Y(f) = 0$ per tot Y un divisor primer de X, excepte un nombre finit d'ells. Aleshores es defineix el *divisor de la funció racional* f com

$$(f) := \sum v_Y(f) \cdot Y,$$

on la suma és sobre tots els divisors primers de X. Notem que si $f, g \in K^*$ llavors $(f/g) = (f) - (g)$ i per tant el enviar una funció al seu divisor és un homomorfisme del grup multiplicatiu K^* al grup additiu $Div(X)$, veure [10, II,6.1].

Ara volem estendre la definició de divisor a un esquema qualsevol. Per fer-ho no va bé utilitzar les subvarietats irreductibles de codimensió 1. En comptes d'això es pren com a punt de partida la idea de que un divisor ha de ser alguna cosa que localment sigui com el divisor de una funció racional. No és exactament una generalització de divisor de Weil però dona una bona noció per usar sobre esquemes arbitraris.

Definició 1.1.23. Sigui X un esquema. Per cada obert U, diem $S(U)$ el conjunt de elements de $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ que no son divisors de zero en cada anell local $\mathcal{O}_{X,x}$ per tot $x \in U$. Aleshores l'assignació $U \to S(U)^{-1}\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ defineix un prefeix i al feix associat $\mathcal{K}$ li diem feix d'anells quocient total. Anomenarem $\mathcal{K}^*$ al feix (de grups multiplicatius) d'elements invertibles en el feix $\mathcal{K}$. Igualment $\mathcal{O}^*$ és el feix d'elements invertibles de $\mathcal{O}$.

Definició 1.1.24. Un *divisor de Cartier* sobre un esquema X és una secció global del feix $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$. Tenint en compte les propietats de feixos quocient, veiem que un divisor de Cartier pot ser donat per un recobriment $\{U_i\}$ de X i per cada i un element $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}^*)$, tal que per cada i, j, $f_i/f_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}^*)$.

Definició 1.1.25. Sigui D un divisor de Cartier sobre un esquema X donat per $\{(U_i, f_i\}_{i \in I}$. Definim el *suport* de D com el conjunt de punts $p \in X$ tals que la imatge de f_i a l'anell de fraccions total de $\mathcal{O}_p$ o bé és de l'ideal maximal $\mathcal{M}_p$ o no pertany a $\mathcal{O}_p$ per tot i amb $p \in U_i$. El denotarem com *supp*(D).

Definició 1.1.26. Direm que D és un *divisor de Cartier efectiu* si es pot representar per $\{(U_i, f_i)\}$ amb tots els $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ i es denota $D \geq 0$. En aquest cas definim el subesquema associat de codimensió 1, Y, com el subesquema tancat definit pel feix d'ideals $\mathcal{I}$ generat localment per f_i, en aquest cas a Y li direm divisor de Cartier de X. Observem que com a conjunt $Y = supp(D)$.

Teorema 1.1.27. *Siguin X un esquema i $Y \subset X$ un divisor de Cartier efectiu. Aleshores $Codim_X(Y) = 1$. Encara més, si X és un esquema noetherià, separat, íntegre i regular, també és certa la implicació recíproca, veure [10, II.6].*

Proposició 1.1.28. *Donat X un esquema íntegre, separat, noetherià i en el que tots els seus anells locals són dominis de factorització única, el grup* $\mathrm{Div}(X)$ *de divisors de Weil sobre X és isomorf al grup de divisors de Cartier* $\Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$, *és més, els divisors de Weil efectius es corresponen amb els divisors de Cartier efectius, veure [10, II,6.11,6.17.1].*

Els divisors de Cartier formen un grup abelià amb el producte local de representants i s'utilitza la notació additiva per denotar aquesta operació. És a dir, donats D, D' dos divisors de Cartier, d'un esquema X, definits per $\{(U_i, f_i)\}_{i\in I}$ i $\{(U_i', f_i')\}_{i\in J}$ respectivament aleshores $\{U_i \cap U_j\}_{(i.j)\in I\times J}$ és un recobriment de X i denotem $D + D'$ el divisor de Cartier definit per $\{(U_i \cap U_j, f_i|_{U_i\cap U_j} \cdot f_j|_{U_i\cap U_j})\}_{(i.j)\in I\times J}$.

Definició 1.1.29. Donats $f : Y \to X$ un morfisme d'esquemes i D un divisor de Cartier sobre X tal que per cap component irreductible Y_i de Y, $f(Y_i) \subseteq$ *supp*(D). Sigui D donat per $\{(U_i, f_i)\}$ aleshores definim el *pullback* de D per f, com el divisor de Cartier sobre Y donat per $\{(f^{-1}(U_i), f^{\#}(f_i))\}$ i el denotarem com $f^*(D)$ (veure [10, II.2]). Hem de pensar que $f^{\#}(f_i)$ és la imatge de f_i pel morfisme extensió de $f^{\#}(U)$ a la localització $S(U)^{-1}\mathcal{O}_X(U)$.

Definició 1.1.30. Donat un morfisme d'esquemes $f : X \to Y$, un *divisor de Cartier relatiu efectiu* és un divisor de Cartier efectiu $D \subset X$ que és pla sobre Y.

Lema 1.1.31. *Donats $f : X \to S$ un morfisme d'esquemes separat i de tipus finit, $D \subset X$ un subesquema tancat, $x \in D$ un punt i $s \in S$ la seva imatge. Aleshores les següents afirmacions són equivalents:*

- *El subesquema $D \subset X$ és un divisor de Cartier efectiu relatiu en x (en un entorn de x).*
- *Els morfismes f i $f|_D$ són plans en x i la fibra D_s és un divisor de Cartier efectiu en X_s en x.*
- *El morfisme f és pla en x i el subesquema $D \subset X$ és tallat a x per un element regular (un element que no és divisor de zero) sobre la fibra X_s.*

Veure [13, 3.4].

Corol·lari 1.1.32. *Sigui $f : X \to Y$ un morfisme pla i localment de presentació finita, $Z \subset X$ un subesquema tancat i $s \in Y$ la imatge de $x \in Z$ per f.*

- *Si $Z \to Y$ és localment de presentació finita, pla i totes les fibres $Z_s \subset X_s$ són divisors Cartier efectius, llavors Z és un divisor Cartier relatiu efectiu.*
- *Si Z és un subesquema tancat localment principal de X tal que totes les fibres $Z_s \subset X_s$ són divisors Cartier efectius, llavors Z és un divisor Cartier relatiu efectiu. Veure [24, Tag 062Y].*

Definició 1.1.33. Un subconjunt C d'un esquema X és *localment tancat* si tot punt de C té un entorn obert U, tal que $C \cap U$ és un tancat de U amb la topologia induïda per la de X.

Exemple 1.9. En $\mathbb{A}^3$ si considerem el conjunt C format per un pla menys una recta aleshores C no és ni obert ni tancat, però si que és localment tancat.

Definició 1.1.34. Un subconjunt C d'un esquema noetherià és *constructible* si pertany a la mínima classe de subconjunts $\mathcal{F}$ tals que

- Tot obert pertany a $\mathcal{F}$.
- Interseccions finites d'elements de $\mathcal{F}$ hi pertanyen.

- El complementari de tot element de $\mathcal{F}$ hi pertany.

Informalment un conjunt constructible és un conjunt que es pot expressar utilitzant unions i interseccions de oberts i tancats.

Teorema 1.1.35 (Teorema de Chevalley)**.** *Si $f : X \to Y$ és un morfisme de tipus finit entre esquemes noetherians, i $C \subseteq X$ és constructible, llavors $f(C) \subseteq Y$ és constructible.*

En la definició de conjunt constructible es demana que l'esquema sigui noetherià perquè és una definició ad-hoc pel teorema de Chevalley, que sols funciona per esquemes noetherians. Per esquemes no noetherians Grothendieck en [7, 1.8] i [8, 9] introdueix la noció de localment constructible i demostra una generalització del teorema de Chevalley per aquest cas.

Definició 1.1.36. Donat un esquema X, una *estratificació de X* és una descomposició de X en subconjunts localment tancats.

Hi ha autors que en la definició d'estratificació inclouen la condició que l'adherència de tot estrat ha de ser una unió d'estrats. Seguirem el conveni usual de Grothendieck i Mumford que no imposen aquesta condició.

Exemple 1.10. Si considerem en $\mathbb{A}^3$ un recta R continguda en un pla P llavors $(\mathbb{A}^3 \setminus P) \cup (P \setminus R) \cup R$ és una estratificació de $\mathbb{A}^3$, que a més compleix la condició de que l'adherència de tot estrat ha de ser una unió d'estrats. Si, també en $\mathbb{A}^3$, considerem dos plans que es tallen P i Q aleshores $(\mathbb{A}^3 \setminus (P \cup Q)) \cup (P \setminus Q) \cup Q$ és una estratificació que no compleix la condició, ja que l'adherència de l'estrat $P \setminus Q$ és el pla P que no es pot expressar com la unió d'estrats.

Proposició 1.1.37. *Donat un morfisme d'esquemes projectiu $f : Y \to X$ amb X localment noetherià, existeix una estratificació $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ tal que*

- *La descomposició és localment finita.*
- *Cada $X_i \subset X$ és localment tancat.*
- *El morfisme $f|_{f^{-1}(X_i)} : f^{-1}(X_i) \to X_i$ és pla.*

Veure [16, 8] pel cas noetherià. Veure també [19] teorema 3.2 i la remarca posterior per un resultat més general.

Llavors definim la *estratificació platificadora* de X pel morfisme f com aquesta descomposició.

1.2 Famílies de superfícies i seccions

Definició 1.2.1. Donat $\pi : \mathcal{S} \to B$ un morfisme d'esquemes, diem que és una *família* si és pla, separat i de tipus finit, B és un esquema irreductible, regular i la fibra genèrica és íntegra.

Definició 1.2.2. Una família $\pi : \mathcal{S} \to B$ és *una família fibrada* amb fibra l'esquema S, si per tot $t \in B$ existeix un entorn obert $U \subseteq B$ de $t \in B$ i un isomorfisme $\pi^{-1}(U) \cong_\varphi S \times U$ tals que el següent diagrama commuta,

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & S \times U \arrow[d, "pr_U"] \\ & U \end{tikzcd}$$

on pr_U és la projecció.

Definició 1.2.3. Donat $\pi : \mathcal{S} \to B$ un morfisme d'esquemes, diem que és una *família de superfícies* si és una família i de dimensió relativa 2.

Lema 1.2.4. *Donat un morfisme d'esquemes separat i exhaustiu $f : X \to Y$, la imatge d'una secció de f és tancada.*

Demostració. Sigui g una secció de f. Com que $g(Y) = (g \circ f)(X)$, $g(Y) = F^{-1}(Im(\Delta))$ on $\Delta : X \to X \times_Y X$ és la diagonal i $F := Id_X \times_Y (g \circ f)$.
Per tant, com que f és separat, $Im(\Delta)$ és tancada i també ho és $g(Y)$. □

Definició 1.2.5 (Família Universal de seccions)**.** Donat $\pi : \mathcal{S} \to B$ un morfisme d'esquemes exhaustiu, la parella (X, ψ) és una *família de seccions* de π si X és esquema, $\psi : B \times X \to \mathcal{S}$ morfisme d'esquemes i el següent diagrama commuta.

$$\begin{tikzcd} B \times X \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "pr_1"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "\pi"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Direm que (X, ψ) és una *Família Universal de seccions*(F.U.s) de π si és família de seccions i compleix la propietat universal següent (P.U.s): per tota família de seccions (Y, ρ) existeix un únic morfisme d'esquemes $f : Y \to X$ fent el següent diagrama commutatiu.

$$\begin{tikzcd} B \times Y \arrow[d, dashed, "Id_B \times f"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\ B \times X \arrow[r, "\psi"] & \mathcal{S} \end{tikzcd}$$

Donat un morfisme exhaustiu $\pi : \mathcal{S} \to B$ amb família de seccions (X, ψ), en principi tots els punts $\sigma \in X$ es corresponen amb seccions de π a traves de fixar el morfisme ψ per la segona component en σ i deixar-lo lliure per la primera component. Això seria cert si no fos per que en un esquema no tots els punts són isomorfs entre ells. Construïm pas a pas la possible secció de π que és correspon a σ i veiem què passa.
Definim B_σ com la fibra sobre σ per la projecció $pr_X : B \times X \to X$. En aquest cas $B_\sigma = B \times \mathrm{Spec}(k(\sigma))$ i el morfisme que inclou B_σ en $B \times X$ és $Id_B \times i_\sigma$. Com esquema d'un sol punt σ és exactament $\mathrm{Spec}(k(\sigma))$, el morfisme i_σ és la inclusió que envia aquest esquema d'un sol punt al punt $\sigma \in X$ i qualsevol esquema d'un sol punt isomorf a al punt $\sigma \in X$ també serà isomorf a $\mathrm{Spec}(k(\sigma))$ ja que

i_σ és isomorfisme. Per tant l'única forma de fixar ψ per la segona component en σ i deixar-lo lliure per la primera és composar-lo amb $Id_B \times i_\sigma$. Però el domini de $\psi \circ (Id_B \times i_\sigma)$ és B_σ i no B, per tant no pot ser secció de π. Com que no hi ha un morfisme general de $\mathcal{S}$ a B_σ, definim $\mathcal{S}^\sigma := \mathcal{S} \times \mathrm{Spec}(k(\sigma))$ i $\pi^\sigma := \pi \times Id_{\mathrm{Spec}(k(\sigma))}$ que és un morfisme exhaustiu amb imatge en B_σ. Ara tenim dos morfismes amb domini B_σ, un $\psi \circ (Id_B \times i_\sigma)$ que va ha $\mathcal{S}$ i un altre $pr_\sigma : B_\sigma \to \mathrm{Spec}(k(\sigma))$, que és la projecció. Llavors per la propietat universal del producte existeix un únic morfisme $\underline{\sigma} := [\psi \circ (Id_B \times i_\sigma)] \times pr_\sigma$. Dons bé, $\underline{\sigma}$ és la possible secció de π associada a σ, però no és secció de π si no que és secció de π^σ,

$$\pi^\sigma \circ \underline{\sigma} = [\pi \times Id_{\mathrm{Spec}(k(s))}] \circ [\psi \circ (Id_B \times i_\sigma) \times pr_\sigma] =$$

$$= [(\pi \circ \psi) \circ (Id_B \times i_\sigma)] \times pr_\sigma = pr_B \times pr_\sigma = Id_{B_\sigma}$$

La construcció de π^σ és necessària ja que $\underline{\sigma}$ és un morfisme amb domini B_σ i per tant no pot ser directament una secció de π.
Però podrem pensar $\underline{\sigma}$ com una secció de π pels casos en que $\pi^\sigma \cong \pi$, que passa si i només si σ és un punt tancat de X.

Les notacions de B_σ i $\underline{\sigma}$ les mantindrem al llarg de tot el treball. A més, sovint ens referirem als punts tancat de X com a seccions de X, entenent que es corresponen a seccions de la família de superfícies de la qual X n'és un família de seccions. També, per els $\sigma \in X$ tancats, considerarem $\underline{\sigma}$ com una secció de π.

Un morfisme exhaustiu $\pi : \mathcal{S} \to B$ indueix un functor contravariant $S.\_ : Sch \to Set$ definit de la manera següent. Donat Y un esquema,

$$S.Y := \{\rho \in Hom_{Sch}(B \times Y, \mathcal{S}) \text{ tal que } (Y, \rho) \text{ és família de seccions de } \pi\}$$

Donat un morfisme $f \in Hom_{Sch}(Y, Y')$ i un element $\rho \in S.Y'$, definim $S.(f)(\rho) := \rho \circ (Id_B \times f)$, és a dir, $S.f = (Id_B \times f)^*$.

$$\begin{tikzcd}
B \times Y \arrow[dr, "Id_B \times f"] \arrow[drr, dashed, bend left, "S.f(\rho)"] \arrow[ddrr, bend right, "pr_1"'] & & \\
& B \times Y' \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "pr_1"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "\pi"] \\
& & B
\end{tikzcd}$$

$S.\_$ és clarament un functor contravariant.

Proposició 1.2.6. *Un esquema X representa $S.\_$ si i només si és una F.U.s de π.*

Demostració. Veiem la suficiència de l'enunciat. Suposem que el morfisme $\pi : \mathcal{S} \to B$ té una F.U.s (X, ψ), aleshores podem construir un isomorfisme natural

$\mu : S.\_ \to Hom_{Sch}(\_, X)$ com segueix.
Donat Y un esquema tenim que per cada $\rho \in S.Y$, la parella (Y, ρ) és una família de seccions. Per tant, per la P.U.s de (X, ψ), està ben definit $\mu_Y(\rho) \in Hom_{Sch}(Y, X)$ com l'únic morfisme d'esquemes tal que $\rho = \psi \circ (Id_B \times \mu_Y(\rho)) = S.(\mu_Y(\rho))(\psi)$.
Per veure que és transformació natural, donat $f \in Hom_{Sch}(Z, Y)$ necessitem veure que el següent diagrama és commutatiu:

$$\begin{tikzcd} S.Y \arrow[r, "\mu_Y"] \arrow[d, "S.f"'] & Hom_{Sch}(Y, X) \arrow[d, "f^*"] \\ S.Z \arrow[r, "\mu_Z"'] & Hom_{Sch}(Z, X) \end{tikzcd}$$

Però aplicant $S.f$ a $\rho = S.(\mu_Y(\rho))(\psi)$ tenim que

$$S.f(\rho) = S.f \circ S.(\mu_Y(\rho))(\psi) = S.(\mu_Y(\rho) \circ f)(\psi) = S.((f^* \circ \mu_Y)(\rho))(\psi)$$

Per tant, com que $\mu_Z(S.f(\rho))$ és l'únic morfisme que compleix aquesta relació, $\mu_Z \circ S.f = f^* \circ \mu_Y$.

Per veure que μ_Y és isomorfisme de conjunts, és a dir és bijectiva, definim la inversa de μ_Y com:

$$\begin{array}{rcccl} \lambda_Y & : & Hom_{Sch}(Y, X) & \longrightarrow & S.Y \\ & & f & \longrightarrow & S.f(\psi) \end{array}$$

Observant que $\mu_X(\psi) = Id_X$ és immediat veure que una és la inversa de l'altra:

$$(\mu_Y \circ \lambda_Y)(f) := \mu_Y \circ S.f(\psi) = (f^* \circ \mu_X)(\psi) = f$$

$$(\lambda_Y \circ \mu_Y)(\rho) := S.(\mu_Y(\rho))(\psi) = \rho$$

Per veure la necessitat suposem que existeix un esquema X que representa $S.\_$ i fixem un isomorfisme natural μ entre $S.\_$ i $Hom_{Sch}(\_, X)$.
Ara tenim $\psi := \mu_X^{-1}(Id_X) \in S.X$ i per tant (X, ψ) és família de seccions de π.
Veiem que efectivament és F.U.s, comprovant que compleix la P.U.s.
Donada (Y, ρ) una família de seccions, $\rho \in S.Y$ i per tant $\mu_Y(\rho) \in Hom_{Sch}(Y, X)$.
A més, per tot $h' \in Hom_{Sch}(Y, X)$,

$$S.h'(\psi) = (S.h' \circ \mu_X^{-1})(Id_X) = \mu_Y^{-1}(h')$$

Per tant si h' és tal que $\rho = S.h'(\psi) = \mu_Y^{-1}(h')$ tenim que $\mu_Y(\rho) = h'$, és a dir, $h = \mu_Y(\rho)$ és l'únic morfisme d'esquemes tal que $\rho = S.h(\psi)$ i per tant (X, ψ) és una F.U.s de la família de superfícies. □

Proposició 1.2.7. *Sigui $\pi : \mathcal{S} \to B$ un morfisme d'esquemes exhaustiu tal que existeix una F.U.s (X, ψ). Aleshores (X, ψ) és únic llevat d'isomorfisme únic. Donat un cos K diem $X[K]$ el conjunt de punts $\sigma \in X$ tal que* $\mathrm{Spec}(k(\sigma)) \cong \mathrm{Spec}(K)$ *i per aquesta preposició diem $\pi^K : \mathcal{S}^K \to B_K$ a la família de superfícies $\pi^\sigma : \mathcal{S}^\sigma \to B_\sigma$ per $\sigma \in X[K]$. Aleshores l'aplicació*

$$\begin{array}{rccl} \Phi_K: & X[K] & \longrightarrow & \{ \textit{ seccions de } \pi^K : \mathcal{S}^K \to B_K \} \\ & \sigma & \longrightarrow & \underline{\sigma} \end{array}$$

és injectiva, en particular si $K = \mathbb{C}$ és bijectiva.

Demostració. Per veure que és únic llevat d'isomorfisme es pot fer per abstract nonsense. Fixem (Y, φ) una altre F.U.s de π i veiem que existeix un únic isomorfisme entre Y i X.

Per ser (Y, φ) F.U.s de π i (X, ψ) una família de seccions de π existeix un únic morfisme $g_0 : X \to Y$ tal que

$$\psi = \varphi \circ (Id_B \times g_0)$$

Per ser (X, ψ) F.U.s de π i (Y, φ) una família de seccions de π existeix un únic morfisme $g_1 : Y \to X$ tal que

$$\varphi = \psi \circ (Id_B \times g_1).$$

Ara veurem que g_0 i g_1 són els isomorfismes entre Y i X, i per tant tindrem la unicitat del isomorfisme.
Composant les identitats anteriors trobem,

$$\psi = \psi \circ (Id_B \times (g_1 \circ g_0)).$$

Per ser (X, ψ) F.U.s de π i a la vegada ser una família de seccions de π, existeix un únic morfisme $h_1 : X \to X$ tal que

$$\psi = \psi \circ (Id_B \times h_1),$$

per tant, com que $h_1 = Id_X$,

$$g_1 \circ g_0 = Id_X.$$

A partir de les dues primeres identitats també podem trobar

$$\varphi = \varphi \circ (Id_B \times (g_0 \circ g_1)).$$

Per ser (Y, φ) F.U.s de π i a la vegada ser una família de seccions de π, existeix un únic morfisme $h_0 : Y \to Y$ tal que

$$\varphi = \varphi \circ (Id_B \times h_0),$$

per tant, com que $h_0 = Id_Y$,

$$g_0 \circ g_1 = Id_Y.$$

Que la aplicació Φ_K és ben definida és clar per ser (X, ψ) família de seccions. Per veure que és injectiva fixem $\mu : S._\_ \to Hom_{Sch}(\_, X)$ isomorfisme natural. Recordem que hi ha una inclusió j_K entre $X[K]$ i $Hom_{Sch}(\text{Spec}(K), X)$ tal que per cada $\sigma \in X[K]$, $j_K(\sigma)(\text{Spec}(K)) = \{\sigma\}$. Ara, si $i_K : B \to B \times \text{Spec}(K)$ és la inclusió, el següent diagrama és commutatiu:

$$\begin{tikzcd} X[K] \arrow[r, "\Phi_K"] \arrow[d, "j_K"'] & \{\text{ seccions de } \pi^K : \mathcal{S}^K \to B_K\} \subseteq Hom_{Sch}(B_K, \mathcal{S}^K) \\ Hom_{Sch}(\mathrm{Spec}(K), X) \arrow[r, "\mu^{-1}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{C})}"] & S.\mathrm{Spec}(K) \subseteq Hom_{Sch}(B \times \mathrm{Spec}(\mathbb{C}), \mathcal{S}) \arrow[u, "i^*_K"'] \end{tikzcd}$$

Per tant, com que i^*_K, $\mu^{-1}_{\mathrm{Spec}(K)}$ i j_K són injectives, Φ_K també ho és. Pel cas $K = \mathbb{C}$, j_K és bijectiva, i_K és isomorfisme i per qualsevol secció $\sigma : B \to \mathcal{S}$ tenim $(i^*_K)^{-1}(\sigma) \in S.\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$. Per tant $\Phi_{\mathbb{C}}$ és exhaustiva.

□

Així a partir d'ara parlarem de la F.U.s en cas que existeixi per un morfisme d'esquemes exhaustiu.

La següent proposició dóna alguns resultats bàsics que utilitzarem el llarg del treball sense referir-nos a elles.

Proposició 1.2.8. *Donada una família de superfícies $\pi : \mathcal{S} \to B$ amb F.U.s (X, ψ), dos punts σ_0, σ_1 de X i $pr_i : \mathcal{S}^{\sigma_i} \to \mathcal{S}$ la projecció, aleshores*

1 Si σ_0 és un punt tancat, per cada $t \in B$ la fibra de $\mathcal{S}$ sobre t, té exactament un punt de la imatge de $\underline{\sigma_0}$.

2 $\sigma_0 = \sigma_1$ sii $pr_0 \circ \underline{\sigma_0} = pr_1 \circ \underline{\sigma_1}$.

3 $\pi^\sigma|_{\underline{\sigma}(B_\sigma)}$ és isomorfisme, amb σ tancat o no.

4 Si $F \subseteq \mathcal{S}$ és tal que $\pi|_F$ és isomorfisme aleshores existeix un punt tancat $\tau \in X$ tal que $\underline{\tau}(B) = F$.

Demostració. (1) Hem de veure que $\#\sigma(B) \cap S_t = 1$. Si $q \in \sigma(B) \cap S_t$ aleshores $q = \sigma(s)$ per algun $s \in B$ i $\pi(q) = t$, per tant q ha de ser igual a $\sigma(t)$ i $\sigma(t)$ és l'únic element de $\sigma(B) \cap S_t$.

(2) Primer observem que per que pugui ser $pr_0 \circ \underline{\sigma_0} = pr_1 \circ \underline{\sigma_1}$, hem de tenir $Y := \mathrm{Spec}(k(\sigma_0)) = \mathrm{Spec}(k(\sigma_1))$. Llavors $\mathcal{S}' := \mathcal{S}^{\sigma_0} = \mathcal{S}^{\sigma_1}$ i $pr := pr_0 = pr_1$. Donat un punt $p \in \mathcal{S}$, la fibra de p pel morfismes pr és $\mathcal{S}'_p = \mathrm{Spec}(k(p)) \times Y$ per tant

$$\underline{\sigma_0}(t) = \mathcal{S}'_{(pr \circ \underline{\sigma_0})(t)} = \mathcal{S}'_{(pr \circ \underline{\sigma_1})(t)} = \underline{\sigma_1}(t)$$

i com que hem suposat B regular, un morfisme amb domini $B' := B_{\sigma_0} = B_{\sigma_1}$ està determinat per les seves imatges, aleshores $\underline{\sigma_0} = \underline{\sigma_1}$ i per 1.2.7, $\sigma_0 = \sigma_1$.

Notem que si σ_i són punts tancats les condicions $pr_0 \circ \underline{\sigma_0} = pr_1 \circ \underline{\sigma_1}$ i $\underline{\sigma_0} = \underline{\sigma_1}$ no són només equivalents, si no que són exactament la mateixa.

(3) Clarament $\underline{\sigma}$ és el morfisme invers de $\pi^\sigma|_{\underline{\sigma}(B_\sigma)}$.

(4) Clarament el morfisme $(\pi|_F)^{-1}$ composat amb la inclusió de F en $\mathcal{S}$, és una secció de π, per tant, per la proposició anterior ja estem. □

Proposició 1.2.9. *Donades $\pi_1 : \mathcal{S}_1 \to B$ i $\pi_2 : \mathcal{S}_2 \to B$ dues famílies amb la mateixa base i amb F.U.s (X_1, ψ_1) i (X_2, ψ_2) respectivament, llavors $(X_1 \times X_2, \psi_1 \times_B \psi_2)$ és la F.U.s de la família $\pi_1 \times_B \pi_2$.*

Demostració. Que la parella $(X_1 \times X_2, \psi_1 \times_B \psi_2)$ és família de seccions de $\pi_1 \times_B \pi_2$ és clar. Concretament identifiquem $(B \times X_1) \times_B (B \times X_2)$ amb $B \times X_1 \times X_2$. Per veure que és la F.U.s de $\pi_1 \times_B \pi_2$ comprovem que compleix la P.U.s.
Sigui (Y, ρ) una família de seccions de $\pi_1 \times_B \pi_2$. Llavors $(Y, pr_{\mathcal{S}_1} \circ \rho)$ i $(Y, pr_{\mathcal{S}_2} \circ \rho)$ són famílies de seccions de π_1 i π_2 respectivament i per tant existeixen uns morfismes únics $g_1 : Y \to X_1$ i $g_2 : Y \to X_2$ tals que els següents diagrames commuten.

$$\begin{tikzcd} B \times Y \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "Id_B \times g_1"'] & \mathcal{S}_1 \times_B \mathcal{S}_2 \arrow[d, "pr_{\mathcal{S}_1}"] \\ B \times X_1 \arrow[r, "\psi_1"] & \mathcal{S}_1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \times Y \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "Id_B \times g_2"'] & \mathcal{S}_1 \times_B \mathcal{S}_2 \arrow[d, "pr_{\mathcal{S}_2}"] \\ B \times X_2 \arrow[r, "\psi_2"] & \mathcal{S}_2 \end{tikzcd}$$

Aleshores definim $g := g_1 \times_Y g_2$. Ara tenim per $i = 1, 2$

$$pr_{\mathcal{S}_i} \circ (\psi_1 \times_B \psi_2) \circ (Id_B \times g) = \psi_i \circ (Id_B \times g_i) = pr_{\mathcal{S}_i} \circ \rho$$

Llavors, com que $\rho = (pr_{\mathcal{S}_1} \circ \rho) \times_B (pr_{\mathcal{S}_2} \circ \rho)$, $\rho = \psi_1 \times_B \psi_2 \circ (Id_B \times g)$. Finalment la unicitat de g la tenim per la propietat universal del producte fibrat. □

Seguint la notació, si suposem que π és una família de superfícies, amb hipòtesis adients sobre B i $\mathcal{S}$, l'existència de la F.U.s és coneguda. El teorema 6.6 de [18], que trobem a continuació, dona l'existència en al categoria d'esquemes. Abans però, veiem una definició.

Definició 1.2.10. Donat dos S-esquemes X i Y, hi ha un functor contravariant, $\mathcal{M}or_S(X,Y) : S - Sch \to Set$ que envia un S-esquema T al conjunt de tots els S-morfismes $X \times_S T \to Y \times_S T$ que a més són T-morfismes, és a dir, tal que el següent diagrama commuta,

$$\begin{tikzcd} X \times_S T \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \times_S T \arrow[dl] \\ & T & \end{tikzcd}$$

on els morfismes $X \times_S T \to T$ i $Y \times_S T \to T$ són les projeccions.

Teorema 1.2.11. *Donat S un esquema noetherià, X un S-esquema projectiu i Y un S-esquema quasi-projectiu, si X és pla sobre S aleshores el functor $\mathcal{M}or_S(X,Y)$ és representable per un subesquema obert $Mor_S(X,Y)$ de* $\mathrm{Hilb}_{X \times_S Y/S}$.

Corol·lari 1.2.12. *Si B és propi i $\mathcal{S}$ quasi-projectiu, llavors la F.U.s existeix i és un esquema quasi-projectiu i localment de tipus finit (veure [18, ch 6,ex 2]).*

En [4, ch 10], trobem un anàleg aquest teorema en la categoria d'espais analítics:

Teorema 1.2.13. *Siguin X i Y espais analítics, X compacte, sigui H l'espai analític dels subespais analítics compactes de $X \times Y$, i R el subespai analític universal de $H \times X \times Y$.*

a) El conjunt $M := Mor_S(X, Y)$ dels punts $s \in H$ tal que $R(s)$ és el gràfic d'un morfisme de X en Y és un obert de H.

b) $R|_M$ és el gràfic d'un morfisme m de $M \times X$ en Y.

c) El morfisme m compleix la propietat universal següent: Per tot espai analític S i per tot morfisme $u : S \times X \to Y$ existeix un únic morfisme $f : S \to M$ tal que $u = m \circ (f \times Id_X)$.

Observem que l'espai analític H de Douday és l'anàleg analític a l'esquema de Hilbert.

Corol·lari 1.2.14. *Sigui B un espai analític compacte, $\pi : \mathcal{S} \to B$ una família quasi-projectiva de superfícies analítiques. Llavors hi ha un espai analític X quasi-projectiu complint la P.U.s.*

En [17] trobem l'existència de la F.U.s per un terces cas. Donat R un anell complet de valoració discreta amb cos residual $k := R/\mathcal{M}$, on $\mathcal{M}$ és l'ideal maximal de R, si X_∞ és un esquema formal sobre R separat i de tipus finit, el seu esquema de Greenberg $Gr^R(X_\infty)$ és un k-esquema, generalment de tipus infinit, que parametritza les seccions de X_∞ no ramificades. En particular,

$$Gr^R(X_\infty) = \varprojlim_n Gr_n^R(X_\infty)$$

en la categoria de k-esquemes, on cada $Gr_n^R(X_\infty)$ és un k-esquema separat de tipus finit. Això és semblant al cas algebraic, en el que la F.U.s no és un esquema noetherià però és una unió d'esquemes noetherians.

1.3 Blowup

El blowup és una construcció fonamental en el present treball. A més, a part de fer-la servir molt sovint, la utilitzarem amb força flexibilitat Per això, en aquesta secció, en donem dues construccions. Una primera analítica que en permet una descripció molt explicita per al cas d'un punt en una superfície, i la segona més general, algebraica i menys explicita però és la que ens servirà en la majoria dels casos. Abans però, introduïm unes nocions de [10, II] que sobretot farem servir en aquesta secció.

Sigui S una superfície llisa, i $P \in S$ un punt, podem realitzar la següent construcció. Sigui U un entorn de P amb coordenades analítiques (x, y) ben definides (on P és el punt amb coordenades $(0, 0)$). Fixem les coordenades projectives $[z_0 : z_1]$ d'una recta projectiva $\mathbb{P}^1$, i considerem la subvarietat $\tilde{U}$ de $U \times \mathbb{P}^1$ donada per $xz_1 - yz_0 = 0$. És una superfície (llisa i connexa) que es projecta sobre U, i la restricció de la projecció $\pi : \tilde{U} \to U$ a $\tilde{U} \setminus \pi^{-1}(O)$ és un isomorfisme en $U \setminus \{P\}$. Per tant $\tilde{U}$ es pot enganxar amb la resta de S donant una nova superfície $\mathrm{Bl}_P(S)$ que és isomorfa a S, excepte que P ha estat reemplaçat per una corba $E \cong \mathbb{P}^1$ els punts de la qual veurem que es corresponen a les direccions tangents en P dintre de S. La corba E es diu el *divisor excepcional* o *la corba excepcional* del blowup. Aquesta construcció (mòdul isomorfisme) no depèn de les coordenades triades.

Definició 1.3.1 (Blowup)**.** Donada una superfície S el *blowup* de S amb centre $P \in S$ és el morfisme $\mathrm{bl}_P : \mathrm{Bl}_P(S) \to S$ de la construcció anterior.

Definició 1.3.2. Donat $\mathrm{bl}_P : \mathrm{Bl}_P(S) \to S$ el blowup d'una superfície S amb centre $P \in S$ i C una corba de S amb $P \in C$, aleshores definim la *transformada estricta* de C com $\tilde{C} := \overline{\mathrm{bl}^{-1}(C \setminus P)}$.

Si una corba C continguda en S passa per P amb multiplicitat n, per ser S llisa, existeix una funció que defineix C en un entorn de P, és a dir, C és un divisor de Cartier efectiu en S. Podem considerar el pullback d'aquest divisor pel blowup bl_P aleshores $\mathrm{bl}^*(C) \geq n \cdot E$, és a dir, si $E = V(f)$ aleshores f^n divideix a tota equació local de $\mathrm{bl}^*(C)$, a més, si veiem $\tilde{C}$, la transformada estricta de C, com un divisor, tenim que $\mathrm{bl}^*(C) = \tilde{C} + n \cdot E$, per exemple si $\tilde{C} = V(g)$ llavors $\mathrm{bl}^*(C) = gf^n$ i a més f no divideix a g.
Així, la transformada estricta de C no conté a E. Però sí que interseca amb E i els punts d'intersecció els podem pensar com les corresponents direccions tangents amb les que cada branca de C passa per P. Això motiva la següent definició.

Definició 1.3.3. Donat $\mathrm{bl}_P : \mathrm{Bl}_P(S) \to S$ el blowup d'una superfície S amb centre $P \in S$, definim el *primer entorn infinitesimal* de P com $E := \mathrm{bl}_P^{-1}(P)$.

La descripció que acabem de donar és de caràcter analític, però l'objecte construït és algebraic. Equivalentment, es pot obtenir com el $\mathrm{Proj}(\bigoplus_n \mathcal{J}^n)$ (veure [10, II.7]) on $\mathcal{J}$ és el feix d'ideals del punt P. Aquesta definició es generalitza al cas on S és un esquema íntegre i $\mathcal{J}$ és un ideal quasi-coherent. En aquest cas diem que $\Pi : \mathrm{Proj}(\bigoplus_n \mathcal{J}^n) \to \mathcal{S}$ és el blowup de S amb centre el feix d'ideals $\mathcal{J}$.
El blowup també satisfà una propietat universal que el caracteritza o defineix, veure [10, II.7.14], [6, 8.1] o [25, 19].

Definició 1.3.4. Sigui X un esquema i $Y \subseteq X$ un subesquema tancat,

- Un morfisme d'esquemes $\mathcal{G} : G \to X$ tal que $\mathcal{G}^{-1}(Y)$ és divisor de Cartier, és un *candidat a blowup* de X amb centre Y.
- (P.U.b) $\mathrm{bl}_Y : \mathrm{Bl}_Y(X) \to X$ és el *blowup* de X amb centre Y si és candidat a blowup de X amb centre Y i compleix que per tot altre candidat a blowup $\mathcal{G} : G \to X$ de X amb centre Y existeix un únic morfisme d'esquemes $\tilde{\mathcal{G}} : G \to Bl_Y(X)$ tal que $\mathcal{G} = \mathrm{bl}_Y \circ \tilde{\mathcal{G}}$

Teorema 1.3.5. *Si X és un esquema íntegre i $\mathcal{J}$ és un feix d'ideals quasi-coherent de tipus finit, llavors $\Pi : \mathrm{Proj}(\bigoplus_n \mathcal{J}^n) \to \mathcal{S}$ compleix la P.U.b. de X amb centre el subesquema definit per $\mathcal{J}$ (veure [25, 19.2]).*

Definició 1.3.6. Sigui $\mathrm{bl}_Y : \mathrm{Bl}_Y(X) \to X$ el blowup de X amb centre Y, definim el *divisor excepcional* del blowup com $\mathrm{bl}_Y^{-1}(Y)$. Sigui $Z \subseteq X$ un tancat de Zariski tal que cap component irreductible de Z està continguda en Y. definim la *transformada estricta* de Z com $\tilde{Z} := \overline{\mathrm{bl}_Y^{-1}(Z \setminus Y)}$.

El divisor excepcional s'identifica amb $\mathrm{Proj}\left(\bigoplus_n \mathcal{J}^n / \mathcal{J}^{n+1}\right)$ i és un divisor de Cartier de $\mathrm{Proj}(\bigoplus_n \mathcal{J}^n)$

Definició 1.3.7. Sigui X un esquema i $Y \subseteq X$ un subesquema de codimensió n finita. Aleshores Y és *intersecció completa transversa* si per tot $y \in Y$ l'ideal maximal $\mathcal{I}_{Y,y}$ que defineix Y localment està generat per n elements tals que les seves classes a $\mathcal{I}_{Y,y}/\mathcal{I}^2_{Y,y}$, són generadors com a $\mathcal{O}_{Y,y}$-mòdul.

De la construcció es dedueix que, si Y és localment intersecció completa transversa de codimensió n, llavors per tot $y \in Y$, $\mathrm{bl}_Y^{-1}(y) \cong \mathbb{P}^{n-1}$. Aquest és el cas, per exemple, si X i Y són varietats no singulars, i es compleix el següent teorema,

Teorema 1.3.8. *Donats X una varietat no singular i $Y \subseteq X$ una subvarietat tancada no singular, amb feix d'ideals $\mathcal{I}$. Donat $\mathrm{bl}_Y : \mathrm{Bl}_Y(X) \to X$ el blowup de X amb centre $\mathcal{I}$ i $E \subseteq \mathrm{Bl}_Y(X)$ el divisor excepcional del blowup.*

- $\mathrm{Bl}_Y(X)$ *també és no singular.*
- *La projecció $\mathrm{bl}_Y|_E : E \to Y$ és isomorfa al fibrat en espais projectius associat al feix (localment lliure) $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ sobre Y.*
- *Per aquest isomorfisme, el feix normal $\mathcal{N}_{E/\mathrm{Bl}_Y(X)}$ es correspon al feix $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)}(-1)$. Veure [10, II.8.24].*

Si $Y \cap Z \neq \emptyset$ (igual que el cas del punt i la corba en una superfície) la transformada estricta de Z no té perquè contenir el divisor excepcional del blowup però en qualsevol cas els punts d'intersecció entre la transformada estricta de Z i el divisor excepcional es corresponen a les direccions tangents amb les que Z passa pels punts de Y. A continuació veiem que de fet la transformada estricta de Z és el blowup de Z amb centre $Z \cap Y$. D'aquesta manera podem estendre la definició de transformada estricta a subesquemes tancats.

Proposició 1.3.9. *Siguin X un esquema integre, $\mathrm{bl}_Y : \mathrm{Bl}_Y(X) \to X$ el blowup de X amb centre Y i $Z \subset X$ un tancat que no té cap component continguda en Y. Aleshores, si $\tilde{Z}$ és la transformada estricta de Z, tenim que $\mathrm{Bl}_{Z\cap Y}(Z) \cong \tilde{Z}$ i $\mathrm{bl}_{Z\cap Y} \cong \mathrm{bl}_Y|_{\tilde{Z}}$, és a dir, el morfisme $\mathrm{bl}_Y|_{\tilde{Z}}$ és el blowup de Z amb centre $Z \cap Y$.*

Demostració. Primer comprovem que $\mathrm{bl}_Y|_{\tilde{Z}} : \tilde{Z} \to Z$ és un candidat a blowup de Z amb centre $Z \cap Y$, per això hem de veure que $\mathrm{bl}_Y|_{\tilde{Z}}^{-1}(Z \cap Y)$ és un divisor de Cartier de $\tilde{Z}$. Siguin $i : \tilde{Z} \to \mathrm{Bl}_Y(X)$ la inclusió i $E := \mathrm{bl}_Y^{-1}(Y)$ el divisor excepcional del blowup de X amb centre Y. Aleshores, per definició, $i(\tilde{Z})$ no està contingut en E i de fet cap de les seves components irreductibles ho està. Per tant en $\tilde{Z}$ tenim el divisor de Cartier efectiu $i^*(E)$ que és exactament $\mathrm{bl}_Y|_{\tilde{Z}}^{-1}(Z \cap Y)$.

Ara veiem que $\mathrm{bl}_Y|_{\tilde{Z}} : \tilde{Z} \to Z$ compleix la P.U.b del blowup de Z amb centre $Z \cap Y$. Sigui $\mathcal{G} : W \to Z$ un morfisme tal que $F := \mathcal{G}^{-1}(Z \cap Y) \subset W$ sigui divisor de Cartier. Podem pensar $\mathcal{G}$ com una aplicació en X composant amb la inclusió. Diem-li $\tilde{\mathcal{G}}$, aleshores $\tilde{\mathcal{G}}^{-1}(Y) = \mathcal{G}^{-1}(Y \cap Z) \subset W$ és divisor de Cartier. Així, per la P.U.b del blowup $\mathrm{bl}_Y : \mathrm{Bl}_Y(X) \to X$, existeix un únic morfisme $G : W \to \tilde{X}$ tal que $\mathrm{bl}_Y \circ G = \tilde{\mathcal{G}}$.

Ara, si $G(W) \subset \tilde{Z}$ hem acabat.

Per $\omega \in W\setminus F$, $\mathrm{bl}_Y \circ G(\omega) = \tilde{\mathcal{G}}(\omega) \in Z\setminus Y$ i per tant $G(\omega) \in \mathrm{bl}_Y^{-1}(Z\setminus Y) \subset \tilde{Z}$.

Si $\omega \in F$, F és un divisor de Cartier de W, per la proposició 1.1.27 és un tancat, per tant el seu complementari és dens i $\omega \in \overline{W \setminus F}$. Aleshores

$$G(\omega) \in G\left(\overline{W \setminus F}\right) \subseteq \overline{G(W \setminus F)} \subset \overline{\tilde{Z}} = \tilde{Z}$$

on la primera inclusió de conjunts és per aplicacions contínues en general, la segona pel que acabem de veure i la igualtat per la definició de $\tilde{Z}$. □

Per un enfocament lleugerament diferent veure [25, 19.2].

Blowup d'una Secció

Un cas pel que ens interessa la generalització del blowup és quan tenim una família de superfícies $\pi : \mathcal{S} \to B$ i considerem el blowup de $\mathcal{S}$ amb centre la imatge d'una secció $\sigma : B \to \mathcal{S}$. Recordem que pel lema 1.2.4, $\sigma(B) \subset \mathcal{S}$ és tancat.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Bl}_{\sigma(B)}(\mathcal{S}) \arrow[r, "\mathrm{bl}_{\sigma(B)}"] \arrow[dr, "\pi \circ \mathrm{bl}_{\sigma(B)}"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "\pi"'] \\ & B \arrow[u, bend right, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

En aquest cas $\mathrm{Bl}_{\sigma(B)}(\mathcal{S})$ és, de forma natural, una nova família de superfícies amb el morfisme $\pi \circ \mathrm{bl}_{\sigma(B)}$ i cada fibra $(\mathrm{Bl}_{\sigma(B)}(\mathcal{S}))_b$ és el blowup de $\mathcal{S}_b$ centrat en $\sigma(b) \in \mathcal{S}_b$.
Per veure aquest últim fet en el cas de $t \in B$ tancat, que és el cas que ens interessa, sols hem d'aplicar la proposició 1.3.9 a cada fibra $\mathcal{S}_b$ de $\mathcal{S}$. Aquesta ens diu que $\mathcal{S}'_b := \overline{\mathrm{bl}^{-1}_{\sigma(B)}(\mathcal{S}_b \setminus \{\sigma(b)\})} \cong Bl_{\sigma(b)}(\mathcal{S}_b)$ i que $\mathrm{bl}_{\sigma(b)} = \mathrm{bl}_{\sigma(B)}|_{\mathcal{S}'_b}$. Però ara veurem que en aquest cas tenim $\mathcal{S}'_b = (\mathrm{Bl}_{\sigma(B)}(\mathcal{S}))_b$. És clar que $\mathcal{S}'_b \subseteq (\mathrm{Bl}_{\sigma(B)}(\mathcal{S}))_b$. Ara observem que

$$(\mathrm{Bl}_{\sigma(B)}(\mathcal{S}))_b = \mathrm{bl}^{-1}_{\sigma(B)}(\mathcal{S}_b) = \mathrm{bl}^{-1}_{\sigma(B)}(\sigma(b)) \cup \mathrm{bl}^{-1}_{\sigma(B)}(\mathcal{S}_b \setminus \{\sigma(b)\})$$

$$\mathcal{S}'_b \cong Bl_{\sigma(b)}(\mathcal{S}_b) = \mathrm{bl}^{-1}_{\sigma(b)}(\sigma(b)) \cup \mathrm{bl}^{-1}_{\sigma(b)}(\mathcal{S}_b \setminus \{\sigma(b)\})$$

En els dos casos la segona part de la unió és isomorfa a $\mathcal{S}_b \setminus \{\sigma(b)\}$. A més, per la observació final en la definició de blowup, $\mathrm{bl}^{-1}_{\sigma(B)}(\sigma(b)) \cong \mathbb{P}^1$ i $\mathrm{bl}^{-1}_{\sigma(b)}(\sigma(b)) \cong \mathbb{P}^1$, per tant $\mathcal{S}'_b = (\mathrm{Bl}_{\sigma(B)}(\mathcal{S}))_b$.

D'aquesta forma podem veure el divisor excepcional com una família de $\mathbb{P}^1$ indexada per $\sigma(B)$ i per cada $p \in \sigma(B)$ el $\mathbb{P}^1$ de la fibra de p es correspon a les direccions ortogonals a l'espai tangent a $\sigma(B)$ en p.
Aquesta és una construcció que usarem habitualment, per això introduïm la notació més lleugera $\mathcal{S}_\sigma := \mathrm{Bl}_{\sigma(B)}(\mathcal{S})$, $\mathrm{bl}_\sigma := \mathrm{bl}_{\sigma(B)}$ i $\pi_\sigma := \pi \circ \mathrm{bl}_\sigma$.

Per $t \in B$ no tancat, també és cert que $(\mathrm{Bl}_{\sigma(B)}(\mathcal{S}))_t \cong \mathrm{Bl}_{\sigma(t)}(\mathcal{S}_t)$, com es pot veure aplicant [25, 19.2].

Capítol 2

Esquemes de famílies de clústers

2.1 Parametrització dels clústers

Aquesta secció fa una breu introducció als conceptes de clúster. Començarem amb les definicions i alguna propietat per acabar, ràpidament, explicant la construcció dels blowups iterats, unes varietats que parametritzen els conjunts de clústers. Concretament aquests són els conceptes que després generalitzem per B-punts, el cas relatiu. Especialment la construcció de les varietats. Totes les definicions i resultats d'aquesta secció estan extrets de l'article [22].

Definició 2.1.1. Donada una superfície S i un punt $p \in S$ definim:

- Si E és el divisor excepcional del blowup de S amb centre p, llavors E és el *primer entorn infinitesimal* de p. Inductivament es defineix el *k-èsim entorn infinitesimal* de p com el conjunt de punts que estan en el primer entorn infinitesimal d'algun punt q que està en el $(k-1)$-èsim entorn infinitesimal de p.

- Un punt és *infinitament proper* a p si pertany a algun entorn infinitesimal de p.

- Un punt és *pròxim* a p si pertany a E o alguna transformada estricta de E.

- Un punt pròxim a més d'un punt es diu punt *satèl·lit* i un punt pròxim a exactament un punt es diu punt *lliure*.

Notem que aquestes definicions sols fan referència a un punt d'una superfície S, tant si aquesta és el resultat d'haver fet el blowup d'una altra superfície en un punt com si no.
Les relacions de ser infinitament proper o pròxim no són simètriques, sempre tenim que els punts en el primer entorn infinitesimal d'un punt p són pròxims a p i un punt com a molt pot ser pròxim a dos punts, és a dir, un punt satèl·lit és aquell que és pròxim a dos punts.

Definició 2.1.2. Donada una superfície S i un punt $p \in S$ un *clúster* de S amb base p és un conjunt finit de punts K infinitament propers a p tal que per tot $p \in K$ si p és pròxim a q aleshores $q \in K$.

Definició 2.1.3. Un clúster sobre S, sense base fixada, és una unió finita de clústers sobre S amb no necessàriament la mateixa base

Blowups iterats

Donada una superfície S llisa i projectiva, el conjunt X_1 de tots els clústers de exactament un punt de S es pot identificar amb la pròpia superfície S. Aquesta varietat, X_1, parametritza els clústers d'un punt o $1-$clústers de S. Si considerem $p_2 : X_1 \times X_1 \to X_1$, la projecció sobre la segona component com una família trivial de superfícies, tenim $\Delta : X_1 \to X_1 \times X_1$ la secció diagonal i podem aplicar la construcció del blowup d'una secció. Així obtenim

$$\begin{tikzcd} X_2 \arrow[r, "\mathrm{bl}_\Delta"] \arrow[dr, "f_1"'] & X_1 \times X_1 \arrow[d, shift right, "p_2"'] \\ & X_1 \arrow[u, shift right, bend right, "\Delta"'] \end{tikzcd}$$

una nova família de superfícies, $f_1 : X_2 \to X_1$, indexada per la superfície S i on cada fibra $(X_2)_p$ és el blowup de S en p. Concretament tenim que el blowup és $p_1 \circ \mathrm{bl}_\Delta|_{\tilde{S}_p} : \tilde{S}_p \to S$. Així un punt $x \in X_2$ es correspon a una parella de punts $x = (p, q)$ on $p \in S$ i $q \in \mathrm{Bl}_p(S)$, és a dir, X_2 parametritza els clústers de dos punts de S. Si q no pertany al divisor excepcional del $\mathrm{Bl}_p(S)$, x es correspon a un clúster de dos punts diferents de S i si q està al divisor excepcional, x és un $2-$clúster de S amb base p (és a dir, tal que q és pròxim a p).

L'aplicació que acabem de descriure, que envia punts $x \in X_2$ a clústers de dos punts $\{p, q\}$ de S on $x = (p, q)$, és una projecció i en cap cas és injectiva. Es veu clar, amb la notació que hem usat, que els punts de X_2 estan en bijecció amb els clústers ordenats de dos punts i aquests es projecten dos a un als clústers de dos punts sense base. Observem però que els punts $x \in X_2$ del divisor excepcional, que és tancat, es corresponen a clústers amb base i com que la base sempre és la segona component, per tal i com ho hem definit, aquest sí que estan en bijecció amb els clústers de dos punts amb base.

Kleiman va introduir a [12] varietats que naturalment parametritzen clústers ordenats de n punts. La construcció funciona de manera iterativa. Primer es suposa que les varietats X_{n-1} i X_{n-2} han estat definides, amb morfismes $f_{n-2}, g_{n-2} : X_{n-1} \to X_{n-2}$ i $g_1 \circ \cdots \circ g_{n-2} : X_{n-1} \to S$ de manera que X_{n-2} parametritza els clústers ordenats de $n-2$ punts de S i la fibra $S_K := f_{n-1}^{-1}(K)$ per $K \in X_{n-2}$ és la superfície obtinguda pel blowup de tots els punts de K, on el blowup és la restricció de $g_1 \circ \cdots \circ g_{n-2}$ a S_K. Llavors X_{n-1} parametritza clústers ordenats de $n-1$ punts, identificant un punt $x \in X_{n-1}$ amb el clúster $K' = (K, x)$ on $x \in S_K$ per $K \in X_{n-2}$, així $K = f_{n-2}(K')$. Després es considera el producte fibrat,

$$X_{n-1} \times_{X_{n-2}} X_{n-1} = \{(K_1, K_2) \in X_{n-1} \times X_{n-1} \mid f_{n-2}(K_1) = f_{n-2}(K_2)\}$$

que és una varietat llisa i projectiva, i la projecció p_2 sobre la segona component, com una família de superfícies. Ara, aplicant la construcció del blowup d'una secció a la secció diagonal Δ_{n-1}, s'obté una nova família $f_{n-1} : X_n \to X_{n-1}$. Aleshores per cada clúster $K' \in X_{n-1}$ la fibra $S_{K'} := f_n^{-1}(K')$ és el blowup sobre els $n-1$ punt de K' i la restricció de $g_1 \circ \cdots \circ g_{n-1}$ a $S_{K'}$, on $g_{n-1} := p_1 \circ \mathrm{Bl}_{\Delta_{n-1}}$, és el blowup. Per tant X_n parametritza els clústers ordenats de n punts

S'anomena X_n la varietat dels clústers ordenats de n punts i, per cada $K \in X_n$ s'identifica la superfície S_K obtinguda pel blowup de tots els punts de K amb $f_{n+1}^{-1}(K) \subset X_{n+1}$.

2.2 Clústers de seccions

En aquesta secció donem una generalització de la definició de clúster de punts de la secció anterior a clústers de seccions o clústers de B-punts. Recordem, del capítol 1, que donada una família de superfícies $\pi : \mathcal{S} \to B$ i una secció $\sigma : B \to \mathcal{S}$ tenim una nova família de superfícies $\pi_\sigma : \mathcal{S}_\sigma \to B$ on per tot $t \in B$ la fibra $(\mathcal{S}_\sigma)_t$ és el blowup de $\mathcal{S}_t$ amb base $\sigma(t)$.

Definició 2.2.1. Sigui $E := \mathrm{bl}_\sigma^{-1}(\sigma(B))$ el divisor excepcional del blowup,

- El conjunt F de seccions de π_σ amb la seva imatge continguda en E l'anomenarem el *primer entorn infinitesimal* de σ. Inductivament es defineix el *k-èsim entorn infinitesimal* de σ com les seccions que estan en el primer entorn infinitesimal d'alguna secció τ que està en el $(k-1)$-èsim entorn infinitesimal de σ.
- Una secció és *infinitament propera* a σ si pertany a algun entorn infinitesimal de σ.
- Una secció és *pròxima* a σ si pertany a F o alguna transformada estricta de F.

Aquí la transformada estricta de F és el conjunt $\tilde{F}$ de seccions amb la seva imatge continguda en la transformada estricta de E.

Definició 2.2.2. Un *clúster ordenat de seccions sense base fixada* sobre π és una successió finita de seccions $\{\sigma_n\}_n$ tal que per tot n, σ_n és secció de $\pi_n : S_n \to B$ on $S_n := \mathrm{Bl}_{\sigma_{n-1}(B)}(S_{n-1})$ i $\pi_n := \mathrm{bl}_{\sigma_{n-1}(B)} \circ \pi_{n-1}$ amb $S_0 := \mathcal{S}$ i $\pi_0 := \pi$.

Definició 2.2.3. Fixada una secció $\sigma \in X$ de π, un *clúster ordenat de seccions amb base* σ sobre $\pi : \mathcal{S} \to B$ és un clúster ordenat de seccions $\{\sigma_n\}_n$ sense base fixada sobre π tal que per tot n, σ_n és infinitament propera a σ.

Observem que en un clúster ordenat sense base fixada si la imatge de σ_i és disjunta del divisor excepcional del blowup de la imatge de σ_j o la seva transformada total amb $i > j$ llavors podem intercanviar les seccions σ_i i σ_j en el clúster i aquest segueix estant ben definit i essent un clúster de seccions. Un clúster sense base és una classe d'equivalència de clústers ordenats sense base per l'acció de totes les permutacions de seccions disjuntes.

Observem també que, en contrast amb el que passa per a clústers de punts, un clúster de seccions pot tenir seccions que no siguin ni disjuntes ni infinitament properes una a l'altra. Aquestes no es poden permutar igual que les infinitament properes.

Donada una família de superfícies $\pi : \mathcal{S} \to B$ amb F.U.s (X, ψ), considerem el següent diagrama commutatiu,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}_2 := \mathrm{Bl}_\Delta(\mathcal{S} \times X) \arrow[r, "\mathrm{bl}_\Delta"] \arrow[dr, "\pi_2 := (\pi \times Id_X) \circ \mathrm{bl}_\Delta"'] & \mathcal{S} \times X \arrow[d, "\pi \times Id_X"'] \\
 & B \times X \arrow[u, bend right, "\Delta := \psi \times_X Id_X"']
\end{tikzcd}$$

Explícitament $\Delta(t, \sigma) = (\underline{\sigma}(t), \sigma)$ i el blowup amb centre Δ entenem que és el blowup de $\mathcal{S} \times X$ amb centre la imatge de Δ, que és tancada per ser Δ una secció de $\pi \times Id_X$.
Recordant la construcció del blowup d'una secció veiem que com a conjunt de punts tancats,

$$\mathcal{S}_2 = \bigsqcup_{\sigma \in X} \mathcal{S}_\sigma .$$

Llavors un punt $q \in \mathcal{S}_2$ és una parella de punts (p, σ) tal que $p \in \mathcal{S}_\sigma$ i $\mathrm{bl}_\Delta(q) = (\mathrm{bl}_\sigma(p), \sigma)$, és a dir, $p \in \mathrm{Bl}_{\underline{pr_X \circ \pi_2(q)}(t_q)}(\mathcal{S}_{t_q})$ on $t_q = pr_B \circ \pi_2(q) \in B$.

Observem que $\mathcal{S}_2$ és una família sobre B i sobre X composant π_2 amb les projeccions pr_B i pr_X respectivament. Sigui τ una secció de $pr_B \circ \pi_2$ llavors $pr_X \circ \pi_2 \circ \tau : B \to X$ no és necessàriament constant, però pels casos en que ho sigui la secció τ determinarà un clúster ordenat de 2 seccions de π, ja que la imatge de $\underline{\tau}$ estarà continguda en $(pr_X \circ \pi_2)^{-1}(\sigma) \cong \mathcal{S}_\sigma$ per $\sigma := pr_X \circ \pi_2(\tau(t)) \in X$, on $t \in B$. Considerant aquests fets definim,

Definició 2.2.4. Una *família de clústers de 2-seccions* és un esquema C amb dos morfismes $\alpha : C \to X$ i $\beta : B \times C \to \mathcal{S}_2$ tals que els següents diagrames commuten:

$$\begin{tikzcd}
B \times C \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "Id_B \times \alpha"'] & \mathcal{S}_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\
 & B \times X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \times C \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "pr'_B"'] & \mathcal{S}_2 \arrow[d, "pr_B \circ \pi_2"] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

El primer diagrama li direm la propietat de α i el segon la propietat de β. La propietat de β senzillament diu que (C, β) és família de seccions de $pr_B \circ \pi_2$. Llavors la propietat de α garanteix que per cada $c \in C$ el morfisme $pr_X \circ \pi_2 \circ \underline{c}$ sigui constant. D'aquesta manera per un $\mathbb{C}$-punt $c \in C(\mathbb{C})$, $\underline{c}$ és una secció de $\mathcal{S}_{\alpha(c)}$ i per tant c es correspon a un clúster ordenat de 2 seccions $(\underline{\alpha(c)}, \underline{c})$.

Una *família universal de clústers de 2-seccions* és una família de clústers de 2 seccions $(Cl_2(\mathcal{S}), \alpha, \beta)$ amb la propietat universal següent: Per tota altra família de clústers de 2-seccions (C', α', β') existeix un únic morfisme $g : C' \to Cl_2(\mathcal{S})$ tal que $\alpha' = \alpha \circ g$ i $\beta' = \beta \circ (Id_B \times g)$.

Les notacions de $\mathcal{S}_2$, π_2 i Δ les mantindrem al llarg de tot el treball.

Proposició 2.2.5. *Donades (C, α, β) i (C', α', β') dues famílies de clústers de 2 seccions de π i un morfisme $g : C' \to C$ tal que $\beta' = \beta \circ (Id_B \times g)$ llavors $\alpha' = \alpha \circ g$.*

Demostració. És clar pel següent diagrama.

$$\begin{tikzcd}
B \times C' \arrow[dr, "Id_B \times g"] \arrow[drr, bend left, "\beta'"] \arrow[ddrr, bend right, "Id_B \times \alpha'"'] & & \\
& B \times C \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "Id_B \times \alpha"] & \mathcal{S}_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\
& & B \times X
\end{tikzcd}$$

□

És a dir, podem definir una *família universal de clústers de 2-seccions* com una família de clúster de 2 seccions $(Cl_2(\mathcal{S}), \alpha, \beta)$ tal que $(Cl_2(\mathcal{S}), \beta)$ compleix la P.U.s per la família $pr_B \circ \pi_2$ però restringida a les famílies de clústers de 2 seccions.

Proposició 2.2.6. *Sigui $\pi : \mathcal{S} \to B$ una família de superfícies tal que existeix una F.U.2sec $(Cl_2(\mathcal{S}), \alpha, \beta)$, aleshores $(Cl_2(\mathcal{S}), \alpha, \beta)$ és únic llevat d'isomorfisme únic.*

Demostració. Farem la demostració per abstract non-sense. Fixem (C, a, b) una altra F.U.2sec de π i veiem que existeix un únic isomorfisme entre C i $Cl_2(\mathcal{S})$.

Per ser (C, a, b) F.U.2sec de π i $(Cl_2(\mathcal{S}), \alpha, \beta)$ una família de clústers de 2-seccions de π existeix un únic morfisme $g_0 : Cl_2(\mathcal{S}) \to C$ tal que

$$\beta = b \circ (Id_B \times g_0)$$

$$\alpha = a \circ g_0.$$

Per ser $(Cl_2(\mathcal{S}), \alpha, \beta)$ F.U.2sec de π i (C, a, b) una família de clústers de 2-seccions de π existeix un únic morfisme $g_1 : C \to Cl_2(\mathcal{S})$ tal que

$$b = \beta \circ (Id_B \times g_1)$$

$$a = \alpha \circ g_1.$$

Ara veurem que g_0 i g_1 són els isomorfismes entre C i $Cl_2(\mathcal{S})$, i per tant tindrem la unicitat del isomorfisme.
Composant les identitats anteriors trobem,

$$\alpha = \alpha \circ (g_1 \circ g_0)$$

$$\beta = \beta \circ (Id_B \times (g_1 \circ g_0))$$

Per ser $(Cl_2(\mathcal{S}), \alpha, \beta)$ F.U.2sec de π i a la vegada ser una família de clústers de 2-seccions de π, existeix un únic morfisme $h_1 : Cl_2(\mathcal{S}) \to Cl_2(\mathcal{S})$ tal que

$$\alpha = \alpha \circ h_1$$
$$\beta = \beta \circ (Id_B \times h_1)$$

Per tant $h_1 = g_1 \circ g_0$. A més, com que el morfisme identitat de $Cl_2(\mathcal{S})$ també compleix aquestes relacions tenim

$$g_1 \circ g_0 = Id_{Cl_2(\mathcal{S})}$$

A partir de les quatre primeres identitats també podem trobar

$$a = a \circ (g_0 \circ g_1)$$
$$b = b \circ (Id_B \times (g_0 \circ g_1)).$$

Per ser (C, a, b) F.U.2sec de π i a la vegada ser una família de clústers de 2-seccions de π, existeix un únic morfisme $h_0 : C \to C$ tal que

$$a = a \circ h_0$$
$$b = b \circ (Id_B \times h_0)$$

Per tant $h_0 = g_0 \circ g_1$. A més, com que el morfisme identitat de C també compleix aquestes relacions tenim

$$g_0 \circ g_1 = Id_C.$$

□

Teorema 2.2.7. *Sigui $\pi : \mathcal{S} \to B$ una família de superfícies amb B propi i $\mathcal{S}$ quasi-projectiu, aleshores existeix la F.U.2sec $(Cl_2(\mathcal{S}), \alpha, \beta)$.*

Demostració. Per 1.2.12 existeix X la F.U.s de la família de superfícies i és un esquema quasi-projectiu, per tant $\mathcal{S}_2$ també és quasi-projectiu i per 1.2.12 de nou existeix (X_2, ψ_2) F.U.s de la família $\mathcal{S}_2 \to B$.
D'igual manera existeix la F.U.s (BX, φ) de $pr_B : B \times X \to B$, en aquest cas $BX = Hom_{Sch}(B, X)$. Com que $(X \times B, Id_{X \times B})$ és una família de seccions de pr_B, per la P.U.s de BX existeix un únic morfisme $i : X \to BX$ tal que $Id_{B \times X} = \varphi \circ (Id_B \times i)$.

$$\begin{tikzcd} B \times X \arrow[d, "Id_B \times i"'] \arrow[dr, "Id_{B\times X}"] & \\ B \times BX \arrow[r, "\varphi"] & B \times X \end{tikzcd}$$

Amb aquest diagrama commutatiu veiem que a través de i els punts de X donen seccions constants de pr_B. A més, i és isomorfisme amb la seva imatge i aquesta és un subesquema tancat de BX, ja que per qualsevol $t_0 \in B$ tancat, si $j_{t_0} : BX \to B \times BX$ és la inclusió en t_0, llavors $pr_X \circ \varphi \circ j_{t_0}$ restringit a la imatge de i és el morfisme invers de i i com que i és una secció de $pr_X \circ \varphi \circ j_{t_0}$, que és un morfisme separat i exhaustiu, $i(X)$ és tancat per 1.2.4. (Si pensem els elements de BX com a morfismes de B en X llavors el morfisme $pr_X \circ \varphi \circ j_{t_0}$

és el morfisme avaluar en $t_0 \in B$).
També tenim que $(X_2, \pi_2 \circ \psi_2)$ és família de seccions de pr_B, per tant, existeix un únic morfisme $f : X_2 \to BX$ tal que $\pi_2 \circ \psi_2 = \varphi \circ (Id_B \times f)$. Llavors $Cl_2(\mathcal{S}) := f^{-1}(i(X))$, $\beta := \psi_2|_{B \times Cl_2(\mathcal{S})}$ i $\alpha := i^{-1} \circ f|_{Cl_2(\mathcal{S})}$ compleixen la definició de F.U.2sec. Considerem el següent diagrama commutatiu per il·lustrar la situació,

$$\begin{tikzcd}
B \times Cl_2(\mathcal{S}) \arrow[r, "Id_B \times i_{Cl_2(\mathcal{S})}"] \arrow[d, "Id_B \times \alpha"] \arrow[rr, bend left, "\beta"] & B \times X_2 \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[d, "Id_B \times f"] & \mathcal{S}_1 \arrow[d, "\pi_2"] \\
B \times X \arrow[r, "Id_B \times i"] \arrow[dr, "pr_B"'] & B \times BX \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "pr'_B"] & B \times X \arrow[dl, "pr_B"] \\
 & B &
\end{tikzcd}$$

L'únic punt no obvi de que $(Cl_2(\mathcal{S}), \alpha, \beta)$ és una família de clústers de 2 seccions és la igualtat $Id_B \times \alpha = \pi_2 \circ \beta$, però mirant els dos diagrames anteriors queda clar que la igualtat es compleix.

Per veure que és la F.U.2sec de π considerem una altra família de 2 seccions (C, α', β') i comprovem que existeix un únic morfisme $g : C \to Cl_2(\mathcal{S})$ tal que $\beta' = \beta \circ (Id_B \times g)$.
Per ser família de clústers de 2 seccions, (C, β') és una família de seccions de $pr_B \circ \pi_2 : \mathcal{S}_2 \to B$, a més, $(C, \pi_2 \circ \beta')$ és una família de seccions de $pr_B : B \times X \to B$. Per tant existeixen uns únics morfismes $g_0 : C \to X_2$, i $j : C \to BX$ tals que $\beta' = \psi_2 \circ (Id_B \times g_0)$ i $\pi_2 \circ \beta' = \varphi \circ (Id_B \times j)$. Considerem el següent diagrama,

$$\begin{tikzcd}
B \times C \arrow[d, "Id_B \times \alpha'"] \arrow[dr, "\pi_2 \circ \beta'"] \arrow[dd, bend right=60, "Id_B \times j"'] & \\
B \times X \arrow[r, "Id_{B \times X}"] \arrow[d, "Id_B \times i"] & B \times X \\
B \times BX \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

ara es veu clar que per la unicitat de j, $j = i \circ \alpha'$. A més, si considerem el diagrama,

$$\begin{tikzcd}
B \times C \arrow[d, "Id_B \times g_0"] \arrow[dr, "\beta'"] \arrow[dd, bend right=60, "Id_B \times j"'] & \\
B \times X_2 \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[d, "Id_B \times f"] & \mathcal{S}_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\
B \times BX \arrow[r, "\varphi"] & B \times X
\end{tikzcd}$$

un altre cop per la unicitat de j, tenim que $j = f \circ g_0$. Per tant $i \circ \alpha' = f \circ g_0$, que implica $g_0(C) \subseteq Cl_2(\mathcal{S})$ i llavors podem pensar g_0 com un morfisme amb imatge en $Cl_2(\mathcal{S})$. Si diem $g : C \to Cl_2(\mathcal{S})$ aquest morfisme llavors

$$\beta \circ (Id_B \times g) := \psi_2|_{Cl_2(\mathcal{S})} \circ (Id_B \times g) = \psi_2 \circ (Id_B \times g_0) = \beta'.$$

Finalment, si existeix un morfisme $g' : C \to Cl_2(\mathcal{S})$ tal que $\beta' = \beta \circ (Id_B \times g')$, llavors

$$\beta' = \psi_2 \circ (Id_B \times (i_{Cl_2(\mathcal{S})} \circ g')),$$

per la unicitat de g_0 tenim $i_{Cl_2(\mathcal{S})} \circ g = i_{Cl_2(\mathcal{S})} \circ g'$ i com que $i_{Cl_2(\mathcal{S})}$ és injectiva $g' = g$. □

Observem que per construcció el diagrama,

$$\begin{tikzcd}
Cl_2(\mathcal{S}) \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, "i_{Cl_2(\mathcal{S})}"] & X_2 \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r, "i"] & BX
\end{tikzcd}$$

és un producte fibrat, és a dir, $Cl_2(\mathcal{S}) = X \times_{BX} X_2$. El que passa, com veurem en la secció de clústers de dues seccions, és que hi ha un morfisme $h : X_2 \to X$ tal que el següent diagrama és commutatiu

$$\begin{tikzcd}
 & X_2 \arrow[dl, "h"] \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r, "i"] & BX
\end{tikzcd}$$

i per això podem tenir aquesta descripció de $Cl_2(\mathcal{S})$.

Lema 2.2.8. *Sigui $\pi : \mathcal{S} \to B$ una família de superfícies amb (X, ψ) F.U.s, llavors per cada secció $\sigma \in X$ hi ha un morfisme $s_\sigma : \mathcal{S}_\sigma \to \mathcal{S}_2$ que és isomorfisme amb la seva imatge, $(pr_X \circ \pi_2)^{-1}(\sigma)$.*

Demostració. Per cada $\sigma \in X$ un punt tancat, la fibra $(\mathcal{S})_\sigma$ sobre σ pel morfisme $pr_X : \mathcal{S} \times X \to X$ és isomorfa a $\mathcal{S}$. Per tant tenim la inclusió de $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S} \times X$ en σ, diem-li υ. Ara, $\upsilon^{-1}(\Delta) = \underline{\sigma}(B)$, per tant $(\mathrm{bl}_\sigma \circ \upsilon)^{-1}(\Delta)$ és un divisor de Cartier efectiu en $\mathcal{S}_\sigma$ i per la P.U.b del blowup bl_Δ existeix un únic morfisme $s : \mathcal{S}_\sigma \to \mathcal{S}_2$ tal que el següent diagrama commuta,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_\sigma & \xrightarrow{s} & \mathcal{S}_2 \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{bl}_\sigma} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{bl}_\Delta} \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{\upsilon} & \mathcal{S}\times X \end{array}$$

Per la commutativitat del diagrama anterior tenim que $s(\mathcal{S}_\sigma) = \mathrm{bl}_\Delta^{-1}(\upsilon(\mathcal{S}))$ i recordant la definició de blowup d'una secció veiem que $s(\mathcal{S}_\sigma)$ és isomorf a $\mathcal{S}_\sigma$. Això no ens diu que s sigui isomorfisme amb la seva imatge, però si que ens diu que hi ha un isomorfisme de $\mathcal{S}_\sigma$ a $s(\mathcal{S}_\sigma)$, dons bé, el morfisme s_σ que busquem serà aquest isomorfisme composat amb la inclusió de $s(\mathcal{S}_\sigma)$ en $\mathcal{S}_2$. No costa gaire veure que en realitat $s = s_\sigma$, però sí que és llarg. □

Proposició 2.2.9. *Sigui $\pi:\mathcal{S}\to B$ una família de superfícies amb B propi i $\mathcal{S}$ quasiprojectiu, aleshores l'aplicació*

$$\begin{array}{cccc} \Psi: & Cl_2(\mathcal{S})(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \{\textit{ clústers ordenats de 2-seccions de } \pi:\mathcal{S}\to B\} \\ & c & \longrightarrow & (\underline{\alpha(c)}, \underline{c}) \end{array}$$

és bijectiva.

Demostració. Pel teorema anterior existeix la F.U.2sec $(Cl_2(\mathcal{S}), \alpha, \beta)$ i per la seva unicitat té la forma que descriu la demostració del teorema. També sabem que existeix la F.U.s de $pr_B \circ \pi_2 : \mathcal{S}_2 \to B$, (X_2, ψ_2), per tant té sentit considerà la Φ de la proposició 1.2.7, que a més, sabem que és bijectiva.

Definim Λ com el subconjunt de seccions s de π_2 tals que el morfisme $pr_X \circ \pi_2 \circ s$ és constant. Llavors, com hem vist a la definició de F.U.2sec, hi ha una aplicació η que envia els elements de Λ a clústers ordenats de 2 seccions de π. Per descriure η fixem un $t_0 \in B$ qualsevol i llavors

$$\begin{array}{cccc} \eta & : & \Lambda & \longrightarrow & \{\text{ clústers ordenats de 2-seccions de } \pi\} \\ & & s & \longmapsto & ((pr_X \circ \pi_2 \circ s)(t_0), s) \end{array}.$$

η és independent de la tria de $t_0 \in B$ ja que $pr_X \circ \pi_2 \circ s$ és constant. A més és bijectiva perquè té inversa, $\eta^{-1}(\sigma,\tau) = s_\sigma \circ \tau$ on s_σ és el morfisme del lema anterior.

Clarament Φ restringida a $Cl_2(\mathcal{S})(\mathbb{C})$ té la imatge continguda en Λ, és més, la seva imatge és exactament Λ. Per veure que és exactament Λ necessitem veure que per tot $s \in \Lambda$, $\Phi^{-1}(s) \in Cl_2(\mathcal{S})(\mathbb{C})$. Tenint en compte que $Cl_2(\mathcal{S})$ té la forma que li dona la construcció del teorema anterior hem de veure que $f(\Phi^{-1}(s)) \in i(X)$, on f i i són els morfismes del teorema anterior. Com que els elements de $i(X)$ són els punts de BX que donen seccions constants de $B\times X \to B$, hem de veure que $pr_X \circ \underline{f(\Phi^{-1}(s))}$ és constant. Per ser $s \in \Lambda$ sabem que $pr_X \circ \pi_2 \circ s$ és constant, per la definició de Φ tenim $\underline{\Phi^{-1}(s)} = s$, per ser $\Phi^{-1}(s)$ un punt tancat $B \cong B_{f(\Phi^{-1}(s))} \cong B_{\Phi^{-1}(s)}$ i per tant, pel següent diagrama commutatiu, tenim que $\Phi(Cl_2(\mathcal{S})(\mathbb{C})) = \Lambda$

$$\begin{tikzcd}
 & B \times X_2 \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[dd, "Id_B \times f"] & \mathcal{S}_2 \arrow[dd, "\pi_2"] & \\
B \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] \arrow[urr, bend left, hook, "s = \underline{\Phi^{-1}(s)}"] \arrow[drr, bend right, hook, "\underline{f(\Phi^{-1}(s))}"'] & & & \\
 & B \times BX \arrow[r, "\varphi"] & B \times X \arrow[r, "pr_X"] & X
\end{tikzcd}$$

Ara, Ψ és bijectiva ja que $\Psi = \eta \circ \Phi|_{Cl_2(\mathcal{S})(\mathbb{C})}$. $\square$

2.3 Blowups relatius

En aquesta secció fixem una família de superfícies $\pi : \mathcal{S} \to B$ amb B propi i $\mathcal{S}$ quasi-projectiu, per tant sabem que existeix la seva F.U.s (X, ψ). Llavors fixat un punt tancat $\sigma \in X$, com que el bl_σ és projectiu la família de superfícies $\pi_\sigma : \mathcal{S}_\sigma \to B$ és quasiprojectiva i també existeix la seva F.U.s $(\tilde{X}, \tilde{\psi})$. Llavors veiem que es pot construir $\tilde{X}$ a partir de X.

Definim E_σ com el divisor excepcional de $\mathcal{S}_\sigma$, $Y := \tilde{\psi}^{-1}(E_\sigma)$ i $pr_{\tilde{X}} : B \times \tilde{X} \to \tilde{X}$ i $pr_B : B \times \tilde{X} \to B$ com les projeccions.

En aquesta secció haurem de treballar amb $\omega \in \tilde{X}$ no necessàriament tancat. Recordem de la definició de família universal de seccions (1.2.5) la construcció d'una secció per punts no necessàriament tancats, així donat $\omega \in \tilde{X}$ tenim que $\pi_\sigma^\omega : \mathcal{S}_\sigma^\omega \to B_\omega$ és la família de superfícies de la qual $\underline{\omega}$ n'és una secció. Llavors definim E_σ^ω com l'antiimatge de E_σ a $\mathcal{S}_\sigma^\omega$, $Y_\omega := \underline{\omega}^{-1}(E_\sigma^\omega)$ i els morfismes $pr_\omega : \mathcal{S}_\sigma^\omega \to \mathcal{S}_\sigma$ i $pr_{f_\sigma(\omega)} : \mathcal{S}^{f_\sigma(\omega)} \to \mathcal{S}$ com les projeccions.

Tant Y com Y_ω són tancats de Zariski, en el segon cas això és perquè pr_B restringida a la fibra de ω pel morfisme $pr_{\tilde{X}}$ és isomorfisme amb inversa i_ω.

Proposició 2.3.1. *Existeix un únic morfisme $f_\sigma : \tilde{X} \to X$ tal que el següent diagrama commuta,*

$$\begin{tikzcd}
B \times \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{\psi}"] \arrow[d, "Id_B \times f_\sigma"] & \mathcal{S}_\sigma \arrow[d, "\mathrm{bl}_\sigma"] \\
B \times X \arrow[r, "\psi"] & \mathcal{S}
\end{tikzcd}$$

Demostració. Com que $(\tilde{X}, \mathrm{bl}_\sigma \circ \psi_\sigma)$ és una família de seccions de π, podem aplicar la P.U.s de la F.U.s (X, ψ). $\square$

El punt $\sigma \in X$ és un punt tancat i com a tal determina una secció de π. En canvi ω no té per que ser-ho i per tant $f_\sigma(\omega)$ tampoc té per que ser tancat. Llavors la notació $\underline{f_\sigma(\omega)}(t) = \underline{\sigma}(t)$ és un abús de llenguatge per dir que

$$\underline{\sigma} \circ p1 \circ i_t = pr_{f_\sigma(\omega)} \circ \underline{f_\sigma(\omega)} \circ i_t$$

on $i_t : \mathrm{Spec}(k(t)) \to B_{f_\sigma(\omega)}$ és la inclusió en $t \in B_{f_\sigma(\omega)}$ i $p1 : B_{f_\sigma(\omega)} \to B$ és la projecció.

Proposició 2.3.2. *Per tot $\omega \in \tilde{X}$, donat $t \in B_\omega$, $\underline{\omega}(t) \in E_\sigma^\omega$ sii $\underline{f_\sigma(\omega)}(t) = \underline{\sigma}(t)$, és més, $f_\sigma(\omega) = \sigma$ sii $Y_\omega = B_\omega$. .*

Demostració. És evident ja que el següent diagrama és commutatiu.

$$\begin{tikzcd}
B_\omega \arrow[r, "Id_B \times i_\omega"] \arrow[d, "Id_B \times f_\sigma"'] \arrow[rr, bend left, "\underline{\omega}"] & B \times \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{\psi}"] \arrow[d, "Id_B \times f_\sigma"] & \mathcal{S}_\sigma \arrow[d, "\mathrm{bl}_{\underline{\sigma}(B)}"] \\
B_{f_\sigma(\omega)} \arrow[r, "Id_B \times i_{f_\sigma(\omega)}"] \arrow[rr, bend right, "\underline{f_\sigma(\omega)}"'] & B \times X \arrow[r, "\psi"] & \mathcal{S}
\end{tikzcd}$$

On i_ω i $i_{f_\sigma(\omega)}$ són les inclusions en ω i $f_\sigma(\omega)$ respectivament. □

Proposició 2.3.3. *Y és un tancat localment principal i $Y_\omega \subseteq B_\omega$ és un divisor de Cartier efectiu per tot $\omega \in \tilde{X}$ tal que $f_\sigma(\omega) \neq \sigma$.*

Demostració. Y és antiimatge per un morfisme de E_σ que és un tancat localment principal, per tant, Y també és un tancat localment principal.
Sabem que B_ω és isomorf a $\underline{\omega}(B)$ via $\underline{\omega}$. A més, $Y_\omega = \underline{\omega}^{-1}(E_\sigma^\omega \cap \underline{\omega}(B_\omega))$, per tant $\underline{\omega}(Y_\omega) = \underline{\omega}(B_\omega) \cap E_\sigma^\omega$ que és un divisor de Cartier efectiu en $\underline{\omega}(B_\omega)$ sii $\underline{\omega}(B_\omega) \not\subseteq E_\sigma^\omega$ que passa sii $f_\sigma(\omega) \neq \sigma$. □

Proposició 2.3.4. *Definim $U := \{\omega \in \tilde{X}$ tal que Y_ω és un divisor de Cartier efectiu en $B_\omega\}$ i $Z := pr_{\tilde{X}}^{-1}(U) \cap Y$. Llavors U és un obert i $Z \subseteq B \times U$ és divisor de Cartier efectiu relatiu al morfisme $pr_{\tilde{X}}|_{B\times U} = pr_U$.*

Demostració. Clarament $U = \tilde{X} \setminus f_\sigma^{-1}(\sigma)$, per tant és obert, ja que σ és un punt tancat.
Z és un tancat localment principal en $B \times U$. El morfisme pr_U és pla i localment de presentació finita ja que B és projectiu, de tipus finit i U és quasiprojectiu i localment noetherià. A més, per definició, per tot $\omega \in U$, $Z_\omega := (pr_U|_Z)^{-1}(\omega) \subset (B \times U)_\omega$ és un divisor de Cartier efectiu, per tant podem aplicar el lema 1.1.32.
□

Donada una component irreductible de $\tilde{X}$, $\tilde{X}^0$, definim $U_0 := \tilde{X}^0 \cap U$

Lema 2.3.5. *Definim $I := \psi^{-1}(\underline{\sigma}(B))$ aleshores $I \cap (B \times f_\sigma(U_0)) \subseteq B \times f_\sigma(U_0)$ és pla pel morfisme $pr_{f_\sigma(U_0)}$.*

Demostració. Per ser $Z \subseteq B \times U$ divisor de Cartier efectiu relatiu al morfisme $pr_{\tilde{X}}|_{B\times U} = pr_U$ és pla i el polinomi de Hilbert de Z_ω és independent de ω. Si $I_\tau := (pr_{f_\sigma(U_0)}|_I)^{-1}(\tau)$, $Z_\omega \cong Y_\omega = pr_B(pr_X^{-1}(f_\sigma(\omega)) \cap I) \cong I_{f_\sigma(\omega)}$. Per tant el polinomi de Hilbert de I_τ és independent de τ per tot $\tau \in f_\sigma(U_0)$ i llavors $pr_{f_\sigma(U_0)}|_I$ és pla. (veure teorema 9.9 [10, III]) □

Teorema 2.3.6. *$f_\sigma|_{U_0}$ és isomorfisme amb la seva imatge.*

Demostració. Primer recordem que per ser $\tilde{X}$ un esquema localment noetherià i quasiprojectiu, tota component irreductible és quasiprojectiva i de dimensió finita.

Donats ω i $\omega' \in U$ tals que $f_\sigma(\omega) = f_\sigma(\omega)$ aleshores $\underline{f_\sigma(\omega)} = \underline{f_\sigma(\omega')}$. Si els dos són punts tancats de U, la transformada estricta de $\underline{f_\sigma(\omega)}(B)$ pel blowup bl_σ és exactament $\underline{\omega}(B)$, per tant $\underline{\omega} = \underline{\omega'}$, $\omega = \omega'$ i $f_\sigma|_U$ és injectiva sobre els punts tancats. Si no són tancat podem considerar la transformada estricta de $\underline{f_\sigma(\omega)}(B_{f_\sigma(\omega)})$ pel morfisme $\mathrm{bl}_\sigma \times f_\sigma : \mathcal{S}_\sigma^\omega \to \mathcal{S}^{f_\sigma(\omega)}$ com

$$\overline{(\mathrm{bl}_\sigma \times f_\sigma)^{-1}\left(\underline{f_\sigma(\omega)}(B_{f_\sigma(\omega)}) \setminus pr_{f_\sigma(\omega)}^{-1}(\underline{\sigma}(B))\right)}$$

que ha de ser igual a $\underline{\omega}(B_\omega)$ perquè comparteixen un obert dens de Zariski. A més tenim el següent diagrama commutatiu,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}_\sigma^\omega \arrow[r, "\mathrm{bl}_\sigma \times f_\sigma"] \arrow[d, "pr_\omega"] & \mathcal{S}^{f_\sigma(\omega)} \arrow[d, "pr_{f_\sigma(\omega)}"] \\
\mathcal{S}_\sigma \arrow[r, "\mathrm{bl}_\sigma"] & \mathcal{S}
\end{tikzcd}$$

amb això és clar que $pr_{f_\sigma(\omega)} \circ \underline{\omega} = pr_{f_\sigma(\omega')} \circ \underline{\omega'}$ i per tant $\omega = \omega'$ i $f_\sigma|_U$ també és injectiva sobre els punts no tancats. Així sols hem de veure que la seva aplicació inversa és a més un morfisme.

Definim $\psi_0 := \psi|_{B \times f_\sigma(U_0)}$, $I_0 := \psi_0^{-1}(\underline{\sigma}(B))$, $p : B \times f_\sigma(U_0) \to f_\sigma(U_0)$ la projecció, que és un morfisme pla, i $(I_0)_\tau$ la fibra sobre τ pel morfisme $p|_{I_0}$. Per cada $\tau \in p(I_0)$ existeix una única $\omega \in U_0$ tal que $\tau = f_\sigma(\omega)$, a més, $pr_B|_{(I_0)_\tau}$ és isomorfisme i clarament $pr_B((I_0)_\tau) = Y_\omega \subseteq B_\omega$ que és un divisor de Cartier efectiu ja que $\omega \in U_0$. Per tant $(I_0)_\tau \subseteq (B \times f_\sigma(U_0))_\tau$ és un divisor de Cartier efectiu. Pel lema 2.3.5, $pr_{f_\sigma(U_0)}|_{(I_0)}$ és pla i per tant, pel lema 1.1.32, $I_0 \subseteq B \times f_\sigma(U_0)$ és un divisor de Cartier efectiu relatiu al morfisme $pr_{f_\sigma(U_0)}$.

Ara per la P.U.b del blowup $\mathrm{bl}_{\underline{\sigma}(B)}$ existeix un únic morfisme $g' : B \times f_\sigma(U_0) \to \mathcal{S}_\sigma$ tal que $\mathrm{bl}_{\underline{\sigma}(B)} \circ g' = \psi|_{B \times f_\sigma(U_0)}$. Com que $\pi \circ \psi|_{B \times f_\sigma(U_0)} = pr_B$, $(f_\sigma(U_0), g')$ és una família de seccions de π_σ i per la P.U.s de $(\tilde{X}, \tilde{\psi})$ existeix un únic morfisme $g : f_\sigma(U_0) \to \tilde{X}$ tal que $g' = \tilde{\psi} \circ (Id_B \times g)$. Aleshores el següent diagrama és commutatiu i veurem que g és el morfisme invers de f_σ.

$$\begin{tikzcd}
B \times U_0 \arrow[r, "\tilde{\psi}"] & \mathcal{S}_\sigma \arrow[d, "\mathrm{bl}_\sigma"] \\
B \times f_\sigma(U_0) \arrow[u, "Id_B \times g"] \arrow[ur, "g'"] \arrow[r, "\psi"] & \mathcal{S}
\end{tikzcd}$$

Primer demostrem que $f_\sigma \circ g = Id_{f_\sigma(U_0)}$. Per les propietats de f_σ,

$$\psi \circ (Id_B \times (f_\sigma \circ g)) = \mathrm{bl}_\sigma \circ \tilde{\psi} \circ (Id_B \times g)$$

Per tant, ara pel diagrama anterior,

$$\psi \circ (Id_B \times (f_\sigma \circ g)) = \psi_0$$

però per la P.U.s de (X, ψ) la inclusió de $B \times f_\sigma(U_0)$ en $B \times X$ és l'únic morfisme que compleix aquesta relació.

Ara $g \circ f_\sigma = Id_{U_0}$, ja que si $\tau \in f_\sigma(U_0)$ aleshores existeix una única $\tilde{\tau} \in U_0$ amb $\tau = f_\sigma(\tilde{\tau})$. A més, $\sigma \neq \tau = f_\sigma(g(\tau))$ per tant $g(\tau) \in U = \tilde{X} \setminus f_\sigma^{-1}(\sigma)$ i com que f_σ és injectiva sobre tot U, $\tilde{\tau} = g(\tau)$ i finalment, $g(\tau) = (g \circ f_\sigma)(\tilde{\tau})$ per definició de $\tilde{\tau}$. □

Donades dues seccions σ i τ de π no sempre és cert que la transformada estricte de $\tau(B)$ pel blowup $\mathrm{bl}_\sigma : \mathcal{S}_\sigma \to \mathcal{S}$ es correspongui amb la imatge d'una secció de $\pi \circ \mathrm{bl}$. En els exemples trobarem casos d'aquestes parelles de seccions. Aquest fet motiva la següent definició.

Definició 2.3.7. Donades dues seccions $\sigma, \tau \in X$, diem que la parella (σ, τ) és *una parella de seccions admissibles* si són disjuntes, $\pi(\sigma(B) \cap \tau(B))$ és un divisor de Cartier de B, o $\tau = \sigma$. També direm que τ és admissible respecte σ. Denotarem per X^σ_{adm} el conjunt de seccions admissibles respecte σ.

Exemple 2.1. Si la base B de la família de superfícies té dimensió 1, com que hem suposat que B és regular, tenim $X^\sigma_{adm} = X$

Proposició 2.3.8. *Per tot $\sigma \in X$ un punt tancat, el conjunt X^σ_{adm} és constructible.*

Demostració. $X^\sigma_{adm} = f_\sigma(\tilde{X}) \cup \{\sigma\}$, ja que per qualsevol secció ω de π_σ, $\mathrm{bl}_\sigma \circ \omega$ és una secció de π que ha de ser admissible respecte σ. Per tant, pel teorema de Chevalley, X^σ_{adm} és constructible. □

Teorema 2.3.9. *Existeix una estratificació de $X = \cup_p X^p$ tal que*

1) $\{\sigma\}$ és un estrat

2) Si existeix una $\tau \in X^{p_0}$ amb τ admissible respecte σ aleshores tot element de X^{p_0} és admissible respecte σ.

3) Cada component irreductible $X^{p_0}_0$ de l'estrat X^{p_0} és isomorf al U_0 d'una component irreductible $\tilde{X}^0_\sigma$ de $\tilde{X}$.

Demostració. El morfisme $pr_X|_I : I \to X$, on $pr_X : B \times X \to B$ és la projecció, no és pla en general, però per la proposició 1.1.37, existeix una estratificació de $X = \bigcup_{p \in P} X^p$ tal que el morfisme $pr_X|_{I \cap pr_X^{-1}(X^p)}$ és pla i els estrats són maximals amb aquesta condició. Aquesta és l'estratificació de X que busquem, veiem-ho.

(1) Per la equidimensionalitat de les fibres d'un morfisme pla, $\{\sigma\}$ és un estrat, ja que $\sigma \in pr_X(I)$ és l'única secció tal que la dimensió de $I_\tau = I \times_X \mathrm{Spec}(k(\tau))$, la fibra sobre τ pel morfisme $pr_X|_I$, és igual a la dimensió de B.

(2) Sigui ara X^{p_0} tal que $\sigma \notin X^{p_0}$. Per [9, VI, Theorème 2.1 (i)] i 1.1.31, si existeix $\tau \in X^p$ tal que $I_\tau \cong pr_B(I_\tau) \subset B$ és un divisor de Cartier efectiu aleshores per tot $\tau \in X^p$, I_τ és un divisor de Cartier efectiu.

(3) Llavors per 1.1.32 en X^{p_0}, $(\psi|_{B\times X^p})^{-1}(\underline{\sigma}(B)) \subseteq B \times X^{p_0}$ és un divisor de Cartier efectiu relatiu el morfisme $pr_{X^{p_0}}$. Per la P.U.b del blowup $\mathcal{S}_\sigma$ existeix un únic morfisme $g' : B \times X^{p_0} \to \mathcal{S}_\sigma$ tal que

$$\mathrm{bl}_\sigma \circ g' = \psi|_{B\times X^{p_0}}.$$

Per la P.U.s de $(\tilde{X}, \tilde{\psi})$ existeix un únic morfisme $g : X^{p_0} \to \tilde{X}$ tal que

$$\tilde{\psi} \circ (Id_B \times g) = g'.$$

Per tant

$$\psi|_{B\times X^{p_0}} = \mathrm{bl}_\sigma \circ \tilde{\psi} \circ (Id_B \times g) = \psi \circ (Id_B \times f_\sigma \circ g)$$

i, per la P.U.s de (X, ψ), $f_\sigma \circ g = Id_{X^{p_0}}$.

Per ser X^p_0 irreductible, $g(X^p_0)$ està contingut en $\tilde{X}^0_\sigma$ una component irreductible de $\tilde{X}$. Llavors $X^p_0 = f_\sigma \circ g(X^p_0) \subseteq f_\sigma(\tilde{X})$, és més, com que $\sigma \notin X^p_0$, $X^p_0 \subseteq f_\sigma(U_0)$. A més el lema 2.3.5 diu que $f_\sigma(U_0)$ està contingut en alguna component irreductible d'un estrat i com que aquests són disjunts tenim $f_\sigma(U_0) \subseteq X^p_0$ i per tant $f_\sigma(U_0) = X^p_0$. □

En aquesta secció hem vist que podem descriure $\tilde{X}$ com la unió disjunta d'un tancat, $f_\sigma^{-1}(\sigma)$, i el seu complementari, U, un obert. El tancat és isomorf a la F.U.s de $E_\sigma \to B$, que són les seccions infinitament properes a σ. Per les components irreductibles de $\tilde{X}$, $\tilde{X}^0$, hi ha tres possibilitats,

- $\tilde{X}^0 \subseteq f_\sigma^{-1}(\sigma)$ i totes les seccions són infinitament properes a σ.
- $\tilde{X}^0 \subseteq U$ i $\tilde{X}^0$ és isomorfa a un estrat X^p per f_σ.
- No està continguda en $f_\sigma^{-1}(\sigma)$ ni en U. En aquest cas $\tilde{X}^0$ és birracional a un estrat X^{p_0} per f_σ.

Aleshores sabem que pel tercer cas tindrem el següent diagrama

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}^0 \arrow[r, hook] & \mathrm{Bl}_?(\overline{X^{p_0}}) \arrow[r, "\mathrm{bl}_?"] & \overline{X^{p_0}} \\ \cup & & \cup \\ U_0 \arrow[rr, "\cong"] & & X^{p_0} \end{tikzcd}$$

Sabem que el blowup ha de tenir per centre un ideal amb suport σ però no coneixem aquest ideal i seria molt interessant tenir alguna descripció d'aquest ideal.

2.4 Clústers de dues seccions

En aquesta secció seguirem la mateixa notació de la secció anterior i de la definició de F.U.2sec, excepte que ara a la F.U.s $(\tilde{X}, \tilde{\psi})$ de π_σ li direm $(\tilde{X}_\sigma, \tilde{\psi}_\sigma)$, per diferenciar de quina $\sigma \in X$ es tracta. Llavors reproduirem la secció anterior però sense fixar cap secció. És a dir, veurem que podem construir $Cl_2(\mathcal{S})$ a partir de $X \times X$.

Recordem que E és el divisor excepcional del blowup $\mathcal{S}_2 := Bl_\Delta(\mathcal{S} \times X)$, $\Delta : B \times X \to \mathcal{S} \times X$ és $\psi \times_X Id_X$ i definim $A := \beta^{-1}(E) \subset B \times Cl_2(\mathcal{S})$.

Donat $c \in Cl_2(\mathcal{S})$, igual que per una secció $\sigma \in X$, $\underline{c}$ és secció de $\pi_2^c : \mathcal{S}_2^c \to B_c$. Llavors definim E^c com la antiimatge de E a $\mathcal{S}_2^c$, $A_c := \underline{c}^{-1}(E^c)$ i el morfisme $pr_{Cl_2(\mathcal{S})} : B \times Cl_2(\mathcal{S}) \to Cl_2(\mathcal{S})$ com la projecció.

Proposició 2.4.1. *La F.U.sec de $pr_B \circ (\pi \times Id_X) : \mathcal{S} \times X \to B$ és $(X \times BX, \psi \times_B \varphi)$.*

Demostració. Com que $\mathcal{S} \times_B (B \times X) \cong \mathcal{S} \times X$ podem aplicar la proposició 1.2.9. □

Proposició 2.4.2. *Per cada $\sigma \in X$ existeix una única inclusió $g_\sigma : \tilde{X}_\sigma \to Cl_2(\mathcal{S})$ tal que el següent diagrama commuta,*

$$\begin{array}{ccc} B \times X & \xrightarrow{Id_B \times g_0} & B \times Cl_2(\mathcal{S}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \psi_\sigma} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \beta} \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{\quad s_\sigma \quad} & \mathcal{S}_2 \end{array}$$

on $s_\sigma : \mathcal{S}_\sigma \to \mathcal{S}_2$ és la inclusió del lema 2.2.8.

Demostració. Clarament $(\tilde{X}_\sigma, f_\sigma, s_\sigma \circ \tilde{\psi}_\sigma)$ és una família de clústers de 2 seccions, llavors existeix el morfisme g_σ i és únic. Per veure que és isomorfisme amb la seva imatge es pot fer per abstract nonsense. □

Proposició 2.4.3. *Existeix un únic morfisme $F : Cl_2(\mathcal{S}) \to X \times X$ tal que el següent diagrama commuta,*

$$\begin{array}{ccccc} B \times Cl_2(\mathcal{S}) & & \xrightarrow{\qquad\qquad \beta \qquad\qquad} & & \mathcal{S}_2 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle Id_B \times F} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{bl}_\Delta} \\ B \times X \times X & \xrightarrow{Id_{B \times X} \times i} & B \times X \times BX & \xrightarrow{\psi \times_B \varphi} & S \times X \end{array}$$

Demostració. Com que $(X_2, \mathrm{bl}_\Delta \circ \psi_2)$ és família de seccions de $\mathcal{S} \times X \to B$ existeix un únic morfisme $h : X_2 \to X \times BX$ tal que el següent diagrama commuta,

$$\begin{array}{ccc} B \times X_2 & \xrightarrow{\quad \psi_2 \quad} & \mathcal{S}_2 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle Id_B \times h} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{bl}_\Delta} \\ B \times X \times BX & \xrightarrow{\psi \times_B \varphi} & \mathcal{S} \times X \end{array}$$

llavors, usant l'observació posterior a la proposició 2.2.7, que diu $Cl_2(\mathcal{S}) = X \times_{BX} X_2$, podem definir $F := Id_X \times_{BX} h$. $\square$

Explícitament F queda com

$$F(c) = (\alpha(c), f_{\alpha(c)}(g^{-1}_{\alpha(c)}(c))),$$

i si pensem que c és el clúster de dos seccions (σ, ω), llavors $F(c) = (\sigma, f_\sigma(\omega))$.

Donat una $c \in Cl_2(\mathcal{S})$ l'element $f_{\alpha(c)}(g^{-1}_{\alpha(c)}(c))$ de X li direm bc i a l'element $g^{-1}_{\alpha(c)}(c)$ de $\tilde{X}_\sigma$, ic. Intuïtivament si c és el clúster ordenat de 2-seccions $(\sigma, \tau) \in X \times \tilde{X}_\sigma$ de π, aleshores $ic = \tau$ i $bc = f_\sigma(\tau)$, és a dir, $\underline{bc} = \mathrm{bl}_\sigma \circ \underline{\tau}$. També definim $\Delta_\mathcal{S}$ com el morfisme diagonal de $\mathcal{S} \times_B \mathcal{S}$ i Δ_X com el morfisme diagonal de $X \times X$.

L'esquema $X \times X$ és una família de seccions de $\mathcal{S} \times X \to B$ amb el morfisme $b\beta := (\psi \times_B \varphi) \circ (Id_B \times Id_X \times i)$, llavors $\underline{F(c)}$ n'és una secció.
No coste gaire veure que hi ha un morfisme $s : \mathcal{S} \times X \to \mathcal{S} \times_B \mathcal{S}$ que en components és $s(p, \sigma) = (p, \underline{\sigma}(\pi(p)))$. Llavors definim $\underline{sF(c)} := s \circ \underline{F(c)}$ que és una secció de $\pi \times_B \pi$. Finalment notem que $(X \times X, \psi \times_B \psi)$ és una família de seccions de $\pi \times_B \pi$, la secció que es correspon a $F(c)$ amb aquesta estructura és exactament $\underline{sF(c)}$ i $\psi \times_B \psi = s \circ b\beta$. En la següent proposició trobem un diagrama que mostra part de la situació.

Proposició 2.4.4. *Per tot $c \in Cl_2(\mathcal{S})$, donat $t \in B_c$, $\underline{c}(t) \in E$ sii $\underline{bc}(t) = \underline{\alpha(c)}(t)$, o equivalentment sii $\underline{sF(c)}(t) \in \Delta_\mathcal{S}(\mathcal{S})$. És més, $F(c) \in \Delta_X(X)$ sii $A_c = B_c$. .*

Demostració. És evident ja que el següent diagrama és commutatiu.

$$\begin{tikzcd}
 & B \times Cl_2(\mathcal{S}) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "Id_B \times F"] & \mathcal{S}_2 \arrow[d, "\mathrm{bl}_\Delta"] \arrow[dr, "s \circ \mathrm{bl}_\Delta"] & \\
B_c \arrow[ur, hook, "i_c"] \arrow[dr, hook, "i_{F(c)} \circ (Id_B \times F)"'] \arrow[urr, bend left, "\underline{c}"] \arrow[drrr, bend right, "\underline{sF(c)}"'] & & & \\
 & B \times X \times X \arrow[r, "b\beta"] & \mathcal{S} \times X \arrow[r, "s"] & \mathcal{S} \times_B \mathcal{S}
\end{tikzcd}$$

On i_c i $i_{F(c)}$ són les inclusions en c i $F(c)$ respectivament. $\square$

Proposició 2.4.5. *A és un tancat localment principal i $A_c \subseteq B$ és un divisor de Cartier efectiu per tot $c \in Cl_2(\mathcal{S})$ tal que $F(c) \notin \Delta_X(X)$.*

Demostració. A és antiimatge per un morfisme de E que és un tancat localment principal, per tant, A també és un tancat localment principal.

Sabem que B_c és isomorf a $\underline{c}(B_c)$ via $\underline{c}$. A més, $A_c = \underline{c}^{-1}(E^c \cap \underline{c}(B_c))$, per tant $\underline{c}(A_c) = \underline{c}(B) \cap E^c$ que és un divisor de Cartier efectiu en $\underline{c}(B)$ sii $\underline{c}(B) \nsubseteq E^c$ que passa sii $F(c) \notin \Delta_X(X)$. $\square$

Proposició 2.4.6. *Definim* $V := \{c \in Cl_2(\mathcal{S})$ *tal que* A_c *és un divisor de Cartier efectiu en* $B_c\}$ *i* $T := pr^{-1}_{Cl_2(\mathcal{S})}(V)$*. Llavors* V *és un obert i* $T \cap A \subseteq T$ *és divisor de Cartier efectiu relatiu al morfisme* $pp := pr_{Cl_2(\mathcal{S})}|_T$*.*

Demostració. Clarament $V = Cl_2(\mathcal{S}) \setminus F^{-1}(\Delta_X(X))$, per tant és obert, ja que $\Delta_X(X)$ és un tancat per ser X un esquema quasiprojectiu.

$T \cap A$ és un tancat localment principal en T. T és isomorf a $B \times V$ i el morfisme pp es correspon el morfisme pr_V via aquest isomorfisme. Per tant, com que pr_V és pla i localment de presentació finita ja que B és projectiu, de tipus finit i V és localment noetherià, també ho és pp. A més, per tot $c \in V$, $A_c \cong (T \cap A)_c = (pp|_{T\cap A})^{-1}(c) \subset T_c := pp^{-1}(c) \cong B$ per tant $(T \cap A)_c \subseteq T_c$ és un divisor de Cartier efectiu per tot $c \in V$ i podem aplicar el lema 1.1.32. □

Donada una component irreductible de $Cl_2(\mathcal{S})$, C^0, definim $V_0 := C^0 \cap V$

Lema 2.4.7. *Definim* $bA := b\beta^{-1}(\Delta(B \times X))$, $bT := pr^{-1}_{X\times X}(F(V_0))$ *i* $bpp := pr_{X\times X}|_{bT}$*, on* $pr_{X\times X} : B \times X \times X \to X \times X$ *és la projecció. Llavors el morfisme* $bpp|_{bT\cap bA}$ *és pla.*

Demostració. Per ser el morfisme $pp|_{T\cap A}$ pla, el polinomi de Hilbert de $(T\cap A)_c$ és independent de c. Donat $c \in V_0$, $(bT \cap bA)_{F(c)} := (bpp|_{bT\cap bA})^{-1}(F(c))$, $(T \cap A)_c \cong A_c = pr_B(bpp^{-1}(F(c)) \cap bA) \cong (bT \cap bA)_{F(c)}$. Per tant el polinomi de Hilbert de $(bT\cap bA)_{F(c)}$ és independent de $F(c)$ per tot $F(c) \in F(V_0)$ i llavors $bpp|_{bT\cap bA}$ és pla (veure teorema 9.9 [10, III]). □

Teorema 2.4.8. $F|_{V_0}$ *és isomorfisme amb la seva imatge.*

Demostració. Si c i $c' \in V$ són tals que $\underline{c}(B_c) \setminus E^c = \underline{c}'(B_{c'}) \setminus E^{c'}$ (això vol dir que $\mathrm{Spec}(k(c)) \cong \mathrm{Spec}(k(c')))$ aleshores, com que $E^c \cap \underline{c}(B_c)$ és un tancat propi de $\underline{c}(B_c)$, llavors $\underline{c} = \underline{c}'$ i $c = c'$, per tant $F|_{V_0}$ és bijectiva. Així sols hem de veure que la seva aplicació inversa és a més un morfisme.

La projecció bpp és plana. Per cada $a \in bpp(bT \cap bA)$ existeix una única $c \in V_0$ tal que $a = F(c)$, a més, $(bT \cap bA)_a \subseteq (bT)_a$ és un divisor de Cartier efectiu ja que $c \in V_0$. Pel lema 2.4.7, $bpp|_{bT\cap bA}$ és pla i per tant, per 1.1.31, $bT \cap bA \subseteq bT$ és un divisor de Cartier efectiu relatiu al morfisme bpp.

Ara per la P.U.b del blowup bl_Δ existeix un únic morfisme $G' : bT \to \mathcal{S}_2$ tal que $\mathrm{bl}_\Delta \circ G' = b\beta|_{bT}$. Com que $pr_B \circ (\pi \times Id_X) \circ b\beta|_{bT} = pr_B$, $(F(V_0), G')$ és una família de clústers de 2 seccions de π, per la P.U.2sec de $(Cl_2(\mathcal{S}), \alpha, \beta)$ existeix un únic morfisme $G : F(V_0) \to Cl_2(\mathcal{S})$ tal que $G' = \beta \circ (Id_B \times G)$ i aleshores G és el morfisme invers de F, veiem-ho.

Primer veiem que $F\circ G = Id_{F(V_0)}$. La parella $(F(V_0), b\beta|_{F(V_0)})$ és una família de seccions de $pr_B \circ (\pi \times Id_X)$ per tant, per la P.U.s de $(X \times BX, \psi \times_B \varphi)$, existeix un únic morfisme $h : F(V_0) \to X \times BX$ tal que

$$b\beta|_{F(V_0)} = (\psi \times_B \varphi) \circ (Id_B \times h)$$

però tant el morfisme $(Id_X \times i) \circ (F \circ G)$ com el morfisme $(Id_X \times i) \circ (i_{F(V_0)})$ compleixen aquesta igualtat, per tant són iguals entre ells i com que $Id_X \times i$ és isomorfisme amb la seva imatge aleshores $F \circ G = i_{F(V_0)}$.

Ara $G \circ F = Id_{V_0}$, ja que si $a \in F(V_0)$ aleshores existeix una única $c \in V_0$ amb $a = F(c)$. A més, $a = F(G(a))$ per tant $G(a) \in V = Cl_2(\mathcal{S}) \setminus F^{-1}(\Delta_X(X))$. Per tant, com que F és injectiva sobre tot V, $c = G(a) = (G \circ F)(c)$. $\square$

Teorema 2.4.9. *Existeix una estratificació de $X \times X = \cup_p XX^p$ tal que*

- *$\Delta_X(X)$ és un estrat.*
- *Donat un estrat XX^{p_0} si existeix una $(\sigma, \tau) \in XX^{p_0}$ una parella de seccions admissibles aleshores tot element de XX^{p_0} és una parella de seccions admissibles.*
- *Cada component irreductible $XX_0^{p_0}$ de XX^p és isomorfa a un V_0 d'una component irreductible C^0 de $Cl_2(\mathcal{S})$.*

Demostració. Per la proposició 1.1.37, existeix una estratificació de $X \times X = \cup_p XX^p$ tal que el morfisme $(pr_{X \times X}|_{bT})|_{(pr_{X \times X}|_{bT})^{-1}(XX^p)} = pr_{X \times X}|_{bT \cap XX^p}$ és pla. Aleshores aquesta és l'estratificació que busquem. Comprovem que compleix les propietats anunciades.

(1) Per la equidimensionalitat de les fibres d'un morfisme pla, $\Delta_X(X)$ és un estrat, ja que els elements a de $\Delta_X(X) \subseteq pr_{X \times X}(bT)$ són els únics que la dimensió de $bT_a := (pr_{X \times X}|_{bT})^{-1}(a)$ és igual a $\dim(B)$. A més, els element d'aquest estrat, $\Delta_X(X)$, es corresponen a parelles de seccions admissibles.

(2) Sigui XX^p un estrat diferent de $\Delta_X(X)$, per [9, VI, Theorema 2.1 (i)] i 1.1.31, si existeix $a \in XX^p$ tal que $bT_a \subset (X \times X)_a := pr_{X \times X}^{-1}(a)$ és un divisor de Cartier efectiu aleshores per tot $a \in XX^p$, $bT_a \subseteq (X \times X)_a$ és un divisor de Cartier efectiu.

(3) Per 1.1.32, $bT \cap pr_{X \times X}^{-1}(XX^p) \subseteq W := pr_{X \times X}^{-1}(XX^p)$ és un divisor de Cartier efectiu relatiu el morfisme pr_{XX^p}. Per la P.U.b del blowup bl_Δ existeix un únic morfisme $G' : W \to \mathcal{S}_2$ tal que $\mathrm{bl}_\Delta \circ G' = b\beta|_W$. Si diem $\gamma := pr_{B,X}|_W$ on

$$\begin{array}{rcccc} pr_{B,X} & : & B \times X \times X & \longrightarrow & X \times B \\ & & (t, \sigma, \tau) & \longmapsto & (t, \tau) \end{array}$$

Llavors es clar que el següent diagrama és commutatiu,

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{S}_2 \arrow[d, "\mathrm{bl}_\Delta"] \arrow[dd, bend left, "\pi_2"] \\
W \arrow[ur, "G'"] \arrow[r, "b\beta|_W"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \mathcal{S} \times X \arrow[d, "\pi \times Id_X"] \\
 & B \times X
\end{tikzcd}$$

aleshores el triplet (XX^p, γ, G') és una família de clústers de 2 seccions de π i per tant, per la P.U.2sec de $(Cl_2(\mathcal{S}), \alpha, \beta)$ existeix un únic morfisme $G\colon XX^p \to \mathcal{S}_2$ tal que els següents diagrames commuten

$$\begin{tikzcd} B \times XX^p \arrow[d, "Id_B \times G"'] \arrow[dr, "G'"] & \\ B \times Cl_2(\mathcal{S}) \arrow[r, "\beta"] & \mathcal{S}_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} XX^p \arrow[d, "G"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\ Cl_2(\mathcal{S}) \arrow[r, "\alpha"] & X \end{tikzcd}$$

Finalment veiem que el morfisme G restringit a cada component irreductible de XX^p, XX^p_0, és un isomorfisme amb la seva imatge, de fet és el morfisme invers de F.

La parella $(W, b\beta|_W)$ és una família de seccions de $pr_B \circ (\pi \times Id_X)$ per tant, per la P.U.s de $(X \times BX, \psi \times_B \varphi)$, existeix un únic morfisme $h\colon W \to X \times BX$ tal que $b\beta|_W = (\psi \times_B \varphi) \circ (Id_B \times h)$ però tant el morfisme $(Id_X \times i) \circ (F \circ G)$ com el morfisme $(Id_X \times i) \circ (i_W)$ compleixen aquesta igualtat, ja que $b\beta|_W = \mathrm{bl}_\Delta \circ \beta \circ (Id_B \times G) = b\beta \circ (Id_B \times F \circ G)$. Per tant són iguals entre ells i com que $Id_X \times i$ és isomorfisme amb la seva imatge aleshores $F \circ G = i_W$.

Per ser XX^p_0 irreductible, $G(XX^p_0)$ està contingut en C^0 una component irreductible de $Cl_2(\mathcal{S})$. Llavors $XX^p_0 = F \circ G(XX^p_0) \subseteq F(C^0)$, és més, com que $\Delta_X(X) \cap XX^p_0 = \emptyset$, $XX^p_0 \subseteq F(V_0)$, on $V_0 = C^0 \cap V$ o com a conjunt $V_0 = C^0 \setminus F^{-1}(\Delta_X(X))$. A més, el lema 2.4.7 implica que $F(V_0)$ està contingut en alguna component irreductible d'un estrat. Llavors, com que els estrats són disjunts entre ells tenim $F(V_0) \subseteq XX^p_0$ i per tant $F(V_0) = XX^p_0$. □

En aquesta secció hem vist que podem descriure $Cl_2(\mathcal{S})$ com la unió d'un tancat, $F^{-1}(\Delta_X(X))$, i el seu complementari, un obert V. El tancat està format per els clústers de 2-seccions pels que la segona secció és infinitament propera a la primera. Per les components irreductibles de $Cl_2(\mathcal{S})$, C^0 hi ha tres possibilitats,

- $C^0 \subseteq F^{-1}(\Delta_X(X))$ i està format per clústers de 2-seccions en que la segona secció és infinitament propera a la primera.
- $C^0 \subseteq V$ i C^0 és isomorf a un estrat XX^p per F (llavors està format per parelles de seccions admissibles).
- No està continguda en $F^{-1}(\Delta_X(X))$ ni en V. En aquest cas C^0 és birracional a un estrat XX^{p_0} per F.

Aleshores sabem que pel tercer cas tindrem el següent diagrama,

$$\begin{array}{ccccc} C^0 & \hookrightarrow & \mathrm{Bl}_?(\overline{XX^{p_0}}) & \xrightarrow{\mathrm{bl}_?} & \overline{XX^{p_0}} \\ \cup & & & & \cup \\ V_0 & & \xrightarrow{\hspace{4em}\cong\hspace{4em}} & & XX^{p_0} \end{array}$$

Sabem que el blowup ha de tenir per centre un ideal amb suport $\Delta_X(X)$ però no coneixem aquest ideal i seria molt interessant tenir alguna descripció d'aquest ideal.

Capítol 3

Exemples

En aquest capítol estudiarem uns casos particulars de famílies de superfícies $\pi : \mathcal{S} \to B$ que pretenen exemplificar la teoria del treball. Ens limitarem a casos simples: famílies fibrades en plans projectius, amb base un espai projectiu. Per aquestes sabem que existeix la seva F.U.s (X, ψ).
Aproximadament en cada exemple descriurem X i ψ. Llavors per una secció fixada $\sigma \in X$ descriurem part de $\tilde{X}_\sigma$ i trobarem l'estratificació platificadora de $X = \cup_i X^i$ pel morfisme $pr_X|_I : I \to X$ on $pr_X : B \times X \to X$ és la projecció i $I := \psi^{-1}(\underline{\sigma}(B))$.
Pels estrats X^i formats per seccions admissibles respecte σ trobarem l'únic morfisme G_i que fa el següent diagrama commutatiu,

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S}_\sigma \arrow[d, "\mathrm{bl}_\sigma"] \\ B \times X \arrow[ur, "G_i"] \arrow[r, "\psi"'] & \mathcal{S} \end{tikzcd}$$

Finalment farem el blowup de X amb centre σ i descriurem els morfismes $\tilde{G}_i$ que estenen els morfismes G_i sobre cada transformada estricte de cada estrat. Però cada exemple tindrà un desenvolupament diferent, segons el que ens permetin les propietats de la família de superfícies que estudiem.

3.1 Exemple I

Considerem π com la projecció sobre la segona component de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$. Com que la dimensió de B és 1 no hi ha restriccions per les parelles de seccions admissibles.

3.1.1 Descripció de X

Per la propietat universal del producte, una secció de π està determinada per un morfisme $s : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$, de fet la imatge de la secció és el graf d'aquest morfisme. Un morfisme com s està determinat per tres polinomis $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{C}[u, v]$ homogenis, del mateix grau i sense arrels comunes. Com que els polinomis P_i

pertanyen a l'anell de polinomis en dues variables sobre un cos algebraicament tancat i són homogenis factoritcen en factors lineals i per tant tenen arrels comunes sii tenen algun factor en comú.
Per tant X és una unió de components connexes i irreductibles X_d, una per cada grau $d \in \mathbb{N}$, i $X_d \cong U_d \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{C}[u,v]_d^3)$ on $\mathbb{C}[u,v]_d$ és el conjunt de polinomis homogenis de grau d i U_d és l'obert corresponent al conjunt de ternes sense factors comuns.

Per veure que U_d és un obert observem que donat un punt $[P_1 : P_2 : P_3] \in \mathbb{P}(\mathbb{C}[u,v]_d^3)$ si els P_i tenen un factor comú P de grau k aleshores $P_i = Pg_i$ on g_i és un polinomi homogeni de grau $d-k$, ja que el producte de dos polinomis no homogenis mai dona un polinomi homogeni. Així $[P_1 : P_2 : P_3]$ és a la imatge del morfisme,

$$\begin{array}{cccc} \phi_k & : & \mathbb{P}\left(\mathbb{C}[u,v]_k\right) \times \mathbb{P}\left(\mathbb{C}[u,v]_{d-k}^3\right) & \longrightarrow & \mathbb{P}\left(\mathbb{C}[u,v]_d^3\right) \\ & & h, [h_1 : h_2 : h_3] & \longmapsto & [hh_1 : hh_2 : hh_3] \end{array}$$

llavors

$$U_d = \mathbb{P}\left(\mathbb{C}[u,v]_d^3\right) \setminus \left(\bigcup_{0<k\leq d} Im(\phi_k) \right).$$

Com que ϕ_k és propi per tot k per ser un morfisme entre espais projectius, U_d és un obert. Per exemple $X_0 \cong \mathbb{P}(\mathbb{C}[u,v]_0^3) \cong \mathbb{P}(\mathbb{C}^3) = \mathbb{P}^2$.

3.1.2 Secció de grau zero

Donat un punt $q \in \mathbb{P}^2$ considerem la secció constant $\sigma_q \in X_0$ tal que $\underline{\sigma_q}(t) = (q,t)$ per tot $t \in \mathbb{P}^1$. Diem $\pi_q : \mathcal{S}_q \to \mathbb{P}^1$ a la família de superfícies resultat de fer el blowup de $\mathcal{S}$ al llarg de la imatge de la secció $\underline{\sigma_q}$ i E_q el divisor excepcional d'aquest blowup. Observem que $\mathcal{S}_q = \mathrm{Bl}_q(\mathbb{P}^2) \times \mathbb{P}^1$ ja que els dos són els zeros del mateix polinomi en $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Estratificació de X per $q = [0:0:1]$

Com que la dimensió de la base és 1 la dimensió de $\underline{\tau}(B) \cap \underline{\sigma}(B)$ és zero per tota secció $\tau \in X$ amb $\tau \neq \sigma$ i $\underline{\tau}(B) \cap \underline{\sigma}(B) \neq \emptyset$. Aleshores podem indexar l'estratificació pel grau del 0-cicle intersecció entre $\underline{\sigma}(B)$ i $\underline{\tau}(B)$, que denotarem $\deg(\tau \cap \sigma)$ i cada estrat serà X^i.

La secció $\tau := [P_1 : P_2 : P_3] \in X_d$ té intersecció amb σ sii P_1 i P_2 tenen alguna arrel comuna, que passa sii tenen algun factor en comú, igual que en la descripció de X. A més, el grau d'aquest factor comú és exactament $\deg(\tau \cap \sigma)$, és a dir, $deg(mcd(P_1, P_2)) = deg(\tau \cap \sigma)$. Considerem per cada $d, r \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{array}{cccc} \rho_{d,r} & : & \mathbb{P}(\mathbb{C}[u,v]_r) \times \mathbb{P}(\mathbb{C}[u,v]_{d-r}^2) \times \mathbb{P}(\mathbb{C}[u,v]_d) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\mathbb{C}[u,v]_d^3) \\ & & A, [Q_1 : Q_2], P_3 & \longmapsto & [AQ_1 : AQ_2 : P_3] \end{array}$$

i per cada $d \in \mathbb{Z}$ diem $R_d \in \mathbb{Z}[a_{d,0}, \ldots, a_{0,d}, b_{d,0}, \ldots, b_{0,d}]$ a la resultant dels polinomis $P := \sum_{i+j=d} a_{i,j} u^i v^i$ i $Q := \sum_{i+j=d} b_{i,j} u^i v^i$, és a dir, $mcd(P,Q) \neq 1$

sii $R_d(P,Q)=0$(veure [15, IV.8]). Llavors en $\mathbb{P}(\mathbb{C}[u,v]_d^2)$ tenim $V(R)$, que és el tancat format per les parelles de polinomis que tenen alguna arrel o factor en comú. Si $p:\mathbb{P}(\mathbb{C}[u,v]_d^3)\to\mathbb{P}(\mathbb{C}[u,v]_d^2)$ és la projecció sobre les dues primeres components, diem $\overline{V}(R_d):=p^{-1}(V(R))$.
Amb aquesta notació és clar que,

$$X^0=\bigcup_{d\geq 0}\left(X_d\setminus\overline{V}(R_d)\right).$$

A més per cada $d\geq r\geq 1$, $T_{d,r}:=Im(\rho_{d,r})\subseteq\overline{V}(R_d)$ és un tancat, ja que $\rho_{d,r}$ és propi, i conté totes les ternes de polinomis homogenis de grau d tals que els dos primers polinomis tenen un factor comú de grau més gran o igual que r. Així en $X_d^r:=X_d\cap T_{d,r}$ hi ha totes les seccions de grau d que tenen grau de intersecció amb σ més gran o igual a r. Per tant

$$X^r=\bigcup_{d\geq r}\left((X_d^r\setminus X_d^{r+1}\right)$$

on $X_d^r=\emptyset$ per tot $r>d$, és la descomposició en components irreductibles de cada estrat X^r.

Descripció de $\tilde{X}_{\sigma_q}$ per $q=[0:0:1]$

Per la propietat universal del producte, una secció de π_q ve donada per un morfisme de $\mathbb{P}^1$ a $\mathrm{Bl}_q(\mathbb{P}^2)$. Utilitzarem que la família de superfícies π_q és una restricció de la família $\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$ per veure $\tilde{X}_\sigma$ com un subesquema de la F.U.s de la família $\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$.

Diem Y a la F.U.s de la família $\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$. La descripció que hem fet de X es trasllade perfectament aquest cas. Així Y té la descomposició en components connexes i irreductibles següent,

$$Y=\bigcup_{d,d'\geq 0}\tilde{U}_{d,d'}$$

on $\tilde{U}_{d,d'}$ és el subconjunt de $\mathbb{P}(\mathbb{C}[u,v]_d^3)\times\mathbb{P}(\mathbb{C}[u,v]_{d'}^2)$ tal que $\omega:=([P_1:P_2:P_3],[Q_1:Q_2])\in\tilde{U}_{d,d'}$ sii P_1,P_2,P_3 no tenen factors comuns i tampoc Q_1,Q_2. La demostració de què U_d és un obert serveix tant si prenem una tripleta de polinomis com si en prenem una parella, per tant, si U'_d és el subconjunt de $\mathbb{P}(\mathbb{C}[u,v]_{d'}^2)$ format per parelles de polinomis sense factors en comú, U'_d és un obert i, com que $\tilde{U}_{d,d'}=U_d\times U'_{d'}$, el conjunt $\tilde{U}_{d,d'}$ també és un obert.

Donat $\omega:=([P_1:P_2:P_3],[Q_1:Q_2])\in\tilde{U}_{d,d'}$, per cada $[u:v]\in\mathbb{P}^2$, $\omega[u:v]\in\mathrm{Bl}_q(\mathbb{P}^2)\subset\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ sii $(Q_2P_1-Q_1P_2)[u:v]=0$, per tant

$$\tilde{X}_\sigma=\bigcup_{d,d'\geq 0}(pr_{d,d'}\circ\varphi_{d,d'}^{-1})(Im(\Delta_{d+d'}))\cap\tilde{U}_{d,d'},$$

on

$$\Delta_d:\mathbb{C}[u,v]_d\to\mathbb{C}[u,v]_d\times\mathbb{C}[u,v]_d$$

és la diagonal,

$$pr_{d,d'}:\mathbb{C}[u,v]_d^2\times\mathbb{C}[u,v]_{d'}^2\to\mathbb{P}(\mathbb{C}[u,v]_d^2)\times\mathbb{P}(\mathbb{C}[u,v]_{d'}^2)$$

és la projecció usual i

$$\begin{array}{cccc} \varphi_{d,d'} & : & \mathbb{C}[u,v]^2_d \times \mathbb{C}[u,v]^2_{d'} & \longrightarrow & \mathbb{C}[u,v]_{d+d'} \times \mathbb{C}[u,v]_{d+d'} \\ & & (P_1,P_2),(Q_1,Q_2) & \longmapsto & (P_1Q_2, P_2Q_1) \end{array}.$$

Per donar una descripció més acurada de $\tilde{X}_{\sigma_q}$ definim $\tilde{X}_{d,d'} := (pr_{d,d'} \circ \varphi^{-1}_{d,d'})(Im(\Delta_{d+d'}))$. Observem que $\omega \in \tilde{X}_{d,d'}$ sii

$$P_1Q_2 = P_2Q_2.$$

Si $P_1 = P_2 = 0$ llavors $P_3 = 1$, $\omega \in \tilde{X}_{0,d'}$ i serà una secció de E_q. A més, qualsevol $(Q_1,Q_2) \in \cup_{d\geq 0} U'_d$ satisfarà l'equació anterior, per tant, per cada $d' \geq 0$, dintre de $\tilde{X}_{0,d'}$ tenim el tancat $V_{d'}$ corresponent a les equacions $P_1 = P_2 = 0$, $V_{d'} \cong U'_{d'}$ i es correspon a les seccions de grau d' del divisor excepcional E_q, és a dir, $\cup_{d\geq 0} V_d$ és la F.U.s de la família $E_q \to B$.
Si $P_i \neq 0$ per almenys un $i = 1,2$, com que els polinomis Q_i no tenen factors comuns entre ells, l'equació anterior implica que Q_i divideix a P_i, és més, implica que existeix $A \in \mathbb{C}[u,v]_k$ tal que $P_i = AQ_i$. Això implica,

1. P_1 i P_2 tindran factors comuns sii $k \geq 0$.
2. Per tot $d' > d > 0$, $\tilde{X}_{d,d'} = \emptyset$.
3. Per tot $d > 0$, $\tilde{X}_{d,0} = V_d$

Per tant, finalment,

$$\tilde{X} = \left(\bigcup_{d \geq d' \geq 0} \tilde{X}_{d,d'} \right) \cup \left(\bigcup_{d'=0, d>0} V_d \right)$$

és la descomposició en components connexes de $\tilde{X}$. A més, per tot $d \geq d' \geq 1$ no hi ha cap secció $\omega \in \tilde{X}_{d,d'}$ que sigui secció del divisor excepcional i $\deg(\mathrm{bl}_q \circ \underline{\omega} \cap \sigma) = d - d'$, és a dir, que $\tilde{X}_{d,d'} \cong_{f_{\sigma_q}} X^{d-d'}_d$.

Ara sols falta veure que passa amb $\tilde{X}_{0,0}$. Com que $X_0 \cong \mathbb{P}^2$, $\mathrm{Bl}_{\sigma_q}(X_0) \cong \mathrm{Bl}_q(\mathbb{P}^2)$. Recordem que $\mathcal{S}_q = \mathrm{Bl}_q(\mathbb{P}^2) \times \mathbb{P}^1$, per tant en $\mathrm{Bl}_{\sigma_q}(X_0)$ tenim totes les seccions constants de π_q, és a dir, $\mathrm{Bl}_{\sigma_q}(X_0) \cong \tilde{X}_{0,0}$ i en aquest cas el morfisme f_{σ_q} restringit a la component irreductible $\tilde{X}_{0,0}$ és exactament el morfisme blowup.

3.1.3 Seccions de grau 1

Ara estudiem X_1. En aquest cas $\mathbb{P}(\mathbb{C}[u:v]^3_1) \cong \mathbb{P}^5$ i si considerem $[a:b:c:d:e:f]$ coordenades en $\mathbb{P}^5$ amb

$$\begin{array}{cccc} \psi|_{X_1} & : & \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P} & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ & & [a:b:c:d:e:f],[u:v] & \longmapsto & [au+bv : cu+dv : eu+fv],[u:v] \end{array}$$

llavors X_1, com hem vist a la descripció de X, es correspon al obert complementari del tancat generat pels menors maximals de la matriu

$$\begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}$$

Mirem les possibles interseccions d'una parella de seccions σ i τ. Les seccions σ i τ vénen determinades per dos elements s i r de $\mathbb{P}(\mathbb{C}[u,v]_1^3)$. Aquest s i r són la parametrització de unes rectes S i R de $\mathbb{P}^2$. Les rectes S i R o tenen un punt d'intersecció o bé són la mateixa recta.
Si $\{p\} = R \cap S$ aleshores existeixen $[u:v], [u':v'] \in \mathbb{P}^1$ tals que $r[u:v] = s[u':v'] = p$, així les seccions corresponents σ i τ tenen intersecció diferent del buit sii $[u:v] = [u':v']$.
Si $R = S$ aleshores existeix un automorfisme ρ de $\mathbb{P}^1$ tal que $r = s \circ \rho$ i per tant les seccions corresponents σ i τ sempre tenen intersecció diferent del buit, ja que com a mínim ρ té un punt fix. Si $\rho = Id_{\mathbb{P}^1}$, $\sigma = \tau$, si no les seccions σ i τ intersecciones en un o dos punts, els punts fixos de ρ. Si ens mirem els automorfismes de $\mathbb{P}^1$ com a projectivitzacions de aplicacions lineals de $\mathbb{C}^2$ en ell mateix amb nucli $\{0\}$, llavors és clar que encara que ρ tingui un punt fix té multiplicitat dos. Per tant fixada una secció σ l'estratificació de X_1 tindrà quatre components, les seccions que tenen intersecció buida amb σ, les que interseqüen en un punt, les que interseqüen en dos punt i σ
Fixem $\sigma = [1:0:0:1:0:0]$ i busquem el tancat V de $\mathbb{P}^5$ format per les seccions que tenen intersecció diferent del buit amb σ. Sigui $\tau := [a:b:c:d:e:f]$ una secció qualsevol de X_1 i mantenim la notació de s, r, S i R per σ i τ. Llavors $S = V(z)$, si $[x:y:z]$ són coordenades en $\mathbb{P}^2$. Per tant $R = S$ sii $e = f = 0$ o, dit d'una altre manera, tenim que $V(e,f) \subseteq V$. Si $(e,f) \neq 0$ necessitem que existeixi un $[u:v] \in \mathbb{P}^1$ tal que $\underline{\tau}[u:v] = \underline{\sigma}[u:v]$. Aquesta igualtat ens dona les equacions següents,

$$bv^2 + (a-d)vu - cu^2 = 0 \tag{3.1}$$

$$u(eu + fv) = 0 \tag{3.2}$$

$$v(eu + fv) = 0 \tag{3.3}$$

Com que $[u:v] \in \mathbb{P}^1$ les dues ultimes equacions equivalen a l'equació,

$$eu + fv = 0 \tag{3.4}$$

i aquesta equació ens diu que $[u:v] = [-f:e]$, per tant si σ i τ tenen intersecció diferent del buit aquesta ha de ser en el paràmetre $[-f:e] \in \mathbb{P}^1$. Ara $\underline{\tau}[-f:e] = \underline{\sigma}[-f:e]$ sii

$$be^2 - (a-d)ef - cf^2 = 0 \tag{3.5}$$

Per tant $V = V(be^2 - (a-d)ef - cf^2) \cup V(e,f) = V(be^2 - (a-d)ef - cf^2)$, és el tancat de $\mathbb{P}^5$ corresponent a les seccions que tenen intersecció diferent del buit amb σ.
Així, si

$$V_0 := X_1 \setminus V, \;\; V_1 = V \setminus V(e,f), \;\; V_2 = V(e,f) \setminus \{\sigma\} \;\text{ i }\; V_3 = \{\sigma\},$$

l'estratificació platificadora de X_1 per σ és,

$$X_1 = \bigcup_{i=0}^{3} V_i$$

En V_0 hi ha les seccions τ tals que $\underline{\tau}(B) \cap \underline{\sigma}(B) = \emptyset$, a V_1 hi ha les seccions τ tals que $deg(\tau \cap \sigma) = 1$ i a V_2 hi ha les seccions τ tals que $deg(\tau \cap \sigma) = 2$. Com que considerem parelles de seccions de grau 1, no pot passar que $deg(\tau \cap \sigma) > 2$.

Blowup en σ

El blowup de $\mathcal{S}$ al llarg de la secció σ no el fem de manera global sobre tot $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ sinó que el construïm sobre cada carta afí de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$. Si $([x : y : z], [u : v])$ són coordenades en $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$, observem que de les sis cartes afins que té $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ sols ens interessen les quatre $A_1 := \{u \neq 0, x \neq 0\}$, $A_2 := \{u \neq 0, y \neq 0\}$, $A_3 := \{v \neq 0, x \neq 0\}$ i $A_4 := \{v \neq 0, y \neq 0\}$, ja que en les altres dues cartes σ no hi té cap punt i per tant el blowup és un isomorfisme. A més, només construirem el blowup per les cartes A_1 i A_2 ja que per les altres cartes la construcció sols varia en una permutació de les coordenades.
El triar una carta afí A_i en $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ ens determina quina carta afí de $\mathbb{P}^1$ hem de triar per veure σ com un morfisme de $\mathbb{A}^1$ en $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^1$ definit sobre tot $\mathbb{A}^1$ menys un punt. Concretament, si $[u : v]$ són les coordenades de $\mathbb{P}^1$, per les cartes A_1 i A_2 hem de prendre la carta $\{u \neq 0\}$ i per les cartes A_4 i A_3 hem de prendre la carta $\{v \neq 0\}$.

Blowup en A_1

En aquest cas, per una $\tau := [a : b : c : d : e : f] \in X_1$ tenim que,

$$\begin{array}{cccc} \underline{\tau}_1 & : & \mathbb{A}^1 & \longrightarrow & \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^1 \\ & & t & \longmapsto & \left(\left(\frac{c+dt}{a+bt}, \frac{e+ft}{a+bt} \right), t \right) \end{array}$$

és la secció $\underline{\tau}$ restringida a la carta A_1. Llavors, si (x', y', s) són les coordenades de $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^1$, $\underline{\sigma}_1(\mathbb{A}^1) = V(x' - s, y')$. Per tant

$$\mathrm{Bl}_{\underline{\sigma}_1(B)}(\mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^1) = V\left(\beta(x' - s) - \alpha y'\right) \subseteq \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1$$

on $[\alpha, \beta]$ són les coordenades de $\mathbb{P}^1$. L'equació del blowup implica que si $(x' - s, y') \neq 0$ aleshores $[\alpha : \beta] = [x' - s : y']$.

Morfismes G_i

Com que $\mathrm{bl}_{\underline{\sigma}(B)} \circ G_i = \psi|_{V_i}$ tenim que

$$G_i([a : b : c : d : e : f], t) = \left(\left(\frac{c + dt}{a + bt}, \frac{e + ft}{a + bt} \right), t, [* : *] \right)$$

Les seccions de V_0 no tindran cap punt en el divisor excepcional, per tant l'equació del blowup ens determina completament com ha de ser G_0 sobre les coordenades $[\alpha : \beta]$,

$$G_0([a : b : c : d : e : f], t) = \left(\left(\frac{c + dt}{a + bt}, \frac{e + ft}{a + bt} \right), t, [-bt^2 + (d - a)t + c : e + ft] \right).$$

Com que

$$f^2(cu^2 + (d-a)uv - bv^2) \in (eu + fv, cf^2 + (a-d)ef - be^2)$$

concretament

$$f^2(cu^2+(d-a)uv-bv^2) = u^2(cf^2+(a-d)ef-be^2)+((d-a)fu + b(eu-fv))\,(eu+fv)$$

si $f \neq 0$ podem definir les últimes components de G_0 com

$$[cf^2 + (a-d)ef - be^2 + ((d-a)f + b(e-ft))(e+ft) : f^2(e+ft)]$$

Per les seccions de V_1 distingim dos casos segons si $f = 0$ o $f \neq 0$.
Pel primer cas, $f = 0$, tenim que $g \neq 0$, ja que estem en V_1, per tant el punt d'intersecció entre la secció i el divisor excepcional està en les cartes A_3 i A_4 i $G_1 = G_0$.
Pel segon cas G_0 no està ben definida en $t = -e/f$. Però com que $f \neq 0$ podem usar l'expressió

$$[cf^2 + (a-d)ef - be^2 + ((d-a)f + b(e-ft))(e+ft) : f^2(e+ft)]$$

per les ultimes components. Ara, per estar en V_1 tenim $cf^2+(a-d)ef-be^2 = 0$, per tant l'expressió anterior és equivalent a

$$[(d-a)f + b(e-ft) : f^2]$$

que està ben definit per tot $t \in \mathbb{A}^1$. Aleshores G_1 queda com

$$G_1([a:b:c:d:e:f],t) = \left(\left(\frac{c+dt}{a+bt}, \frac{e+ft}{a+bt}\right), t, [(d-a)f + (e-ft)b : f^2]\right).$$

Observem que el diferenciar els casos $f = 0$ i $f \neq 0$ no és rellevant ja que en els dos casos, tot i que el morfisme G_1 té una expressió diferent, és el mateix morfisme.

Per les seccions de V_2 tenim que $e = f = 0$ i llavors

$$[c + (d-a)t - bt^2 : e + ft] = [c + (d-a)t - bt^2 : 0]$$

que no està definint en les dues arrels del polinomi en t, $c + (d-a)t - bt^2$, que són els punts d'intersecció entre la secció i el divisor excepcional. Però en aquest cas tenim l'extensió,

$$G_2([a:b:c:d:e:f],t) = \left(\left(\frac{c+dt}{a+bt}, \frac{e+ft}{a+bt}\right), t, [1:0]\right).$$

Blowup en A_2

En aquest cas, per una $\tau := [a:b:c:d:e:f] \in X_1$ tenim que,

$$\begin{array}{rccc} \underline{\tau}_2 & : & \mathbb{A}^1 & \longrightarrow & \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^1 \\ & & t & \longmapsto & \left(\left(\frac{a+bt}{c+dt}, \frac{e+ft}{c+dt}\right), t\right) \end{array}$$

és la secció $\underline{\tau}$ restringida a la carta A_2. Llavors, si (x', y', s) són les coordenades de $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^1$, $\underline{\sigma}_2(\mathbb{A}^1) = V(sx' - 1, y')$. Per tant

$$\mathrm{Bl}_{\underline{\sigma}_2(B)}(\mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^1) = V\left(\beta(sx' - 1) - \alpha y'\right) \subseteq \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1$$

on $[\alpha, \beta]$ són les coordenades de $\mathbb{P}^1$. L'equació del blowup implica que si $(sx' - 1, y') \neq 0$ aleshores $[\alpha : \beta] = [sx' - 1 : y']$. Ara tot el proces serà igual que en el blowup de A_1, però canviant $[\alpha : \beta] = [x' - s : y']$ per $[\alpha : \beta] = [sx' - 1 : y']$.

Morfismes G_i

Com que $\mathrm{bl}_{\underline{\sigma}(B)} \circ G_i = \psi|_{V_i}$ tenim que

$$G_i([a : b : c : d : e : f], t) = \left(\left(\frac{a + bt}{c + dt}, \frac{e + ft}{c + dt}\right), t, [* : *]\right)$$

Les seccions de V_0 no tindran cap punt en el divisor excepcional, per tant l'equació del blowup ens determina completament com ha de ser G_0 sobre les coordenades $[\alpha : \beta]$,

$$G_0([a : b : c : d : e : f], t) = \left(\left(\frac{c + dt}{a + bt}, \frac{e + ft}{a + bt}\right), t, [bt^2 - (d - a)t - c : e + ft]\right).$$

Com que

$$f^2(cu^2 + (d - a)uv - bv^2) \in (eu + fv, cf^2 + (a - d)ef - be^2)$$

concretament

$$f^2(cu^2 + (d - a)uv - bv^2) = u^2(cf^2 + (a - d)ef - be^2) + ((d - a)fu + b(eu - fv))(eu + fv)$$

si $f \neq 0$ podem definir les últimes components de G_0 com

$$[cf^2 + (a - d)ef - be^2 + ((d - a)f + b(e - ft))(e + ft) : -f^2(e + ft)]$$

Per les seccions de V_1 distingim dos casos segons si $f = 0$ o $f \neq 0$.
Pel primer cas, $f = 0$, tenim que $g \neq 0$, ja que estem en V_1, per tant el punt d'intersecció entre la secció i el divisor excepcional està en les cartes A_3 i A_4 i $G_1 = G_0$.
Pel segon cas G_0 no està ben definida en $t = -e/f$. Però com que $f \neq 0$ podem usar l'expressió

$$[cf^2 + (a - d)ef - be^2 + ((d - a)f + b(e - ft))(e + ft) : -f^2(e + ft)]$$

per les ultimes components. Ara, per estar en V_1 tenim $cf^2 + (a - d)ef - be^2 = 0$, per tant l'expressió anterior és equivalent a

$$[(d - a)f + b(e - ft) : -f^2]$$

que està ben definit per tot $t \in \mathbb{A}^1$. Aleshores G_1 queda com

$$G_1([a : b : c : d : e : f], t) = \left(\left(\frac{c + dt}{a + bt}, \frac{e + ft}{a + bt}\right), t, [(d - a)f + b(e - ft) : -f^2]\right).$$

Observem que el diferenciar els casos $f = 0$ i $f \neq 0$ no és rellevant ja que en els dos casos, tot i que el morfisme G_1 té una expressió diferent, és el mateix morfisme.

Per les seccions de V_2 tenim que $e = f = 0$ i llavors el punt $[-(c+(d-a)t-bt^2) : e + ft] = [c + (d-a)t - bt^2 : 0]$ que no està definint en les dues arrels del polinomi en t, $c+(d-a)t-bt^2$, que són els punts d'intersecció entre la secció i el divisor excepcional Però en aquest cas tenim l'extensió obvia,

$$G_2([a:b:c:d:e:f],t) = \left(\left(\frac{c+dt}{a+bt}, \frac{e+ft}{a+bt}\right), t, [1:0]\right).$$

Per aplicar aquest procediment a les cartes A_2 i A_4 l'única diferencia, apart d'una permutació de les coordenades, és que haurem d'utilitzar que

$$g^2(cu^2 + (d-a)uv - bv^2) \in (eu + fv, cf^2 + (a-d)ef - be^2)$$

concretament

$$g^2(cu^2+(d-a)uv-bv^2) = v^2(cf^2+(a-d)ef-be^2)+((d-a)ve+c(eu-fv))(eu+fv).$$

Finalment, per acabar aquest exemple, veurem que no podem enganxar els morfismes G_1 i G_2 de forma contínua, reafirmant el fet que l'estratificació platificadora de X_1 és la que hem descrit.

Considerem la família de seccions parametritzada per $l \in \mathbb{A}^1$ i donada per $\tau_l := [1 : l+1 : l+1 : 1 : l : l] \in X_1$. Per tot $l \neq 0$, $\tau_l \in V_1$ i $\tau_0 \in V_2$. En el Bl_1, diem $\tilde{\tau}_l := G_1 \circ i_{\tau_l}$ on i_{τ_l} és la inclusió de τ_l en X_1. Llavors $\tilde{\tau}_l$ és l'extensió de τ_l al Bl_1 i tenim

$$\begin{array}{cccc} \tilde{\tau}_l & : & \mathbb{A}^1 & \longrightarrow & \mathrm{Bl}_1 \\ & & t & \longmapsto & \left(\frac{l+1+t}{1+(l+1)t}, \frac{l+lt}{1+(l+1)t}\right), t, [t-1+(t-1)l : l] \end{array}.$$

Llavors,

$$\tilde{\tau}_0(t) = ((1,0), t, [t-1:0]) = ((1,0), t, [1:0]).$$

Però fixant $t = 1$ amb $l \neq 0$,

$$\tilde{\tau}_l(1) = \left(\left(1, \frac{2l}{l+2}\right), 1, [0:l]\right) = \left(\left(1, \frac{2l}{l+2}\right), 1, [0:1]\right).$$

Ara,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 1} \tilde{\tau}_0(t) = ((1,0), 1, [1:0]) \neq \\ \lim_{l\to 0} \tilde{\tau}_l(1) = ((1,0), 1, [0:1]). \end{aligned}$$

3.2 Exemple II

Considerem π com la projecció sobre la segona component de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$. En aquest cas la dimensió de la base és dos, per tant pot ser que trobem parelles de seccions no admissibles, de fet veurem que són la majoria.

Descripció de X

Per la propietat universal del producte, una secció de π està determinada per un morfisme $s:\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$. La descripció de X és molt semblant a la de l'exemple anterior, però en aquest cas $(P_1, P_2, P_3) \in \mathbb{C}[u:v:w]$, i per tant no hi ha l'equivalència entre tenir arrels comunes i factors comuns. Però X és, igualment, una unió de components connexes i irreductibles X_d, una per cada grau $d \in \mathbb{N}$, i $X_d \cong U_d \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{C}[u,v,w]_d^3)$ on $\mathbb{C}[u,v,w]_d$ és l'anell de polinomis homogenis de grau d i U_d és l'obert corresponent al conjunt de ternes sense zeros comuns. Com que la intersecció entre dues hipersuperfícies de $\mathbb{P}^2$ és sempre diferent del buit, si algun $P_i = 0$ llavors $[P_1 : P_2 : P_3] \in \mathbb{P}(\mathbb{C}[u:v:w]_0^3)$.

Per veure que U_d és un obert considerem en $\mathbb{P}(\mathbb{C}[u:v:w]_d^3) \times \mathbb{P}^2$ la varietat d'incidència

$$In_d := \{[P_1 : P_2 : P_3], [u:v:w] \in \mathbb{P}(\mathbb{C}[u:v:w]_d^3) \times \mathbb{P}^2 \text{ tal que } P_i(u,v,w) = 0 \text{ per } i = 1,2,3\}$$

Com que els polinomis P_i són homogenis de grau d les equacions que defineixen In_d són homogènies de grau d per les coordenades $[u:v:w]$ i lineals pels coeficients dels polinomis $[P_1 : P_2 : P_3]$, que són les coordenades de $\mathbb{P}(\mathbb{C}[u:v:w]_d^3)$. Per tant In_d està ben definit i és un tancat. Ara és clar que $U_d = \mathbb{P}(\mathbb{C}[u:v:w]_d^3) \setminus pr_1(In)$ on $pr:\mathbb{P}(\mathbb{C}[u:v:w]_d^3) \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}(\mathbb{C}[u:v:w]_d^3)$ és la projecció i com que pr és propi U_d és un obert.

3.2.1 Seccions de grau zero

Si ens fixem en la component de les seccions constants X_0 de X la construcció del exemple anterior també és trasllade aquest exemple amb els mateixos resultats. Però a més, en aquest exemple les seccions infinitament properes a σ_q, per una $\sigma_q \in X_0$ on $q \in \mathbb{P}^2$, tenen la imatge inclosa al divisor excepcional EE de $\mathcal{S}_q$ i $EE = E_q \times \mathbb{P}^2 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ on E_q és els divisor excepcional de $\mathrm{Bl}_q(\mathbb{P}^2)$. Com que no hi ha morfismes $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^1$ no constants, aquest divisor excepcional no admet altres seccions que les constants. Per tant en el $\mathrm{Bl}_{\sigma_q}(X_0)$ hi ha totes les seccions del divisor excepcional de $\mathcal{S}_q$, o dit d'una altra forma, si XE és la F.U.s de $E_q \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ aleshores $XE \cong E_q$, recordem que $\mathrm{Bl}_q(\mathbb{P}^2) \cong \mathrm{Bl}_{\sigma_q}(X_0)$, igual que en l'exemple anterior. Per tant, $\tilde{X}_d \cong_{f_\sigma} X_d \cap X_\sigma^{\mathrm{adm}}$ per tot $d > 0$ i

$$\tilde{X}_\sigma = \mathrm{Bl}_q(\mathbb{P}^2) \cup \cup_{d>0} X_d \cap X_\sigma^{\mathrm{adm}}$$

3.2.2 Seccions generals

En aquest cas veurem com les úniques parelles de seccions admissibles són les formades per seccions constants o una secció repetida. A més, veurem com per $\sigma \in X_1$ el morfisme π_σ no admet cap secció, és a dir, la F.U.s de π_σ és el buit.

Lema 3.2.1. *Siguin $f = (P_1 : P_2 : P_3)$ i $g = (F_1 : F_2 : F_3)$ dos morfismes de $\mathbb{P}^2$ a $\mathbb{P}^2$ amb f no constant, i suposem que $Z = \underline{f}(\mathbb{P}^2) \cap \underline{g}(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ no és igual a $\underline{f}(\mathbb{P}^2)$. Llavors Z no és un divisor de Cartier a $\underline{f}(\mathbb{P}^2)$ (i $\underline{g}^{-1}(Z)$ no és un divisor de Cartier a $\mathbb{P}^2$).*

Demostració. Suposem sense pèrdua de generalitat que els polinomis P_i són homogenis de grau d, i els F_i de grau e, amb $d > e$. Com que les corbes

$P_1 = 0, P_2 = 0, P_3 = 0$ no tenen cap punt en comú, pel teorema de Bertini [10, II,8.18] polinomis generals de l'espai vectorial $\langle P_1, P_2, P_3 \rangle$ són irreductibles. Per tant podem trobar-ne una base P_1', P_2', P_3' formada per polinomis irreductibles. Equivalentment, fent un canvi de coordenades adequat a $\mathbb{P}^2$ podem suposar que els P_i són irreductibles.

L'ideal homogeni de $\underline{g}^{-1}(Z)$ a $\mathbb{P}^2$ està generat pels menors maximals de la matriu

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix},$$

que són tres polinomis homogenis de grau $d + e$. Si fos un divisor de Cartier, l'ideal es podria també generar per un únic polinomi G, que necessàriament ha de ser de grau $d+e$. Per tant, els tres menors maximals han de coincidir (llevat de producte per una constant) amb G, és a dir, existeixen $a, b \in \mathbb{C}$ diferents de zero amb

$$P_1F_2 - F_1P_2 = a(P_1F_3 - P_3F_1) = b(P_2F_3 - P_3F_2).$$

Si ara fem quocient per P_1 obtenim en particular $\bar{F}_1(\bar{P}_2 - a\bar{P}_3) = 0$ a $\mathbb{C}[x, y, z]/(P_1)$, que és domini per ser P_1 irreductible. Però $\bar{P}_2 - a\bar{P}_3 \neq 0$, altrament els tres polinomis P_i serien linealment dependents i tindrien alguna arrel comuna Per tant $\bar{F}_1 = 0$ i F_1 és múltiple de P_1. Simètricament, F_i és múltiple de P_i per cada i. Com que hem suposat que $d \geq e$, això implica que $d = e$ i que els F_i coincideixen amb els P_i llevat d'una constant diferent de zero, és a dir, existeixen $c_1, c_2, c_2 \in \mathbb{C}$ diferents de zero tals que $F_i = c_iP_i$. Així les equacions per la a i la b queden

$$(c_2 - c_1)P_1P_2 = aP_1P_3(c_3 - c_1) = bP_2P_3(c_3 - c_2)$$

Si $c_1 = c_2 = c_3$ aleshores $f = g$, si no, com a mínim quedarà una de les tres equacions anterior, aleshores existirà $c \in \mathbb{C}$ diferent de zero tal que $P_i = cP_j$ amb $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$, les arrels comunes de P_k i P_i, amb $k \notin \{i, j\}$, també seran arrels de P_j contradient que f és un morfisme de $\mathbb{P}^2$ a $\mathbb{P}^2$. □

El lema implica que per tot $\sigma \in X_d$, el conjunt X_σ^{adm} és igual a $\{\sigma\}$ per tot $d > 0$ i igual a X_0 si $d = 0$. Observem que en cas de seccions de grau zero σ_q, com que $X_\sigma^{\mathrm{adm}} \cap X_d = \emptyset$ per tot $d > 0$, $\tilde{X}_{\sigma_q} = \mathrm{Bl}_q(\mathbb{P}^2)$.

3.2.3 Seccions de grau 1

Estudiem ara la component $X_1 \cong PGL(3)$. Com que $PGL(3)$ actua sobre si mateix de forma transitiva no és restrictiu fixar σ la secció corresponent a la diagonal de π.

Pel lema anterior sols cal considerar les seccions infinitament properes a σ. El divisor excepcional E_σ és isomorf a la projectivització de l'espai tangent de $\mathbb{P}^2$. Per tant, una secció seva correspon a un camp de direccions tangents sense singularitats. Com que d'aquests no n'existeixen a $\mathbb{P}^2$, tenim que σ no admet cap secció infinitament propera i la F.U.s de π_σ s'identifica amb el conjunt buit.

En el cas de X_d, $d \geq 2$, el divisor exepcional E_σ és novament un fibrat en rectes projectives, més precisament $(E_\sigma)_p$ és l'espai tangent projectivitzat a $s(p)$. Llavors una secció τ infinitament propera a σ determina un morfisme de $\mathbb{P}^2$ al fibrat tangent a $\mathbb{P}^2$ de grau d i per tant un d-web al pla. La imatge de

$\mathbb{P}^2$ a $\mathbb{P}(T\mathbb{P}^2)$ seria una superfície sobre la qual la distribució de plans canònica (de contacte) determina una foliació. Novament obtenim una foliació sense singularitats a $\mathbb{P}^2$ i per tant una contradicció. Amb això volem dir que per tot $d > 0$ i per tot $\sigma \in X_d$ tenim que $\tilde{X}_\sigma = \emptyset$ i per tant

$$Cl_2(PP^2 \times \mathbb{P}^2) = \mathrm{Bl}_\Delta(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)$$

3.3 Exemple III

Ara estudiarem un exemple lleugerament més sofisticat. Fixem en $\mathbb{P}^3$ una recta R i prenem coordenades homogènies $[x : y : z : t]$ tals que $R = V(x, y)$. Hi ha una bijecció entre els plans que contenen R i els punts de $\mathbb{P}^1$ donada per $[u : v] \to H_{[u:v]} := V(-vx + uy)$. Aquesta bijecció indueix un morfisme $p\colon \mathbb{P}^3 \setminus R \to \mathbb{P}^1$ que envia els punts $q \in \mathbb{P}^3 \setminus R$ a l'únic punt $[u : v] \in \mathbb{P}^1$ tal que $q \in H_{[u:v]}$. Amb coordenades és senzillament projectar sobre les dues primeres components (per això definim d'aquesta forma els plans $H_{[u:v]}$). Una forma menys abstracte de veure p és considerar pr la projecció usual de $\mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$ a $\mathbb{P}^3$, $L' := pr^{-1}(V(z, t))$ i $R' := pr^{-1}(R)$, llavors p és el morfisme induït per la projecció ortogonal sobre L', que esta definit sobre tot $\mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$ menys l'espai ortogonal a L', que és exactament R'.

Definim $\mathcal{S} := \mathrm{Bl}_R(\mathbb{P}^3)$ com el blowup de $\mathbb{P}^3$ amb centre R i considerem coordenades $[x : y : z : t; \alpha : \beta] \in \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^1$ amb

$$\alpha y - \beta x = 0 \tag{3.6}$$

Diem E el divisor excepcional d'aquest blowup i $B := \mathbb{P}^1$ amb coordenades $[u : v]$. Aleshores definim la família de superfícies com

$$\begin{array}{cccc} \pi & : & \mathcal{S} & \longrightarrow & B \\ & & [x : y : z : t; \alpha : \beta] & \longrightarrow & [\alpha : \beta] \end{array}$$

El morfisme π fora de E és composar p amb el blowup bl_R, ja que per (3.1) si $(x, y) \neq 0$, $[x : y] = [\alpha : \beta]$. Per tant les fibres de π són plans projectius, és més $\mathcal{S}_{[u:v]} \cong_{\mathrm{bl}_R} H_{[u:v]} \cong \mathbb{P}^2$. Aquesta construcció li direm la *família de plans que passen per la recta R.*

3.3.1 Descripció de X

Per aquesta família ens centrarem directament en un obert U de X. Primer definim $L := \mathrm{bl}_R^{-1}(V(z, t))$, que és isomorf a $V(t, z)$ ja que $V(z, t) \cap R = \emptyset$. A més és la imatge de una secció de π ja que per tot $[u : v] \in \mathbb{P}^1$, $\mathcal{S}_{[u:v]} \cap L$ consta de un sol punt, concretament és l'antiimatge pel blowup bl_R de $H_{[u:v]} \cap V(z, t)$ i si diem σ a aquesta secció,

$$\sigma[u : v] = ([u : v : 0 : 0], [u : v])\,.$$

Qualsevol recta de $\mathbb{P}^3$ que tingui intersecció buida amb R és isomorfa a la seva antiimatge pel bl_R que, a més, també és imatge d'una secció de π. Per tant hi ha un obert U de X que és correspon amb un obert de la Grasmanianna $Gr(1, 3)$ de les rectes contingudes en $\mathbb{P}^3$, corresponent a les rectes que tenen intersecció buida amb R. Prenem les coordenades de Plücker per $Gr(1,3)$. Essencialment és prendre com a conjunt de paràmetres la quàdrica $V := V(p_1p_4+p_2p_5+p_3p_6)$ de $\mathbb{P}^5$ on $[p_1 : p_2 : p_3 : p_4 : p_5 : p_6]$ són les seves coordenades i la aplicació coordenada envia un punt de V a la recta

$$V\begin{pmatrix} p_6x - p_2y + p_1z \\ p_5x + p_3y - p_1t \\ p_4x - p_3z + p_2t \\ p_4y + p_5z + p_6t \end{pmatrix}$$

i a una recta $V(a_0x + a_1y + a_2z + a_3t, b_0x + b_1y + b_2z + b_3t)$ l'envia el punt de la quàdrica

$$[a_2b_3 - a_3b_2 : a_3b_1 - a_1b_3 : a_1b_2 - a_2b_1 : a_0b_1 - a_1b_0 : a_0b_2 - a_2b_0 : a_0b_3 - a_3b_0]$$

Prenem la carta afí $A_1 := \{p_1 \neq 0\}$ llavors tenim que l'aplicació

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & A_1 & \longrightarrow & \mathbb{A}^4 \\ & [p_1 : p_2 : p_3 : p_4 : p_5 : p_6] & \longmapsto & (p_6/p_1, -p_2/p_1, -p_5/p_1, -p_3/p_1) \end{array}$$

és un isomorfisme. Si (a,b,c,d) són les coordenades de $\mathbb{A}^4$, $\varphi^{-1}(a,b,c,d) = [1 : -b : -d : ad - bc : -c : a]$ i al punt (a,b,c,d) li correspon la recta

$$L_{(a,b,c,d)} := V\begin{pmatrix} ax + by + z \\ cx + dy + t \end{pmatrix}$$

en aquest cas $L = L_{(0,0,0,0)}$ i és clar que per tot $(a,b,c,d) \in \mathbb{A}^4$ tenim $L_{(a,b,c,d)} \cap R = \emptyset$, per tant $\mathbb{A}^4$ s'identifica amb un obert U de X a traves de φ.

3.3.2 Descripció de $\psi|_{B\times U}$ i estratificació de U

Per definir $\psi|_{B\times U}([u : v], (a,b,c,d))$ sols cal observar que

$$H_{[u:v]} \cap L_{(a,b,c,d)} = [u : v : -au - bv : -cu - dv]$$

per tant, per (3.6),

$$\psi([u : v], (a,b,c,d)) = ([u : v : -au - bv : -cu - dv], [u : v]).$$

Ara busquem l'estratificació platificadora per la secció σ, és la secció amb imatge L. Donat un punt $(a,b,c,d) \in \mathbb{A}^4$ tenim

$$L_{(a,b,c,d)} \cap L = \begin{cases} L & \text{si} \quad (a,b,c,d) = 0 \\ \{p\} & \text{si} \quad ad - bc = 0 \text{ i } (a,b,c,d) \neq 0 \\ \emptyset & \text{si} \quad ad - bc \neq 0 \end{cases}$$

Per tant, si $Z := V(ad - bc)$, aquesta és l'estratificació: $U = Z^c \cup Z \setminus \{0\} \cup \{0\}$.

3.3.3 Extensió de $\psi|_{B\times U}$ a el blowup $\mathcal{S}_\sigma$

Com que la base de la família de superfícies té dimensió 1, quant fem el blowup de $\mathcal{S}$ amb centre L i obtenim una nova família de superfícies $\pi_\sigma : \mathcal{S}_\sigma \to B$, el

morfisme $\psi|_{B\times U}$ el podrem estendre a $\mathcal{S}_\sigma$ sobre els dos estrats Z^c i $Z\setminus\{0\}$. Per Z^c les seccions tenen intersecció buida amb L i per tant la seva antiimatge pel bl_L ja serà una secció. Les seccions de $Z\setminus\{0\}$ interseccionen amb L en un divisor de Cartier efectiu per tant la seva antiimatge no serà una secció però la seva transformada estricte si que ho serà.
Diem E_L al divisor excepcional del blowup bl_L i sobre $\mathcal{S}_\sigma$ prenem coordenades $([x:y:z:t],[\alpha:\beta],[\mu:\eta])$ on, a més de (3.1), tenim

$$\mu t-\eta z=0 \tag{3.7}$$

Per definir cada G_i observem que han de ser igual que ψ sobre $[x:y:z:t]$ i $[\alpha:\beta]$, per tant sols ens falta veure com són sobre $[\mu:\eta]$.
Primer definim $G_0\colon B\times Z^c\to\mathcal{S}_\sigma$. Si $P\in Z^c$ aleshores $L_P\cap L=\emptyset$ i $[\mu:\eta]$ ens ve determinat per (3.2) ja que $(z,t)\neq 0$, així

$$\begin{array}{cccc} G_0 & : & B\times Z^c & \longrightarrow & \mathcal{S}_\sigma \\ & & [u,v],(a,b,c,d) & \longmapsto & \begin{array}{c}[u:v:-au-bv:-cu-dv]\\ [u:v],[au+bv:cu+dv]\end{array}\end{array}$$

Notem que esta ben definit per $[\mu:\eta]]$ ja que el ser $ad-bc\neq 0$ el vector $(au+bv,cu+dv)\neq 0$ per tot $[u:v]\in\mathbb{P}^1$.
Per definir $G_1: B\times(Z\setminus\{0\})\to\mathcal{S}_\sigma$ no serveix la forma de G_0 ja que per un punt $P\in Z\setminus\{0\}$ els valors $[\mu:\eta]$ de $\underline{P}$ per cada $[u:v]\in\mathbb{P}^1$ serien la projecció sobre $[z:t]$ del punt $H_{[u:v]}\cap L_P$ i llavors per l'únic $[u_0:v_0]\in\mathbb{P}^1$ tal que $H_{[u:v]}\cap L_P\cap L\neq\emptyset$ no estaria ben definit. Però en aquest cas és clar que la recta L_P està continguda en un pla que també conte L. Com que $R\cap L=\emptyset$ podem pensar $\mathcal{S}_\sigma$ com la família de plans que passen per L a la que l'hi hem fet el blowup al llarg de la secció que determina la recta R. D'aquesta manera el morfisme que dona estructura de família de superfícies és la projecció sobre $[\mu:\eta]$, diem-l'hi π_L. La secció que determina la recta L_P està continguda en una de les fibres de π_L, per tant $[\mu:\eta]$ són constants i concretament es el punt de la fibra de π_L que conte L_P i ara és immediat veure que L_P està continguda en el pla $V(v_0t+u_0z)$ i per tant

$$\begin{array}{cccc} G_1 & : & B\times Z\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathcal{S}_\sigma \\ & & [u,v],(a,b,c,d) & \longmapsto & \begin{array}{c}[u:v:-au-bv:-cu-dv]\\ [u:v],[-v_0:u_0]\end{array}\end{array}$$

Notem que aquesta definició compleix (3.2) i que a més $[-v_0:u_0]$ és igual a $[a:b]$ o $[c:d]$ segons quin dels dos estigui definit i en cas de estar-ho els dos $[a:b]=[c:d]$.

El que no podem fer es estendre la definició de ψ al punt $(0,0,0,0)$, per això fem el blowup de U amb centre el punt $(0,0,0,0)$. Aquest és el blowup up de $\mathbb{A}^4_{\mathbb{C}}$ amb centre el zero, per tant tenim coordenades $((a,b,c,d),[A:B:C:D])$ amb

$$Ab-aB=0 \tag{3.8}$$

$$Ac-aC=0 \tag{3.9}$$

$$Ad-dA=0 \tag{3.10}$$

$$Bc-bC=0 \tag{3.11}$$

$$Bd - bD = 0 \tag{3.12}$$

$$Cd - cD = 0 \tag{3.13}$$

Per estendre ψ a $B \times \mathrm{Bl}_0(U)$ també haurem de fer-ho amb dos morfismes, un per la transformada estricta $\tilde{Z}$ de Z, que és $V(AD - BC)$, i l'altre pel seu complementari, els hi direm $\tilde{G}_i$. Observem que fora del divisor excepcional del $\mathrm{Bl}_0(U)$ els morfismes $\tilde{G}_i$ han de ser igual que els G_i però a més per un punt $((a,b,c,d),[A : B : C : D]) \in \mathrm{Bl}_0(U)$ que no pertany el divisor excepcional $(a,b,c,d) \neq 0$ i per (3.3-8) $[a : b : c : d] = [A : B : C : D]$. Llavors pels punts de $\tilde{Z}$ tenim que $[-v_0 : u_0] = [-v_0' : u_0']$ on $(Au_0' + Bv_0', Cu_0' + Dv_0') = 0$ i $(au_0 + bv_0, cu_0 + dv_0) = 0$ i pels punts de $\tilde{Z}^c$, $[Au + Bv : Cu + Dv] = [au + bv : cu + dv]$. Per tant per definir els morfismes $\tilde{G}_i$ sols canviem els paràmetres de les coordenades $[\mu : \eta]$ pels paràmetres del divisor excepcional

$$\begin{array}{cccc} \tilde{G}_0 : & B \times \tilde{Z}^c & \longrightarrow & \mathcal{S}_\sigma \\ & \begin{array}{c}[u,v],(a,b,c,d)\\ [A:B:C:D]\end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c}[u:v:-au-bv:-cu-dv]\\ [u:v],[Au+Bv:Cu+Dv]\end{array} \end{array}$$

i

$$\begin{array}{cccc} \tilde{G}_1 : & B \times \tilde{Z} & \longrightarrow & \mathcal{S}_\sigma \\ & \begin{array}{c}[u:v],(a,b,c,d)\\ [A:B:C:D]\end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c}[u:v:-au-bv:-cu-dv]\\ [u:v],[-v_0:u_0]\end{array} \end{array}$$

on $[-v_0 : u_0]$ és igual a $[A : B]$ o $[C : D]$ segons quin dels dos estigui definit i en cas de estar-ho els dos $[A : B] = [C : D]$.

Ara anem a estudiar quines parelles de punts del divisor excepcional de el blowup de U amb centre el punt $(0,0,0,0)$ donen la mateixa secció, és a dir, quan $\underline{(0,[A : B : C : D])} = \underline{(0,[A' : B' : C' : D'])}$.
Primer notem que un punt de $\tilde{Z}$ i un de fora de $\tilde{Z}$ mai donaran la mateixa secció ja que la secció que determina un punt de $\tilde{Z}^c$ no està continguda en cap fibra de π_L i per tant no serà constant sobre les coordenades $[\mu : \eta]$ com, en canvi, ho és qualsevol secció determinada per un punt de $\tilde{Z}$. Per tant ens hem de centrar en parelles de punts de $\tilde{Z}$ i parelles del seu complementari.

Comencem amb una parella de punts del complementari de $\tilde{Z}$. La única condició per que $\underline{(0,[A : B : C : D])} = \underline{(0,[A' : B' : C' : D'])}$ és que per tot $[u : v] \in \mathbb{P}^1$

$$[Au + Bv : Cu + Dv] = [A'u + B'v : C'u + D'v]$$

i es veu que això passa sii $[A : B : C : D] = [A' : B' : C' : D']$. Per tant dos punts diferents del complementari de $\tilde{Z}$ sempre donen seccions diferents.

Per una parella de punts de $\tilde{Z}$ la situació és ben diferent. Primer observem que dintre de Z si suposem $(a,b) \neq 0$ aleshores existeix $s \in \mathbb{C}$ tal que $s(a,b) = (c,d)$ i podem prendre com a coordenades (a,b,s) que es corresponen a la recta $V(ax + by + z, t - sz)$ que és el resultat de fer eliminació Gaussiana a $V(ax + by + z, cx + dy + t)$. El mateix podem fer per les coordenades $[A : B : C : D]$ dins de $\tilde{Z}$ i aleshores tenim coordenades $(a,b,s),([A : B],S)$ en $\tilde{Z}$, aquestes coordenades les podem estendre al punt $(a,b) = 0$ tenint amb compte que per tot s el punt $(0,0,s)$ es correspon el punt $(a,b,c,d)=0$. Això no podem fer-ho per $[A:B]$ ja que són coordenades homogènies. Ara és obvi que

$$\underline{(0,0,0,[A:B],S)} = \underline{(0,0,0,[A':B'],S')}$$

sii $[A:B]=[A':B']$. Per tant tots els punts de la forma $(0,0,0,[A_0:B_0],S)$ determinen la mateixa secció per qualsevol $S \in \mathbb{C}$.

El que està passant és que Z és un entorn del vèrtex d'un con sobre una quàdrica de $\mathbb{P}^2$. Aquesta quàdrica és isomorfa a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Llavors $\tilde{Z}$ és un entorn de $\{0\} \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ a $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Aleshores, per cada $[A:B] \in \mathbb{P}^1$, tots els punts de la recta $\{0\} \times \{[A:B]\} \times \mathbb{P}^1$ determinen la mateixa secció. És a dir, es pot contraure el $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ excepcional a un $\mathbb{P}^1$.

Bibliografia

[1] Alberich-Carramiñana, Maria i Roé, Joaquim: «Enriques diagrams and adjacency of planar curve singularities». *Canad. J. Math.*, 2005, **57(1)**, pp. 3–16. [2113847 (2005i:14003)].
`http://dx.doi.org/10.4153/CJM-2005-001-1`

[2] Ciliberto, Ciro; Dumitrescu, Olivia; Miranda, Rick i Roé, Joaquim: «Emptiness of homogeneous linear systems with ten general base points». A: *Classification of algebraic varieties*, EMS Ser. Congr. Rep., pp. 189–195. Eur. Math. Soc., Zürich, 2011.
`http://dx.doi.org/10.4171/007-1/8`

[3] Ciliberto, Ciro i Miranda, Rick: «Linear systems of plane curves with base points of equal multiplicity». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2000, **352(9)**, pp. 4037–4050. [1637062 (2000m:14006)].
`http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-00-02416-8`

[4] Douady, Adrien: «Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné». *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 1966, **16(fasc. 1)**, pp. 1–95. [0203082 (34 #2940)].

[5] Faber, Carel; van der Geer, Gerard i Looijenga, Eduard (Eds.): *Classification of algebraic varieties*. EMS Series of Congress Reports. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2011. [2742569 (2011i:14001)].
`http://dx.doi.org/10.4171/007`

[6] Grothendieck, A.: «Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes». *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 1961, **(8)**, p. 222. [0163909 (29 #1208)].

[7] ——: «Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. I». *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 1964, **(20)**, p. 259. [0173675 (30 #3885)].

[8] ——: «Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III». *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 1966, **(28)**, p. 255. [0217086 (36 #178)].

[9] Grothendieck, Alexander: *Fondements de la géométrie algébrique. [Extraits du Séminaire Bourbaki, 1957–1962.]*. Secrétariat mathématique, Paris, 1962. [0146040 (26 #3566)].

[10] Hartshorne, Robin: *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. [0463157 (57 #3116)]. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[11] Kleiman, Steven i Piene, Ragni: «Enumerating singular curves on surfaces». A: *Algebraic geometry: Hirzebruch 70 (Warsaw, 1998)*, volum 241 de *Contemp. Math.*, pp. 209–238. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
`http://dx.doi.org/10.1090/conm/241/03637`

[12] Kleiman, Steven L.: «Multiple-point formulas. I. Iteration». *Acta Math.*, 1981, **147(1-2)**, pp. 13–49. [631086 (83j:14006)].
`http://dx.doi.org/10.1007/BF02392866`

[13] ——: «The Picard scheme». A: *Fundamental algebraic geometry*, volum 123 de *Math. Surveys Monogr.*, pp. 235–321. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[14] Kleiman, Steven L. i Piene, Ragni: «Node polynomials for families: methods and applications». *Math. Nachr.*, 2004, **271**, pp. 69–90. [2068884 (2005d:14074)].
`http://dx.doi.org/10.1002/mana.200310182`

[15] Lang, Serge: *Algebra*. volum 211 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2002. [1878556 (2003e:00003)].
`http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4613-0041-0`

[16] Mumford, David: *Lectures on curves on an algebraic surface*. With a section by G. M. Bergman. Annals of Mathematics Studies, No. 59. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1966. [0209285 (35 #187)].

[17] Nicaise, Johannes i Sebag, Julien: «Motivic Serre invariants and Weil restriction». *J. Algebra*, 2008, **319(4)**, pp. 1585–1610. [2383059 (2009e:14041)].
`http://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra.2007.11.006`

[18] Nitsure, Nitin: «Construction of Hilbert and Quot schemes». A: *Fundamental algebraic geometry*, volum 123 de *Math. Surveys Monogr.*, pp. 105–137. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[19] Olsson, Martin i Starr, Jason: «Quot functors for Deligne-Mumford stacks». *Comm. Algebra*, 2003, **31(8)**, pp. 4069–4096. [2007396 (2004i:14002)]. Special issue in honor of Steven L. Kleiman.
`http://dx.doi.org/10.1081/AGB-120022454`

[20] Roé, Joaquim: «Conditions imposed by tacnodes and cusps». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2001, **353(12)**, pp. 4925–4948 (electronic). [1852087 (2002g:14007)].
`http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-01-02740-4`

[21] ——: «On the existence of plane curves with imposed multiple points». *J. Pure Appl. Algebra*, 2001, **156(1)**, pp. 115–126. [1807019 (2001m:14050)].
`http://dx.doi.org/10.1016/S0022-4049(99)00116-4`

[22] ——: «Blowup and specialization methods for the study of linear systems». *Ann. Univ. Paedagog. Crac. Stud. Math.*, 2012, **11**, pp. 38–42. [2922734].

[23] Serre, Jean-Pierre: «Géométrie algébrique et géométrie analytique». *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 1955–1956, **6**, pp. 1–42. [0082175 (18,511a)].

[24] Stacks Project Authors, The: «*Stacks Project*». *http://stacks.math.columbia.edu, 2013.*

[25] Vakil, Ravi:. Foundation of Algebraic Geometry*. Verció: 16 May 2012. http://math.stanford.edu/~vakil/216blog/*