Anàlisi complexa: de la teoria de Cauchy a la teoria del potencial*

JOAQUIM BRUNA **

INTRODUCCIÓ

La teoria de funcions de variable complexa va ser una de les principals creacions matemàtiques del segle XIX. La seva aparició va repercutir en pràcticament totes les àrees de les matemàtiques. Per algunes, la nova teoria va proporcionar una eina tècnica i de càlcul molt valuosa, com a la teoria de nombres. Per a altres àrees, la nova teoria va portar un nou context moltes vegades més adequat, com amb la teoria d'integrals el·líptiques. Tot això, i la seva intrínseca bellesa, li fan ocupar un lloc central a la història del pensament matemàtic, i del segle XIX en particular.

El propòsit d'aquesta conferència és descriure'n els origens i l'evolució durant els seus primers cinquanta anys d'existència (entre el 1810 i el 1860). La nova teoria va ser creada principalment per A. Cauchy (1789-1857), qui li donà una entitat pròpia, i de la seva obra en parlarem a la primera part. Després d'una breu referència a K. Weierstrass (1815-1897) parlarem també de B. Riemann (1826-1866) i de la relació amb la teoria del potencial.

LA CONTRIBUCIÓ DE CAUCHY

Començarem doncs parlant de A. Cauchy, a qui podem considerar el fundador de la teoria, que inicià i desenvolupà entre els anys 1814 i 1851. El conjunt de treballs de Cauchy es coneix avui com «la teoria de Cauchy», i comença amb la noció d'integral d'una funció d'una variable complexa. De fet, d'Alembert, Euler, Laplace, Gauss, Poisson i d'altres ja havien considerat abans que Cauchy integrals entre límits d'integració complexes, però Cauchy és el primer que en fa un estudi

* Conferència pronunciada el 12 de desembre del 1986 a la Societat Catalana de Matemàtiques.

** Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona.

diríem sistemàtic, principalment a dos memòries amb pràcticament el mateix títol: «Memòria sobre les integrals definides entre límits imaginaris».

Donat que parlarem de funcions de variable complexa, cal fer abans de tot dues observacions en relació a l'estat d'aquestes dues nocions —funció i variable complexa— al moment que estem considerant. En primer lloc, la representació geomètrica del nombres complexes i de les operacions algebràiques amb aquests nombres no apareix fins al final del segle XVIII i principis del XIX, deguda fonamentalment a Argand i a Gauss (és per això que en llibres ja un xic antics s'anomena el pla complex com el «pla d'Argand-Gauss»). El nombres complexes, introduïts per Cardano el segle XVI per a expressar totes les solucions de l'equació de segon grau no havien tingut ni molt menys una «acceptació» fàcil als ambients matemàtics. El fet que Euler els utilitzés per tancar la controvèrsia sobre els logaritmes dels nombres negatius va impulsar el reconeixement de la seva necessitat i encara no generalment. Podriem dir que si l'ús dels nombres complexes a l'àlgebra era quelcom sedimentat a finals del segle XVIII, la representació geomètrica va fer-ne més intuitiva la comprensió i deixava les coses preparades a fi que el càlcul diferencial i integral —grans protagonistes dels segles anteriors— s'ocupessin ara de les funcions de variable complexa.

La segona observació fa referència a la noció mateixa de funció. La noció moderna de funció va formar-se precisament durant tot el segle XIX, de forma que en aquell temps, funció no volia dir el que ara vol dir. A principis del segle XIX, el concepte de funció era sinònim d'expressió analítica, és a dir quelcom com

$$\frac{\sin x}{1 + x^2}, \qquad \frac{e^x}{x^2 + x + 3}, \qquad \text{etc.}$$

Dit d'una altra forma, quelcom expressable mitjançant una fórmula. D'aquí a considerar una «extensió complexa» de la funció, substituint senzillament la variable real x per la variable complexa z, hi va solament un pas. Una observació semblant s'aplica a les nocions de continuïtat i derivabilitat, no explicitades en aquell temps. Aquestes «expressions analítiques» tenen unes «discontinuïtats», on no estan ni tan sols definides, però fora d'aquestes les funcions són derivables indefinidament i llurs derivades s'obtenen per les regles formals habituals.

Originalment, la motivació principal de Cauchy és evaluar integrals reals $\int_a^b f(x)dx$, i els primers treballs mostren com utilitzar la «versió complexa $f(z)$» de la funció per fer-ho. Primer doncs cal definir la integral entre uns límits d'integració A, B arbitraris, eventualment no reals. Triat un dels possibles camins Γ que uneixen A amb B, sense passar per cap discontinuïtat de f, Cauchy defineix $\int_\Gamma f(z)dz$ com el límit de sumes $\sum_0^{n-1} f(z_k)(z_{k+1} - z_k)$, on els punts z_0, ..., z_n són punts de la corba Γ, $z_0 = A_1, z_n = B$, a mesura que hom va incrementant el nomre d'aquests punts. Aquesta, no cal dir-ho, és la mateixa noció d'integral per a funcions de variable real. Al llarg d'aquesta conferència interessarà tenir una forma moderna d'expressar aquesta integral. Si hom parametritza Γ per $z = \gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$; $\gamma(0) = A$, $\gamma(1) = B$, i si $z_k = \gamma(t_k)$, llavors $z_{k+1} - z_k$ és aproximadament igual a $\dot{\gamma}(t_k)(t_{k+1} - t_k)$, de forma que

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\,\dot{\gamma}(t)dt$$

(en particular, aquesta darrera integral és independent de la parametrització escollida).

El resultat fonamental que Cauchy demostra és que el valor d'aquesta integral és independent del camí escollit que uneix els punts A i B, sempre que la funció no tingui «discontinuïtats» entre les dues corbes escollides. Dit d'una altra forma —i donat que és clar que la integral canvia de signe si es recorre el camí en sentit oposat— la integral és zero sobre tot circuit tancat que no envolti singularitats de la funció. Aquest resultat, que havia estat enunciat anteriorment per Gauss, pot ser intuït mitjançant el teorema fonamental del càlcul, doncs en els cassos en què una primitiva $F(x)$ de $f(x)$ pot ser exhibida, $F'(x) = f(x)$, també hom té $F'(z) = f(z)$ (doncs les mateixes regles formals aplicades a l'expressió analítica $F(x)$ s'aplicaran quan hi tenim la variable z), de forma que

$$\int_\Gamma f(z)dz = F(B) - F(A)$$

En el cas general Cauchy va fer una demostració d'aquest resultat fonamental utilitzant tècniques del càlcul de variacions, àrea bastant popular a l'època. Jo crec que aquesta és la forma més raonable d'encarar el problema —si es prescindeix, com aquí estem fent, de tecnicismes— donat que al cap i a la fi, és tracta de veure que un funcional, funció de la corba, és constant. Amb notacions modernes la demostració aniria així: el funcional en qüestió és

$$I(\Gamma) = \int_\Gamma f(z)dz = \int_0^1 f(\dot{\gamma}(t))\gamma(t)dt$$

La condició que expressa que un cert funcional és constant és que la seva primera variació sigui 0 (equació d'Euler). De la mateixa forma que una funció $g(x, y, u)$ de tres variables reals x, y, u és constant quan totes les derivades direccionals son 0,

$$D_v g(A) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} g(A + \varepsilon v) = 0$$

el funcional $I(\Gamma)$ és constant quan les seves «derivades direccionals» són 0

$$D_\Phi I(\Gamma) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} I(\Gamma + \varepsilon\Phi) = 0$$

Aquí els increments es prenen en una direcció Φ, donada per una funció $\varphi(t)$, $0 \leq t \leq 1$, amb $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, donat que volem que $\Gamma + \varepsilon\Phi$ uneixi A amb B, qualsevol que sigui $\varepsilon > 0$. Ara bé,

$$I(\Gamma + \varepsilon\Phi) = \int_0^1 f(\gamma(t) + \varepsilon\varphi(t))(\dot\gamma(t) + \varepsilon\dot\varphi(t))dt,$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} I(\Gamma + \varepsilon\Phi) = \int_0^1 \{f'(\gamma + \varepsilon\varphi)\varphi(\dot\gamma + \varepsilon\dot\varphi) + f(\gamma + \varepsilon\varphi)\dot\varphi\}dt$$

i quan $\varepsilon = 0$

$$D_\Phi I(\Gamma) = \int_0^1 \{f'(\gamma(t)\dot\gamma(t)\varphi(t) + f(\gamma(t))\dot\varphi(f)\}dt =$$
$$= \int_0^1 \frac{d}{dt}\{f(\gamma(t))\varphi(t)\}dt = 0$$

puix que $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Observi's que aquesta demostració utilitza les regles habituals de diferenciació, i la regla de la cadena en particular, la qual cosa està justificada si recordem el tipus de funcions —expressions analítiques— que estem considerant, i el caràcter formal del càlcul de derivades. L'anomenada forma homològica del teorema se'n dedueix tot seguit: si Γ_1 i Γ_2 són dues corbes tancades i es pot deformar una en l'altre sense passar per cap discontinuitat de la funció, llavors la integral és la mateixa al llarg de les dues corbes.

Com a il·lustració de com s'utilitza aquest resultat en el càlcul d'integrals avaluarem la integral

$$I = \int_0^\infty \cos t^2\, dt$$

Aquesta és la part real de $\int_0^\infty e^{it^2} dt$; el teorema de Cauchy aplicat a la corba tancada formada pel segment $[0, R]$, l'arc C : Re^{it}, $0 \leq t \leq \pi/4$ i el segment que uneix 0 amb $\mathrm{Re}^{i\pi/4}$ dóna

$$\int_0^R e^{it^2} dt + \int_C e^{iz^2} dz = \int_0^R e^{i(te^{i\pi/4})^2}\, e^{i\pi/4} dt = e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-t^2}\, dt.$$

Ara es fa $R \to +\infty$ per obtenir que $I = \mathrm{Re}\, e^{i\pi/4} \int_0^\infty e^{-t^2} dt$. La variable t, $0 \leq t \leq \infty$ s'ha canviat per la variable $z = te^{i\pi/4}$, sense canviar el valor de la integral. Ara només cal recordar l'afirmació de Lord Kelvin segons el qual és evident que $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$ per a concloure que $I = \sqrt{\pi}/2\sqrt{2}$.

En el cas que la funció tingui alguna discontinuïtat entre els camins Γ_1 i Γ_2 les integrals ja no són iguals en general. Gauss havia indicat que si Γ_1 i Γ_2 són dos camins que uneixen dos punts A i B i de forma que el punt 0 quedi a dins, les integrals de $1/z$ sobre una i altra corba difereixen en $2\pi i$. Si una funció f té una singularitat a un punt z_0 i C és un petit cercle centrat a z_0, la forma homològica del teorema de Cauchy diu que $\int_C f(z)dz$ no depen pas de C. Cauchy defineix el *residu* de f en el punt z_0 com

$$\text{Res}\,(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)dz.$$

Així, si una corba tancada Γ envolta una única singularitat de f, per la forma homològica del teorema de Cauchy

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\ \text{Res}\,(f, z_0)$$

mentre que si n'envolta més d'una, $z_0, z_1, \ldots, z_n$, llavors

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}\,(f, z_k)$$

Aquest és el *teorema dels residus.* Ara bé, no tindria gaire utilitat pràtica si no hi hagués una forma ràpida i senzilla de calcular els residus. Per Cauchy, totes les discontinuïtats eren del tipus avui anomenat «pol», com, per exemple

$$f(z) = \frac{P(z)}{(z - z_0)^k}$$

on P és un polinomi. Si s'escriu el polinomi en termes de potencies de $(z - z_0)$ veiem que

$$f(z) = \frac{a_k}{(z - z_0)^k} + \frac{a_{k-1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \ldots + \frac{a_1}{(z - z_0)} + a_0 + b_1(z - z_0) + \ldots$$

i quan s'integra $f(z)$ a un cerclet centrat a z_0, és a dir, $z = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, es veu tot seguit que a_1, el coeficient de $(z - z_0)^{-1}$, és el residu de f en z_0. Més endavant, veu Laurent que un desenvolupament semblant val al voltant de qualsevol singularitat z_0, de forma que aquesta expressió del residu és general.

Com a il·lustració de com s'utilitza el teorema dels residus per a calcular integrals considerem l'exemple

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta}$$

La primera cosa a fer és interpretar I com la integral d'una certa funció de z. Per això, s'introdueix una variable $z = e^{i\theta}$ del cercle unitat, de forma que $\cos\theta = \mathrm{Re}\, z = 1 + z^2/2z$, i

$$I = -2i \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 4z + 1} = 4\pi \sum \mathrm{Res}(-, -).$$

Les singularitats de $(z^2 + 4z + 1)^{-1}$ són els zeros del polinomi, és a dir, els punts $z_0 = -2 - \sqrt{3}, z_1 = -2 + \sqrt{3}$. D'aquests dos, tan sols z_1 està a dins del cercle, i com que $z^2 + 4z + 1 = (z - z_0)(z - z_1)$, el residu és $1/(z_1 - z_0) = 1/2\sqrt{3}$ i $I = 2\pi/\sqrt{3}$.

El teorema dels residus té evidentment una vessant pràctica, però és també conceptualment important. És un d'aquells resultats que és senzill de demostrar i que relaciona nocions de natura diversa.

Tot l'anterior va ser fet per Cauchy entre els anys 1814 i 1825. Durant aquesta primera etapa de desenvolupament, les funcions de variable complexa són doncs una eina de càlcul; no es pot pas parlar encara d'una teoria nova. Tampoc apareixen aïllades les propietats d'aquestes funcions —la holomorfia, amb la nomenclatura actual— que estan a la base de tot. Es pot dir que no calia cap noció de funció holomorfa, perquè en certa forma totes ho són, durant aquesta primera etapa.

Tot aquest procés té lloc simultàniament amb el de formació de la noció moderna de funció, i de coordinació de les nocions bàsiques de l'anàlisi real, com la continuïtat, etc. Cauchy no era ni molt menys aliè a aquest altre procés; ben al contrari, ell, Bolzano i Weierstrass en són també protagonistes. Així s'explica com Cauchy va anar adoptant de mica en mica un nou punt de vista i va començar a donar les bases de la teoria de funcions de variable complexa en sí mateixa. Es pot distingir, doncs, una segona etapa en el desenvolupament de la teoria, caracterizada per un valor més aviat conceptual, que no pràctic, dels resultats obtinguts. Així, va trobar la fórmula de representació integral

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

avui coneguda com a fórmula de representació integral de Cauchy (observi's que és una conseqüència del teorema dels residus). Utilitzant aquesta i mitjançant el desenvolupament en sèrie geomètrica de l'integrand com a funció de z, va obtenir el fet que la funció és desenvolupable en sèrie de potències

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

a un disc $|z - z_0| \leq r$, sempré que en aquest disc no hi hagi singularitats. No parava atenció, però, a la qüestió de la convergència (uniforme) d'aquesta sèrie. La necessitat d'aquesta noció per justificar, per exemple, la integració terme a terme sembla que va escapar a Cauchy. Més endavant, l'any 1843, Laurent va generalitzar el resultat de Cauchy al cas que el punt z_0 fos una singularitat de f, admetent valors negatius de k a la sèrie anterior.

L'any 1828, Green havia publicat a Anglaterra un treball relacionant integrals de línea amb integrals de superfície. Probablement aquest era conegut per Cauchy, qui l'utilitzà per donar una altra demostració del teorema bàsic d'independència del camí, de la forma següent: si $f = u + iv$,

$$\int f(z)dz = \int (u + iv)(dx + idy) = \int (udx - vdy) + i \int (udx + vdz) =$$
$$= -\iint (u_y + v_x)dxdy + i \iint (u_x - v_y)dxdy.$$

El fet que la part real u i la imaginària v d'una expressió analítica $f(z)$ compleixen les equacions $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ ja era un fet conegut per Euler. Això és una forma equivalent d'expressar l'existència d'una única derivada complexa

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z)$$

independent de la direcció en la qual es pren l'increment Δz. La demostració d'Euler era en esència la següent: de

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

s'obté, derivant respecte a x, és a dir, prenent els increments en x

$$f'(z) = u_x + iv_x$$

i derivant respecte de y

$$if'(z) = u_y + iv_y$$

(puix que $z_y = i$), d'on s'obtenen les equacions $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Observem novament que, tal com ho veia Euler, la demostració anterior és bona quan pensem en $f(z)$ com una expressió analítica.

No va ser fins l'any 1851, als darrers treballs, que Cauchy va introduir formalment la definició de funció «monògena», com aquelles que tenien una sola derivada, independent del camí (en altres paraules, **C**-diferenciables). Però mai va ser clar en relació a la qüestió de si l'existència i continuïtat de la derivada es dedueixen de la «continuïtat» de la funció, doncs alguns cops ho imposava com a hipòtesi a la funció. En relació amb aquesta qüestió, cal fer observar que no va ser fins l'any 1900 que Goursat va demostrar el teorema de Cauchy d'independència del camí sense la hipòtesi de continuïtat de la derivada f', de forma que n'és una conseqüència. I encara una demostració simplificada va ser donada recentment per Dixon.

La definició de Cauchy de funció analítica és la que adoptaria també Riemann, és a dir, la d'una funció continuament diferenciable que compleixi les equacions $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, avui anomenades equacions de Cauchy-Riemann.

Acabarem aquesta primera part amb una breu referència a K. Weierstrass. En certa forma, el paper de Weierstrass en la construcció de la teoria va ser el mateix que en general a tot l'anàlisi, és a dir, el de rigorització, de sòlida fonamentació. No oblidem que a Weierstrass es deu fonamentalment la presentació de les nocions bàsiques de límit, continuïtat, propietats de funcions continues, etc., que es poden trobar a tots els llibres de text actuals. L'anomenat procés de fonamentació de l'Anàlisi té el seu màxim exponent en Weierstrass. A paritr del 1840, Weierstrass es dedicà a desenvolupar la teoria de funcions analítiques, però des d'un punt de vista diferent del de Cauchy. Si el punt de vista de Cauchy és geomètric, el de Weierstrass és més analític; això respon a una característica general de Weierstrass, ja que tenia un cervell més analític que no geomètric i utilitzarà més la deducció que la intuició. Per desenvolupar la teoria, el punt de vista de Weierstrass va ser el de prendre la noció de sèrie de potències com a base. Així, va demostrar els fets bàsics sobre convergència, derivació i integració terme a terme, etc., juntament amb l'ús sistemàtic de la noció de convergència uniforme, la necessitat de la qual havia escapat a Cauchy. També és de Weierstrass la idea de prolongació analítica a partir dels «elements». L'obra de Weierstrass, en part contemporània a la de Cauchy i els seus alumnes, va donar a la teoria el rigor i la fonamentació que Cauchy no havia donat. A la major part de llibres de text de variable complexa, els fonaments de la teoria hi són, essencialment, tal qual Cauchy i Weierstrass ho van deixar.

LA TEORIA DEL POTENCIAL I EL TEOREMA DE REPRESENTACIÓ COMFORME DE RIEMANN

Riemann va llegir la seva tesi, titulada «Fonaments per a una teoria general de les funcions d'una variable complexa», l'any 1851. Per posar-la en el seu context cal fer primer una observació. De forma paral·lela al procés que hem descrit fins ara, durant la primera meitat del segle XIX n'hi havia un altre que ben aviat va entroncar-s'hi. Em refereixo a la teoria de les integrals el·líptiques

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx, \qquad P \text{ i } R \text{ polinomis,}$$

(originada pel problema de la rectificació de l'el·lipse). Durant el segle XVIII, Euler i Lagrange havien treballat en aquesta línia amb tècniques purament de variable real. Durant el segle XIX, Abel i Jacobi van tenir la idea d'invertir la integral, passant al que es diu la funció el·líptica i van introduir-hi variable complexa. És en aquesta línia que cal situar la tesi de Riemann. Riemann va introduir a la tesi la noció de superfície de Riemann i va mostrar la seva utilitat per estudiar funcions multivaluades i sobretot funcions abelianes. Aquest és un tema que per si sol podria ser l'objecte de més d'una conferència i no ens hi referirem aquí. En lloc d'això, parlarem aquí del darrer teorema de la tesi de Riemann, el famós teorema de representació conforme, i a la seva relació amb la teoria del potencial.

Com hem dit abans, la definició de Riemann de funció holomorfa (o analítica) és la d'una funció amb derivades contínues que compleix les equacions de Cauchy-Riemann a una certa regió R,

$$u_x = v_y,\ u_y = -v_x, f = u + iv$$

que, també com hem fet veure abans, imposen l'existència del límit del quocient incremental $\Delta f/\Delta z$, independent de la forma com Δz es fa petit. Riemann era principalment geòmetra i per tant tenia un punt de vista més geomètric del que era una funció analítica. La mirava més aviat com a «transformació» $w = f(z)$. Si el límit d'aquest quocient incremental al llarg d'una determinada corba és L, el mòdul $|L|$ dóna el factor de dilatació i $\operatorname{Arg} L$ el de gir entre aquesta corba i la seva imatge. El requeriment que aquest límit sigui el mateix independentment de la corba diu doncs que totes giren el mateix, o dit d'una altra forma, es respecten els angles. D'aquestes transformacions, anomenades comformes, que ell també considerava entre superfícies de Riemann, l'interessen les que són biunívoques. Si entre dues regions R i R' hi ha una transformació comforme, la teoria de funcions és la mateixa a R que a R'. Trobem doncs en Riemann una noció ja moderna, la de grup de transformacions d'una estructura, en aquest cas l'estructura complexa.

Podem veure la connexió amb la teoria del potencial a través de dos fets. En primer lloc, de les equacions de Cauchy-Riemann es dedueix que les parts reals u, v d'una funció holomorfa compleixen l'equació del potencial

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

les solucions de la qual s'anomenen funcions harmòniques. Recíprocament, si u és harmònica, llavors $-u_y\, dx + u_x dy$ té diferencial 0 amb la qual cosa

$$v = \int (-u_y dx + u_x dy)$$

defineix unívocament v de forma que $f = u + iv$ és holomorfa, sempre que el domini R sigui simplement connex (és a dir, sense forats), i mòdul constants. La funció v és diu la funció harmònica conjugada de u. Així, en dominis simplement connexes, tota funció holomorfa queda determinada per la seva part real, i és equivalent construir funcions holomorfes que funcions harmòniques.

En segon lloc, si T és una transformació, $w = T(z)$, $z = x + iy$, $w = \xi + i\eta$, $\mathrm{U}(\xi,\eta)$ és una funció i $\mathrm{V}(x,y) = \mathrm{U}(T(z)) = \mathrm{U}(\xi,\eta)$, un senzill càlcul dóna

$$\Delta\mathrm{V} = \mathrm{U}_{\xi\xi}(\xi_x^2 + \xi_y^2) + 2\mathrm{U}_{\xi\eta}(\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y) + \mathrm{U}_{\eta\eta}(\eta_x^2 + \eta_y^2) + \\ + \mathrm{U}_\xi\Delta\xi + \mathrm{U}_\eta\Delta\eta.$$

D'aquí hom veu que si T és conforme, $\xi_x = \eta_y$, $\xi_y = -\eta_x$, llavors

$$\xi_z\eta_x + \xi_y\eta_y = 0,\ \Delta\xi = \Delta\eta = 0,\ \xi_x^2 + \xi_y^2 = \eta_x^2 + \eta_y^2 \text{ i } \Delta\mathrm{V} = (\xi_x^2 + \eta_x^2)\Delta\mathrm{U}.$$

En particular, T transforma funcions harmòniques en funcions harmòniques. Recíprocament, si T té aquesta propietat, no es difícil veure que T és conforme o bé conjugada d'una conforme. Així la teoria del potencial és invariant per transformacions conformes.

L'origen de l'equació del potencial $\Delta\mathrm{V} = \dfrac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial y^2}\ \dfrac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial z^2} = 0$ està evidentment lligada a la teoria de la gravitació. Si tenim un cos amb funció de densitat $\rho(x, y, z)$, la força d'atracció sobre una partícula de massa unitat a un punt situat a (x, y, z) té components

$$F_x = + c \iiint \rho \frac{x - \xi}{\Gamma^3} d\xi d\eta d\zeta,\ r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2},$$

i anàlogament F_y, F_z. Hom observa que $F = \Delta\mathrm{V}$, el gradient de

$$\mathrm{V} = \iiint \frac{\rho}{r} d\xi d\eta d\zeta$$

la funció potencial. La funció V compleix l'equació $\Delta\mathrm{V} = 0$ fora del cos i $\Delta\mathrm{V} = -4\pi\rho$ a dins el cos (Poisson). L'equació del potencial també va apareixer quan Fourier va demostrar que la distribució de temperatures $T(x, y, z, t)$ a un sòlid compleix

$$\Delta T = kT_t \qquad \text{(equació de difusió del calor)}$$

Quan $T_t = 0$, l'equació de difusió del calor es redueix a la del potencial.

L'aparició de l'equació a l'electrostàtica va centrar encara més l'interés de l'equació. Com a equació de 2.on ordre, es pensava que la solució general (funció harmònica general) a una regió R quedaria determinada per la funció i la seva derivada normal a la frontera. Però, en canvi, quan una distribució de temperatures és estacionària, se sabia que la temperatura T quedaba determinada només pels seus valors a la frontera. Quedava així plantejat el problema de Dirichlet, consistent en trobar una funció harmònica U a una regió R, que prengui uns valors predeterminats a la frontera.

L'any 1828 (però publicat l'any 1850), Green va fer una important contribució. Al mateix temps que el matemàtic rus Ostrogradsky, va demostrar la que avui anomenem fórmula de Green

$$\iint \mathrm{U}\Delta \mathrm{V}dxdy + \int \mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}ds = \iint \mathrm{V}\Delta \mathrm{U}dxdy + \int \mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial n}ds,$$

on $\frac{\partial}{\partial n}$ designa derivada segons la normal. Donat un punt P de la regió R, Green obté una fórmula que dóna el valor d'una funció harmònica al punt P en termes dels valors a la frontera i d'una altra funció amb les següents propietats: (a) $\mathrm{U} = 0$ a la frontera, (b) U té una singularitat a P del tipus $\log\frac{1}{r}$, on r és la distància a P, (c) $\Delta\mathrm{U} = 0$. Aplicant la fórmula de Green a R desprovist d'un petit disquet centrat a P i fent tendir a 0 el radi d'aquest disquet s'obté

$$\mathrm{V}(P) = -\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial n}ds$$

Així, si aquesta funció U existeix, el problema de Dirichlet té solució única. La funció U va ser anomenada per Riemann la funció de Green amb pol al punt P. La seva existència quedava però per demostrar. De fet, el demostrar l'existència de la funció de Green és un cas particular del problema de Dirichlet doncs si:

$$\mathrm{U} = \log\frac{1}{r} + \mathrm{U}_1,$$

llavors $\Delta\mathrm{U}_1 = 0$ a tot arreu i el requeriment $\mathrm{U} = 0$ a ∂R és la condició que $\mathrm{U}_1 = \log r$ a ∂R, és a dir, és la solució del Problema de Dirichlet amb dada a la frontera $\log r$. En el cas de regions R a l'espai, cal sustituir la singularitat $\log\frac{1}{r}$, per $\frac{1}{r}$, el potencial corresponent a una càrrega en P. Green mateix va fer una demostració de l'existència de U, utilitzant un argument de tipus físic: si hom veu R com una cavitat en un material carregat connectat a terra i es posa una càrrega unitat a un punt P de R, hi haurà un moviment de càrrega. Produït l'equilibri, el potencial resultant, suma de dos potencials, $\mathrm{U} = \frac{1}{r} + \mathrm{U}_1$, on U_1 és el potencial degut a la distribució de càrrega que apareix a ∂R, compleix $\mathrm{U} = 0$ a ∂R, donat que no hi ha moviment de càrrega.

Una forma matemàtica de tractar el problema de Dirichlet va ser formulada per Lord Kelvin l'any 1847. Riemann n'hi deia el principi de Dirichlet i consistia en el següent: considerem la classe de les funcions V que tenen derivades de segon ordre contínues a una regió R i que prenen els valors f a ∂R. Suposem que entre totes les funcions de la classe n'hi hagi una que minimitzi la integral de Dirichlet

$$I(\mathrm{V}) = \iint_R [\mathrm{V}_x^2 + \mathrm{V}_y^2]\, dxdy.$$

La cosa està en què si aquesta V existeix, llavors hom pot veure que $\Delta\mathrm{V} = 0$ a R. Això es fa d'una forma semblant a com abans hem demostrat el teorema de Cauchy, imposant que les «derivades direccionals» de I a V siguin totes cero. En aquest cas cal prendre els increments en la direcció d'una funció H que s'anul·la a ∂R, a fi que $\mathrm{V} + \varepsilon H$ sigui a la classe per a tot $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} I(\mathrm{V} + \varepsilon H) &= \iint_R \{(\mathrm{V}_x + \varepsilon H_x)^2 + (\mathrm{V}_y + \varepsilon H_y)^2\}\, dxdy \\ D_H I(\mathrm{V}) &= \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} I(\mathrm{V} + \varepsilon H) = \iint_R \Delta\mathrm{V} \cdot \Delta H\, dxdy \\ &= -\iint_R H\Delta\mathrm{V}\, dxdy. \end{aligned}$$

La condició $D_H I(\mathrm{V}) = 0$ per a tota H diu que $\Delta\mathrm{V} = 0$.

El principi de Dirichlet, com a mètode de resoldre el problema de Dirichlet, és el que Riemann utilitzà per a construir funcions harmòniques i per tant, també funcions holomorfes. Com a il·lustració, exposarem la demostració original de Riemann del seu teorema de representació conforme. Recordem que el teorema afirma que per a tota regió simplement connexa del pla complex R hi ha una representació conforme f de R sobre el disc unitat $\{z : |z| < 1\} = \mathrm{U}$. En particular, dues regions simplement connexes són conformement equivalents.

Per motivar la demostració de Riemann suposem primer el problema resolt i sigui f una representació conforme de R sobre U, amb $f(z_0) = 0$. Llavors $f(z) = (z - z_0)g(z)$ amb g sense zeros, doncs qualsevol zero de g seria un altre punt diferent de z_0 que va al 0 per f, cosa que no pot ser. Llavors la forma $dg/g = g'(z)/g(z)dz$ té una primitiva F, puix que R és simplement connex, $dF = dg/g$. Si $G = e^F$, $dG = GdF = Gdg/g$, és a dir, $0 = gdG - Gdg$, cosa que demostra que $e^{-F} = G = g$ (afegint-hi a F una constant, si cal). Així F és un logaritme de g, i si $F = u + iv$, $u = \log|g| = \log|f(z)|/|z - z_0|$; per a $z \in \partial R$, $|f(z)| = 1$, perquè $f(z) \in \partial\mathrm{U}$, i llavors $u(z) = \log 1/|z - z_0|$. En resum, u és una funció harmònica a R que val $\log 1/|z - z_0|$ a R, la qual cosa vol dir que $\log(1/|z - z_0|) - u = -\log|f(z)|$ és la funció de Green de R amb pol al punt z_0.

La idea de Riemann és procedir al revés. Ell donava el principi de Dirichlet com a bo, de forma que el problema de Dirichlet té solució. Per tant, fixat $z_0 \in R$, hi ha una funció harmònica u a R que val $-\log|z - z_0|$ a ∂R. Sigui v la funció harmònica conjugada, $F = u + iv$ i $f(z) = (z - z_0)\, e^{F(z)}$. Segons la motivació anterior, hauria d'esperar-se que f fós la representació conforme cercada.

No farem pas els detalls de la fi de la demostració, basada en l'existència d'un grup d'automorfismes transitiu al disc. Queda clar per la reversibilitat de la demostració que el teorema de Riemann és equivalent a la possibilitat de resoldre el problema de Dirichlet als dominis simplement connexes. Així quan Green posava una càrrega puntual a z_0 i esperava que es produís l'equilibri, s'estava demostrant ja el teorema de Riemann.

El principi de Dirichlet, utilitzat com hem vist per Riemann, va ser fortament criticat per Weiestrass l'any 1870, doncs al seu enunciat hi ha implícita la confusió d'un ínfim amb un mínim, és a dir, l'ínfim de la integral de Dirichlet no és clar que sigui accessible. Conceptualment és el mateix que quan diem que a un hiperplà de l'espai hi ha un punt a mínima distància de l'origen. Solament que aquí l'espai seria un espai de funcions de dimensió infinita, l'hiperplà seria sustituit pel subespai de les funcions que prenen els valors a la vora i la distància per la integral de Dirichlet.

La crítica de Weierstrass era justificada i més quan es van trobar exemples d'altres funcionals amb ínfims no accesibles. Aquest és un dels molts problemes que van impulsar el procés de rigorització de l'anàlisi. Una demostració del teorema de Riemann independent del principi de Dirichlet va ser donada per Schwarz i Neumann l'any 1870, en un cas particular. A dominis simplement connexes, la primera demostració correcta del problema de Dirichlet va ser feta per Osgood l'any 1900, i a dominis generals regulars, per Fredholm, via equacions integrals. Més endavant, l'any 1905, Hilbert va revaloritzar el principi de Dirichlet.