El naixement del càlcul de variacions*

Carles Perelló i Valls

El càlcul de variacions és una eina matemàtica que ens permet, de vegades, calcular la solució "òptima" d'un problema. Per exemple podem trobar la forma que quelcom ha de tenir per tal de fer mínim el temps o el cost d'una operació. També ens permet entendre una natura que de vegades sembla que vol fer les coses d'una certa millor manera.

A la matemàtica el càlcul de variacions li obre tot un camp de nous conceptes. Entre d'altres coses porta a la consideració d'espais en que els punts són funcions i als que podem aplicar els mètodes del càlcul infinitesimal.

Els que s'ocupen inicialment d'aquests problemes utilitzen tècniques elementals i no els conceptes ad hoc que es necessiten en la teoria més evolucionada. Això fa possible que els primers treballs sobre el càlcul de variacions estiguin a l'abast d'una persona que conegui tan sols els rudiments del càlcul infinitesimal. En els treballs dels precusors tot és una mica naïf: s'incrementa una quantitat aquí, es veu a través de dibuixos com això repercuteix en les demés quantitats, es fa coincidir el que és prou petit amb la diferencial, es diu que es divideix un interval en infinits trossos, etc. Els arguments estan fets de la primera matèria del pensament. No s'analitza massa a fons, perquè no se'n sent la necessitat i perquè tampoc es tenen les eines per fer-ho.

El concepte de funció dels qui comencen a tractar aquests problemes matemàticament és encara el d'una fórmula algebràica, potser amb infinits termes. No era gran la preocupació pels conceptes precisos de funció, ni de continuitat, ni de nombre, ni de tot això que ara molts consideren prioritari tenir ben aclarit per entendre quelcom del càlcul.

La curta història que segueix s'acaba quan Euler torna metòdic el càlcul de variacions, abans de que el bategi com a tal al incorporar les tècniques analítiques de Lagrange.

Es diu que quan Dido, la mítica reina fenícia, va fundar Cartago, se li va permetre fer-ho a l'espai ocupat per una pell de vaca. Amb una interpretació convenient del permís, Dido va fer seu l'espai comprès entre el mar i una corba

(*) Conferència organitzada per la Societat, pronunciada el 25–5–88 formada per la pell tallada a tires. Podem suposar que les va posar de manera d'encabir-hi el màxim possible de terreny. És per això que el problema de maximitzar l'àrea entre una corba donada (la costa) i una corba de longitud fixada d'antuvi (la formada de tires de pell) és conegut com a problema de Dido i és el problema del càlcul de variacions més antic que es coneix. Dido el deuria resoldre intuïtivament, i donada la seva llestesa es pot suposar que correctament, disposant les tires en un arc de cercle.

Molt més tard, al segle III a. C., Arquimedes demostra en un teorema del seu tractat sobre el cilindre i l'esfera [Arq. 1] que, de tots els segments d'esfera, és a dir, dels trossos que s'obtenen de l'esfera en seccionar-la per un pla, aquell que amb una àrea fixada té cabuda per a un volum més gran és l'hemisfèric. Aquest problema, encara que tracti de maximitzar el volum, no és típic del càlcul de variacions perquè no permet de variar la forma de la superficie: és sempre esfèrica. Donat un segment d'esfera, Arquimedes sap trobar el cercle de la mateixa àrea i el con del mateix volum i, comparant els volums d'aquests cons per diferents segments, no li costa de demostrar el teorema.

Pappos d'Alexandria, que va viure cap a l'any 300 de l'Era Cristiana, en el llibre V de la seva *Col·lecció Matemàtica* [Pap. 1] (sembla que recollint enunciats de Zenodor, prop de 500 anys abans) va fer consideracions sobre problemes semblants al de Dido (coneguts com a problemes isoperimètrics per ser una de les dades fixades el perímetre de la figura de la qual es vol maximitzar l'àrea).

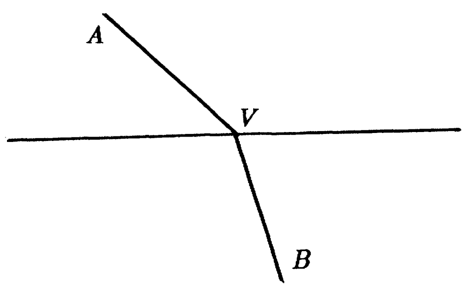
Pappos nota la sabiduria de les abelles, que fan hexagonals les cèl·lules de la bresca, aconseguint així que no deixin buits entre elles i a més que hi càpiga més mel amb la mateixa cera. Passant a la matemàtica demostra que, de tots el polígons del mateix perímetre i nombre de costats, els regulars són els que tenen l'àrea més gran, i que aquesta àrea es fa més gran quan creix el nombre de costats. Aproximant el cercle per polígons, conclou que el cercle és la corba que tanca l'àrea més gran amb una longitud fixada. Pappos intenta portar el raonament als poliedres, però es troba amb dificultats, car no pot aconseguir aproximar l'esfera amb poliedres: de regulars només hi ha els cinc platònics i d'arquimedians, formats per cares poligonals regulars, només n'hi ha un nombre finit. Tanmateix veu que dels poliedres regulars d'àrea donada, tanca un volum més gran el que té més cares, i amb això ja li sembla prou per a dir que és l'esfera la superfície que tanca el volum més gran amb una àrea donada. Els seus raonaments són poc precisos, àdhuc comparant-los amb els dels seus predecessors, com l'Arquimedes, i no podem considerar que hagi resolt el problema isoperimètric d'una manera satisfactoria, però troba la solució encertada.

Els problemes de trobar les formes que maximitzen o minimitzen quelcom, propis del càlcul de variacions, no tornen a ser tractats de forma explícita fins molts anys després. De fet és el càlcul infinitesimal qui dóna l'eina que s'escau, i per tant hem d'esperar al naixement d'aquest en mans de Leibniz i Newton per a entrar definitivament en matèria. Hi ha, però, antecedents interessants a l'obra de Galileo i Fermat, que van inspirar els que seguiren.

En els seus *Discorsi* de l'any 1638 [Gal. 1], Galileo diu que el moviment més ràpid per la caiguda d'un cos seguint una rampa corba entre dos punts donats no té lloc seguint la trajectòria més curta, que seria la recta, sinó al llarg d'un arc de cercle. Això ho obté comparant els temps esmerçats pels dos punts. Aquesta és una solució errònia del problema de la braquistòcrona, que va ser enunciat i resolt més tard pels germans Bernoulli. En descàrrec de Galileo constatem que d'això en parla en dos fragments dels seus *Discorsi* (pgs. 139 i 263) on només considera línies poligonals inscrites en el cercle i no totes les corbes possibles, i en tal cas és cert que comparat amb aquestes línies el cercle dóna la caiguda més ràpida. A més té la precaució de dir que "sembla que es pot inferir que el moviment més ràpid...".

Un altre problema considerat a la mateixa obra és el de la forma que pren una cadena pesant penjada pels seus extrems. Aquí Galileo comet l'error (pàg. 186), de dir que la cadena adopta la forma parabòlica. Aquest error es troba, però, corregit a la pàgina 310 on diu que una cadena estirada es corba segons una corba que s'aproxima molt a la paràbola i que la coincidencia és tant més precisa com més estirada estigui. No dóna arguments explícits que justifiquin aquestes conclusions, però algú podria veure una analogia entre el seu tir parabòlic i la corda estirada. Una altra vegada, són els Bernoulli els qui donen solució a aquest problema de la catenària.

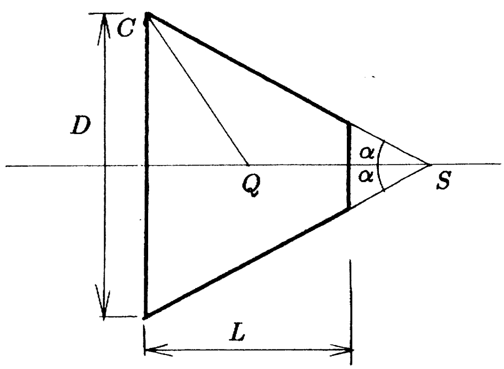
Fermat, resolent un problema de màxims i mínims, obté la llei de refracció de la llum que és utilitzada per Johann Bernoulli quan tracta el problema de la braquistòcrona. En el seu treball sobre l'anàlisi i síntesi de refraccions adjuntat a una carta del 1662 [Fer. 1, pgs. 132-179], esmenta el resultat galileà segons el qual caient seguint un arc de cercle es triga menys que seguint una trajectòria recta, i enuncia una mena de principi sobre que "la natura opera per mitjans i maneres que són els més fàcils i ràpids i no per la trajectòria més curta". D'acord amb aquesta principi i inspirat per les observacions, accepta que la llum es mou a través dels medis transparents de manera d'esmerçar el temps més petit possible per viatjar entre dos punts. Això constitueix, potser, el primer dels anomenats principis variacionals. D'acord amb ell calcula la trajectòria d'un raig de llum que uneix dos punts situats cada un a un medi transparent, on la velocitat de la llum, constant a cada un dels medis, és diferent als dos. Els dos medis estan en contacte al llarg d'un pla, que, intersectat amb el pla que conté el raig de llum, apareix com una recta horizontal a la figura.



Es tracta de minimitzar el temps que esmerça la llum entre els dos punts seguint una trajectòria angular, amb vèrtex a la divisòria entre els dos medis, quan es permet variar la posició d'aquest vèrtex. Aquest problema de mínims és tractat pel mètode descrit pel mateix Fermat al seu *Methodus at disquirendam maximam et minimam* [Fer. 1, pgs 132-136], i que consisteix essencialment a trobar la posició del vèrtex que en ser canviat lleugerament produeix un canvi d'ordre superior de petitesa en el temps. Avui diríem que troba el punt que fa zero la derivada del temps com a funció de la posició del vèrtex sobre la línia de separació. Obté així que els sinus dels angles del raig amb les normals als dos medis són proporcionals a les velocitats als medis corresponents.

Els problemes que fins ara hem considerat, o bé no són ben bé típics del càlcul de variacions, com en el cas d'Arquimedes i Fermat, puix que les configuracions depenen només d'un o dos nombres i es redueixen al tipus de problemes coneguts com "de màxims i mínims", o bé, essent propis del càlcul de variacions, ja que s'ha de trobar una "forma" per a maximitzar o minimitzar quelcom, no són resolts correctament o amb prou justificació com és el cas de Dido, Pappos i Galileo.

És Newton qui primer es proposa i resol un problema genuí del càlcul de variacions. El problema consisteix a trobar la forma d'un cos de revolució movent-se dins d'un medi resistent en la direcció del seu eix, per tal de fer mínima la resistència. Les hipòtesis són que el medi, format de partícules iguals, homogèniament repartides i en repòs abans de xocar amb el cos, presenta resistència a causa del rebot elàstic d'aquestes partícules amb la part de la superfície del cos que té una normal exterior amb component positiva en la direcció del moviment. Així li resulta una resistència a l'avenç per unitat d'àrea proporcional al quadrat del cosinus de l'angle que forma aquesta normal amb la velocitat, i que en integrar-la ens dóna la resistència total. No considera cap resistència a la part de la superfície que té la normal exterior mirant enrera. Suposa a més que estan fixats els valors del diàmetre de la secció màxima D i la longitud L entre aquesta secció i la part del davant, i que la normal exterior mira endavant pel davant de la secció màxima i endarrera pel darrera.

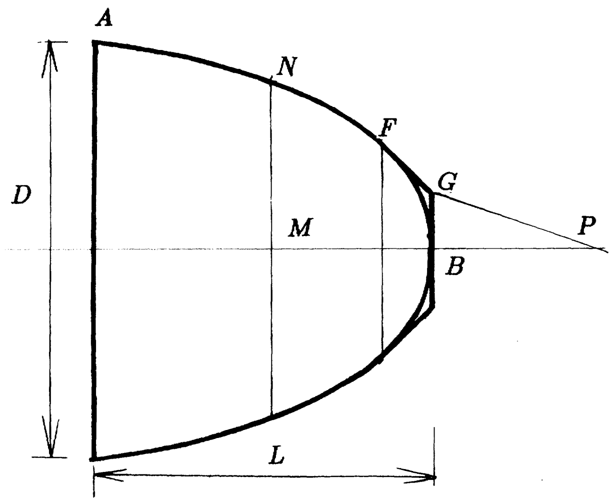


Aquests problemes són considerats i resolts en uns escrits del 1685 i apareixen publicats per primera vegada als *Principia* [New. 1] el 1687, encara que sense demostracions. També existeix un altre escrit del 1694 on torna a explicar el seu tractament per al benefici de David Gregory, que ho explicà a Oxford (Vegeu [Gol. 1]).

Primer considera Newton el problema [Gol. 1] d'un con truncat de base gran de diàmetre D i de distància L entre bases, movent-se al llarg de l'eix en la direcció de la base més petita. Per a minimitzar la resistència ha de resoldre un problema de mínims, com Fermat només ha de trobar quina és la resistència en funció del diàmetre de la base petita i minimitzar-la. Ho fa i obté així que la distancia CQ ha de ser igual a la QS, si Q és el punt de l'eix que dista el mateix de les dues bases.

A continuació d'aquest problema considera una figura oval i el cos de revolució generat, i diu que si, respectant la longitud, se substitueix la part del davant per un con truncat amb angle de 45^0 de manera que quedi tangent al cos a la base gran, llavors la resistència a l'avenç és més petita que la del cos original.

Esmenta que això pot ser útil per als constructors de naus però no dóna la prova de la propietat. Whiteside en fa una reconstrucció hipotètica [Gol. 1] utilitzant que quan la longitud tendeix a zero per al con truncat, l'angle A tendeix a 45^0. Fem notar, però, que tot i essent la resistència més petita que en el cos original, no és la mínima.



Ara Newton aborda el problema genuí del càlcul de variacions: trobar la forma de la corba DNFG, de manera que en girar al voltant de CB generi el cos al qual s'oposi la mínima resistència a l'avenç. Observem que pressuposa que el front del cos és pla: el disc generat en girar GB. Això és degut al fet que ja ha deixat clar que si fos arrodonit podria disminuir la resistència substituint-lo amb un con truncat a 45^0 (Newton utilitza la mateixa figura amb el con, encara que ara no suposa que FG sigui recte).

La solució és donada per la corba que compleix que

$$\frac{MN}{GP} = \frac{GP^3}{4BP \times GB^2},$$

on MN és l'ordenada genèrica i GP és paral.lela a la tangent a la corba a N.

Amb notació més moderna, això equival a l'equació diferencial

$$\frac{yq}{(1+q^2)^2} = \frac{y_0}{4},$$

si $GB = y_0$, $MN = y$, i q és el pendent de la normal exterior a N, és a dir $q = -1/y'$.

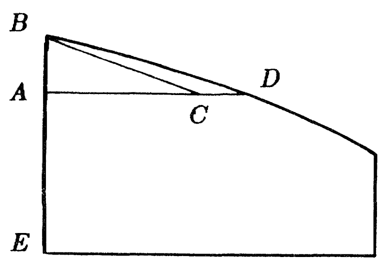
Observem també que aquesta solució compleix que per a $y = y_0$, $q = 1$, és a dir, inclinació de 45^0 a l'extrem del davant. A partir de la relació Newton obté l'expressió paramètrica de la corba en funció de q:

$$y = \frac{y_0(1+q^2)^2}{4q}, \qquad x = -\frac{y_0}{4}\left(q^2 + \frac{3}{4}q^4 - \ln q\right) + b,$$

essent x l'abscissa.

Resulta que, donats D y L com abans, només hi ha una y que vagi bé, i resulta ser la minimitzadora.

La derivació de la relació fonamental no és totalment clara. A l'escrit del 1685 considera la figura



on B és un punt genèric de la corba i D li és proper. Prenent $BA = a$, $AD = x$, $CD = o$, on se suposa que o és petit respecte de x, Newton diu que la diferència de resistències en substituir BD per BC, és proporcional a

$$\left(-\frac{1}{a^2+x^2} + \frac{1}{a^2+(x-o)^2}\right) \times BE,$$

la qual cosa se segueix de la llei del quadrat del cosinus. Operant resulta que aquesta expressió val

$$\frac{2xo - o^2}{a^4 + 2a^2x^2 + x^4} \times BE.$$

Newton fa ara el pas definitiu i diu que aquesta expressió és proporcional a o, independentment de quin punt B a la corba hem pres. De fet la fa igual a $2o/p^2$ amb p constant, i d'aquí obté immediatament

$$\frac{(a^2 + x^2)^2}{x} = p^2 y,$$

que és equivalent a la relació buscada si tenim en compte que $-x/a = q$.

El perquè pren p constant és justificat per Whiteside (vegeu [Gol.1], p. 24) dient que Newton deu haver considerat que en la corba minimitzadora, el moure un punt de la gràfica, tot mantenint la continuïtat, fa canviar la resistència en una quantitat d'ordre superior. Aquesta mena d'argument és el que utilitzaran més endavant els germans Bernoulli i Euler per a resoldre llurs problemes del càlcul de variacions.

Aquests problemes es posen de moda d'una manera ben assenyalada, amb un repte que llença Johann Bernoulli a la comunitat matemàtica, el juny de 1696. A l'*Acta Eruditorum* de Leipzig [Stä. 1] publica el problema següent : Si donem dos punts A i B en un pla vertical, trobeu la trajectòria AMB que un punt mòbil M ha de seguir per a anar de A a B en virtut del seu pes, en el temps més curt possible.

A continuació l'autor fa notar que la corba seguida no és una recta sinó una de ben coneguda dels geòmetres, i que mostrarà quina és aquesta corba en acabar l'any, si ningú més no ho fa abans.

El gener de 1697, publica a Gröningen, on treballava a l'època, una pròrroga per a resoldre el problema, fixant la nova data per a la Pasqua del mateix any. Aquest ajornament obeeix a un suggeriment de Leibniz, per tal de permetre als matemàtics francesos i italians, que rebrien les publicacions amb un cert retard, de participar-hi.

Pel maig de 1697 apareix a l'Acta Eruditorum la solució de Johann Bernoulli on bateja la corba com a "brachystochrona" i també una solució del seu germà Jakob i una nota de Leibniz anunciant que havia resolt el problema, però que essent la seva solució semblant a la dels Bernoulli, no la publicaria.

La solució de Leibniz es troba en una carta datada el 16 de juny de 1696, ([Gol.1], p. 35), una setmana després d'haver-li estat proposat el problema per Johann Bernoulli. Per resoldre'l es basa en el temps de caiguda d'un cos al llarg d'una trajectòria poligonal, aprofitant els resultats de Galileo sobre el temps esmerçat en caure per un pla inclinat. En minimitzar aquest temps obté l'equació diferencial de la corba cercada que ell anomena "tachystoptote" (caiguda ràpida). No esmenta, però que la corba sigui una cicloide.

Es diu que Newton va resoldre el problema el mateix dia que va llegir el repte de Johann Bernoulli ([And. 1], p. 100) Al *Phil. Trans.* Vol XIX (1695-97), pgs.

384-389, amb data 30 de gener de 1697 apareix el seu article anònimament, on diu que la cicloide dóna la solució i descriu com adaptar per homotècia una cicloide a les dades del problema. No diu res, però, sobre com ha arribat a la seva conclusió.

La solució presentada per Johann Bernoulli [Joh. 1] considera la trajectòria com la d'un raig de llum travessant un medi transparent en què la velocitat del raig va variant segons l'altura i què segons el principi de Fermat, segueix la trajectòria en què s'esmerça un temps mínim per a anar d'un punt a un altre. Aquesta velocitat serà proporcional a l'arrel quadrada de l'altura perduda, com és el cas, segons la llei de Galileo, d'un cos pesant que cau sense fricció seguint qualsevol corba. D'acord amb el treball de Fermat, que ja hem esmentat, el raig de llum es refracta en canviar de medi per tal de minimitzar el temps. El que fa Bernoulli és dividir el pla on s'ha d'efectuar el moviment en llesques horitzontals i adjudicar a cadascuna un índex de refracció inversament proporcional a la velocitat de la partícula a l'altura corresponent (suposada constant en tota la llesca). Obté d'aquesta manera com es refracta el raig en passar d'una llesca a l'altra: de manera que els sinus dels angles del raig amb la vertical són proporcionals a les velocitats en els medis respectius . Prenent una llesca de gruix infinitesimal obté l'equació diferencial

$$dy = \frac{t\,dx}{\sqrt{a^2 - t^2}},$$

on t és la velocitat, que depèn de l'altura perduda x. La distància horitzontal és y, i a és un factor de proporcionalitat.

En considerar el cas especial de la llei de Galileo en que $t = \sqrt{ax}$, obté l'equació

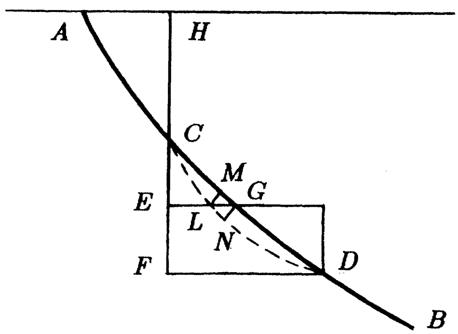
$$dy = dx\sqrt{\frac{x}{a - x}},$$

que fa veure que té cicloides per solucions.

La solució del seu germà Jakob, apareguda al mateix volum de l'*Acta Eruditorum* [Jak.1] utilitza per primera vegada d'una manera explícita el principi fonamental del càlcul de variacions: diu que, variant lleugerament la corba solució, la quantitat que es tracta de minimitzar canvia en un ordre de magnitud menor que com ho fa en variar una corba no minimitzadora. Ja hem esmentat que Newton deu haver seguit aquest criteri en cercar la forma que minimitza la resistència a l'avenç però no ho fa explícit. Aquest principi s'utilitza, des de Newton fins a Euler, junt amb la suposició que, si una corba és minimitzadora (o maximitzadora), llavors tota porció d'ella també ho és. D'aquesta manera s'aplica el principi de la no variació de la quantitat que s'ha de minimitzar al variar la corba, restringint-se a un tros d'aquesta. Moltes vegades es fa variar només un tros infinitesimal, i al expressar la constància del que es vol minimitzar, s'obtenen les equacions diferencials que ens resolen el problema. Notem que, el que vol dir que una porció és minimitzadora, és que si no varia el que es vol minimitzar al canviar aquest tros de corba, tampoc variarà sobre el total de la corba. Aquesta propietat és certa en molts cassos, en particular en els tractats per Newton, Johann i Jakob, però no en els primers problemes considerats per Euler, com el de la braquistocrona en medi resistent, on va invocar el principi per porcions de la corba, arribant a resultats falsos.

Tornem ara a la solució donada per Jakob que, segons éll mateix diu a un al- tre treball, no va trigar més de tres setmanes en obtenir.

Per a començar fa notar que, si tenim un arc unint els punts A i B que minimitza el temps de caiguda, llavors el temps esmerçat pel cos que cau a qualsevol subarc, diguem al CD de la figura, és també mínim, en el sentit que si substituim la corba AB per una altra en què hem canviat l'arc CD (de M a N, diguem), llavors el cos esmerçarà menys temps al tros CD passant per M que per N. D'altra manera l'arc AMB no seria minimitzador.



Suposa ara Jakob que CD és petit i pren E i F a la vertical de C, F a l'altura de D i E a la mitjana de les altures de C i D. Pren l'arc minimitzador per M i una alternativa propera per N. G i L són els punts a l'altura de E a cada arc. A l'arc per M minimitzador la variació del temps en canviar-lo a N es pot considerar zero (nosaltres diríem "en primera aproximació"). Diu ara Bernoulli que els temps esmerçats per a recórrer els arcs CG i CL són proporcionals a llurs seves longituds, ja que suposa que la velocitat és constant i proporcional a l'arrel quadrada de la pèrdua d'altura del cos, segons la llei de Galileo. Resulta així que les longituds i els temps estan relacionats per

$$\frac{CE}{CG-CL}=\frac{tCE}{tCG-tCL},$$

on t avantposat a un arc indica el temps esmerçat a recórrer-lo. Si LM és normal a CG, tenim que $CL=CM$, aproximadament (avui diríem que la diferència és d'un ordre superior de petitesa). Comparant triangles té que $MG/GL = EG/CG$ i amb això s'obté que

$$\frac{CE}{GL}=\frac{EG\cdot tCE}{CG\cdot(tCG-tCL)}.$$

Fent les mateixes consideracions entre les altures de E i de F, obté que

$$\frac{EF}{GL}=\frac{GJ\cdot t\,EF}{GD\cdot(t\,LD-t\,DG)}.$$

Com que hem pres F de manera que $CE=EF$, tenim, considerant que els temps per a M i N són aproximadament els mateixos (la propietat fonamental), i per tant igualant les dues expressions, que

$$\frac{EG\cdot t\,CE}{GL\cdot t\,EF}=\frac{CG}{GD}=\frac{EG}{\sqrt{HE}}:\frac{GJ}{\sqrt{HE}},$$

on hem utilitzat la llei de caiguda de Galileo.

Jakob Bernoulli es queda amb aquesta notació i mostra que això és l'equació d'una cicloide mitjançant una construcció geomètrica. En la nostra notació, si prenem $CG=ds$, $HC=x$, $EG=y$, on $ds^2=dx^2+dy^2$, ens queda

$$ds=\frac{a}{\sqrt{x}}dy,$$

o bé

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{x}{a^2-x}},$$

que reconeixem com una equació diferencial que té cicloides per solucions. Curiosament, doncs, la braquistòcrona és la mateixa corba que va trobar Huygens per a la tautòcrona, és a dir aquella sobre la qual un cos pesant oscil·la amb període independent de l'amplitud.

A continuació, al mateix article, és ara Jakob qui llença un repte al seu germà i li proposa uns quants problemes del que ell anomena teoria de màxims i mínims. Arriba fins i tot a oferir-li alguns diners, provinents d'una font anònima, per la seva solució en el curs de l'any.

El primer problema demana de trobar la corba per la qual un cos pesant ha de baixar sota l'acció de la gravetat i esmerçant un temps mínim per a anar d'un punt A a una recta vertical que no passa per A.

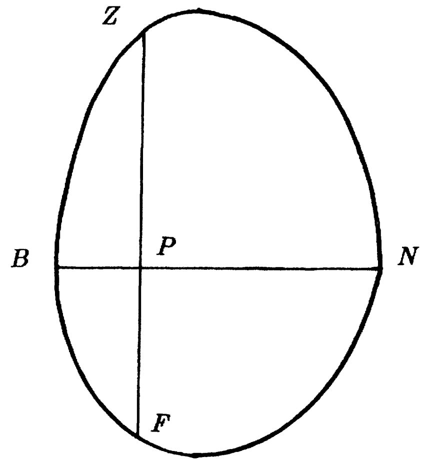
Declara a continuació que de la mateixa manera que ha resolt el problema de l'oligòcrona (braquistòcrona), es pot resoldre el mateix problema quan la caiguda al llarg de la corba es fa en un medi de resistència variable.

Planteja llavors uns problemes isoperimètrics, esmenta els resultats de Zenodor i Pappos a què ja ens hem referit, i observa que no se'n té cap demostració.

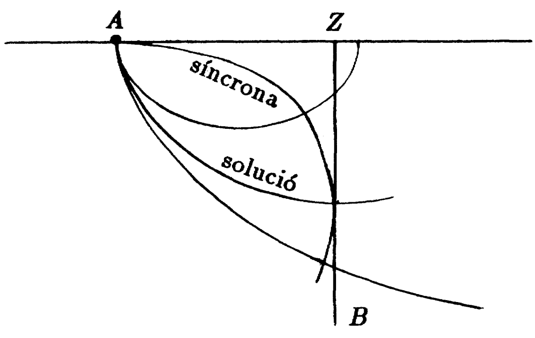
Es tracta de trobar d'entre totes las figures isoperimètriques sobre la base comuna BN, aquella donada per la corba BFN que no es demana que contingui l'àrea màxima, sinò que ho faci la corba BZN, l'ordenada PZ de la qual és proporcional a una potència o arrel del segment PF o de l'arc BF.

Amb aquest nou repte s'obre tot un període de bescanvi de problemes i solucions, que va conformant tot un mètode i un catàleg d'exemples que d'alguna manera culminen amb el *Methodus Inveniendi* d'Euler.

El mes següent Johann respon que no li ha costat res de resoldre els problemes i d'anar més enllà i proposa una solució més general del problema isoperimètric del seu germà en què PZ és una funció arbitrària de PF. També diu que pot trobar la corba de caiguda més ràpida per a arribar no tan sols a una vertical donada, sino a qualsevol corba. Envia les seves proves a Leibniz perquè jutgi.



Al *Journal des Savants* li publiquen un treball en què dóna la solució, sense proves, del problema isoperimètric del seu germà [Joh. 2] quan PZ és una potència n de PF, però no quan PZ depèn de la longitud de l'arc BF. El problema d'arribar d'un punt a una vertical donada, el resol utilitzant un resultat del seu article anterior, en què veu que les corbes síncrones, és a dir aquelles formades pels punts que es poden atènyer en el mateix temps, seguint cicloides des del punt A és normal a les cicloides.

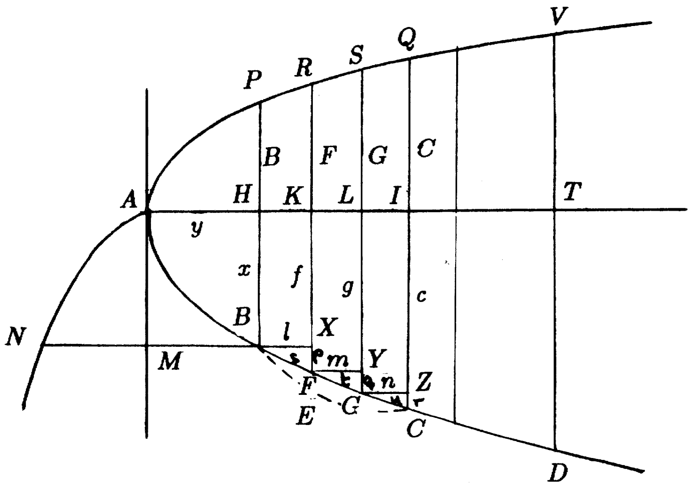


La solució és la cicloide que va al punt de tangència d'una síncrona amb la vertical donada (o d'una altra corba, si aquest és el cas), i que per tant és, de totes les cicloides que comencen a A, aquella que arriba normalment (perpendicularment) a la corba final, la que és solució.

Després d'una abundosa correspondència, Jakob publica el 1700 a l'*Acta Eruditorum* [Jak. 2] i amb més extensió el 1701 [Jak. 3] una anàlisi del problema isoperimètric que ell mateix ha proposat.

En aquest darrer article, Jakob ataca els problemes permetent que variïn de posició dos punts mentre la longitud de l'arc infinitesimal és constant, a diferència del que s'havia fet fins a la data, que era tractar d'obtenir les condicions diferencials en canviar només un punt.

Pel primer problema, on les ordenades de la corba sota la qual es maximitza l'àrea són una funció donada de les ordenades de la corba de longitud fixada, el que Jakob fa és el següent:



Considera que l'arc $BFGC$ es manté de longitud constant, quan F i G varien amunt o avall al llarg d'una vertical. D'aquestes condicions obté que

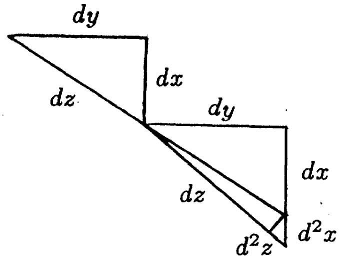
$$-\frac{df}{dg} = \frac{rst - qsu}{qsu - ptu}$$

(vegeu [Gol. 1], p. 51-58 per a detalls).

Per posar aquesta condició en termes de diferencials escriu

$$\begin{array}{lll} l = m = n = dy, & & \\ s = dz, & t = dz + d^2z, & u = dz + 2d^2z + d^3z \\ p = dx, & q = dx + d^2x, & r = dx + 2d^2x + d^3x. \end{array}$$

Aquestes expressions s'obtenen considerant els mateixos increments de y, dy, entre els puntos considerats, i fent servir la semblança de triangles quan els increments són molt petits. La figura següent, que s'ha de complicar amb un altre punt per a obtenir la diferencial de tercer ordre, dóna la clau de les expressions, quan es desprecien els termes petits d'ordre superior.



Aquí d^2x i d^2z són els increments de dx i dz en passar d'un punt al següent. En termes de diferencials, resulta que l'expressió queda, despreciant els termes d'ordre superior,

$$-\frac{df}{dg} = \frac{dz^2 d^2x + dz^2 d^3x - dx(d^2x)^2}{dz^2 d^2x + 2dx(d^2x)^2}.$$

Aquí es veu clar per a què es necessiten dos punts variables, F i G, mentre es mantenen fixes B i C, car només variant un punt no hi ha manera de mantenir constant la longitud de l'arc BEC.

Considera ara la corba APV que té les ordenades determinades per la corba "arbitrària" AN a partir de les ordenades de la corba $ABCD$, de manera que MN sigui igual a HP. Es tracta de trobar d'entre totes les corbes $ABCD$ que tenen una longitud determinada i A i D fixats, aquella que fa que l'àrea sota APV sigui la més gran possible.

En aquest punt utilitza el principi que tot subarc de APV ha de ser extrem, és a dir, que si APV és la corba cercada, llavors en canviar infinitesimalment un petit arc, no s'alternarà l'àrea sota la corba. Si deixa fix el punt P, li resulta doncs, en canviar R i S al llarg de la vertical, que $lB + lF + lG$ s'ha de mantenir constant (noteu que B, F i G, ara representen les ordenades de P, R i S, respectivament), que equival a dir que $dF + dG = 0$. Com que F i G són donades per la mateixa funció de gràfica AN, resulta que

$$G(g) = F(f) + F'(f)\,df, \text{on } g = f + df.$$

Per tant la condició queda $F'(f)df + G'(g)dg = 0$, i d'aquí

$$-\frac{df}{dg} = \frac{F'(f) + F''(f)\,df}{F'(f)}.$$

Fent servir ara l'expressió per a df/dg obtinguda a partir de la condició isoperimètrica, queda

$$-\frac{df}{dg} = \frac{dz^2 d^2x + dz^2 d^3x - dx(d^2x)^2}{dz^2 d^2x + 2dx(d^2x)^2} \approx \frac{h + dh}{h},$$

on s'ha pres $h = aF'(F)$, que s'iguala a $af'(x)$, el canviar f per x, essent a arbitrària.

El tractament d'aquesta equació és complicat, i el que fa Jakob és utilitzar anàlisi dimensional (la llei d'homogeneïtat) i comparar amb equacions amb paràmetres, per a obtenir l'equació

$$\frac{d^2x}{dy^2} \Bigg/ h\left(\frac{dz}{dy}\right)^3 = \frac{\pm 1}{a^2},$$

d'on troba que

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\pm 1}{b-p}\sqrt{a^2-(b-p)^2},$$

on p és la funció de x donada per la corba AN, i b és una constant d'integració.

Pel segon problema, on les ordenades de la funció sota la gràfica de la qual l'àrea es maximitza són funció de la longitud de l'arc sobre la corba fixada, Jakob troba d'una manera semblant l'equació diferencial de la corba maximitzadora.

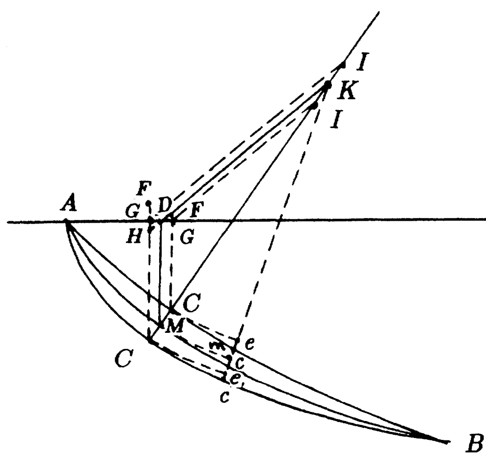
Finalment, Jakob Bernoulli resol en aquest article el problema de la catenària, que també havia estat esmentat juntament amb els altres al repte al seu germà. Es tracta de trobar la forma d'una corba de longitud donada (cadena pesant), que tingui el centre de gravetat el més baix possible quan el seus extrems estan fixats. Per resoldre'l torna a considerar la mateixa figura, però ara, per comptes de moure F i G al llarg d'una vertical, els mou de manera de mantenir les distàncies BF, FG i GZ constants. Obté d'aquesta manera una condició isoperimètrica semblant a la que ha fet servir als problemes anteriors. Ara considera el pes de la corba proporcional a la longitud. Pren el moment de la massa respecte a l'eix AT i fa que la variació (és a dir la diferencial) d'aquesta quantitat sigui zero quan altera localment isoperimètricament la corba. A partir d'això arriba, utilitzant tècniques semblants a les que ha fet servir en els casos anteriors, a l'equació diferencial de la catenària.

L'article de Jakob és difícil de llegir i representa un salt en la complicació dels problemes de matemàtiques. Manca en ell la claredat que ara exigiríem en la utilització del càlcul infinitesimal i en el tractament de les equacions diferencials. Obre, però, les portes a la resolució dels problemes isoperimètrics. El seu germà Johann adopta el seu mètode, i el 1718 publica un article, [Joh. 3], on torna a considerar els problemes de l'article del seu germà que acabem de repassar. Ho fa d'una manera bastant més simplificada, encara que no tant com el títol suggereix. Troba les relacions diferencials degudes a la conservació de la longitud movent dos punts de la corba, d'una manera més ràpida que Johann, però ve a obtenir el mateix. Té en compte les condicions de fer la corba extremal com ja de costum: fent zero la variació de l'àrea en variar la corba, en despreciar termes d'ordre superior de petitesa. Obté així, de nou, les equacions diferencials, tant per als problemes en què la corba que tanca l'àrea màxima té les ordenades com en funció de la longitud de l'àrea d'aquesta. De la mateixa manera, i com son germà, resol el problema de la catenària.

Aquest article conté també, al final, el que Johann anomena el seu mètode directe per a la resolució del problema de la braquistòcrona. Segons Johann, ja el tenia quan va publicar el mètode que ell anomena indirecte el 1697, fent servir el principi de Fermat. A més resulta que aquest mètode dóna la primera demostració d'una condició suficient a l'incipient càlcul de variacions. Amb les pròpies paraules de Johann:

> *"... aquest mètode també em dóna una demostració sintética que amb facilitat extraordinària i agradable mostra que aquesta cicloide és efectivament la corba desitjada de descens més ràpid".*

El que fa Johann és considerar la figura següent:



Considera AB la línia de caiguda de la partícula i pren un punt M sobre ella. Pren llavors MK, el radi de curvatura en aquest punt. Cerca ara en quina raó es troben els segments MN i NK quan el temps esmerçat en la caiguda al llarg dels arcs concèntrics Mm, Cc del mateix angle (petit) és mínim, sempre considerant que la caiguda ha començat al punt A. Si r és la raó de MD a MN, i s la de Mm a MK (aquesta infinitesimal), resulta que $MR = s(a+x)$, on $a = NK$ i $x = MN$. Considerant ara que la velocitat al punt inicial de l'arc és proporcional a l'arrel quadrada del desnivell respecte de A i que l'arc és recorregut amb aquesta velocitat, obté que ha d'escollir x de manera de minimitzar el temps que la particula triga a recórrer l'arc, que és proporcional a

$$\frac{n(x+a)}{\sqrt{m}\cdot\sqrt{x}}.$$

Si derivem respecte de x i igualem a zero, obtenim que la condició és $x = a$.

Ara bé, la corba que té la propietat que el radi de curvatura és bisectat per la horitzontal AL és precisament la cicloide que passa per A i B, generada per un punt d'un cercle que rodola sense lliscar sobre AL, com ja era conegut a partir de l'estudi de la cicloide que fa Huygens el 1673 al *Horologium Oscillatorium.* Fins ara només ha provat que, de tots els arcs concèntrics subtendint el mateix angle petit, aquell que té el radi de curvatura com el de la cicloide és el que minimitza el temps de caiguda al llarg d'ell, però d'aquí no sembla clar que, globalment, la cicloide minimitzi. Passa ara a comparar el temps de caiguda al llarg de la cicloide AMB i d'altres corbes ACB unint A i B (en dibuixa dos exemples, l'un per dins i l'altre per fora).

Considera una altra vegada l'angle amb centre K que subtendeix l'arc Mm, i que talla l'arc Cc de la corba ACB. (c no és necessàriament e, que dista de K el mateix que C). Traça ara CG vertical, amb G a AL, i pren paral·leles GI a DK. Troba la intersecció H de DK amb aquestes rectes (o llurs prolongacions). Pren ara F de manera que $MD/CH = CH/CF$. Com que $MN = NK$, tenim que $CN = NI$. D'altra banda $CN^2 + NK^2 > 2CN{\cdot}NK$, i per tant $CK^2 > CI{\cdot}MK$. També $MK/CK = CH/C$, $CK/CI = CH/CG$. Per tant $CH/CF < CH/CG$ i d'aquí $CG < CF$.

Ara veu que el temps de caiguda al llarg de Mm és més curt que al llarg de Cc d'una manera explícita (encara que ja ho ha demostrat abans en calcular la x que minimitzava, però ara ho fa sense arguments d'infinitesimals). Per a fer-ho veu que la relació dels temps $Mm/\sqrt{MD}$ i $Ce/\sqrt{CG}$ val $\sqrt{CG}/\sqrt{CF}$, que val menys que 1. Explica ara Johann que el temps és encara més gran al llarg de Cc, perquè és la hipotenusa del triangle Cec. Per tant el temps al llarg de la cicloide és el mínim.

Després d'aquests treballs hi ha un període en que no es fan grans avenços en el càlcul de variacions. Els problemes que es plantegen són massa difícils, i necessiten un cert període de gestació. Trobem en treball de Brook Taylor [Tay. 1] on tracta els mateixos problemes isoperimètrics tractats pels Bernoulli, però amb una notació diferent, que després seria adoptada parcialment per Euler. Per altra banda, Jakob Hermann, que havia estat un deixeble de Jakob Bernoulli a Basel, va el 1727 a Petersburg, on hi ha Leonhard Euler, i creu resoldre un problema que aquest darrer havia considerat l'any anterior: el de la braquistòcrona en un medi resistent. Resulta, però, que la solució no és correcta, com li escriu el mateix Euler el 1731 al tornar Hermann a Basel. El mateix Euler es pren llavors un gran interès en el problema i de fet, en tota una sèrie de problemes en el que afegeix condicions col·laterals a l'expressió que la corba ha de minimitzar.

Aquest interès d'Euler culmina, al cap d'un treball que va del 1932 fins al 1943, en el seu famós *Methodus Inveniendi Lineas Curvas* ... [Eul. 1]. En aquest tractat el càlcul de variacions esdevè metòdic i es dóna una gran quantitat d'exemples d'aplicació d'aquests mètodes.

El procès de gestació del Methodus no és senzill. Abans de tenir-lo enllestit, Euler escriu dos treballs, l'un el 1932 [Eul. 2] i l'altre el 1941 [Eul. 3], que són publicats pocs anys més tard. En aquests treballs Euler es proposa molts problemes nous on apareixen, a més de les condicions isoperimètriques, les condicions col·laterals esmentades abans, és a dir, que l'expressió integral que s'ha de minimitzar conté variables que són al seu torn expressions integrals (com la longitud a partir d'un extrem), o inclus solucions implícites d'equacions diferencials. Resulta, però, que la majoria dels resultats d'aquests treballs no són verdaders, perquè no s'havia tingut compte de controlar les variacions de les corbes de manera de conservar la seva longitud total. Al final del segon treball s'adona del seu error i, sense ni tan sols eliminar els errors del que ja estava escrit, torna a considerar un dels problemes anteriors, però ara correctament. Per més detalls sobre aquestes questions recomenem llegir la introducció de Carathéodory a l'*Opera Omnia* d'Euler [Car. 1].

El Methodus té sis capítols i dos additaments. En els primers dos capítols tracta de trobar corbes $y(x)$ de manera que minimitzin expressions de la forma $J = \int_a^b Z(x, y, y', y'', \cdots)dx$. Substituïnt la corba per una poligonal, és a dir, considerant els valors de y, y', etc. en un nombre discret de punts, fent variar l'ordenada d'un dels punts i igualant els increments petits amb les diferencials en primera aproximació, arriba a la seva ben coneguda condició necessària: l'equació d'Euler

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} = 0\,,$$

si considerem que Z depèn de x, y, $p = y', q = p'$ i $r = q'$, per exemple, de manera de tenir

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr.$$

En el Capítol III és on considera el cas de condicions col·laterals, en què **Z** depèn també d'una expressió integral de l'estil $\int_a^x g(x, y, y', y'', \cdots)dx$. Amb això pot tractar el cas en que Z depèn de la longitud de la corba, que correspon a l'expressió $s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + y'^2}dx$. A aquest capítol resòl el problema de la braquistòcrona en medi de resistència variable.

Al Capítol IV considera el paper que juguen les coordenades escollides i en particular considera problemes en coordenades polars i estudia condicions d'invariància de les equacions.

El Capítol V és dedicat als problemes isoperimètrics, on, seguint el mètode de Jakob Bernouilli, ha de variar les coordenades de dos punts, per tal de respectar la invariància de la longitud. Al Capítol VI segueix estudiant els problemes isoperimètrics, però ara amb més condicions donades per integrals que han de romandre constants. Es troba, però, amb dificultats, i les demostracions no són correctes.

El *Methodus* és acompanyat de dos additaments, el primer tracta sobre la forma que pren una barra elàstica sota la acció de les forces que actuen sobre ella. És un magnífic exemple de l'aplicació dels seus mètodes: seguint una suggerència de Daniel Bernoulli troba la corba que minimitza l'energia potencial, que és donada per una integral on entra el radi de curvatura de la corba. Per més detalls sobre aquest additament es pot veure [Per. 1].

Per últim l'Additamentum II conté la primera versió del principi de mínima acció, atribuït a Maupertui's, però que segons Carathéodory és atribuïble a Euler.

No podem entrar en detalls sobre els aspectes tècnics de l'obra d'Euler. Referim el lector interessat a les diferentes versions del *Methodus*, el qual, però, només es troba complet en la versió llatina original. Un resum es troba a [Gol. 1]. En aquests moments la Universitat Autònoma de Barcelona, n'està preparant ara una traducció comentada, a càrrec del prof. Albert Dou.

Els mètodes d'Euler són essencialment els mateixos mètodes "geomètrics" de Newton i els Bernoulli: encara es divideixen les abscises en trossos petits, i, basant-se en els dibuixos es troben les diferents relacions entre les diferencials que ens forniran l'equació que la corba ha de complir.

L'any 1755 Ludovico de La Grange Tournier va conseguir despullar el càlcul de variacions del seu embalum geomètric i va obtenir una teoria analítica. Per això va introduir el concepte de "variació " d'una funció, que és una mena de diferencial, però actuant directament en les funcions. Es tracta del principi de l'anàlisi funcional: una funció és un punt d'un espai, que es pot variar sumant-li quantitats petites, que en aquest cas són funcions.

No podem entrar en els detalls del treball de Lagrange, que ja s'assembla força a la presentació del càlcul de variacions que trobem en els textos universitaris d'avui. Diguem però que Euler, impresionat, bateja amb el nom de "càlcul de variacions" la ciència naixent.

Referències

[And. 1] Andrade, E. N. da C. *1954, "Sir Isaac Newton, His life and Work.* London.

[Arq. 1] Arquimedes de Siracusa. "Περί σφαίρας καί χυλίνδρου" Traduït com *"Sobre la esfera y el cilindro" a "Científicos Griegos"*. Aguilar, Madrid. *1970.*

[Car. 1] Carathéodory, Constantin. *1952, Einführung in Eulers arbeiten über Variationsrechnung" a "Leonhardi Euleri Opera Omnia",* series prima, volumen XXIV, Füssli, Berna.

[Eul. 1] Euler, Leonhard. *1744, "Methodus inveniendi lineas curvas maximive minimive propietate gaudente sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepto"*. Marcum-Michaelum Bousquet et Socius. Lausanne et Geneve. Opera Omnia E65.

[Eul. 2] Euler, Leonhard. *1738, "Problematis isoperimetrici in latissimo senso accepti solutio generalis"*. Opera Omnia, E27.

[Eul. 3] Euler, Leonhard. *1741, "Curvarum maximi minimive propietate gaudentium inventio nova et facilis"*. Opera Omnia, E56.

[Fer. 1] Fermat, Pierre. *1629, "Methodus ad disquirendam maximam et mínimam"*. Oeuvres de Fermat, París, 1891-1912.

[Gal. 1] Galileo Galilei. *1638, " Discorsi e dimostrazioni intorno a due nove scienze"*. Leiden.

[Gol. 1] Goldstine, Hermann H. *1980, "A history of the calculus of variations from the 17th through the 19th century"*. Springer-Verlag, New York.

[Jak. 1] Bernoulli, Jakob. *1697, "Jacobi Bernoulli solutio problematum fraternorum"*. Acta Erud., Leipzig.

[Jak. 2] Bernoulli, Jakob. *1700, "Jacobi Bernoulli solutio propia problematis isoperimetrici"*. Act. Erud., Leipzig.

[Jak. 3] Bernoulli, Jakob. *1701, "Analysis magni problematis isoperimetrici"*. Act. Erud., Leipzig.

[Joh. 1] Bernoulli, Johann. *1697, "Curvatura radii in diaphanis non uniformibus solutioque problematis a se in Actis 1696, p.269, propositi, de invenienda linea brachystochrona, id est, in qua grave e dato puncto ad datum punctum brevissimo tempore decurvit; et de curva synchrona, seu radiorum unda, construenda,"* Act. Erud., Leipzig.

[Joh. 2] Bernoulli, Johann. *1706, "Solution du problème proposé par M. Jacques Bernoulli, dans les Actes de Leipsic du mois de May de l'année 1697; trouvée en deux manières par M. Jean Bernoulli son Frère, et communiquée à M. Leibnitz au mois de Juin 1698"*. Mém. Acad. Roy. Sci., París.

[Joh. 3] Bernoulli, Johann. *1718, "Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problèmes sur des isoperimetrés; avec une nouvelle méthode courte et facile de les resoudre sans calcul, laquelle s'étend aussi a d'autres problèmes qui ont rapport à ceux-là"*. Mém. Acad. Roy. Sci., París.

[New. 1] Newton, Isaac. *1687, "Philosophiae naturalis principia mathematica"*. London.

[Pap. 1] Pappos d'Alexandria. "Συναγωγή μαθηματική ", traduït com *"Colección matemática" a "Clásicos griegos"*. Aguilar, Madrid. *1970.*

[Per. 1] Perelló, Carles. *1984, "Bombament de columnes i disseny de turbines hidràuliques amb L. Euler"*. Butll. Soc. Cat. Ciència, Segona època, Vol. II, no. 4.

[Stä. 1] Stäckel. P. *1894, "Abhandlungen über Variations-Rechnung"*. Leipzig.

[Tay. 1] Taylor, Brooks. *1715, "Methodus incrementorum directa et inversa".* London.

Departament de Matemàtiques U.A.B.