Approximation par Fonctions Holomorphes dans les Espaces L^p, Lip α *et* BMO

ANDRÉ BOIVIN ET JOAN VERDERA

ABSTRACT. Vitushkin–type theorems on the approximation by holomorphic functions in the complex plane are established. More precisely, let F be a closed (or measurable) subset of the complex plane and let B be any one of the following spaces of functions defined on F: $L^p(F)$, $1 < p < \infty$, $\mathrm{Lip}_\alpha(F)$, $0 < \alpha < 1$, $\mathrm{BMO}(F)$, or $C^m(F)$. Let A_B be the set of those functions in B which are holomorphic on the interior of F. We characterize, in terms of appropriate capacities, those sets F for which every function in A_B can be approximated, in the B–norm on F, by functions holomorphic in a neighbourhood of F. Our argument is along the lines of the original approximation scheme of A. G. Vitushkin and generalizes, to unbounded sets F, results of many authors, including T. Bagby, P. Lindberg, A. G. O'Farrell and J. Verdera. It should be noted that similar results for the uniform norm have been known for some time.

0. Introduction. Soit Ω un sous-ensemble ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$ et F un sous-ensemble relativement fermé de Ω. Notons respectivement par $C(F)$, $\mathrm{Hol}(F)$, et $\mathrm{Mer}(F)$ l'ensemble des fonction continues sur F, holomorphes sur F et méromorphes sur $\mathbb{C}$ sans pôles sur F. De plus soit $A(F)$ l'ensemble des fonctions continues sur F et holomorphes sur l'intérieur F^0 de F, et $M(F)$ l'ensemble des fonctions $f \in C(F)$ qui peuvent être approcher uniformément sur F par des fonctions dans $\mathrm{Mer}(F)$. Nous avons toujours l'inclusion $M(F) \subseteq A(F)$.

Nous voudrions décrire les ensembles F pour lesquels nous obtenons l'égalité $M(F) = A(F)$. Si pour un sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{C}$, $\alpha(E)$ dénote la capacité analytique continue de E (voir Section 1.2), nous avons alors.

Indiana University Mathematics Journal ©, Vol. 40, No. 2 (1991)

Théorème (Nersesjan 1972) [13], [19], [7]. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *ouvert et* $F \subset \Omega$ *relativement fermé. Alors les énoncés suivantes sont équivalents:*

(1) $M(F) = A(F)$.
(2) $\alpha(\Delta \setminus F^0) = \alpha(\Delta \setminus F)$ *pour tout disque ouvert* Δ, $\Delta \subset \Omega$.
(3) *Il existe des constantes* $r \geq 1$ *et* $C > 0$ *telles que* $\alpha(\Delta \setminus F^0) \leq C\alpha(r\Delta \setminus F)$, *pour tout disque ouvert* $\Delta \subset \Omega$, $\bar{\Delta} \cap F \neq \emptyset$.

Si F est compact, nous retrouvons le théorème bien connu de A.G. Vitushkin [24], [5, Chap VIII] sur l'approximation par fonctions rationnelles.

Adaptant le schème d'approximation de A.G. Vitushkin tel que modifié par A.M. Davie [3], plusieurs auteurs ont par la suite caractérisé les ensembles compacts d'approximation rationnelle dans les normes C^m, Lip α, L^p et BMO [1], [11], [16], [17], [22], [23]. Le but de notre article est d'obtenir pour ces normes des résultats semblables à ceux de A.H. Nersesjan, c'est-à-dire sur des ensembles non-bornés.

Les deux principales difficultés résident dans le choix d'un 'bon' recouvrement de Ω et dans la construction de fonctions dont le deuxième coefficient dans le développement en série de Taylor au point à l'infini est le même que celui de certaines fonctions dites localisées. Dans le premier cas, suivant une idée originale de V.H. Hadjiiski [7], nous utiliserons un lemme de Davie (voir Section 1.6) et dans le second, nous nous servirons, comme dans les articles de P. Lindberg [11] et J. Verdera [23], de la transformée de Beurling (voir Section 1.4 et 1.7). Comme pour le cas compact, nous utiliserons des capacités adaptées à chacun des espaces Lip α, BMO et L^p (voir Section 1.2) et les résultats seront énoncés soit en termes de capacités, soit en termes de contenus de Hausdorff (voir Section 1.3).

1. Définitions et résultats préliminaires.

1.1 Espaces de fonctions.

$\triangleright$ *1.1A.* Soit Ω un sous-ensemble ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$, F un sous-ensemble relativement fermé de Ω et $f : F \to \mathbb{C}$ une fonction bornée sur F. Le module de continuité ω_f est définie comme suit:

$$\omega_f(r) = \sup \{|f(x) - f(y)| : x,\, y \in F,\, |x - y| \leq r\}, \qquad r \geq 0$$

ω_f est une fonction non décroissante, $\omega(0) = 0$ et f est uniformément continue sur F si et seulement si ω_f est continue à zéro. Posons

$$\|f\|_{\infty,F} = \sup \{|f(z)| : z \in F\}$$

et pour $0 < \alpha < 1$, définissons

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\alpha,F} &= \sup\{r^{-\alpha}\omega_f(r) : \quad r > 0\} \\
\mathrm{Lip}(\alpha,F) &= \{f : \|f\|_{\alpha,F} < \infty\} \\
\mathrm{lip}(\alpha,F) &= \{f \in \mathrm{Lip}(\alpha,F) : r^{-\alpha}\omega_f(r) \to 0 \text{ lorsque } r \to 0^+\} \\
\mathrm{lip}_{\mathrm{loc}}(\alpha,F) &= \{f : f \in \mathrm{lip}(\alpha,K), \text{ pour tout compact } K \subset F\} \\
A_\alpha(F) &= \left\{f \in \mathrm{lip}_{\mathrm{loc}}(\alpha,F) : \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0 \text{ sur l'intérieur } F^0 \text{ de } F\right\} \\
H_\alpha(F) &= \{f \in \mathrm{lip}_{\mathrm{loc}}(\alpha,F) : \exists (f_n),\ f_n \in \mathrm{Hol}(F), \text{ tel que} \\
&\qquad \|f_n - f\|_{\infty,F} + \|f_n - f\|_{\alpha,F} \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty\}.
\end{aligned}$$

▷ *1.1B.* Soit $m \in \mathbb{R}$, $m \geq 1$. Posons $\alpha = m - [m]$ où $[m]$ dénote le plus grand entier qui soit plus petit ou égal à m, et définissons $C^m(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ dont les dérivées jusqu'à l'ordre $[m]$ sont continues, et dont les dérivées d'ordre $[m]$ appartiennent à l'espace $\mathrm{lip}(\alpha,\Omega)$ si $\alpha \neq 0$. Notons par ∇f le gradient de f et définissons

$$\begin{aligned}
H_m(F) = \{f \in C^m(\Omega) : \exists (f_n),\ f_n \in \mathrm{Hol}(F), \text{ tel que} \\
\lim_{n\to\infty} \|\nabla^k f_n - \nabla^k f\|_{\infty,f} = 0,\ 0 \leq k \leq [m], \text{ et} \\
\lim_{n\to\infty} \|\nabla^{[m]} f_n - \nabla^{[m]} f\|_{\alpha,F} = 0 \text{ si } \alpha \neq 0\}.
\end{aligned}$$

De plus $C_0^m(\Omega)$ dénotera l'espace des fonctions $f \in C^m(\mathbb{C})$ dont le support est un sous-ensemble compact de Ω

▷ *1.1C.* Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$ et $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$. L'oscillation moyenne de f sur un disque Δ est donnée par

$$M(f,\Delta) = \frac{1}{|\Delta|}\int_\Delta |f(z) - f_\Delta|\, d\lambda(z)$$

où $|\Delta| = \lambda(\Delta)$ est l'aire de Δ et $f_\Delta = (\frac{1}{|\Delta|})\int_\Delta f(z)\, d\lambda(z)$ est la valeur moyenne de f sur Δ. Nous écrivons $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{C})$ et disons que f est d'oscillation moyenne bornée si

$$\|f\|_0 = \sup_\Delta M(f,\Delta) < \infty$$

le supremum étant sur l'ensemble de tous les disques Δ. $\|\cdot\|_0$ est une semi-norme (complète) sur $\mathrm{BMO}(\mathbb{C})$ qui ne s'annule que pour les constantes. Pour $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{C})$ et $\delta > 0$, posons

$$M_f(\delta) = \sup\{M(f,\Delta) : \text{rayon de } \Delta \leq \delta\}.$$

L'espace VMO($\mathbb{C}$) est l'ensemble des fonctions $f \in$ BMO($\mathbb{C}$) qui satisfont $M_f(\delta) \to 0$ lorsque $\delta \to 0^+$. Si F est un sous-ensemble mesurable (de Lebesgue) de $\mathbb{C}$, nous définissons

$$\mathrm{BMO}(F) = \{f|_F : f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{C})\}$$

et pour $f \in$ BMO(F), nous définissons

$$\|f\|_{0,F} = \inf\{\|g\|_0 : g \in \mathrm{BMO}(\mathbb{C}) \text{ et } g = f \text{ presque partout } (\lambda) \text{ sur } F\}.$$

$\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}(F)$, respectivement $\mathrm{VMO}_{\mathrm{loc}}(F)$, consiste en l'espace des fonctions f telles que $f \in$ BMO(E), respectivement $f \in$ VMO(E), pour chaque sous-ensemble mesurable borné $E \subset F$. De plus, posons

$$A_0(F) = \left\{f \in \mathrm{VMO}_{\mathrm{loc}}(F) : \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0 \text{ sur } F^0\right\}$$

$$H_0(F) = \{f \in \mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}(f) : \exists (f_n),\ f_n \text{ holomorphe au voisinage de } F \text{ et}$$
$$\|f - f_n\|_{0,F} \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty\}.$$

▷ *1.1D.* De même, pour chaque fonction $f \in L^p(\Omega, \lambda)$, $1 < p < \infty$, nous définissons

$$\|f\|_{p,F} = \left(\int_F |f|^p \, d\lambda\right)^{1/p}$$

$$A_p(F) = \left\{f \in L^p_{\mathrm{loc}}(F) : \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0 \text{ sur } F^0\right\}$$

$$H_p(F) = \{f \in L^p_{\mathrm{loc}}(F) : \exists (f_n),\ f_n \text{ holomorphe au voisinage de } f \text{ et}$$
$$\|f - f_n\|_{p,F} \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty\}.$$

Nous utiliserons aussi les notations suivantes:

$$\Delta = \Delta(z, \delta) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < \delta\}$$

$$\sigma\Delta = \Delta(z, \sigma\delta) \quad (\sigma > 0)$$

$$\mathrm{osc}\,(f, E) = \sup\{|f(z) - f(w)| : z, w \in E\}$$

$$S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

De plus C dénotera une constante positive, indépendante des variables appropriées, et qui changera selon les circonstances.

1.2 Capacités. Étant donné un sous-ensemble compact K de $\mathbb{C}$, nous dirons qu'une fonction f est K–admissible si f est holomorphe sur $S^2 \setminus K$ et prend la valeur zéro au point à l'infini $\big(f(\infty) = 0\big)$. La capacité analytique $\gamma_B(K)$ de K par rapport à une classe B de fonctions K–admissible est définie comme suit

$$\gamma_B(K) = \sup_{f \in B} \left\{ \lim_{z \to \infty} |z \cdot f(z)| \right\} = \sup_{f \in B} |f'(\infty)|.$$

Pour un ensemble borné quelconque E, on définit

$$\gamma_B(E) = \sup\{\gamma_B(K);\ K \subset E,\ K \text{ compact }\}$$

et

$$\gamma_B^*(E) = \inf\{\gamma_B(U);\ U \supset E,\ U \text{ ouvert }\}.$$

Un ensemble E ayant la propriété $\gamma_B(E) = \gamma_B^*(E)$ sera appelé B–capacitable.

La classe des fonctions K–admissibles qui se trouvent aussi être dans la boule unité des fonctions boréliennes (respectivement: continues) sur S^2 definit la capacité analytique (respectivement: la capacité analytique dite continue) dénotée simplement selon l'usage γ (respectivement: α) (voir l'introduction).

Si B est la classe des fonctions K–admissibles dans la boule unité d'un des espaces suivants: $\mathrm{Lip}(\alpha, \mathbb{C})$, $\mathrm{BMO}(\mathbb{C})$, $L^p(\Omega)$ (Ω borné si $1 < p \leq 2$), alors la capacité γ_B ainsi définie sera respectivement denotée par γ_α, γ_0 et $\gamma_p(\cdot, \Omega)$ et si B est dans la boule unité de $\mathrm{lip}(\alpha, \mathbb{C})$ ou $\mathrm{VMO}(\mathbb{C})$, nous utiliserons la notation α_α ou α_0 respectivement. Les capacités γ, α, γ_α, α_α, γ_0, α_0 et $\gamma_p(\cdot, \Omega)$ ont été étudiées dans [5], [6], [24], [12], [13], [14], [23], [8], [9], [11].

1.3 Contenus de Hausdorff. Soit $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ une fonction continue et croissante telle que $h(0) = 0$, et soit E un sous-ensemble quelconque du plan complexe. Le contenu du Hausdorff $M_h(E)$ est défini par

$$M_h(E) = \inf \sum_j h\ (\mathrm{diam}\ \Delta_j)$$

où l'infimum est sur l'ensemble des recouvrements dénombrables de E par des disques (ouverts ou fermés) Δ_j.

Dans le cas $h(t) = t^\beta$, $\beta > 0$, nous utiliserons la notation $M_h(E) = M^\beta(E)$ et $M^\beta(E)$ est appelé le contenu β–dimensionnel de Hausdorff. Le sous-contenu β–dimensionnel de Hausdorff $M_*^\beta(E)$ est défini comme suit:

$$M_*^\beta(E) = \sup M_h(E)$$

le supremum étant sur l'ensemble des fonctions continues croissantes positives h telles que

$$h(t) \leq t^\beta \qquad \text{et} \qquad \lim_{t \to 0^+} \frac{h(t)}{t^\beta} = 0.$$

Un carré dyadique est un carré de coté de longueur 2^n, n entier, et dont les coordonnées des coins sont de la forme $a\cdot 2^n + i(b\cdot 2^n)$, n, a, $b \in \mathbb{Z}$. Nous pouvons définir des contenus dyadiques, comparables aux contenus de Hausdorff, en utilisant des carrés dyadiques ouverts Q_j plutôt que des disques Δ_j. Ces contenus seront denotés par m_h, m^β et m_*^β respectivement.

Les principales propriétés des contenus de Hausdorff et des contenus dyadiques de Hausdorff se retrouvent dans [2], [4], [12], [15].

1.4 Les transformées de Cauchy et de Beurling. Soit f une fonction mesurable bornée à support compact définie sur $\mathbb{C}$. Alors la tranformée de Cauchy de f est la fonction

$$(\mathcal{C}f)(z) = \frac{1}{\pi}\int \frac{f(z-\varsigma)}{\varsigma}\, d\lambda\,(\varsigma) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{z} * f$$

où $*$ dénote l'opération de convolution; la transformée de Beurling de f est donnée par

$$\mathcal{B}(f)(z) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{|\varsigma|>\varepsilon} \frac{f(z-\varsigma)}{\varsigma^2}\, d\lambda\,(\varsigma) = \text{ V.P. } \frac{1}{\pi}\frac{1}{z^2} * f.$$

Nous notons ici quelques propriétés de $\mathcal{C}f$ et $\mathcal{B}f$ que nous utiliserons par la suite. La fonction $\mathcal{C}f$ est analytique hors du support compact de f. De plus

$$\mathcal{B}(f)(z) = -\frac{\partial(\mathcal{C}f)}{\partial z}(z)$$

$$\|\mathcal{B}f\|_p \le C_p\,\|f\|_p \qquad \text{[20, p. 302, théorème 4.3]}$$

$$\|\mathcal{B}f\|_0 \le C\,\|f\|_\infty \qquad \text{[20, p. 308, théorème 4.4]}$$

$$\|\mathcal{B}f\|_\alpha \le C_\alpha\,\|f\|_\alpha \qquad \text{[21].}$$

1.5 L'opérateur de localisation de Vitushkin. Dans cette section nous rappelons sommairement la définition de l'opérateur de localisation de Vitushkin ainsi que certaines de ses propriétés.

Pour chaque fonction $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$ nous définissons l'opérateur T_φ : $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{C}) \to L^1_{\text{loc}}(\mathbb{C})$ de la façon suivant

$$\begin{aligned}(T_\varphi f)(z) &= \frac{1}{\pi}\int \frac{f(\varsigma)-f(z)}{\varsigma - z}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar\varsigma}(\varsigma)\, d\lambda\,(\varsigma)\\ &= \varphi(z)f(z) + \frac{1}{\pi}\int \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar\varsigma}(\varsigma)\, d\lambda\,(\varsigma).\end{aligned}$$

$T_\varphi f$ est appelé la localisée de f par rapport à φ. Nous savons que $\partial(T_\varphi f)/\partial\bar{z} = \varphi\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}$ et donc que $T_\varphi f$ est holomorphe sur $S^2\setminus E$, où E dénote le support (fermé) de la fonction φ et que $T_\varphi f(\infty)=0$. De plus $T_\varphi f\in B$ si $f\in B$, où B est l'un des espaces BMO($\mathbb{C}$), $C^m(\mathbb{C})$, Lip$(\alpha,\mathbb{C})$, $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{C})$. B est alors dit T–invariant. Plus précisement, nous avons que si Δ est un disque de rayon δ qui contient le support de φ alors [11, p. 63], [22, p. 622-623], [23, Prop. 3.2], [16, p. 189], [18].

(a) $\|T_\varphi f\|_{p,2\Delta}\le C\delta\|\nabla\varphi\|_\infty\|f\|_{p,\Delta}$
(b) $\|\nabla^k T_\varphi f\|_\infty \le C\left(\sum_{j=0}^k \delta^j\|\nabla^j\varphi\|_\infty\right)\operatorname{osc}(\nabla^k f,\Delta)$, si $\bar\partial f$ possède un zéro d'ordre $k-1$ en un point de Δ (on suppose $\varphi\in C_0^k$)
(c) $\|T_\varphi f\|_0\le C\delta\|\nabla\varphi\|_\infty\|f\|_{0,3\Delta}$
(d) $\|T_\varphi f\|_{\alpha,\mathbb{C}}\le C\big(\|\varphi\|_\infty+\delta\|\nabla\varphi\|_\infty\big)\|f\|_{\alpha,6\Delta}$.

Nous aurons aussi besoin des estimés suivants [16, p. 193], [22, Lemma 1].

(e) $\|T_\varphi f\|_\infty\le C\delta\|\nabla(T_\varphi f)\|_\infty$ si $f\in C^1(\mathbb{C})$
(f) $\|T_\varphi f\|_{\infty,\mathbb{C}}\le C\delta^\alpha\|T_\varphi f\|_{\alpha,\mathbb{C}}$ si $f\in \operatorname{Lip}(\alpha,C)$.

Remarquons que les inégalités (e) et (f) restent valables si $T_\varphi f$ est remplacé par toute fonction h de classe C^1, holomorphe sur le complémentaire d'un sous-ensemble compact de Δ et satisfaisant $h(\infty)=0$.

1.6 Le lemme de Davie. Le schème d'approximation de Vitushkin, tel qu'adapté par Davie, requiert d'isoler dans de petits disques les singularités de la fonction à approcher (pour ce faire l'on utilisera l'opérateur T_φ). Dans le cas compact, des disques de même rayon sont utilisés. Dans les cas des ensembles non-bornés, il nous faut prendre des disques de rayons variables pour pouvoir garder un contrôle sur la norme dans chacun des disques. Comme l'a réalisé V. Hadjiskii [7], le lemme suivant de Davie répond à nos besoins.

Lemme 1.6 [3, p. 416]. *Pour tout constante $\sigma\ge 1$, il existe une constante C telle que pour tout sous-ensemble ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et toute fonction ρ positive et continue sur Ω, nous puissions trouver une suite $\{\Delta_j\}_{j=1}^\infty$ de disques ouverts de centres z_j et de rayons δ_j pour laquelle la fermeture de chacun des $\sigma\Delta_j$ soit contenue dans Ω, et telle que si $\alpha\in\{1,\sigma\}$, nous ayons:*

(1) $\Omega=\bigcup_{j=1}^\infty \alpha\Delta_j$
(2) *chaque point $z\in\Omega$ se retrouve dans au plus C disques $\alpha\Delta_j$*
(3) *si $z\in\alpha\Delta_j$, alors $\alpha\delta_j<\rho(z)$*
(4) *Il existe une partition de l'unité $\{\varphi_j\}$ subordonnée à $\{\alpha\Delta_j\}$ telle que $\|\nabla\varphi_j\|_\infty\le C/\delta_j$*
(5) *Pour tout $z\in\mathbb{C}$,*

$$\sum_j \min\left(1,\ \frac{\delta_j^3}{|z-z_j|^3}\right)\le C.$$

Remarques.

- Nous avons adapté quelque peu l'énoncé original de Davie à nos besoins et avons apporté quelques précisions à sa preuve.
- La constante C ne dépend que de la valeur de σ.
- Une famille de disques $\{\alpha\Delta_j\}$ satisfaisant aux propriétés (1) et (2) sera dite presque disjointe et une famille de couples $\{\alpha\Delta_j, \varphi_j\}$ satisfaisant aux propriétés (1) à (4) sera appelée un ρ–recouvrement presque disjoint de Ω.
- Pour l'importance de l'estimé (5), nous référons le lecteur à [25, p. 102] ainsi qu'à la Section 1.7.
- L'estimé (4) peut tout aussi aisément être remplacé par $\|\nabla^k \varphi_j\|_\infty \leq C\delta_j^{-k}$, $1 \leq k \leq N < \infty$.

Preuve. Pour en simplifier la preuve, nous allons démontrer le lemme pour le cas $\sigma = 2$. Le cas général s'obtient par un choix approprié de la suite k_* qui est définie ci-après. Nous supposerons aussi, sans perte de généralité, que $\rho(z)$ décroit vers zéro lorsque $z \in \Omega$ approche la frontière de Ω dans S^2. Posons

$$V_k = \{z \in \Omega : \rho(z) \geq 2^{-k}\}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Chacun des ensembles V_k est compact et $\Omega = \bigcup_k V_k$. Soit

$$\alpha_k = \min\bigl(1, \text{ dist } (V_k, \mathbb{C} \setminus \Omega)\bigr)$$

$$\beta_k = \min\bigl(1, \text{ dist } (V_k, \mathbb{C} \setminus V_{k+1})\bigr).$$

Remarquons que $\beta_k \leq \alpha_k$ et choisissons la suite de nombres entiers k_* récursivement de façon à ce que $k_* > (k-1)_*$ et $\beta_k > 2^{-k_*+k+1}$. Pour $k = 1, 2, \ldots$ soit $\{\Delta_{kp}\}_{p=1}^{\infty}$ une énumération des disques de rayon $\frac{3}{4}2^{-k_*}$ dont les coordonnées des centres sont des multiples entiers de 2^{-k_*} (Notons que $\frac{3}{4} > \frac{\sqrt{2}}{2}$).

Nous pouvons maintenant choisir le recouvrement de Ω. Soit k_0 le plus petit entier pour lequel V_k n'est pas vide. Nous incluons dans le recouvrement tout disque Δ_{k_0p} qui intersecte V_{k_0}. Récursivement, pour $k > k_0$, nous incluons tout disque Δ_{kp} qui intersecte V_k mais qui ne soit pas contenu dans l'union des disques déjà choisis. Nous noterons par Δ_j les disques ainsi choisis, z_j leur centre et δ_j leur rayon. C'ést-à-dire que si $\Delta_j = \Delta_{kp}$ pour un certain k et un certain p, alors $\delta_j = \frac{3}{4}2^{-k_*}$.

Remarquons que par le choix des k_*, nous nous sommes assurés que pour chacun des recouvrements $\{\Delta_j\}$ et $\{2\Delta_j\}$ les disques de la génération k ne rencontrent que les disques des générations $k-1$ et $k+1$. De plus il existe une constante C_0 (qui dépend de la valeur de σ mais indépendante de celle de k) telle que chaque point de Ω ne se retrouve qu'au plus dans C_0 disques de la génération k. Les recouvrements $\{\Delta_j\}$ et $\{2\Delta_j\}$ satisfont donc aux propriétés

(1), (2) et (3). Pour obtenir (4), choisissons une fonction $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que $\psi(z) \equiv 1$ si $|z| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\psi(z) \equiv 0$ si $|z| \geq \frac{23}{32}$ et $0 \leq \psi(z) \leq 1$ (Notons que $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{23}{32} < \frac{3}{4}$). Définissons

$$\psi_j(z) = \psi\left(\frac{3(z - z_j)}{4\delta_j}\right)$$

$$\varphi_1(z) = \psi_1(z)$$

$$\varphi_{j+1}(z) = \psi_{j+1}(z) \prod_{i=1}^{j} (1 - \psi_i(z)).$$

Utilisant la propriété (2), il est facile de constater que la suite $\{\varphi_j\}$ est une partition de l'unité subordonnée à $\{2\Delta_j\}$ et qui satisfait à (4).

Pour prouver (5), fixons tout d'abord le rayon des disques, c'est-à-dire fixons k. Nous obtenons alors, suivant la technique employée par Vitushkin (voir [25, p. 102]), que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\sum_p \min\left(1, \frac{2^{-3k_*}}{|z - z_{kp}|^3}\right) \leq A_1 \min\left(1, \frac{2^{-k_*}}{\operatorname{dist}\left(z, \bigcup_p \Delta_{kp}\right)}\right)$$

où la somme est sur les p pour lesquels Δ_{kp} a été choisi.

Si $z \notin \Omega$, alors $\operatorname{dist}(z, \bigcup_p \Delta_{kp}) \geq \alpha_k > 2^{-k_*+k}$ et donc

$$\sum_j \min\left(1, \frac{\delta_j^3}{|z - z_j|^3}\right) \leq A_1 \sum_k \min\left(1, \frac{2^{-k_*}}{\operatorname{dist}\left(z, \bigcup_p \Delta_{kp}\right)}\right)$$

$$\leq A_1 \sum_k \frac{2^{-k_*}}{2^{-k_*+k}} \leq A_1.$$

D'autre part, si $z \in \Omega$, alors $z \in V_i \setminus V_{i-1}$ pour un certain i et alors

$$\sum_j \min\left(1, \frac{\delta_j^3}{|z - z_j|^3}\right) \leq A_1 \left(\sum_{k=k_0}^{i-2} + \sum_{k=i-1}^{i+2} + \sum_{k=i+3}^{\infty}\right) \min\left(1, \frac{2^{-k_*}}{\operatorname{dist}\left(z, \bigcup_p \Delta_{kp}\right)}\right)$$

mais

$$\sum_{k=i-1}^{i+2} \min\left(1 \frac{2^{-k_*}}{\operatorname{dist}\left(z, \bigcup_p \Delta_{kp}\right)}\right) \leq 4$$

$$\sum_{k=k_0}^{i-2} \min\left(1, \frac{2^{-k_*}}{\operatorname{dist}\left(z, \bigcup_p \Delta_{kp}\right)}\right) \leq \sum_{k=k_0}^{i-2} \frac{2^{-k_*}}{\beta_k} \leq \sum_{k=k_0}^{i-2} \frac{1}{2^k}$$

et

$$\sum_{k=i+3}^{\infty} \min\left(1, \frac{2^{-k_*}}{\operatorname{dist}\left(z, \bigcup_p \Delta_{kp}\right)}\right) \leq \sum_{k=i+3}^{\infty} \frac{2^{-k_*}}{\beta_{k-3}} \leq \sum_{k=i+3}^{\infty} \frac{2^{-(k-3)_*}}{\beta_{k-3}}$$

$$\leq \sum_{k=i+3}^{\infty} \frac{1}{2^{k-3}}.$$

Ce qui achève la preuve du lemme. □

1.7 Le zéro à l'infini.

Le schème d'approximation requiert un contrôle sur la norme d'une large somme de fonctions. Les lemmes de cette section s'attaquent à ce problème.

Soit Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$ et ρ une fonction positive continue sur Ω. Suivant la preuve du lemme 1.6 de Davie nous contruisons un recouvrement presque disjoint $D = \{\Delta_j\}$ à partir d'ensembles V_k tel que $\{\sigma\Delta_j\}$ soit aussi presque disjoint pour un certain $\sigma > 1$. Soit δ_k le rayon des disques $\Delta_j = \Delta_{kp}$ choisis à l'étape k posons

$$d_k = \operatorname{diam} V_{k+1} = \sup\{|z-w| : z, w \in V_{k+1}\}.$$

Lemme 1.7.1. *Si pour chaque $\Delta_j = \Delta_{kp} \in D$, il nous est donné une fonction $f_j = f_{kp} \in C(S^2) \cap \operatorname{Hol}(S^2 \setminus \Delta_{kp})$, alors*

(i) $\|\sum_j f_j\|_\infty \leq C \sum_k [(d_k/\delta_k) \max_p \|f_{kp}\|_\infty]$ *si chacune des fonctions $f_j = f_{kp}$ posséde un zéro simple à l'infini.*

(ii) $\|\sum_j f_j\|_\infty \leq C \sum_k [\log(d_k/\delta_k) \max_p \|f_{kp}\|_\infty]$ *si chacune des fonctions $f_j = f_{kp}$ possède un zéro double à l'infini.*

(iii) $\|\sum f_j\|_\infty \leq C \max_j \|f_j\|_\infty$ *si chacune des fonctions f_j possède un zéro triple à l'infini.*

Preuve. La preuve de la partie (iii) se retrouve dans [3], [25] et utilise l'estimé (5) du Lemme 1.6. Les parties (i) et (ii) s'obtiennent en suivant un raisonnement similaire. □

Nous voudrions maintenant obtenir pour les normes L^p, BMO et Lip α un résultat analogue au lemme précédent. Suivant une idée originale de Lindberg [11] et reprise dans [22], nous utiliserons pour ce faire la transformée de Beurling.

Soit β l'un des trois espaces $L^p(\mathbb{C})$, $\mathrm{BMO}(\mathbb{C})$ ou $\mathrm{Lip}(\alpha,\mathbb{C})$. Soit $\delta > 0$, $\Delta = \Delta(0,\delta)$ et $f \in B \cap$ Hol $(S^2 \setminus \Delta)$ telle que f ait un zéro double au point à l'infini. On écrit

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}, \quad |z| > \delta.$$

Notre but est de construire une fonction $b \in B$ à support dans 2Δ telle que f soit égale à $\mathcal{B}(b)$ sur le complémentaire de 2Δ. Il nous suffira alors de considérer la fonction $g = f - \mathcal{B}(b)$ et puisque nos espaces sont Beurling-invariants, ceci nous permettra de remplacer f par une fonction à support dans 2Δ tout en conservant de bons estimés sur les normes.

Soit $\varphi \in C_0^\infty$ tel que supp $\varphi \subset \Delta_0 = \Delta\left(0, \frac{3}{2}\delta\right)$, $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, $\varphi \equiv 1$ sur $\bar{\Delta}(0,\delta)$ et $\|\nabla\varphi\|_\infty \leq \frac{A}{\delta}$, A étant une constante absolue indépendante de δ. Alors

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_0} f(z)z^{n-1}\,dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_0} f(z)z^{n-1}\big(1-\varphi(z)\big)\,dz \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\iint_{\Delta_0} f(z)z^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z}(z)d\bar z\wedge dz \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{\Delta_0}\big(f(z)-f_{\Delta_0}\big)z^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z}(z)\,d\lambda(z)
\end{aligned}$$

et l'on obtient immédiatement les estimés suivants:

(1) si $f \in L^p(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned}
|a_n| &\leq \frac{1}{\pi}\left(\frac{3}{2}\delta\right)^{n-1}\left(\frac{A}{\delta}\right)\int_{\Delta_0}|f(z)|\,d\lambda(z) \\
&\leq C\left(\frac{3}{2}\delta\right)^{n-2}\left(\int_{\Delta_0}|f|^p\,d\lambda\right)^{1/p}\left(\frac{3}{2}\delta\right)^{2/q} \\
&\leq C\left(\frac{3}{2}\delta\right)^{n-2+\frac{2}{q}}\|f\|_{p,\Delta_0};
\end{aligned}$$

(2) si $f \in \operatorname{Lip}(\alpha, \mathbb{C})$

$$
\begin{aligned}
|a_n| &\leq \frac{1}{\pi}\|f\|_\alpha \delta^\alpha \left(\frac{3}{2}\delta\right)^{n-1} \left(\frac{A}{\delta}\right) \pi \cdot \delta^2 \\
&\leq C \left(\frac{3}{2}\delta\right)^{n+\alpha} \|f\|_\alpha ;
\end{aligned}
$$

(3) et finalement si $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{C})$

$$
|a_n| \leq C \left(\frac{3}{2}\delta\right)^{n} \|f\|_0 .
$$

Considérons maintenant, pour $n = 2, 3, \ldots$, les fonctions

$$
b_n(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| > 2\delta \\ \dfrac{n}{(2\delta)^{2n}} \left[(2\delta)^n (\bar{z})^{n-2} - z(\bar{z})^{n-1}\right] & \text{si } |z| \leq 2\delta \end{cases}
$$

$$
B_n(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z^n} & \text{si } |z| > 2\delta \\ \dfrac{(\bar{z})^n}{(2\delta)^{2n}} & \text{si } |z| \leq 2\delta . \end{cases}
$$

Notons que $\mathcal{B}(b_n) = B_n$. En effet, $\mathcal{B}(b_n) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathcal{C}(b_n)\right)$ et donc

$$
\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathcal{B}(b_n)\right) = -\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\mathcal{C}(b_n)\right)\right] = -\frac{\partial}{\partial z}(b_n) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(B_n).
$$

De plus nous avons:

(1) $\quad \|b_n\|_p \leq C \dfrac{n}{(2\delta)^{n-\frac{2}{p}}}$

(2) $\quad \|b_n\|_\alpha \leq C \dfrac{n^2}{(2\delta)^{n+\alpha}}$

(3) $\quad \|b_n\|_0 \leq 2\|b_n\|_\infty \leq C \dfrac{n}{(2\delta)^n}$.

Posons

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{b}(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n(z) \\
F &= \mathcal{B}(\mathfrak{b}), \quad \text{et} \\
g &= f - F .
\end{aligned}
$$

Par conséquent le support de g est contenu dans 2Δ,

$$F(z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}, & |z| > 2\delta \\ \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n(\bar{z})^n}{(2\delta)^{2n}}, & |z| < 2\delta, \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} \|F\|_p = \|\mathcal{B}(\mathfrak{b})\|_p \le C\|\mathfrak{b}\|_p &\le C\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \, \|b_n\|_p \\ &\le C\|f\|_p \sum_{n=2}^{\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^n (2\delta)^{-2+\frac{2}{q}+\frac{2}{p}} \\ &\le C\|f\|_p. \end{aligned}$$

De façon similaire on obtient

$$\|F\|_\alpha \le C\|\mathfrak{b}\|_\alpha \le C\|f\|_\alpha$$

$$\|F\|_0 \le C\|\mathfrak{b}\|_0 \le C\|f\|_0.$$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver:

Lemme 1.7.2. *Soit $\{\Delta_j\}$ une famille de disques de rayons δ_j telle que $\{\sigma\Delta_j\}$ soit une famille presque disjointe pour un certain $\sigma > 1$. Soit $\{f_j\}$ une famille de fonctions $f_j \in B \cap \mathrm{Hol}(S^2 \setminus \Delta_j)$. Supposons de plus que chaque f_j ait un zéro double au point à l'infini. Nous avons alors que*

(i) $$\|\sum_j f_j\|_p \le C_p \left(\sum_j \|f_j\|_p^p\right)^{1/p} \qquad \text{si } B = L^p(\mathbb{C}),\ 1 < p < \infty$$

(ii) $$\|\sum_j f_j\|_\alpha \le C_\alpha \sup_j \|f_j\|_\alpha \qquad \text{si } B = \mathrm{Lip}(\alpha, \mathbb{C}),\ 0 < \alpha < 1$$

(iii) $$\|\sum_j f_j\|_0 \le C_0 \sup_j \|f_j\|_0 \qquad \text{si } B = \mathrm{BMO}(\mathbb{C}).$$

Preuve. Pour chaque couple $\{\Delta_j,\, f_j\}$ nous construisons les fonctions $\mathfrak{b}_j$, F_j et g_j suivant, mutatis mutandis, la méthode expliquée ci-haut de façon à ce que

$\mathfrak{b}_j$ et g_j aient leur support contenu dans le disque $\sigma\Delta_j$. Il s'en suit que

$$\begin{aligned}\|\sum_j f_j\|_p &\le \|\sum_j F_j\|_p + \|\sum_j g_j\|_p \\ &= \left\|\mathcal{B}(\sum_j \mathfrak{b}_j)\right\|_p + \|\sum_j g_j\|_p \\ &\le C\|\sum_j \mathfrak{b}_j\|_p + \|\sum_j g_j\|_p.\end{aligned}$$

De même,

$$\|\sum_j f_j\|_\alpha \le C\|\sum_j \mathfrak{b}_j\|_\alpha + \|\sum_j g_j\|_\alpha$$

$$\|\sum_j f_j\|_0 \le C\|\sum_j \mathfrak{b}_j\|_0 + \|\sum_j g_j\|_0.$$

Le lemme du double zéro est donc une conséquence du lemme suivant:

Lemme 1.7.3. *Soit $\{h_j\}$ une famille de fonctions $h_j \in B$ telle que le support de h_j soit contenu dans un disque D_j, où la famille $\{D_j\}$ est presque disjointe; alors*

(1) $$\|\sum h_j\|_p \le C\left(\sum_j \|h_j\|_p^p\right)^{1/p}, \quad \textit{si } B = L^p(\mathbb{C}),\ 1 < p < \infty$$

(2) $$\|\sum h_j\|_\alpha \le C\max_j \|h_j\|_\alpha, \quad \textit{si } B = \mathrm{Lip}(\alpha, \mathbb{C}),\ 0 < \alpha < 1$$

(3) $$\|\sum h_j\|_0 \le C\max_j \|h_j\|_0, \quad \textit{si } B = \mathrm{BMO}(\mathbb{C}).$$

Preuve.

(1) Ce résultat se retrouve dans Lindberg [11]

(2) Fixons x, $y \in \mathbb{C}$ et posons $J_x = \{j : x \in D_j\}$ et $J_{x,y} = J_x \cup J_y$. Puisque $\{D_j\}$ est une famille presque disjointe, card$(J_{x,y})$(= la cardinalité de $J_{x,y}$) est bornée par une constante, disons C, indépendante de x et de y. Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\left|\sum_j h_j(x) - \sum_j h_j(y)\right| &\le \sum_{j \in J_{x,y}} |h_j(x) - h_j(y)| \\ &\le C\max_j \|h_j\|_\alpha |x-y|^\alpha\end{aligned}$$

et ainsi nous obtenons (2).

(3) Soit Δ un disque de rayon r, et δ_j le rayon de D_j. Nous divisons les indices j en trois classes:

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= \{j : D_j \cap \Delta \neq \emptyset \text{ et } D_j \subset 2\Delta\}\\ \mathrm{II} &= \{j : D_j \cap \Delta \neq \emptyset \text{ et } D_j \setminus 2\Delta \neq \emptyset\}\\ \mathrm{III} &= \{j : D_j \cap \Delta = \emptyset\}.\end{aligned}$$

Nous avons

$$M\left(\sum_j f_j,\, \Delta\right) \leq \sum_{j\in I} M(f_j, \Delta) + \sum_{j\in II} M(f_j, \Delta).$$

Fixons $j \in I$. Utilisant l'estimé (9) de [23, p. 295] avec $N = \frac{r}{\delta_j}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}M(f_j, \Delta) &\leq C\left(\frac{r}{\delta_j}\right)^{-2} M(f_j,\, 2D_j)\\ &\leq C\left(\frac{\delta_j^2}{r^2}\right)\|f_j\|_0.\end{aligned}$$

Mais puisque les D_j sont presque disjoints,

$$\begin{aligned}\sum_{j\in I} \delta_j^2 = \left(\pi^{-1}\right)\sum_{j\in \mathrm{I}} \mathrm{Aire}(D_j) &\leq C \text{ Aire}\left(\bigcup_{j\in \mathrm{I}} D_j\right)\\ &\leq C \text{ Aire}(\Delta) = Cr^2\end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{j\in I} M(f_j, \Delta) \leq C \max_{j\in I} \|f_j\|_0 \leq C \max_j \|f_j\|_0.$$

Pour obtenir l'estimé $\sum_{j\in \mathrm{II}} M(f_j,\, \Delta) \leq C \max_j \|f_j\|_0$, il suffit de remarquer que card(II) est bornée par une constante absolue. En effet, soit Γ la frontière de $\frac{3}{2}\Delta$. Puisque les D_j sont presque disjoints et que $\delta_j \geq r$ pour

$j \in \mathrm{II}$, nous avons

$$\begin{aligned} 3\pi r = \text{ longueur}(\Gamma) &\geq \text{ longueur } \left(\bigcup_{j\in\mathrm{II}} D_j \cap \Gamma\right) \\ &\geq C \sum_{j\in\mathrm{II}} \text{longueur } (D_j \cap \Gamma) \\ &\geq C \sum_{j\in\mathrm{II}} \delta_j \\ &\geq C \cdot r \cdot \mathrm{card}(\mathrm{II}). \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve du lemme. □

2. Théorèmes d'approximation.

2.1 C^m, $m \geq 1$.

Théorème 2.1.1 (voir [17], [22] pour le cas compact). *Soit Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$, F un sous-ensemble relativement fermé de Ω, $m \in \mathbb{R}$, $m \geq 1$, $\alpha = m - [m]$ et $f \in C^m(\Omega)$. Alors les énoncés suivants sont équivalents:*

(i) $f \in H_m(F)$

(ii) $\nabla^k \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)(z) = 0$, *pour tout* $z \in F$, $0 \leq k \leq m-1$

Preuve. Puisque $\lim_{n\to\infty} \|\nabla^k f_n - \nabla^k f\|_\infty = 0$ implique

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\nabla^{k-1}\left(\frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}}\right) - \nabla^{k-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)\right\|_\infty = 0,$$

nous avons que (i) entraîne (ii).

Pour démontrer que (ii) entraîne (i), nous considérons trois cas:

1) $m = 1$,
2) $m \geq 2$, m entier,
3) m fractionnaire.

▷ (1) $m = 1$.

Soit $f \in C^1(\Omega)$. Étant donné $\varepsilon > 0$, on choisit une fonction ρ continue et positive sur Ω telle qui si $\delta \leq \rho(z)$, alors $\mathrm{osc}\big(\nabla f,\ \Delta(z,\delta)\big) \leq \varepsilon$. Soit $\{\Delta_j, \varphi_j\}$ ($= \{\Delta_{kp},\ \varphi_{kp}\}$) un ρ-recouvrement presque-disjoint de Ω, δ_j ($= \delta_{kp} = \delta_k$) le rayon du disque Δ_j ($= \Delta_{kp}$) et $f_j = T_{\varphi_j} f$ les localisées de f par rapport aux

φ_j. Notons que si I représente la classe des indices j pour lesquels nous avons $\Delta_j \cap F \neq \emptyset$, nous obtenons alors des inégalités 1.5 b) et 1.5 e) et du choix de ρ, que pour $j \in I$,

$$\|\nabla f_j\|_\infty \leq C\varepsilon$$

$$\|f_j\|_\infty \leq C\delta_j\varepsilon.$$

Utilisant un résultat de Nguyen Xuan Uy [17], et l'hypothèse (ii), nous pouvons donc construire, pour $j \in I$, des fonctions $g_j \in C^1(\mathbb{C}) \cap \operatorname{Hol}\big((S^2 \setminus \Delta_j) \cup F\big)$ telles que $f_j - g_j$ possède un zéro double au point à l'infini, $\|\nabla g_j\|_\infty \leq C\varepsilon$ et donc (Section 1.5, (e)), $\|g_j\|_\infty \leq C\delta_j\varepsilon$. Voir [22, p. 624] pour plus de détails sur la construction des fonctions g_j. Posons

$$f_\varepsilon = f - \sum_{j\in I} (f_j - g_j)\,.$$

Nous avons alors, par le Lemme 1.7.1 (iii) que

$$\begin{aligned}\|\nabla f - \nabla f_\varepsilon\|_\infty &= \Big\|\sum_{j\in I} (\nabla f_j - \nabla g_j)\Big\|_\infty \\ &\leq C \max_{j\in I} \|\nabla f_j - \nabla g_j\|_\infty \leq C\varepsilon\end{aligned}$$

et (Lemme 1.7.1 (ii))

$$\begin{aligned}\|f - f_\varepsilon\|_\infty = \Big\|\sum_{j\in I} (f_j - g_j)\Big\|_\infty &= \Big\|\sum_k \sum_p (f_{kp} - g_{kp})\Big\| \\ &\leq C \sum_k \left[\log\left(\frac{d_k}{\delta_k}\right) \max_p \big(\|f_{kp}\| + \|g_{kp}\|\big)\right] \\ &\leq C \sum_k \log\left(\frac{d_k}{\delta_k}\right) \delta_k\varepsilon.\end{aligned}$$

Il suffit maintenant de constater que les δ_k peuvent être choisis de telle sorte que $\sum_k \delta_k \log(d_k/\delta_k) < \infty$. Nous obtenons ainsi

$$\|f - f_\varepsilon\|_\infty \leq C\varepsilon.$$

$\triangleright$ (2) *m entier ≥ 2.* Pour simplifier la notation, nous nous limiterons au cas $m = 2$. Donc supposons $f \in C^2(\Omega)$ et étant donné $\varepsilon > 0$ choisissons ρ positive et continue sur Ω telle que $\operatorname{osc}\big(\nabla^2 f, \Delta(z,\delta)\big) \leq \varepsilon$ pour tout $\delta < \rho(z)$. De plus soit $\{\Delta_j, \varphi_j\}$ ($= \{\Delta_{kp}, \varphi_{kp}\}$) le recouvrement de Davie associé à ρ, et $f_j = T_{\varphi_j} f$ les localisées de f. Notons par I la classe des indices j pour lesquels $\Delta_j \cap F \neq \emptyset$ et posons

$$f_\varepsilon = f - \sum_{j \in I} f_j .$$

Nous avons que [20, p. 623]

$$\|\nabla^2 f_j\|_\infty \leq C \operatorname{osc}(\nabla^2 f, \Delta_j) \leq C\varepsilon$$

et puisque $\nabla^2 f_j$ possède un triple zéro à l'infini,

$$\|\nabla^2 f - \nabla^2 f_\varepsilon\|_\infty = \|\sum_j \nabla^2 f_j\|_\infty \leq C \max_j \|\nabla^2 f_j\|_\infty \leq C\varepsilon.$$

De même, ∇f_j possède un zéro double à l'infini et f_j un zéro simple et les inégalités [20, p.623]

$$\|\nabla f_j\|_\infty \leq C\delta_j \varepsilon, \qquad \|f_j\|_\infty \leq C\delta_j^2 \varepsilon$$

entraînent

$$\|\nabla f - \nabla f_\varepsilon\|_\infty = \|\sum_j \nabla f_j\|_\infty \leq C \sum_k \log\left(\frac{d_k}{\delta_k}\right) \delta_k \varepsilon$$

$$\|f - f_\varepsilon\|_\infty = \|\sum_j f_j\|_\infty \leq C \sum_k \left(\frac{d_k}{\delta_k}\right) \delta_k^2 \varepsilon.$$

Il suffit donc de choisir les δ_k (c'est-à-dire ρ) de telle sorte que $\sum_k d_k \delta_k < \infty$ et $\sum_k \delta_k \log(d_k/\delta_k) < \infty$.

▷ (3) *m, fractionnaire.* Pour simplifier la notation, supposons que $m = 1 + \alpha$, $0 < \alpha < 1$ et que $f \in C^m(\Omega)$. Fixons $\varepsilon > 0$ et notons que, si $\Delta_j \cap F \neq \emptyset$, nous avons l'inégalité

$$\|\nabla f_j\|_\alpha \leq C \cdot \|\nabla f\|_{\alpha, \Delta_j};$$

il nous faut donc choisir ρ de telle façon que $\delta < \rho(z)$ entraîne $\|\nabla f\|_{\alpha,\Delta_j} \leq \varepsilon$.

Pour démontrer l'inégalité précédente, notons tout d'abord par I la classe des indices j pour lesquels $\Delta_j \cap F \neq \emptyset$. Remarquons ensuite que $\partial f_j/\partial \bar{z} = \varphi_j(\partial f/\partial \bar{z})$ et que $\partial f_j/\partial z = (\partial/\partial z)\mathcal{C}\big((f - f(z))(\partial \varphi_j/\partial \bar{z})\big) = \mathcal{B}\big(\varphi_j(\partial f/\partial \bar{z})\big)$. Nous avons aussi par hypothèse que $(\partial f/\partial \bar{z})(z) = 0$, pour tout $z \in F$ et donc que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\right| \leq \|\nabla f\|_{\alpha,\Delta_j} \cdot \delta_j^\alpha$$

si $j \in I$, $z \in \Delta_j$ et $z_0 \in F \cap \Delta_j$. Combiné avec les inégalités

$$\|\varphi_j\|_\alpha \leq \|\nabla \varphi_j\|_\infty \delta_j^{1-\alpha} = C\delta_j^{-\alpha}$$

et $\|\mathcal{B}(f)\|_\alpha \leq C\|f\|_\alpha$ nous obtenons

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial f_j}{\partial \bar z}\right\|_\alpha &\leq \left\|\varphi_j \frac{\partial f}{\partial \bar z}\right\|_\alpha \\ &\leq \|\varphi_j\|_\infty \left\|\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right\|_{\alpha,\Delta_j} + \|\varphi_j\|_\alpha \left\|\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right\|_{\infty,\Delta_j} \\ &\leq C\|\nabla f\|_{\alpha,\Delta_j},\end{aligned}$$

et

$$\left\|\frac{\partial f_j}{\partial z}\right\| \leq \left\|\varphi_j \frac{\partial f}{\partial \bar z}\right\|_\alpha \leq C\|\nabla f\|_{\alpha,\Delta_j},$$

ce qui achève la preuve de l'inégalité.

Posons maintenant, comme pour le cas $m = 2$,

$$f_\varepsilon = f - \sum_{j\in I} f_j.$$

Alors puisque les ∇f_j ont un zéro double à l'infini, nous obtenons

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial z}\right\|_\alpha = \left\|\sum_{j\in I} \frac{\partial f_j}{\partial z}\right\|_\alpha \leq C \max_{j\in I}\|\nabla f_j\|_\alpha \leq C\varepsilon$$

et

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial z}\right\|_\infty &= \left\|\sum_k \sum_p \frac{\partial f_{kp}}{\partial z}\right\|_\infty \\ &\leq C\sum_k \log\left(\frac{d_k}{\delta_k}\right) \max_p \|f_{kp}\|_\infty \\ &\leq C\sum_k \log\left(\frac{d_k}{\delta_k}\right)\ \delta_k^\alpha \max_p \|f\|_{\alpha,\Delta_{kp}} \leq C\varepsilon\end{aligned}$$

si l'on choisit les δ_k si petits que $\sum_k \delta_k^\alpha \log(d_k/\delta_k) < \infty$. Finalement

$$\|f - f_\varepsilon\|_\infty = \|\sum_j f_j\|_\infty \leq C\sum_k \left(\frac{d_k}{\delta_k}\right) \delta_k^{1+\alpha} \max_p \|f\|_{\alpha,\Delta_{kp}} \leq C\varepsilon$$

si $\sum d_k\delta_k^\alpha < \infty$. Ce qui termine la preuve. □

2.2 Lip α, $0 < \alpha < 1$.

Théorème 2.2.1 (voir [18] pour le cas compact). *Soit Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$, F un sous-ensemble relativement fermé de Ω et $f \in \operatorname{lip}_{\text{loc}}(\alpha, \Omega)$. Alors les énoncés suivants sont équivalents:*

(i) $f \in H_\alpha(F)$

(ii) *Il existe un $r \geq 1$ et une fonction $a(z,\delta)$ telle que, pour tout $z \in \Omega$, $a(z,\delta) \to 0$ lorsque $\delta \to 0$, de telle sorte que*

$$\left| \int f(\zeta) \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)\, d\lambda(\zeta) \right| \leq C\delta \|\nabla \varphi\|_\infty\, a(z,\delta) M^{1+\alpha}\big(\Delta(z, r\delta) \setminus F\big)$$

pour chaque disque ouvert $\Delta(z,\delta) \subset \Omega$ et chaque $\varphi \in C_0^1\big(\Delta(z,\delta)\big)$.

Théorème 2.2.2 (voir [16] pour le cas compact). *Soit F et Ω comme dans le théorème précédent. Alors les énoncés suivants sont équivalents:*

(i)′ $H_\alpha(F) = A_\alpha(F)$

(ii)′ *Il existe des constantes $C > 0$ et $r \geq 1$ telles que*

$$M_*^{1+\alpha}(\Delta \setminus F^0) \leq C M^{1+\alpha}(r\Delta \setminus F)$$

pour tout disque ouvert $\Delta \subset \Omega$.

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii)

Nous allons démontrer l'inégalité (ii) avec $r = 1$ et

$$a(z,\delta) = \sup \left\{ \frac{|f(\zeta) - f(\xi)|}{|\zeta - \xi|^\alpha} :\ \zeta,\, \xi \in \Delta(z,\delta),\, \zeta \neq \xi \right\}.$$

Choisissons une suite de fonctions $f_n \in$ Hol (F) telle que

$$\lim_{n \to \infty} \big(\|f_n - f\|_\infty + \|f_n - f\|_\alpha \big) = 0.$$

$T_\varphi f_n$ est alors analytique sur le complémentaire d'un sous-ensemble compact de $\Delta(z,\delta) \setminus F$ et par un résultat de Dolženko [4] et l'inégalité 1.5(d), nous obtenons

$$\begin{aligned} \left| \int f_n(\zeta) \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)\, d\lambda(\zeta) \right| &= \pi \big| (T_\varphi f_n)'(\infty) \big| \leq C \|T_\varphi f_n\|_\alpha M^{1+\alpha}(\Delta \setminus F) \\ &\leq C\, a(z,\delta) \big(\|\varphi\|_\infty + \delta \|\nabla \varphi\|_\alpha \big) M^{1+\alpha}(\Delta \setminus F) \\ &\leq C\, a(z,\delta) \big(C\, \delta \|\nabla \varphi\|_\infty \big) M^{1+\alpha}(\Delta \setminus F) \end{aligned}$$

▷ (i)′ ⇒ (ii)′.

L'implication (i)′ ⇒ (ii)′ se démontre de façon similaire, en utilisant des résultats de O'Farrell [16, 17].

▷ (ii) ⇒ (i).

Étant donné ε, on choisit une fonction continue $\rho(z)$ telle que $\delta \leq \rho(z)$ entraîne $a(z,\delta) \leq \varepsilon$ et $\|f\|_{\alpha,\Delta(z,\delta)} \leq \varepsilon$. Nous avons par hypothèse que

$$\int f(\zeta)\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\zeta}}(\zeta)\,d\lambda(\zeta) = \pi\big|(T_\varphi f)'(\infty)\big| \leq C\,a(z,\delta)\delta\|\nabla\varphi\|_\alpha M^{1+\alpha}(r\Delta \setminus F)$$

pour un certain $r \geq 1$ constant. Soit $\sigma > r$. Nous contruisons alors un ρ-recouvrement presque disjoint $\{\Delta_j,\varphi_j\}$ tel que la famille de disques $\{\sigma\Delta_j\}$ soit aussi presque disjointe. Soit δ_j le rayon du disque Δ_j et posons $f_j = T_{\varphi_j} f$. Ainsi $\|f_j\|_\alpha \leq C\varepsilon$ et donc par 1.5(f), $\|f_j\|_\infty \leq C\delta_j^\alpha\varepsilon$.

Comme pour le cas compact ([16], [18]), (ii) nous permet utiliser le schème d'approximation. En effect, de l'hypothèse, de [16, Corollary 5] et du choix des φ_j, nous déduisons que

$$\big|f_j'(\infty)\big| \leq C\varepsilon\gamma_\alpha(r\Delta_j \setminus F).$$

Il existe donc, pour chaque j, une fonction $g_j \in \mathrm{Lip}(\alpha,\mathbb{C})$ telle que $\|g_j\|_\alpha \leq C\varepsilon$, g_j soit holomorphe sur le complémentaire d'un sous-ensemble compact de $r\Delta_j \setminus F$ (et donc au voisinage de F) et telle que $f_j - g_j$ ait un zéro double à l'infini (i.e. telle que $g_j(\infty) = 0$ et $g_j'(\infty) = f_j'(\infty)\big)$. Posons

$$f_\varepsilon = f - \Big(\sum(f_j - g_j)\Big)$$

où la somme est sur les j tels que $\bar{\Delta}_j \cap F \neq \emptyset$. Ainsi, par les Lemmes 1.7.1 et 1.7.2, nous avons

$$\|f - f_\varepsilon\|_\alpha = \big\|\sum(f_j - g_j)\big\|_\alpha \leq C\max_j \|f_j - g_j\|_\alpha \leq C\varepsilon$$

et

$$\|f - f_\varepsilon\|_\infty = \|\sum(f_j - g_j)\|_\infty \leq C\varepsilon\sum\ \delta_k^\alpha \log\frac{d_k}{\delta_k} \leq C\varepsilon$$

si l'on choisit la fonction ρ de telle sorte que l'on ait aussi $\sum\ \delta_k^\alpha \log(d_k/\delta_k) < \infty$. Ceci achève la preuve, puisqu'il est aisé de vérifier que $f_\varepsilon \in \mathrm{Hol}(F)$.

▷ (ii)′ ⇒ (i)′.

Soit $f \in A_\alpha(F)$. Nous voulons démontrer que $f \in H_\alpha(F)$. Pour ce faire nous allons démontrer que f satisfait à la condition (ii) du Théorème 2.2.1 avec

$$a(z,\delta) = \sup\left\{ \frac{f(\zeta)-f(\xi)}{|\zeta-\xi|^\alpha} : \zeta,\ \xi \in \Delta,\ \zeta \neq \xi \right\}.$$

Soit $\Delta = \Delta(z,\delta)$ et $\varphi \in C_0^1(\Delta)$. Puisque $T_\varphi f$ est analytique sur le complémentaire d'un sous-ensemble compact de Δ et sur F^0, nous avons que

$$\begin{aligned}\left|\int f(\zeta)\frac{\partial\varphi}{\partial\bar\zeta}(\zeta)\,d\lambda(\zeta)\right| &= \pi\left|(T_\varphi f)'(\infty)\right| \\ &\leq \pi\|T_\varphi f\|_\alpha \alpha_\alpha(\Delta\setminus F^0) \\ &\leq C\cdot\delta\|\nabla\varphi\|_\infty a(z,\delta)M_*^{1+\alpha}(\Delta\setminus F^0) \\ &\leq C\cdot\delta\|\nabla\varphi\|_\infty a(z,\delta)M^{1+\alpha}(r\Delta\setminus F^0)\end{aligned}$$

où l'avant-dernière inégalité se démontre à l'aide de [16, Corollary 7, p. 192] et de l'inégalité 1.5(d). □

2.3 L^p, $1 < p < \infty$.

Théorème 2.3.1 (voir [1], [11] pour le cas compat). *Soit F un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{C}$ et $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$. Alors les énoncés suivants sont équivalents:*

(i) $f \in H_p(F)$

(ii) *Il existe un $r \geq 1$ et une fonction $a(z,\delta)$ telle que $a(z,\delta) \to 0$ lorsque $\delta \to 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, de telle sorte que*

$$\left|\int f(\zeta)\frac{\partial\varphi}{\partial\bar\zeta}(\zeta)\,d\lambda(\zeta)\right| \leq C\delta\|\nabla\varphi\|_\infty a(z,\delta)\gamma_p\big(\Delta(z,r\delta)\setminus F,\Omega\big)$$

pour chaque ensemble mesurable Ω (Ω borné si $p \leq 2$), chaque disque $\Delta(z,\delta)$ et chaque $\varphi \in C_0^1\big(\Delta(z,\delta)\big)$.

Théorème 2.3.2. (voir [1], [8], [9], [11] pour le cas compact). *Soit F un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{C}$. Alors les énoncés suivants sont équivalents:*

(i)′ $H_p(F) = A_p(F)$

(ii)′ *Il existe des constantes $C > 0$ et $r \geq 1$ telles que*

$$\gamma_p(\Delta\setminus F^0,\Omega) \leq C\gamma_p(r\Delta\setminus F,\Omega)$$

pour tout disque ouvert Δ et tout ensemble mesurable Ω (Ω borné si $p \leq 2$).

Remarque. Si $1 < p < 2$ et Ω est borné, la condition (ii)' est toujours satisfaite et donc $H_p(F) = A_p(F)$ pour tout sous-ensemble mesurable F de $\mathbb{C}$. En effet si E est un sous-ensemble quelconque non-vide de Ω et si $z_0 \in E$ alors $\gamma_p(E,\Omega) \geq \gamma_p(\{z_0\},\Omega) > C_1 > 0$ où C_1 est une constante absolue indépendante de E puisque $\frac{1}{(z-z_0)} \in L^p(\Omega)$, $1 < p < 2$. Nous avons donc $C_1 \leq \gamma_p(E,\Omega) \leq \gamma_p(\Omega,\Omega) = C_2$, ce qui nous permet de conclure que l'on a toujours les inégalités

$$\gamma_p(\Delta \setminus F^0,\Omega) \leq C_2 \leq \frac{C_2}{C_1}C_1 \leq \frac{C_2}{C_1}\gamma_p(\Delta \setminus F,\Omega).$$

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii)

Soit $f \in H_p(F)$. Choisissons une suite (f_n) de fonctions analytiques dans un voisinage G_n de F telle que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{p,F} = 0$. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $f = 0$ sur $\mathbb{C} \setminus F$ et $f_n = 0$ sur $\mathbb{C} \setminus G_n$. Nous choisissons aussi les ouverts G_n de telle sorte que

$$\|f_n - f\|_{p,G_n} \leq \|f_n - f\|_{p,F} + \frac{1}{n}.$$

Ainsi nous obtenons

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{p,\mathbb{C}} = 0$$

et par conséquent

$$\left|\int f_n(\zeta)\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\zeta}}(\zeta)\,d\lambda(\zeta)\right| = \left|(T_\varphi f_n)'(\infty)\right| \leq C\|T_\varphi f_n\|_p\, \gamma_p\big(\Delta(z,\delta) \setminus F\big).$$

Il suffit donc de laisser n tendre vers l'infini et d'utiliser l'inégalité 1.5(a) pour obtenir (ii) avec $r = 1$ et $a(z,\delta) = \|f\|_{p,\Delta(z,\delta/2)}$.

$\triangleright$ (ii) $\Rightarrow$ (i).

Comme pour le cas Lip α, étant donné $\varepsilon > 0$ nous choisissons ρ et contruisons un ρ-recouvrement presque disjoint ainsi que les localisées f_j de f par rapport aux φ_j. Nous devons cependant ici apporter des précisions sur la construction des fonctions g_j qui contrôlent les coefficients $f_j'(\infty)$. Cette construction, dans les cas Lip α, était basée sur l'inégalité

$$\left|f_j'(\infty)\right| \leq C\|f_j\|_\alpha \gamma_\alpha(K_j)$$

où K_j est l'ensemble (compact) des singularités de f_j. Pour pallier au fait que les fonctions f_j ne sont pas nécessairement dans $L_p(F)$, mais seulement localement, nous utiliserons (ii) avec $\Omega = 2\Delta_j$. Ainsi, utilisant 1.5(a), l'on obtient, comme pour le cas Lip α,

$$|f_j'(\infty)| \leq C\varepsilon\gamma_p(r\Delta_j \setminus F,\, 2\Delta_j).$$

Il existe donc, pour chaque j, une fonction g_j holomorphe sur le complémentaire d'un sous-ensemble compact de $r\Delta_j \setminus F$ tel que $g_j(\infty) = 0$, $g_j'(\infty) = f_j'(\infty)$ et

$$\|g_j\|_{p,2\Delta_j} \leq C\|f_j\|_{p,2\Delta_j} \leq C\varepsilon$$

et la preuve suit maintenant celle du cas Lip α, en remarquant que $f_j - g_j \in L^p(\mathbb{C})$ et donc que les hypothèses du lemme du double zéro sont satisfaites. Nous pouvons donc appliquer le schème d'approximation et terminer la preuve comme dans le cas compact. (i)$'$ $\Rightarrow$ (ii)$'$ et (ii)$'$ $\Rightarrow$ (i)$'$ se démontrent de façon similaire au cas Lip α. □

2.4 BMO.

Théorème 2.4.1 (voir [23] pour le cas compact). *Soit F un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathrm{VMO}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$. Alors les énoncés suivants sont équivalents:*

(i) $f \in H_0(F)$

(ii) *Il existe un $r \geq 1$ et une fonction $a(z,\delta)$ telle que $\lim_{\delta\to 0} a(z,\delta) = 0$, pour tout $z \in \mathbb{C}$, de telle sorte que*

$$\left|\int f(\zeta)\frac{\partial\varphi}{\partial\bar\zeta}(\zeta)\,d\lambda(\zeta)\right| \leq C\delta\|\nabla\varphi\|_\infty a(z,\delta)M^1\big(\Delta(z,r\delta)\setminus F\big)$$

pour chaque disque $\Delta(z,\delta)$ et chaque $\varphi \in C_0^1\big(\Delta(z,\delta)\big)$.

Théorème 2.4.2 (voir [23] pour le cas compact). *Soit F un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{C}$. Alors les énoncés suivants sont équivalents:*

(i)$'$ $H_0(F) = A_0(F)$

(ii)$'$ *Il existe des constantes $C > 0$ et $r \geq 1$ telles que*

$$M_*^1(\Delta \setminus F^0) \leq CM^1(r\Delta \setminus F)$$

pour tout disque ouvert Δ.

Remarque. Un résultat récent de P.J. Holden [10] caractérisant l'espace VMO(F) démontre que nous avons toujours l'inclusion $H_0(F) \subset A_0(F)$.

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii)

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) se démontre comme pour le cas compact [21] avec $r = 1$ et $a(z,\delta) = \sup_{\Delta \subset \Delta(z,\delta)} M(f,\Delta)$.

$\triangleright$ (ii) $\Rightarrow$ (i).

Comme pour le cas L^p, il nous faut apporter des précisions sur la construction des fonctions g_j. Nous devons comparer $\gamma_0(K_j)$ et $M^1(\Delta_j \setminus F)$. Nous pouvons supposer que F est borélien et devons remarquer que M^1 se compare à m^1 qui est une capacité de Choquet [2] et donc

$$\begin{aligned}\gamma_0(K_j) &\le CM^1_*(K_j) \le CM^1_*(\Delta_j \setminus F^0) \le CM^1(\Delta_j \setminus F) \le Cm^1(\Delta_j \setminus F)\\ &= C \sup_{\substack{Q \subset \Delta_j \setminus F \\ Q \text{ compact}}} m^1(Q) \le C \sup_{\substack{Q \subset \Delta_j \setminus F \\ Q \text{ compact}}} \gamma_0(Q) = C\gamma_0(\Delta_j \setminus F). \qquad \square\end{aligned}$$

REFERENCES

[1] T. BAGBY, *Quasi-topologies and rational approximation*, J. Functional Analysis **10** (1972), 259-268.

[2] L. CARLESON, *Problems on Exceptional Sets*, D. Van Nostrand, Princeton, 1967.

[3] A.M. DAVIE, *Analytic capacities and approximation problems*, Trans. Amer. Math. Soc. **171** (1972), 409-444.

[4] E.P. DOLŽENKO, *On Removal of Singularities of Analytic Functions*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) **97** (1971), 33-41 (English translation).

[5] T.W. GAMELIN, *Uniform Algebras*, Chelsea, New York, 1984 (2nd ed.).

[6] J. GARNETT, *Analytic Capacity and Measure*, Lect. Notes in Math., Vol. 297, Springer-Verlag, New York, 1972.

[7] N.H. HADJIISKI, *Vitushkin's type Theorems for Meromorphic Approximation on Unbounded Sets*, Proc. Conf. "Complex Analysis and Applications '81-Varna", 229-238, Bulgarian Acad. Sci., Sofia, 1894.

[8] L.I. HEDBERG, *Approximation in the mean by analytic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **163** (1972), 403-410.

[9] ———, *Non-linear potentials and approximation in the mean by analytic functions*, Math. Z. **129** (1972), 299-319.

[10] P.J. HOLDEN, *Extension theorems for functions of vanishing mean oscillations*, Pacific J. of Math. **142** (1990), 277–295.

[11] P. LINDBERG, *A construtive method for L^p-approximation by analytic functions*, Ark. Mat **20** (1982), 61-68.

[12] M.S. MEL'NIKOV, *Metric properties of analytic α-capacity and approximation of analytic functions with a Hölder condition by rational functions*, Math USSR Sb. **8** (1969), 115-124 (English Translation).

[13] A.H. NERSESJAN, *Uniform and tangential approximation by meromorphic functions (Russian)*, Izv. Akad. NAUK Arm SSR Ser. Mat. **7** (1972), 405-412.

[14] NGUYEN XUAN UY, *Removable sets of analytic functions satisfying a Lipschitz condition*, Ark. Mat. **17** (1979), 19-27.

[15] A.G. O'FARRELL, *Continuity properties of Hausdorff content*, J. London Math. Soc (2) **13** (1976), 403-410.

[16] ———, *Hausdorff content and rational approximation in fractional Lipschitz norms*, Trans. Amer. Math. Soc. **228** (1977), 187-206.

[17] ———, *Rational approximation in Lipschitz norms II*, Proc. Roy. Irish. Acad. Sect. A **79** (1979), 103-114.

[18] ———, *Estimates for capacities and approximation in Lipschitz norms*, J. Reine Angew. Math. **311/312** (1979), 101-115.

[19] A. ROTH, *Uniform and tangential approximation by meromorphic functions on closed sets*, Can. J. Math. **28** (1976), 104-111.

[20] C. SADOSKY, *Interpolation of Operators and Singular Integrals*, Marcel Dekker, New York, 1979.

[21] E.M. STEIN, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[22] J. VERDERA, *On C^m-rational approximation*, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 621-625.

[23] ———, *BMO-rational approximation and one-dimensional Hausdorff content*, Trans. Amer. Math. Soc. **297** (1986), 283-304.

[24] A.G. VITUSHKIN, *Analytic Capacity of Sets and Problems in Approximation Theory*, Russian Math. Surveys (English Translation) **22** (1967), 139-200.

[25] L. ZALCMAN, *Analytic Capacity and Rational Approximation*, Lect. Notes in Math., Vol. 50, Springer-Verlag, New York, 1968.

Recherches subventionnées en partie par une subvention du CRSNG, Canada.

ANDRÉ BOIVIN
Department of Mathematics
University of Western Ontario
London, Ontario
Canada N6A 5B7

JOAN VERDERA
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
08193 Bellaterra (Barcelona)
Espagne

Received: 27 February 1990.