El moviment a la geometria *

A. Reventós Tarrida
Secció de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

1 Introducció

L'objectiu d'aquesta lliçó inaugural és donar una visió global i unificadora de la geometria que ajudi l'estudiant a situar les diverses assignatures de geometria de la carrera dintre d'un únic context o cos de doctrina més ampli.

El mètode que he elegit és el de donar un passeig pel món de la geometria agafant com a fil conductor el concepte de moviment.

2 El quart postulat

A l'època d'Euclides, que és quan comença el nostre recorregut, el concepte de moviment havia estat molt i molt debatut. Recordem, si més no, Zenó d'Elea i les seves famoses paradoxes (anomenades fal·làcies per Aristòtil) d'Aquiles i la tortuga o la de la fletxa que no es podia moure perquè en un instant donat estava quieta i no podia trencar la unitat de temps.

Aristòtil, a la seva *Metafísica*, rebat els arguments de Zenó i distingeix entre matemàtiques i física dient: "Els objectes matemàtics estan entre les coses que existeixen a part del moviment. La física tracta de coses que tenen en elles mateixes el principi del moviment."

No és, doncs, gens estrany que quan Euclides tracta, a la seva gran obra *Elements*, de reduir tota la geometria a només cinc fets bàsics admesos per tothom, els famosos cinc postulats, a partir dels quals per raonaments

*Conferència inaugural del curs 92-93 a la Secció de Matemàtiques de la UAB.

lògics es poguessin anar retrobant tots els resultats coneguts, es topés amb el problema del moviment.

En efecte, els tres primers postulats diuen que es vol fer la geometria del regle i el compàs: per dos punts passa una única recta, les rectes es poden prolongar indefinidament i podem traçar circumferències de centre i radi arbitraris. El cinquè postulat és el famós postulat de les paral·leles (que per ell sol ens portaria moltes lliçons inaugurals com aquesta) i que diu essencialment que per un punt exterior a una recta hi passa una única paral·lela. Però avui fixarem la nostra atenció sobre el quart postulat:

"Tots els angles rectes són iguals."

Què vol dir Euclides amb això? Molts matemàtics, entre ells F. Klein, de qui parlaré tot seguit, pensen que amb aquest postulat Euclides volia evitar tota referència al moviment. En efecte, què vol dir que un angle recte de vèrtex un punt P sigui igual a un angle recte de vèrtex un altre punt Q? No es podria demostrar? (i, per tant, no seria un postulat sinó un teorema). Si intentem demostrar-ho, la primera cosa que se'ns acudeix és posar l'angle de vèrtex P sobre l'angle de vèrtex Q. Però això vol dir moure (!) i Euclides no ho podia fer. O sí que podia?

Per resoldre aquest dubte continuem llegint els *Elements*. Les tres primeres proposicions diuen com, donat un segment AB i una semirecta d'origen C, es pot trobar sobre aquesta semirecta un punt D tal que els segments AB i CD siguin iguals. Sembla que ja tenim, doncs, la solució: Euclides no pressuposava moviment, perquè sinó hauria simplement portat el segment AB sobre la semirecta donada. Però la proposició següent està dedicada al que avui coneixem com el criteri CAC (costat-angle-costat), això és, si dos triangles tenen dos costats iguals i l'angle comprès igual, llavors els triangles són iguals. Per fer això, en un determinat moment de la prova Euclides *aplica* el triangle ABC sobre $A'B'C'$, és a dir, mou els triangles l'un sobre l'altre sense ni tan sols preocupar-se que els costats es conservin rectes.

Bé, com veieu, la cosa és complicada però essencialment hi ha dues línies: els que pensen que el quart postulat és una manera amagada d'introduir moviment i els qui pensen que és una manera de desterrar el moviment.

Tot i aquests problemes la matemàtica es continua desenvolupant i nosaltres fem un salt en el temps d'uns 2.000 anys i ens presentem cap allà el 1820. A aquesta època el motor de la geometria no és aquest quart postulat sinó el cinquè. Apareixen els treballs de Lobatxevski i Bolyai que independentment descobreixen la geometria hiperbòlica (una geometria totalment coherent però que no compleix el cinquè postulat). Tot això fa necessària una reformulació d'Euclides per poder demostrar amb tot rigor la validesa d'aquesta nova geometria. S'inicien així diversos treballs que culminen en dues visions una mica diferents: la de F. Klein *(moviment)* i la de D. Hilbert *(no moviment)*.

Expliquem breument la solució de D. Hilbert i passem després a comentar amb més calma la solució de F. Klein.

L'obra de D. Hilbert *Grundlagen der Geometrie* apareguda l'any 1900 és la culminació del treball de molts matemàtics, especialment de M. Pasch. La reformulació de l'obra d'Euclides consisteix essencialment a considerar que d'entrada tan sols tenim un parell de conjunts (em restringeixo a la geometria plana), els elements dels quals no definim però que anomenem respectivement *punts* i *rectes*. Suposem llavors que entre els elements d'aquests conjunts hi ha unes certes *relacions*, que no definim, però que han de complir uns axiomes o unes propietats: incidència, ordre, continuïtat i congruència.

Els axiomes d'incidència fan referència al fet que per dos punts passa una recta, etc. Els axiomes d'ordre permeten parlar de segments i els de continuïtat construeixen els nombres reals. Els axiomes de congruència diuen essencialment que *"Donat un segment AB i una semirecta d'origen C, existeix un únic punt D sobre aquesta semirecta tal que el segment AB es congruent al segment CD"*. I semblantment per a angles. Llavors la proposició 4 d'Euclides s'ha de posar com a axioma (això és, no hi ha manera d'arreglar la demostració d'Euclides!) i el quart postulat passa a ser un teorema.

L'altra solució, que de fet és anterior, és la que proposa F. Klein el 1872 en la seva conferència per a poder obtenir una plaça de professor a Erlangen i que es titula *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen,* coneguda avui universalment com *Programa d'Erlangen*.

La idea és essencialment la mateixa de Hilbert: hi ha uns conjunts que no defineixo, amb unes relacions entre ells que tampoc defineixo, però que han de complir uns axiomes d'incidència, ordre i continuïtat. En lloc però d'introduir la paraula *congruència* es diu que existeix un *grup de col·lineacions transitiu* ∞^3.

Què vol dir això? Per què surten per aquí enmig els grups? Què son els grups i d'on vénen?

3 Inici de la teoria de grups

Podríem dir que l'inici de la teoria de grups es remunta als treballs de Lagrange sobre la possibilitat de resoldre les equacions polinòmiques de cinquè grau per radicals i també a Abel que és qui realment demostra aquesta impossibilitat. Però sobretot a Galois que estudia la possibilitat de resoldre per radicals una equació concreta de cinquè grau. La idea central és associar a cada equació un subgrup del grup de permutacions de les seves arrels (de fet és Galois qui primer utilitza l'expressió *grup de permutacions*), concretament aquelles permutacions que deixen invariants unes certes relacions algebraiques entre les arrels. Introdueix el concepte de *grup resoluble* a partir de l'estructura intrínseca del grup i demostra que l'equació és resoluble si i només si el grup és resoluble. La idea és, doncs, que tota la informació està en el grup.

El treball de Galois va quedar però bastant de temps en l'oblit. Afortunadament havia enviat una carta a Cauchy i a la mort d'aquest, el 1857, Jordan és encarregat de publicar la seva obra. Troba la carta de Galois i es dedica intensament des de llavors a posar en clar i en el lloc que li corresponia l'obra de Galois. S'adona totalment de la importància del concepte de grup, coneix perfectament nombrosos exemples de grups discrets (com per exemple els moviments que deixen fix un quadrat) i grups continus (desplaçaments, afinitats, el grup projectiu) i publica una memòria titulada justament *Mémoire sur les groupes de mouvements.* Tot això ho trobareu molt ben explicat en una conferència sobre l'inici de la teoria de grups publicada per l'Institut d'Estudis Catalans a càrrec del malaurat professor i amic Pere Menal, a qui vull expressament recordar avui.

Sobre aquesta època de màxima dedicació de Jordan als grups (1870) apareixen per París dos estudiants postgraduats procedents de Berlín, un d'ells però noruec. Són Sophus Lie i Felix Klein. El primer uns set anys més gran que el segon. Han publicat un article conjunt sobre *W*-corbes, que són unes corbes que ells mateixos introdueixen i que tenen la propietat que donats dos punts qualssevol d'ella existeix una projectivitat que respecta la corba i porta l'un sobre l'altre. Aquest treball inspirarà profundament tota l'obra posterior dels dos matemàtics.

Lamentablement no poden passar massa temps a París perquè els sorprèn la guerra franco-prussiana i el noruec S. Lie és confós per un espia i és empresonat a Fontainebleau d'on surt un mes després gràcies al també gran matemàtic G. Darboux. De tota manera, aquest període influeix decisivament en les seves vides. Lie, sobretot, es dedicà ja sempre més a l'estudi de la teoria de grups, especialment als grups continus, i desenvolupà ell tot sol una teoria de vital importància coneguda avui dia com *teoria dels grups de Lie.*

Pensem, per exemple, en el grup dels desplaçaments del pla:

$$\begin{pmatrix} \cos x_1 & \sin x_1 & x_2 \\ -\sin x_1 & \cos x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos x_1 + b\sin x_1 + x_2 \\ -a\sin x_1 + b\cos x_1 + x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Com que el desplaçament està determinat per x_1, x_2, x_3 podem pensar que el que tenim és de fet un punt de $\mathbb{R}^3$ i a la composició de desplaçaments li correspon un altre desplaçament que podem tornar a escriure amb notació matricial o simplement posant $(x_1, x_2, x_3) * (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 \cos x_1 + y_3 \sin x_1, x_3 - y_2 \sin x_1 + y_3 \cos x_1)$.

Aquesta idea és essencialment la que desenvolupa Lie tot definint *grup local* com un obert de $\mathbb{R}^n$ amb un producte diferenciable

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = x * y$$

tal que

$$x * e = e * x = x$$

$$x * (y * z) = (x * y) * z$$

(l'existència d'invers es dedueix llavors d'aquí).

La idea genial de S. Lie és associar a tot grup diferenciable un objecte algebraic molt senzill, concretament un espai vectorial, però, això sí, on es puguin multiplicar vectors (aquests espais es coneixen avui dia com *àlgebres de Lie*).

Això està relacionat amb la no commutativitat del grup. En efecte, aquest producte de què parlàvem el defineix així: siguin $a(t)$ i $b(t)$ dues corbes que passen pel neutre en l'instant $t = 0$. Llavors definim el producte dels seus vectors tangents en el 0 com

$$[\dot{a}(0), \dot{b}(0)] = \dot{c}(0)$$

on

$$c(t) = a(t)b(t)a(t)^{-1}b(t)^{-1}$$

(Pensem per exemple que $a(t)$ representi un gir d'angle t i $b(t)$ una translació respecte a un vector que també depèn de t.)

Arriba a fer amb les equacions diferencials el mateix que Galois amb els polinomis: els associa un grup diferenciable, estudia si és o no resoluble com a grup i demostra que l'equació diferencial és resoluble per quadratures si i només si el grup és resoluble.

Ara que ja tenim una idea d'on vénen els grups tornem a Klein, que, com hem dit, tenia una gran relació amb Lie i era un dels principals convençuts de la importància de la teoria de grups a la geometria. En el seu *Programa d'Erlangen* que hem comentat abans proposa la següent definició de geometria:

> *"És la Ciència que estudia les propietats de les figures que es conserven sota l'actuació d'un cert grup de transformacions."*

Per actuació entenem una aplicació

$$\begin{array}{ccc} G \times M & \longrightarrow & M \\ (g, m) & \longmapsto & g \cdot m \end{array}$$

tal que

$$(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$$
$$1 \cdot m = m$$

(penseu novament en el cas dels desplaçaments). Això va representar un gran avenç i va donar una visió unificadora a diversos estudis ja coneguts: geometria afí, euclidiana, projectiva, mètrica...

De fet totes es poden interpretar com geometries associades a subgrups del grup projectiu. És per això que Cayley va dir: *"La geometria projectiva és tota la geometria."* Ara bé, aquesta frase estava lluny de ser veritat i el mateix F. Klein ho sabia molt bé perquè mentre tot això passava es desenvolupava amb força tota una branca de la geometria on la idea de grup no hi tenia aparentment cabuda. Aquesta branca era la geometria riemanniana que resumiré molt breument en el paràgraf següent.

4 Gauss i Riemann

L'iniciador és Karl Friedrich Gauss en el seu treball *Disquisitiones generales circa superficies curvas* publicat el 1828, més o menys a la mateixa època que apareixien els treballs de Lobatxevski i Bolyai sobre geometria hiperbòlica, tema, per cert, que Gauss dominava totalment ja abans de la publicació d'aquests treballs. Per explicar una mica la idea de Gauss suposem que tenim una corba $(x(t), y(t), z(t))$ a $\mathbb{R}^3$ de la qual sabem que està sobre una esfera de radi 1.

Si diem θ i ϕ a la longitud i la latitud d'un punt de l'esfera tenim

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos\phi(t)\cdot\cos\theta(t) \\ y(t) &= \cos\phi(t)\cdot\sin\theta(t) \\ z(t) &= \sin\phi(t) \end{aligned}$$

Podem pensar la corba com un punt que es mou sobre l'esfera i que en cada instant t té una longitud $\theta(t)$ i una latitud $\phi(t)$. L'espai recorregut per aquest punt en un temps t està donat per

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{dx}{dt}^2 + \frac{dy}{dt}^2 + \frac{dz}{dt}^2} = \int_0^t \sqrt{\frac{d\phi}{dt}^2 + \cos^2\phi\cdot\frac{d\theta}{dt}^2}$$

Si ara derivem, elevem al quadrat i ens oblidem dels diferencials de t, obtenim

$$ds^2 = d\phi^2 + \cos^2\phi\cdot d\theta^2$$

expressió de l'element d'arc que permet calcular longitud de corbes (i, per extensió, àrees, etc.) a un habitant de la superfície sense sortir d'aquesta superfície. És com un regle que porten al damunt tots els esfèrics (això és, els habitants de l'esfera). Això es generalitza clarament a quassevol superfície. L'expressem en coordenades

$$x = x(u, v)$$

$$y = y(u, v)$$

$$z = z(u, v)$$

procedim llavors com abans, i obtenim

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Uns anys després, el 1854, Georg Friedrich Bernhard Riemann presenta la memòria titulada *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Gründe liegen* per tal d'accedir a una plaça de professor a Göttingen, en una situació semblant a la de F. Klein divuit anys més tard.

Sembla ser que tan sols el president del tribunal es va adonar de la importància del treball. I és que aquest president era justament Gauss! Riemann comença comentant que els problemes dels geòmetres en la fonamentació de la geometria rauen en el fet que no coneixen profundament la naturalesa de l'espai ni saben distingir entre les seves propietats topològiques i mètriques.

El seu treball és realment molt profund però ara el presento només com una generalització a dimensions superiors de la teoria de superfícies de Gauss. Introdueix el concepte de quantitat múltiplement estesa on necessita n coordenades $x_1, ..., x_n$ per localitzar els punts i proposa que per mesurar longituds s'utilitzi una expressió quadràtica en les diferencials d'aquestes funcions, tipus Gauss

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j$$

la qual cosa filosòficament significa treure a les rectes el paper predominant que tenien sobre les altres corbes com es feia clàssicament quan per a calcular la longitud d'una corba se l'aproximava per una poligonal. A continuació Riemann es pregunta si aquest tipus d'expressions quadràtiques, que anomenarem mètriques, estan molt lluny de la mètrica euclidiana habitual. Concretament es pregunta si existeixen coordenades locals $y_1, ..., y_n$ tals que

$$\sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j = \sum_{i,j} dy_i dy_j.$$

Aquest és el problema que més aborda Riemann a la seva memòria i que condueix, com veieu, a una equació en derivades parcials que és integrable quan s'anul·la una certa expressió complicada. En el cas de dimensió dos aquesta expressió coincideix amb la curvatura de Gauss, terme introduït per Gauss tot comparant les superfícies amb l'esfera. Així, doncs, Riemann anomena també curvatura a aquesta quantitat i es preocupa de trobar, localment, les *varietats* (quantitats múltiplement esteses) de curvatura constant. Veu que són l'esfera $\mathbb{S}^n$, l'espai hiperbólic $\mathbb{H}^n$, i $\mathbb{R}^n$ segons si la curvatura és positiva, negativa o zero.

Aquest treball és prosseguit per Christoffel i sobretot i més sistemàticament per Ricci (1887-1896). L'objecte principal d'estudi aquí no és el moviment sinó el paral·lelisme. Què vol dir que vectors tangents en punts diferents d'una varietat siguin paral·lels? Per analogia amb el que passa a $\mathbb{R}^n$ hauríem d'unir els punts amb una *recta* i *moure* el vector sobre la recta mantenint constant la norma del vector i l'angle amb la recta. Torna a aparèixer el moviment! I a més tampoc sabem què és una recta en una varietat.

Pensem per exemple que tenim un parell de punts P i Q sobre un paral·lel d'una esfera. Què vol dir que un vector tangent v a l'esfera en P és *paral·lel* a un vector w tangent a l'esfera en Q? Si movem v paral·lelament com si estiguéssim a $\mathbb{R}^3$, en arribar al punt Q no tindrem un vector tangent a l'esfera. En tot cas el podríem projectar..., però això ens faria canviar la norma!

El que sí podem fer és considerar el con circumscrit a l'esfera al llarg del paral·lel. Aprofitant llavors que, al llarg d'aquest paral·lel els plans tangents de l'esfera i del con coincideixen, podem desenvolupar el con sobre el pla (cosa que podem fer sense canviar les distàncies!) de manera que els nostres vectors v i w es veuen ara com vectors sobre el pla. Si ara són paral·lels en el pla, direm que són paral·lels a l'esfera. D'aquesta manera podem *moure paral·lelament* el vector v al llarg de tot el paral·lel fins a tornar al punt inicial.

Contràriament al que passa a $\mathbb{R}^n$ ara ens trobem que en donar tota la volta no tornem al vector inicial sinó que si el con tenia semiamplitud α el vector final ha donat un gir respecte a l'inicial de $2\pi \sin \alpha$.

Ricci aconsegueix precisar el concepte de transport paral·lel al llarg d'una corba sobre una varietat i dóna les fórmules generals següents:

$$\frac{dX^k}{dt} + \Gamma^k_{ij} X^i \frac{dx^j}{dt} = 0 \qquad\qquad k = 1, \ldots, n$$

on

$$X = X^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

és el camp vectorial que en el punt donat coincideix amb el vector que volem traslladar al llarg de la corba $x_1(t), ..., x_n(t)$. Els símbols Γ^k_{ij} representen unes funcions que depenen de la mètrica i de les seves derivades. Es diuen *símbols de Christoffel.*

Ricci observa que per poder fer transport paral·lel tan sols necessita tenir els símbols de Christoffel i que, en certa manera, es pot oblidar que provenen d'una mètrica. Això el porta a generalitzar el concepte de varietat de Riemann al concepte de varietats amb connexió, això és, varietats sobre les quals estan definides localment unes funcions Γ^k_{ij} que canvien de coordenades com ho feien els anteriors símbols de Christoffel (de manera no tensorial, per cert). Sobre aquestes varietats ens podem *moure paral·lelament* al llarg de corbes.

Tot això tan interessant és l'àmbit natural que permet a Einstein formular la teoria de la relativitat i és també conegut per Klein, que tracta d'interpretar aquestes geometries dins el seu programa d'Erlangen però sense aconseguir-ho. Diu explícitament que voldria connectar Riemann amb Galois.

Qui aconsegueix fer això d'una manera satisfactòria és H. Poincaré, molt més jove que Klein, la qual cosa provoca una rivalitat científica entre ells que acabaria amb la salut de Klein.

L'observació de Poincaré és que les homografies del semiplà són les isometries d'una mètrica de Riemann de curvatura constant. Concretament tenim l'acció

$$\begin{array}{ccc} SL(2;\mathbb{R}) \times \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ (\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z) & \longmapsto & \dfrac{az+b}{cz+d}. \end{array}$$

Aquesta acció és transitiva a nivell d'espais tangents i és una isometria de la mètrica de Poincaré de $\mathbb{H}$:

$$g = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$$

Recordem que acció transitiva a nivell de punts vol dir que donats dos punts qualssevol existeix un element del grup que porta l'un sobre l'altre. I transitiva a nivell d'espais tangents vol dir que donats dos vectors qualssevol existeix un element del grup (de fet la seva derivada) que porta l'un sobre l'altre.

Tenim, doncs, un espai que és a la vegada una varietat de Riemann i una geometria en el sentit de Klein. Dit d'una altra manera, la geometria riemanniana de $\mathbb{H}$ és l'estudi de les propietats de les figures de $\mathbb{H}$ invariants per l'acció del grup d'isometries SL(2;$\mathbb{R}$).

La geometria riemanniana de curvatura 0 s'interpreta com la geometria de Klein de l'acció natural

$$\{\text{Desplaçaments}\} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

La geometria riemanniana de curvatura positiva s'interpreta com la geometria de Klein de l'acció natural

$$O(3) \times \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2.$$

De fet sempre podem pensar la geometria riemanniana com una geometria de Klein: la geometria del grup d'isometries de la mètrica actuant de manera natural sobre la varietat. Ara bé, si volem recuperar les geometries clàssiques, en el sentit de poder comparar figures situades a punts diferents de la varietat, que l'anterior acció sigui transitiva, tant a nivell de punts (varietats homogènies) com a nivell d'espais tangents (varietats isotròpiques). Això ens implica automàticament que la varietat de Riemann ha de tenir curvatura constant.

Observeu que l'anterior afirmació en dimensió 2 és òbvia, perquè en aquest cas la curvatura és una funció. Si aquesta funció és invariant per una acció transitiva, clarament és constant. No obstant això, en dimensió superior podem tenir una acció transitiva del grup d'isometries a nivell de punts i no tenir curvatura constant. Per exemple, tota mètrica biinvariant sobre un grup de Lie té curvatura seccional donada per

$$k(X,Y) = \frac{1}{4}||[X,Y]||^2$$

i, per tant, si el grup no és abelià, no és constant. En canvi, el mateix grup de Lie actua transitivament per isometries (les translacions per l'esquerra). Fa falta també transitivitat a nivell d'espais tangents.

5 Elie Cartan

Així doncs, tot i que la geometria riemanniana de curvatura no constant es podia interpretar com una geometria de Klein, la del grup d'isometries, aquest punt de vista no era enriquidor, perquè no coneixem aquest grup més que a partir de la varietat.

A més, les varietats amb connexió introduïdes per Ricci quedaven totalment fora del punt de vista del programa d'Erlangen.

Són molts els matemàtics que treballen amb la idea, fundada en la teoria de grups, de trobar una geometria diferencial general tal que els mètodes d'aquesta nova geometria s'apliquin a la vegada a la geometria diferencial i a la geometria de Klein.

Els primers intents seriosos són de Shouten, però el vertader artífex d'aquesta visió unificada fou el deixeble de Klein, Elie Cartan, en una sèrie de treballs publicats al voltant de l'any 1925.

La idea essencial de Cartan és retornar al tractament clàssic, concretamet al donat per Frénet i Darboux que consideraven *tríedres mòbils* al llarg de corbes (Frénet) i superfícies (Darboux).

Expliquem breument el mètode del triedre mòbil tal com estava abans de Cartan.

Suposem un cos sòlid que es mou a l'espai i fixem un punt A d'aquest sòlid i una base de vectors de $\mathbb{R}^3$ amb origen A (una *referència*). Sigui M un punt del cos. Escrivim:

$$AM = x^i \cdot e_i$$

amb x^i constants. En cada instant t tindrem

$$A(t)M(t) = x^i \cdot e_i(t)$$

Derivem per trobar la velocitat de M

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dA}{dt} + x^i \frac{de_i}{dt}$$

$i = 1, 2, 3$. Així doncs, el coneixement dels 4 vectors $\frac{dA}{dt}, \frac{de_i}{dt}$ ens permet de conèixer $\frac{dM}{dt}$.

Escrivim ara aquests vectors, però no respecte a una base fixa de $\mathbb{R}^3$, sinó respecte a la base que es va movent amb el cos. Tindrem

$$\frac{dA(t)}{dt} = \theta^i(t)e_i(t)$$

$$\frac{de_i(t)}{dt} = \omega_i^j(t)e_j(t)$$

on $\theta^i(t)$ i $\omega_i^j(t)$ són unes certes funcions de t. Escriurem simplificadament aquestes equacions com

$$dA = \theta e$$

$$de = \omega e$$

Aquestes velocitats són les que s'obtindrien també si haguéssim fet una translació de vector $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ i rotació d'angles $(\omega_2^3, -\omega_1^3, \omega_1^2)$.

Com que $e_i \cdot e_j = 0$ tenim que $\frac{de_i}{dt} \cdot e_j = -e_j \cdot \frac{de_i}{dt}$. Per tant la matriu ω és antisimètrica. Així les equacions anteriors queden determinades per sis variables: tres θ'^s i tres ω'^s.

Observem que en el cas particular en que $\frac{dA}{dt} = e_1$ i $e_2 = k \cdot \frac{de_1}{dt}$ obtenim exactament les clàssiques fórmules de Frénet:

$$\begin{aligned}
\frac{de_1}{dt} &= ke_2 \\
\frac{de_2}{dt} &= -ke_1 + \tau e_3 \\
\frac{de_3}{dt} &= -\tau e_2
\end{aligned}$$

Aquest sistema d'equacions no és més que una equació diferencial ordinària i, per tant, podem obtenir la corba per integració. És a dir

> *El coneixement de les posicions relatives de tríedres infinitament pròxims (això és, el coneixement de la curvatura i la torsió) determina la corba llevat de moviments rígids.*

Per tant, s'ha de posar l'èmfasi, més que en l'espai, en la relació entre referències pròximes.

Darboux generalitza a superfícies aquesta idea de la referència móbil de Frénet tot suposant que A i e_i depenen de dues variables, i no només del temps com en el cas anterior. Així com Frénet considera el cas en què e_1 és tangent a la corba, Darboux imposa que e_3 sigui el vector unitari normal a la superfície. Estudia així les superfícies i obté també que queden determinades per aquests invariants diferencials, però han de complir una certa condició que prové de la condició d'integrabilitat de l'equació en derivades parcials que ara apareix en lloc de les equacions diferencials ordinàries (i, per tant, sempre integrables) de Frénet. Obté així les avui anomenades equacions de Darboux.

Cartan coneix tot això i ho vol aplicar a espais més generals. Per això, el primer que fa és mirar de reinterpretar-ho en el context de la geometria de Klein. El primer problema que es troba és el de definir referència. El resol tot observant que en els casos coneguts sempre existeix un únic moviment (element del grup) que porta una referència sobre l'altre. Això li suggereix la següent definició, vàlida sempre que tinguem un grup actuant sobre un conjunt:

> *Una família de figures constituirà un sistema de referències si existeix un únic element del grup que porta una sobre l'altra.*

(de fet sempre es pot pensar que aquesta figura està formada per uns quants punts ordenats).

Aquesta manera de pensar li permet interpretar les equacions de Frénet i Darboux com equacions sobre el grup de desplaçaments, i no sobre $\mathbb{R}^3$. Aquest és l'àmbit natural d'aquestes equacions. Diu explícitament que *les equacions viuen en el grup.*

És capaç llavors de generalitzar aquesta situació sempre que les accions del grup sobre l'espai que consideri siguin transitives (és a dir, que donats dos punts qualssevol de l'espai sempre hi ha un element del grup que porta un sobre l'altre).

En aquesta situació, Cartan retroba les equacions de Darboux, que escriu simplement com

$$d\theta^i = c^i_{jk}\theta^j \wedge \theta^k$$

on c^i_{jk} són constants. Aquestes equacions es coneixen avui dia com *equacions de Maurer-Cartan.*

Les c^i_{jk} són les *constants d'estructura* de l'àlgebra de Lie del grup, que té justament les θ^i com a base de formes invariants per l'esquerra. En particular obté una interpretació global de les equacions de Darboux, que eren locals.

Aquestes equacions són *el cor de la geometria diferencial moderna i de la teoria de grups de Lie, defineixen el grup i l'espai de Klein corresponent*, diu Cartan.

També recupera les components ω^i_j de Darboux (de fet $\omega^i_k = c^i_{jk} \cdot \theta^j$) i observa que es compleixen les equacions

$$d\theta^i = \omega^i_k \wedge \theta^k$$

i

$$d\omega^i_j = \omega^i_k \wedge \omega^k_j$$

anomenades avui *equacions d'estructura.*

Les escriurem simplificadament

$$d\theta = \theta \wedge \omega$$

$$d\omega = \omega \wedge \omega$$

La interpretació geomètrica profunda de les equacions d'estructura és que donen una relació entre una referència i la referència transformada per un moviment infinitesimal del grup. El concepte de *moviment* està, doncs, amagat en aquestes $\theta's$ i $\omega's$.

En la situació anterior, en compondre aquestes transformacions al llarg d'una petita corba tancada, la composició producte és finalment la identitat, és a dir, en moure'ns al llarg d'una petita corba tancada retornem a la posició inicial. Direm que estem en un espai de Klein holònom. Aquest seria el cas dels grups de Lie actuant sobre ells mateixos per translacions per l'esquerra.

En cas contrari direm que tenim un espai de Klein generalitzat no holònom.

Per construir aquests espais Cartan observa que, un cop fixada una referència generalitzada, les altres s'identifiquen amb els elements del grup. Per tant podem pensar que en cada punt de l'espai tenim un grup de Lie (una geometria de Klein holònoma).

Així com abans les equacions de Maurer-Cartan donaven tota la informació, ara no. Fa falta una llei que permeti relacionar geometries de Klein pròximes, és a dir, fan falta unes equacions de Darboux per a aquests espais generalitzats no holònoms.

Aquesta idea de relacionar geometries pròximes és semblant a la idea de Ricci, però més general perquè Ricci treballa només amb vectors tangents.

Per aconseguir aquestes equacions de Darboux generalitzades suposa que localment l'espai que té és un producte del tipus $M \times G$, on M representa l'espai i G el grup. És a dir suposa, com hem dit abans, que en cada punt p de M hi tenim tot el grup G. Per relacionar ara les fibres $\{p\} \times G$ i $\{q\} \times G$ necessita tenir com una mena de gràfica en aquest producte, que es podrà descriure per tant com el nucli d'una forma diferencial del tipus

$$dx_i + \omega^i_j \cdot \theta^j = 0$$

on les θ^j són les 1-formes invariants per l'esquerra generadores de l'àlgebra de Lie de G, i x_i són coordenades locals sobre M.

Les ω^i_j són pràcticament qualsevol sistema de 1-formes amb l'única condició que l'anterior expressió local sigui invariant pels canvis de coordenades. També direm que aquestes formes defineixen una *connexió* sobre aquest espai generalitzat. En no imposar gairebé condicions sobre aquestes ω^i_j ja no es compleixen les equacions d'estructura. De fet ara tenim

$$d\theta = \theta \wedge \omega + T$$

$$d\omega = \omega \wedge \omega + \Omega$$

Aquesta T i aquesta Ω, que abans no apareixien i ara sí, s'anomenen respectivament *torsió* i *curvatura* de la connexió.

Tampoc es compleix que en moure una referència al llarg d'una petita corba tancada es retorni a la posició inicial. De fet la referència final s'obté en aplicar un element del grup a la referència inicial. Aquest element no depèn del punt.

Això permet definir *subgrup d'holonomia* de la connexió com el subgrup de G generat per cicles petits, és a dir, format per aquells elements de G necessaris per passar d'una referència inicial a una de final en anar variant les petites corbes tancades sobre les quals movem les referències.

Així cada espai generalitzat té associat un grup, que és un subgrup del grup G, i per tant podem obtenir informació sobre la geometria d'aquest espai estudiant els subgrups de G. Això sí que és semblant a la teoria de Galois, perquè aquest subgrup d'holonomia mesura el fet que l'espai sigui o no un espai de Klein (semblant a la resolubitat).

Aquests espais generalitzats o *fibrats principals* engloben la geometria riemanniana i la geometria de Klein.

En efecte, una varietat de Riemann no és més que un fibrat principal de grup $O(n;\mathbb{R})$. Per tant, podem obtenir informació sobre les varietats de Riemann tot estudiant els subgrups de $O(n;\mathbb{R})$. El mateix Cartan ho aplica amb èxit a classificar localment les varietats de Riemann de dimensió tres estudiant totes les possibles holonomies, és a dir, estudiant exhaustivament tots els subgrups de $O(3;\mathbb{R})$.

Les geometries de Klein corresponen, en aquest nou marc, als fibrats principals homogenis, és a dir, els que són localment de la forma $G/H \times H$ perquè sempre que tenim un grup de Lie G actuant transitivament sobre M tenim $M \simeq G/H$ on H és la isotropia d'aquesta acció.

Cartan aplica aquest nou punt de vista a l'estudi d'equacions diferencials, de mètriques de Finsler, de geometria tèxtil (Blashke)..., troba en cada cas el fibrat adequat i la connexió adequada, cosa no pas fàcil en alguns casos.

Resumint, podríem dir que *la geometria diferencial moderna és l'estudi dels fibrats principals i les connexions en aquests fibrats.*

Espero que aquesta conferència serveixi de motivació als nostres alumnes i també ens serveixi a nosaltres, els professors, per no introduir sense més ni més els fibrats principals com una terna $P(M,G)$ que compleix unes certes propietats. Recordem que *qui perd els orígens, perd la identitat.*

Referències

[1] E. Cartan. *La théorie des groups finis et continus et la Géométrie Différentielle.* Gauthier-Villars, París (1951).

[2] E. Cartan. *Oeuvres Complètes.* Gauthier-Villars, París (1955).

[3] Euclid.*The Elements.* Dover Publications,inc. New York (1956). Edició comentada per T.L.Heath.

[4] D. Hilbert. *Les Fondements de la Géométrie.* Dunod, París (1971).

[5] C. Jordan. *Oeuvres.* Gauthier-Villars (1961).

[6] P. Menal. *Els inicis de la teoria de grups.* Arxius de la Secció de Ciències de l'Institut d'Estudis Catalans. Barcelona (1984). (Dins el volum *El desenvolupament de les matemàtiques al segle XIX* a cura de M. Castellet).

[7] I. M. Yaglom. *Felix Klein and Sophus Lie.* Birkhaüser (1988).