Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 15, núm. 2, 2000. Pàg. 7–16

Aventures encara més extraordinàries del grup més petit de tots*

Jaume Aguadé

1 Introducció

Ara fa uns anys vaig tenir també, com avui, l'honor i la satisfacció d'adreçar-me a tots vostès amb motiu de la inauguració del curs acadèmic. En aquella ocasió vaig parlar d'un grup molt gran, el grup de Lie compacte, excepcional, simple i simplement connex de dimensió 248 anomenat E_8, amb motiu de complir-se el centenari del seu descobriment.[1] Avui, en canvi, voldria parlar d'un grup molt petit, el més petit de tots (fora del grup trivial): el grup que, a més de l'element neutre, té només un altre element τ, el qual, necessàriament, operat amb ell mateix ha de donar l'element neutre. En tractar-se d'un grup tan i tan petit, hom podria pensar que no hi trobarem cap dels meravellosos paisatges amb què ens va obsequiar el gegantí E_8. Veurem que, ben al contrari, un objecte d'aparença tan modesta com el grup de dos elements ens pot conduir, si ens obstinem a esbrinar els seus secrets, a paratges més enllà d'on la nostra imaginació pot albirar. De fet, la principal dificultat que he tingut a l'hora de preparar aquesta lliçó ha estat la d'escollir, d'entre tants i tants episodis prodigiosos de la vida d'aquest grup minúscul, unes quantes escenes que puguin presentar-se aquí en el breu espai de temps de què disposo.

La nostra educació de matemàtics del segle XX ens impulsa a pensar un grup com un *conjunt amb una operació binària associativa que té element neutre i tal que cada element té un invers*. Vist amb les ulleres fosques que el general Bourbaki ens ha penjat del nas i que molts de nosaltres ens entestem a penjar del nas dels nostres estudiants, el grup de dos elements no seria res més que $(\{0,1\},+)$ amb l'operació $+$ descrita per

+	0	1
0	0	1
1	1	0

No sembla gaire excitant. Afortunadament, la realitat és molt més rica que tot

∗ Lliçó inaugural del curs 1999–2000 a la llicenciatura de matemàtiques de la UAB. L'autor ha mantingut en aquest text el to col·loquial i informal de la conferència a què va donar lloc.

1 Vegeu «Cent anys de E_8», *Butll. Soc. Cat. Mat.*, 7 (1992), 61–69.

això: el concepte culturalment significatiu de grup és el concepte de *grup de transformacions*.[2] Així, el grup de dos elements del qual vull parlar, l'hem d'entendre com *una transformació τ que, feta dues vegades, deixa les coses tal com estaven:*

$$\tau^2 = I.$$

D'aquesta transformació τ en direm una *involució*. Del que vull parlar avui és, doncs, de l'estudi d'un espai X amb una involució τ.

2 Alguns exemples

Comencem posant alguns exemples que, d'una banda, ens serviran per començar a fixar la nostra atenció en el que volem estudiar i, d'una altra, ens seran útils quan arribem al lloc on vull fer cap.

Pensem en l'esfera S^2. Se'ns acudeixen tres involucions τ:

- Una rotació de 180 graus al voltant d'un eix qualsevol de l'esfera.
- Una reflexió respecte d'un pla de simetria.
- La involució que transforma cada punt en el seu antipodal.

N'hi ha d'altres? Els que coneixeu la teoria dels valors propis sabeu que, si una matriu 3×3 (diferent de I) compleix $A^2 = I$, aleshores hi ha un sistema de coordenades apropiat en el qual la matriu A és d'un dels tres tipus anteriors. Però una involució pot molt bé no venir donada per una matriu. τ pot ser una funció contínua qualsevol. Què és el que passa?

Aquí és on em convé introduir el concepte d'*homotopia*, que serà present al llarg de tota aquesta xerrada. Una homotopia és una *deformació contínua*. Si tinc dues transformacions τ i τ' tals que jo puc passar de l'una a l'altra per una sèrie contínua de transformacions, diré que són *homòtopes* i, des del nostre punt de vista, les consideraré com intrínsecament equivalents. Dos espais tals que un es pugui transformar en l'altre i l'altre en l'un per una deformació contínua, direm que són del mateix tipus d'homotopia i, també, els considerarem com intrínsecament equivalents. Com a primer exemple, una esfera sòlida es pot deformar en un punt (però una esfera S^2 no és pas del mateix tipus d'homotopia que un punt!).

Tornem a la nostra pregunta anterior. Quines són les involucions de l'esfera S^2? El cas és que L. E. J. Brouwer[3] va demostrar (als primers anys d'aquest segle que se'ns acaba) que, llevat d'homotopia, l'esfera no admet cap altra involució que no sigui la rotació de 180 graus, la reflexió respecte de l'equador o la transformació antipodal.

Si volem més exemples, podem pensar ara en l'esfera de dimensió 3, S^3. Podríem parlar sense límit d'aquest objecte fascinant, *mais ça nous entraînerait trop loin.*[4] D'una manera elemental, podem imaginar S^3 com l'espai en què vivim (?) al qual hem afegit un punt a l'infinit, en el qual convergeixen totes les línies que s'allunyen

2 M'agrada que el diccionari de l'IEC hagi adoptat, en certa manera, aquest punt de vista.

3 Luitzen Egbertus Jan Brouwer, un dels pares de la topologia, va ser un matemàtic genial, un pensador heterodox i controvertit i una persona esquerpa i conflictiva. La seva obra emblemàtica *Vida, art i misticisme* ens resulta, avui dia, totalment repulsiva. Hi ha una teoria que afirma que les magnífiques contribucions de Brouwer a la topologia —fetes totes en el període 1909–1912— tenien l'objectiu d'assegurar-li una posició acadèmica des de la qual fos més fàcil defensar el seu programa «ideològic».

4 Com ja ens va advertir Poincaré.

cap a l'infinit. L'equador d'aquesta S^3 és una S^2, l'interior de la qual és un dels hemisferis de S^3, mentre que l'exterior n'és l'altre. Tanmateix, puc també pensar S^3 com l'esfera de centre l'origen i radi unitat de l'espai euclidià de quatre dimensions. D'aquesta manera, puc parlar de rotacions i reflexions a S^3 i és trivial estudiar totes les involucions *lineals* de S^3. Per exemple, puc considerar la reflexió respecte de l'equador.

Cap als anys quaranta, el matemàtic Paul A. Smith va fer-se (i va fer-nos) una pregunta que va resultar ser extraordinàriament fecunda. Es va preguntar si —tal com passa a l'esfera S^2— també tota involució de S^3 és homòtopa a una de lineal, és a dir, si —essencialment— no hi ha altres involucions de S^3 fora de les que ens dóna l'àlgebra lineal. D'aquesta pregunta se'n diu la *conjectura de Smith*. Actualment es coneix força bé la resposta a aquesta pregunta, però l'hem de considerar com un dels grans problemes del segle XX, per la quantitat i profunditat de la matemàtica que ha calgut desenvolupar per a resoldre'l. Els millors geòmetres del nostre temps, com ara Thurston i Waldhausen, hi han intervingut de manera essencial i ha calgut utilitzar-hi eines de camps ben diversos.

Us preguntareu si la resposta és sí o no. La resposta a la pregunta original de Smith, tal com ell va plantejar-la, és «no», i això se sap des que R. H. Bing va donar un contraexemple a l'any 1952. L'autèntic problema, el que ha originat tot el treball del qual us parlava fa un moment, neix quan afegim la condició que la involució τ no només sigui contínua, sinó que sigui *diferenciable*. Aleshores la resposta és «sí» i la demostració no ha pogut completar-se fins ben recentment, utilitzant, com ja he dit, tota la potència de les eines més sofisticades que han creat els millors geòmetres del segle XX.

Potser ens divertirà donar un cop d'ull al contraexemple d'en Bing, que utilitza un objecte ben exòtic: l'*esfera banyuda d'Alexander*. Imaginem una esfera S^2. Imaginem que li surten dues bones banyes. Imaginem que li creixen i, arribat un punt, es bifurquen. Tenim quatre banyes, però seguim tenint una esfera. Imaginem que les quatre banyes s'enllacen entre elles, sense arribar a tancar-se (si ho fessin, això ja no seria una esfera). Tenim una esfera que té la forma de la figura 1.

Ara repetim el procés indefinidament: fem que cada banya tregui dues banyes que s'enllacin, etc., etc. Obtindrem un objecte ben singular que tindrà un aspecte com el de la figura 2.

Si ara li afegim els punts límit (que formen un conjunt de Cantor), tenim una autèntica esfera S^2 que està submergida a l'espai d'una manera *salvatge*. Se'n diu l'esfera banyuda d'Alexander i la seva existència destrueix moltes afirmacions sobre l'espai ordinari que, si no es coneix aquest exemple, poden semblar intuïtivament plausibles. Essencialment, el contraexemple d'en Bing a la conjectura de Smith consisteix a considerar una mena de reflexió respecte d'aquesta esfera d'Alexander.

Ara, si ens abelleix, podem considerar involucions a l'esfera de dimensió quatre, cinc o qualsevol altre valor.[5] [6] A mi m'interessa el cas de l'*esfera de dimensió infinita*

5 A partir de la dimensió quatre, la conjectura de Smith és falsa, fins i tot en el cas diferenciable.

6 Coneixeu la paradoxa de l'esfera gegant i el cub minúscul? Imagineu una esfera de centre aquí mateix i radi molt, molt gran. Diguem, una esfera que passi per Andòmeda. Al bell mig d'aquesta esfera posem-hi un petit cub, un dau de jugar al parxís, d'aresta 1 i volum 1. El volum de l'esfera és immensament més gran que el del cub, de l'ordre de 10^{22}. Ara imaginem, com en un mal film de ficció científica, que disposem d'una palanca graduada $3, 4, 5, 6\dots$ que ens permet anar augmentant a voluntat el nombre de dimensions de l'espai on som. Imaginem-ho. Ara jo acciono la palanca i passem a viure en un espai de quatre dimensions. L'acciono un punt més i vivim en un espai de cinc dimensions, i així successivament. El meu petit dau sempre segueix tenint la mateixa aresta minsa, mentre que el

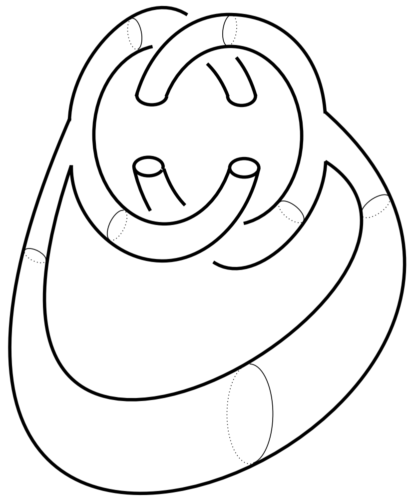


FIGURA 1: Primer pas en la construcció de l'esfera banyuda.

S^{∞}, que no és res més que la *unió* de totes les esferes.[7] Aquesta esfera de dimensió infinita té la particularitat de ser contràctil: l'esfera de dimensió infinita, mentre que geomètricament és enorme, des del punt de vista homotòpic és com un modest punt. Ara bé: mentre que un punt no té cap involució no trivial, S^{∞} té l'aplicació antipodal. Això tindrà una gran importància.

3 Punts fixos i espai quocient

Suposem, doncs, que tenim un espai X i una involució τ de X. A partir d'això podem construir dos nous espais importants que recullen informació sobre X i sobre τ:

- X^{τ}, que és l'espai dels *punts fixos*, és a dir, aquells punts de X que la involució no mou;
- X/τ, que és l'espai *quocient*, és a dir, l'espai que s'obté a partir de l'espai X identificant cada punt x de X amb la seva imatge $\tau(x)$.

Posem alguns exemples. Comencem, també, amb les involucions bàsiques de l'esfera S^2.

- **La reflexió respecte del pla de l'equador** té com a punts fixos tot l'equador, que és una circumferència: $X^{\tau} = S^1$. Pensem ara en el quocient. Si identifiquem cada punt de l'hemisferi nord amb el seu simètric a l'hemisferi sud, el que ens queda és, justament, tot l'hemisferi sud (per exemple) *i* l'equador. Es tracta d'un disc: $X/\tau = D^2$.

radi de l'esfera, a mesura que augmenta el nombre de dimensions, es manté sempre immensament gran. Tot i això —aquí rau la paradoxa— arribarà un punt en què el dau no cabrà dintre de l'esfera. Tot i que la seva aresta sempre valdrà 1, la seva diagonal anirà creixent més i més i acabarà punxant i perforant l'esfera gegantina que el conté. En un espai de dimensió molt gran, els daus petits tenen mala jeia!

7 Amb una topologia convenient.

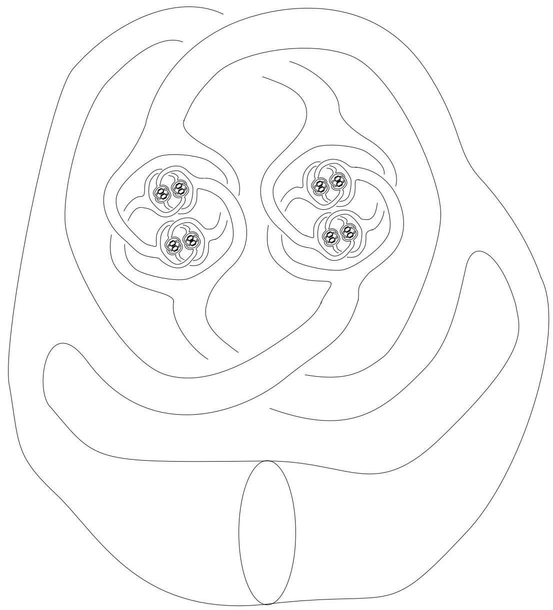


FIGURA 2: Un aspecte de l'esfera d'Alexander.

- **La rotació de 180 graus** té dos únics punts fixos: els dos pols, que els podem pensar com l'esfera de dimensió zero. Tenim $X^\tau = S^0$. Qui és el quocient? Cada punt que té, diguem, longitud *oest* està identificat amb un punt de longitud *est*. Ens queda tot l'hemisferi oest, però, a més, cada punt sobre el meridià de Greenwich està identificat amb el punt de la mateixa latitud de l'antimeridià de Greenwich. Tenim, així, una altra esfera: $X^\tau = S^2$.
- **L'aplicació antipodal** és l'exemple més interessant. No té cap punt fix: $X^\tau = \emptyset$. L'espai quocient X/τ és un espai molt interessant. Com que cada punt de l'hemisferi sud està identificat a un punt de l'hemisferi nord, podem quedar-nos només amb els punts de l'hemisferi nord i tenim un disc D^2. Ara bé: Cada punt de l'equador està identificat amb el seu diametralment oposat. Pensem ara en un disc de teixit en el qual anem cosint cada punt de la vora amb el seu diametralment oposat. És una operació que no podrem pas completar a l'espai ordinari. Si aquest disc, però, fos d'una substància que es pogués interpenetrar a si mateixa, l'operació seria ben possible i obtindríem un objecte —una superfície compacta sense vora— com ara la de la figura 3.[8]

  D'aquesta superfície se'n diu el *pla projectiu (real)* i es denota per $\mathbb{R}P^2$. Tenim $X/\tau = \mathbb{R}P^2$.

El pla projectiu $\mathbb{R}P^2$ és un objecte molt interessant i el seu estudi és fascinant. No tinc temps de dir-ne gaire coses, però sí que voldria remarcar algunes de les seves propietats topològiques, especialment les que més tenen a veure amb el grup de dos elements.

8 No és difícil fer un model de cartró com el de la figura 3.

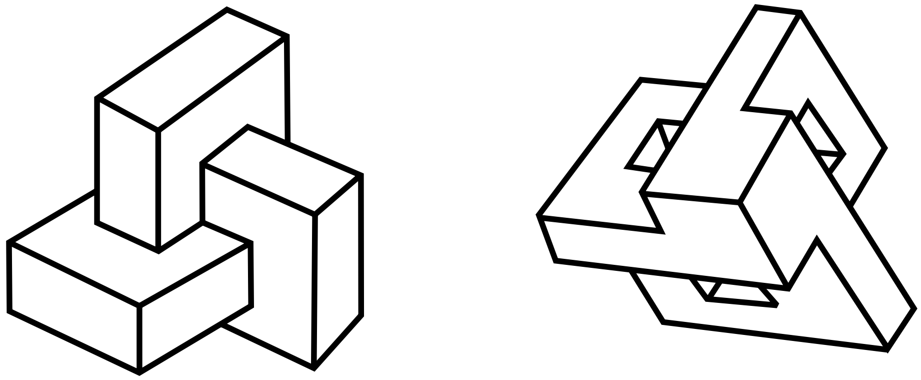


FIGURA 3: Dues perspectives del pla projectiu.

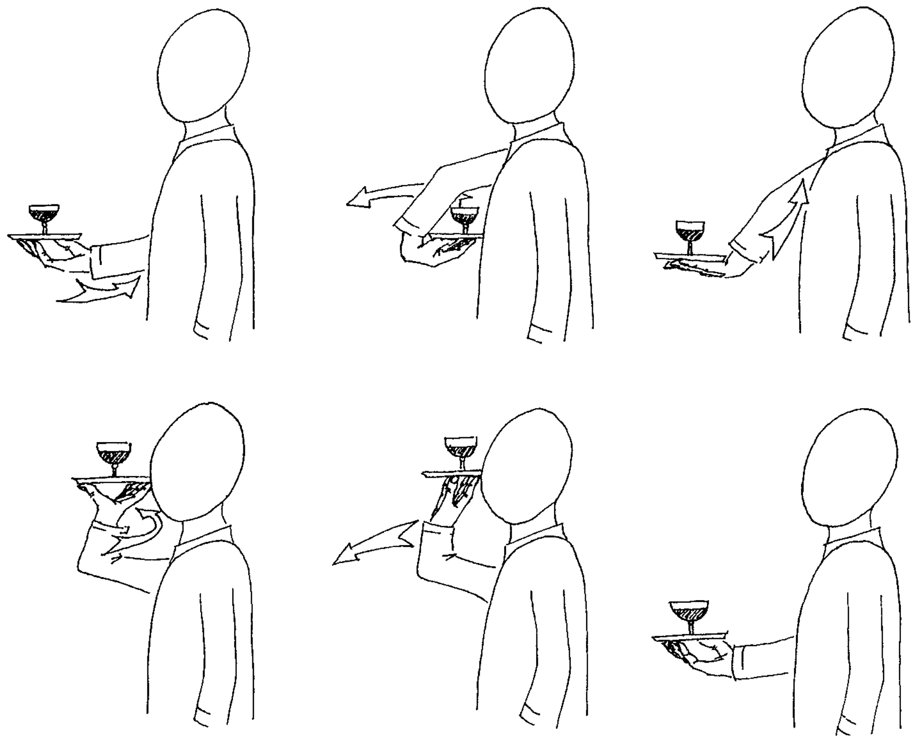
- $\mathbb{R}P^2$ és una superfície compacta sense vora, com ho és la mateixa esfera, però, a diferència de l'esfera, no es pot pas submergir a l'espai ordinari sense que hi hagi autointerseccions. En el model que es mostra a la figura 3 —anomenat *superfície de Boy* en honor del seu descobridor— la superfície es talla a si mateixa en tres circumferències que coincideixen en un punt.
- $\mathbb{R}P^2$ conté una banda de Möbius. De fet, si traiem un disc a $\mathbb{R}P^2$, obtenim una banda de Möbius. $\mathbb{R}P^2$ és, doncs, una superfície d'una sola cara.
- $\mathbb{R}P^2$ és una superfície *no orientable*. Expliquem això: suposem que jo visc en un pla projectiu (i sóc, per tant, un ésser bidimensional!) i suposem que jo duc al canell un rellotge les agulles del qual giren —és clar!— en el sentit de les agulles del rellotge. Si ara jo me'n vaig a fer un llarg viatge, pot passar que, quan torni al meu lloc d'origen, els meus amics se sorprenguin de veure que ara les agulles del meu rellotge giren en sentit contrari a les agulles del rellotge! Tanmateix, també duré el rellotge a l'altre braç, tindré el cor i el fetge canviats de lloc, etc.[9]

  Al pla projectiu és impossible posar-se d'acord en un sentit universal de gir de les agulles d'un rellotge. Diem que el pla projectiu *no és orientable*.
- $\mathbb{R}P^2$ es pot lligar amb un cordill. Fixem-nos que, si jo traço una corba tancada sobre la superfície de l'esfera, sempre puc anar deformant aquesta corba fins a convertir-la en un punt. Això no passa pas amb la superfície d'un dònut i tampoc no passa amb el pla projectiu. Imaginem un cordill que vagi del pol nord al pol sud d'una esfera. No és pas una corba tancada, però sí que ho és si la pensem a $\mathbb{R}P^2$, on el pol nord i el pol sud són un mateix punt. Aquesta corba tancada no es pot deformar de cap manera fins a convertir-la en un punt. Diem que és *essencial*. El que és força divertit és adonar-se que, si aquesta corba la repetim dos cops, ara sí que podem contraure-la fins a un punt (perquè es correspon a un cercle màxim de l'esfera, que no és essencial). Podem fer la facècia de dir que el pla projectiu es pot lligar ben lligat amb un cordill (com

9 Cal recalcar, però, que a mi no m'haurà passat res. Jo no he sofert cap canvi traumàtic de cap mena, com tampoc no en sofreix un navegant que travessi la línia de canvi de data de la Terra i aparegui amb el calendari trastocat.

un dònut), però que si, volent-lo lligar més fort, donem dues voltes al cordill, el pla projectiu queda deslligat. Proveu-ho quan arribeu a casa.[10]

Estudiem ara el cas de l'esfera de dimensió 3 i l'aplicació antipodal. No té punts fixos i l'espai quocient s'anomena *espai projectiu (real)* de dimensió 3, $\mathbb{R}P^3$. No tinc temps de discutir les propietats d'aquest espai. A més, com que ja devem estar una mica cansats de tants espais estranys, deixeu-me que, per tal de relaxar-me, faci una mica de *tai chi*.



Fixeu-vos en la meva mà que sosté una safata amb una copa (figura 4).[11] Mireu què faig: giro la ma, mantenint-la en un pla horitzontal, fins que la copa torna a la seva posició original, però ara el meu braç està recargolat. Insisteixo a seguir girant la mà en el mateix pla horitzontal. Torno a fer una segona volta completa fins que la copa torna per segon cop a la seva posició original. Ara resulta que el meu braç ha recuperat el seu estat normal. El moviment que em recargola el braç, repetit dos cops, el recompon. Què significa tot això? És un joc intranscendent o respon a alguna propietat fonamental de l'espai en què ens movem?

Analitzem-ho. La meva mà pot bellugar-se i assenyalar lliurement cap a qualsevol punt de l'*esfera* celest. Si ara la fixo perquè assenyali una direcció concreta,

10 Aquest comportament ens sembla paradoxal perquè es pot demostrar que no es dóna a cap superfície compacta que es pugui submergir a l'espai ordinari. Això justifica matemàticament la dita *embolica, que fa fort*.

11 Per motius de seguretat, en lloc d'una safata amb una copa, a la conferència vaig utilitzar un as de copes, que em va servir igual.

encara la puc fer girar 360 graus (si tinc les articulacions prou flexibles). En resum: l'espai de totes les posicions de la meva mà és l'*espai de les rotacions de l'espai ordinari*. S'anomena SO(3), perquè les rotacions de l'espai ordinari vénen donades per matrius 3×3 ortogonals de determinant 1. O sigui que cada posició de la mà és un *punt* de l'espai SO(3). Si ara jo vaig bellugant la mà, estic descrivint una *corba* a SO(3). El joc de la safata em diu que, igual que passava amb el pla projectiu, a l'espai SO(3) hi ha una corba tancada essencial que, repetida dues vegades, deixa de ser essencial!

Deixem ara el tai chi i tornem a l'aplicació antipodal de S^3. Resulta que l'espai quocient $X/\tau = \mathbb{R}P^3$ coincideix amb SO(3). Tal com passava amb $\mathbb{R}P^2$, tenim també un camí essencial que, fet dues vegades, és trivial.

4 La conjectura d'Adams i la completació

Les coses que he exposat fins ara formen part, poc o molt, dels coneixements que tot estudiant de matemàtiques adquireix en els seus primers anys d'estudi i, per tant, són ben familiars a una bona part del meu públic. En aquesta segona part de la meva conferència vull tractar temes més avançats i em veuré obligat, per tant, a ser una mica menys precís a l'hora de discutir-los. Espero, però, que les idees generals del que vull dir siguin accessibles a tothom que m'escolta.

Vull parlar d'algunes de les idees que va introduir Dennis Sullivan cap a l'any 1970. Dennis Sullivan és un matemàtic genial, un dels grans topòlegs del segle XX i creador d'un munt d'idees fonamentals dintre de la topologia dels darrers trenta anys. Va fer la tesi doctoral a Princeton i va ser durant anys investigador permanent a l'IHES. Actualment, ocupa la que s'anomena *càtedra Einstein*, a la Universitat de la Ciutat de Nova York.[12]

Al llarg de la dècada dels seixanta, el líder dintre de la teoria d'homotopia era el matemàtic britànic Frank Adams. Al 1958 havia resolt el famós *problema de l'invariant de Hopf igual a 1*, que era el problema més important de la teoria d'homotopia d'aquell moment; immediatament després va inventar la *successió espectral d'Adams*; tres anys després va resoldre el problema dels *camps vectorials a les esferes* i a continuació va publicar, entre els anys 1963 i 1966 quatre articles a la revista *Topology* sobre el que podríem anomenar la *part lineal* de l'homotopia estable de les esferes. El cas és que en aquests quatre articles de l'Adams hi mancava un detall,

12 Una lliçó inaugural com aquesta em sembla un bon lloc per recordar unes paraules d'en Sullivan (citades a Allen L. Hammond, «Mathematics —Our invisible culture», *Mathematics Today*, Lynn Arthur Steen (ed.), Springer 1978), en les quals ens explica el seu mètode de treball. Les paraules, que a molts dels nois i noies que s'acaben d'incorporar als estudis de matemàtiques els poden semblar terrorífiques —tot i que descriuen força bé el mètode *ordinari* de treball d'un investigador— són les següents:

> Durant un temps, treballo d'aquesta manera. Em desperto al matí pensant en alguna cosa i hi segueixo pensant fins que em trobo amb algun altre matemàtic disposat a parlar-ne. Aleshores començo a parlar-ne amb ell. Hi parlo tot el dia, i segueixo tota mena de interaccions i deformacions del que estic fent. Al vespre, me'n vaig a casa amb la meva família, sopo, faig el que cal fer per dur una vida normal i m'assec al sofà i començo a pensar altre cop en el mateix. Hi penso fins que m'adormo i a l'endemà torno a començar. És un procés molt divertit. Lentament, l'assumpte es capgira i canvia, sense cap esquema ni cap motiu. Cal seguir diverses línies de pensament —no sempre duen a res. És una mena de procés de reciclatge. Hi ha coses que les segueixo pensant una i altra vegada, durant anys, potser no sempre les mateixes coses, sinó barrejades amb altres coses.

Aquest és el mètode. Que ningú no s'enganyi.

un *petit* detall que l'Adams no havia pogut resoldre i que va passar a anomenar-se *conjectura d'Adams*. El que podria semblar, als ulls d'una persona poc perspicaç, un detall purament tècnic —difícil, però intranscendent—, va resultar ser una autèntica caixa de Pandora de la topologia dels darrers trenta anys.

El cas és que, cap a finals de la dècada dels seixanta, un grapat de matemàtics de primera fila estaven involucrats a intentar demostrar la conjectura d'Adams. El mateix Sullivan ens explica que el pas final es va fer el gener del 1970 «en una acalorada discussió amb Atiyah, Borel, Deligne i Quillen —i tots els presents hi van ser imprescindibles». Les idees noves que va caldre utilitzar per a la demostració encara ara —trenta anys després— ocupen un lloc central a la teoria d'homotopia.

Una d'aquestes idees centrals és la de *completació p-àdica* d'un espai. Voldria explicar aquesta idea utilitzant un exemple. Suposeu que jo us dic que la llargada d'aquesta sala d'actes està entre 15 i 16 metres. Això ens està dient alguna cosa sobre la llargada real de la sala. Si ara algú em demana que sigui més precís, jo puc dir que la llargada real està entre 15,6 i 15,7 metres. Si encara em demaneu més precisió, podria dir que la llargada real està entre 15,62 i 15,63 metres. Si jo fos capaç de respondre sempre a totes les infinites demandes de més i més precisió, aleshores estem d'acord en què jo estic determinant —de manera *exacta*— una longitud. Aquesta és la idea de nombre real, aquesta és la idea de continu, en la qual es basa la geometria euclidiana i la mecànica clàssica. Els espais que hem discutit a l'inici de la xerrada, com ara l'esfera, l'espai projectiu, etc., es fonamenten, en darrera instància, en el concepte de continu i, per tant, en el concepte d'aproximació que acabo de discutir.

Ara bé, si en lloc de l'aspecte geomètric (euclidià, físic, mecànic) m'interessa l'aspecte *aritmètic* de la mesura, hi ha una altra manera d'aproximar. Suposeu que jo dic que estic pensant en un cert nombre i que aquest nombre és *parell*. Això ens està dient alguna cosa sobre aquest nombre. Si ara algú em demana que sigui més precís, jo puc dir que el meu nombre, dividit per quatre, dóna resta 2. Si encara em demaneu més precisió, podria dir que el meu nombre, dividit per vuit, dóna resta 6, dividit per 16 dóna resta 14, etc. Si jo fos capaç de respondre sempre a totes les infinites demandes de més i més precisió, és clar que jo estaria determinant una mena de *nombre*, aritmèticament ben definit. Se'n diu un *nombre 2-àdic*.

El procés de construcció dels nombres reals a partir dels nombres racionals que utilitza el concepte de precisió geomètrica és un procés de *completació*. Anàlogament, els nombres p-àdics s'obtenen a partir dels nombres racionals per un procés de completació que utilitza el concepte de precisió aritmètica.

Doncs bé: aquest procés de completació p-àdica pot aplicar-se als espais. Com? Això seria una llarga història, que s'haurà d'explicar en una altra ocasió. Cal entendre un cert procés d'algebrització del concepte d'espai, que va iniciar Poincaré ara fa un segle i que ha hagut de seguir un llarg camí fins a arribar al concepte de *conjunt simplicial*.

5 La conjectura de Sullivan

Tornem al grup de dos elements. Ho fem a través de l'observació següent. Una varietat algebraica X és el conjunt de solucions (complexes) d'un sistema d'equacions algebraiques. Tots coneixem bé la *conjugació* complexa i és evident que la conjugació complexa ens dóna, sobre cada varietat algebraica, una involució. Quins són els punts fixos? Són els punts que tenen coordenades que no canvien quan els apliquem la conjugació, és a dir, són els punts de coordenades *reals*. D'aquesta manera, Sullivan observa que, si fóssim capaços d'entendre bé els punts fixos d'una involució, podríem entendre millor les varietats algebraiques reals, que són objectes molt més misteriosos que les varietats algebraiques complexes.

Per poder dur a terme aquest programa, en Sullivan troba un escull molt important: *el concepte de punt fix no és un concepte invariant per deformacions.* Puc tenir dos espais amb involució que siguin del mateix tipus d'homotopia, però amb punts fixos molt diferents. Abans n'hem vist un exemple. L'esfera de dimensió infinita és del mateix tipus d'homotopia que un punt, però la involució no té cap punt fix a S^∞ i en té un al punt.

Aleshores, en Sullivan conjectura:

1. Hi ha un concepte homotòpicament significatiu de punt fix.
2. Sobre un espai compacte, els dos conceptes —punts fixos *de debò* i punts fixos *homotòpics*— coincideixen *llevat de completació 2-àdica*.

El mateix Sullivan va resoldre el punt 1. La idea és la següent: mentre que un punt fix de debò és un punt sobre el qual la involució actua trivialment, un punt fix homotòpic serà una esfera S^∞ sobre la qual la involució actua antipodalment. El punt 2, que Sullivan ens diu que li sembla molt difícil, és el que es coneix amb el nom de *conjectura de Sullivan*.

La conjectura de Sullivan va ser resolta afirmativament catorze anys després de la seva formulació. Novament, la pregunta d'en Sullivan va resultar ser el detonant d'un desenvolupament extraordinari de la teoria d'homotopia.[13] Un altre cop, la resolució d'aquest enigma que era la conjectura de Sullivan va requerir utilitzar tota la potència de les eines més sofisticades desenvolupades per la topologia algebraica en els darrers cinquanta anys. És molt divertit veure com l'ingredient principal de la demostració és una propietat absolutament sorprenent i magnífica del **grup de dos elements**. Com que ja fa prop d'una hora que parlo, em sembla que haurem de deixar l'estudi d'aquesta propietat per a una lliçó posterior.

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
08193 Bellaterra
aguade@mat.uab.es

13 Els grans matemàtics es coneixen no només perquè demostren grans teoremes, sinó també perquè fan grans preguntes.