

Proceso de elaboración de actividades geométricas ricas: un ejemplo, las rotaciones

**Núria Gorgorió, Francesca Artigues,
Francesc Banyuls, David Moyano,
Núria Planas, Montse Roca y Àngel Xifré**

LA REFORMA: un buen contexto para la recuperación de la geometría en la secundaria obligatoria

A menudo parece que existen verdaderas dificultades para incorporar la geometría en los currículos efectivos de matemáticas. La geometría ha ido quedando relegada en los programas frente a otros aspectos de la educación matemática. Aseguramos un nivel de desempeño significativo en aritmética para todos los alumnos, pero descuidamos la geometría o, en el mejor de los casos, la reducimos a cálculos geométricos mecánicos de áreas o volúmenes. Constatamos que mientras existe un currículo estándar elemental para la aritmética y el álgebra, no parece haber consenso cuando se trata de fijar un currículo elemental para la geometría escolar.

Si bien en el currículo intencional se acepta que los conocimientos y habilidades geométricas son suficientemente importantes para merecer un lugar en todos los niveles de la educación obligatoria, en el plano del currículo desarrollado no existe un acuerdo por lo que se refiere al contenido y su secuenciación en relación a la geometría que debe enseñarse. El gran contenido algorítmico de la aritmética y del álgebra conduce a que la enseñanza de estos aspectos resulte mucho más gratificante, tanto para profesores como alumnos, que la de la geometría. Por otra parte, a pesar de que son numerosas las actividades conocidas para el desarrollo de determinados contenidos geométricos, en general, los profesores tenemos dificultades para secuenciarlos y organizarlos de forma global, contrariamente a lo que ocurre en la aritmética o el álgebra cuya secuenciación parece algo natural. Además, la geometría es una materia donde los procesos algorítmicos son pocos y su interés radica en que nos permite plantear preguntas que podrán ser resueltas a través del álgebra y la aritméti-

En este artículo presentamos el proceso de reflexión de un grupo de trabajo en el que profesores de secundaria e investigadores en educación matemática hemos desarrollado y experimentado una secuencia de «actividades ricas» en el ámbito de la geometría de las rotaciones. Junto con el desarrollo del concepto de «actividad rica», presentamos la revisión de algunas contribuciones procedentes de la investigación y analizamos los resultados fruto de su experimentación con alumnos de ESO.

ca. Además, la falta de éxito que caracteriza las experiencias en geometría de tantos alumnos incita a los profesores a considerar esta parte de las matemáticas como de menor importancia.

El ciclo se perpetúa a través de la formación del profesorado. Los responsables de la formación del profesorado de primaria encuentran extraordinariamente difícil hacer evolucionar a sus alumnos con unas bases tan pobres. Por otra parte, son pocos los profesores de secundaria que durante su formación han seguido cursos de geometría, porque no está contemplada en el currículo diseñado para su capacitación desde los departamentos universitarios. De esta forma, únicamente se consigue perpetuar el círculo vicioso.

Las dificultades tanto en el currículo intencional como en el desarrollado repercuten directamente en el currículo adquirido (Robitaille y Dirks, 1982). Como consecuencia, el conocimiento geométrico de los estudiantes al finalizar la enseñanza obligatoria es, en general, desigual y escaso. Por otra parte, alumnos muy capaces visualmente, pero con poca habilidad para conceptos algebraicos y aritméticos, se ven discriminados ante el desequilibrio actual entre los distintos aspectos de la educación matemática.

Ante esta situación, la reforma educativa parece un buen contexto para que la geometría euclídea recupere el espacio en los currículos de secundaria. Para que la reforma suponga una reacción a esta situación deben presentarse propuestas innovadoras de actuación en el aula que ayuden a la creación y ampliación de significados para los conceptos geométricos. Por otra parte, si bien es cierto que con la reforma hay un énfasis en la geometría, no queda claro en qué geometría. Aún está por ver si la sociedad que quería una aritmética y una álgebra rutinarias desea ahora simultanear una geometría creativa e intuitiva, basada no sólo en productos sino también en procesos, con una geometría de definiciones y teoremas. La reforma sólo será un proceso de recuperación si introduce una geometría no reduccionista.

El grupo de trabajo Menaecme¹ nace como un grupo de reflexión sobre el papel de la geometría en la educación matemática de los alumnos de la ESO. El proceso de reflexión y conceptualización de la propia actuación didáctica se inicia a partir de algunas cuestiones centrales: ¿Cuál debería ser la geometría en la enseñanza obligatoria? ¿Cuáles deberían ser sus objetivos? ¿Cómo podemos aproximarnos a la consecución de estos objetivos? ¿Cuáles son las metodologías actualmente validadas que nos dan pistas a seguir? ¿Qué sentido tiene concentrarse en la geometría deductiva si no hay geometría descriptiva y geometría visual?

Para analizar, desde una perspectiva curricular, las distintas formas de conceptualizar la geometría, partimos de la interpretación de la geometría descrita por Usiskin (1987) como:

*...la falta de éxito
que caracteriza
las experiencias
en geometría
de tantos alumnos
incita
a los profesores
a considerar
esta parte de
las matemáticas
como de menor
importancia.*

- Visualización, dibujo y construcción de figuras.
- Estudio de los aspectos espaciales del entorno físico.
- Medio para representar conceptos y relaciones matemáticas cuyo origen no es visual o físico.
- Sistema matemático formal.

Esta conceptualización de la geometría coincide con la propuesta de Bishop (1982) en relación a las actividades geométricas que deberían proponerse en el aula para promover aprendizajes significativos en los alumnos. Este autor sugiere que en las aulas se utilicen, entre otras, más actividades relacionadas con problemas cotidianos que utilicen ideas geométricas, la reducción y la representación del entorno físico, la utilización de recursos verbales para describir el espacio y el diseño de las producciones humanas.

La reflexión en torno a nuestra experiencia como profesores de matemáticas nos lleva a aceptar el hecho de que tradicionalmente la enseñanza de la geometría en la secundaria ha sido de naturaleza axiomática, reduciendo los cuatro aspectos mencionados por Usiskin a un enfoque unidimensional. Entendemos que este enfoque impide el desarrollo completo de capacidades que deben ser desarrolladas en toda educación obligatoria (NCTM, 1982):

- Identificar, describir, comparar, modelar, dibujar y clasificar figuras geométricas de dos y tres dimensiones.
- Desarrollar el sentido espacial.
- Explorar los efectos de transformar, combinar, subdividir y cambiar las figuras geométricas.
- Comprender, aplicar y deducir propiedades de las figuras geométricas y de las relaciones entre ellas, incluyendo la congruencia y la semejanza.
- Apreciar la geometría como medio para describir y modelar el entorno físico.
- Explorar diversas aproximaciones a la geometría.

¹ El grupo Menaecme es un grupo de trabajo del ICE de la Universitat de Barcelona que se formó a inicios del curso 1996-97. Los componentes del grupo son: Francesca Artigues, Francesc Banyuls, Montse Fontdevila, Javier Fraile, Núria Gorgorió, David Moyano, Núria Planas, Montse Roca y Àngel Xifré.

Después de una fase inicial de detección de necesidades e intereses en relación a la enseñanza de la geometría en la etapa 12-16, iniciamos un proceso de elaboración de una propuesta de implementación teniendo en cuenta las aportaciones de los estudios teóricos en este campo, y los recursos y materiales didácticos existentes en nuestro entorno, en busca de secuencias de actividades y situaciones didácticas que faciliten el aprendizaje de determinados conceptos geométricos.

En esta primera fase de trabajo del grupo elaboramos una propuesta de implementación, actualmente en proceso de experimentación y revisión. En este artículo queremos presentar no tanto las actividades y secuencias elaboradas como producto, sino el proceso de análisis y experimentación seguido y nuestras primeras conclusiones ya que creemos que éste puede ser utilizado como modelo de reflexión por otros profesores en situaciones parecidas y con inquietudes análogas.

A lo largo de todo el proceso hemos podido contar con la inestimable colaboración de expertos internacionales de reconocido prestigio² que, con su participación en nuestras discusiones, han aportado elementos de reflexión teórica y su experiencia como dinamizadores de grupos de profesores trabajando en propuestas de innovación geométrica en el aula.

«Actividades» ricas en geometría³

Bishop (1988) desarrolla un modelo de currículo pedagógico a partir de tres componentes: el componente simbólico/conceptual, el componente aplicable/social y el componente estructural/cultural. En un número anterior de esta misma revista (Bishop, 1998) puede encontrarse una síntesis de los constructos a los que se refieren los distintos componentes y las estrategias pedagógicas para enseñar estos componentes en clase.

2 A. Bishop (Monash University, Australia), B. Bolt (University of Exeter, Gran Bretaña), K. Clements (University of Brunei, Brunei Darussalam), P. Hilton (SUNY at Binghamton, USA), R. Hershkowitz (Weizmann Institute, Israel), B. Parzysz (Université de Metz, Francia), J. Pedersen (Santa Clara University, USA) y Norma Premeg (Florida State University, USA). A todos ellos queremos manifestarles nuestro agradecimiento tanto por su contribución académica como su apoyo personal. También nuestro agradecimiento al Centre de Recerca Matemàtica, Institut d'Estudis Catalans por haber financiado el proyecto TIEM98 que nos permitió trabajar con todos ellos durante su visita a nuestro país.

3 El desarrollo del concepto «actividad rica» aparece también en un artículo publicado con anterioridad en esta misma revista (SUMA, 30) «Fiayaz en clase de matemáticas: un ambiente de resolución de problemas», de N. Planas, X. Vilella y N. Gorgorió, ya que dicho concepto fue uno de los temas de debate de los grupos de trabajo del proyecto TIEM98, en los que participaron los distintos autores de ambos artículos.

4 A partir de este punto utilizamos el término actividad geométrica en el sentido establecido por Bishop (1988) de actividad matemática correspondiente al componente simbólico/conceptual.

Nuestra propuesta de implementación tiene en cuenta los tres componentes y contiene por lo tanto propuestas de actividades, proyectos e investigaciones geométricas. A pesar de ello, creemos importante explicitar que nos resulta mucho más fácil organizar nuestro debate curricular a partir del establecimiento de los que creemos conocimientos geométricos básicos para la etapa 12-16.

Sin embargo, al referirnos a conocimiento geométrico consideramos, tal como afirman Gorgorió y Bishop (1998), no únicamente conocimiento de conceptos y significados sino también desarrollo de habilidades y procedimientos, ya que habilidades y procedimientos deben integrarse en estructuras de conocimiento útiles y significativas. Desde este punto de vista nuestra interpretación de lo que debería ser el componente simbólico conceptual de la geometría en la escolaridad obligatoria puede resumirse en el esquema de la figura 1.

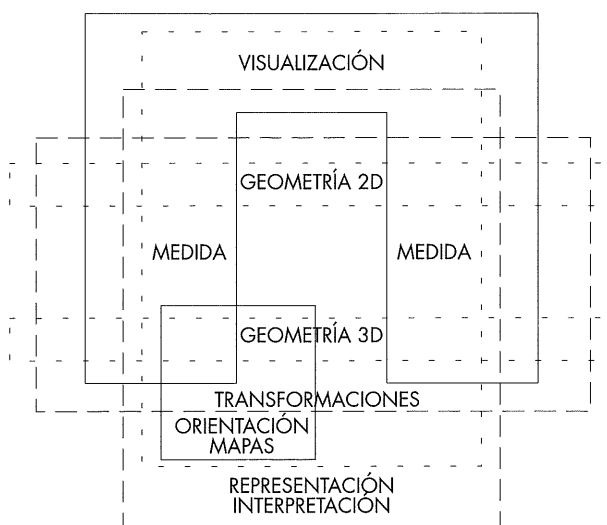


Figura 1. Relaciones entre los distintos tipos de contenidos

Centrándonos en la búsqueda de actividades⁴ geométricas para la enseñanza de los conocimientos básicos establecidos, nuestro debate gira en torno a las condiciones que debe reunir una actividad geométrica para poder ser considerada una «actividad rica».

Desarrollando la propuesta de Broomes (1989), consideramos como «actividad rica» aquella que:

- está relacionada con el contenido curricular tanto en el currículo intencional como en el currículo que se tiene que desarrollar;
- permite establecer conexiones entre distintas áreas del currículo dentro o fuera de las matemáticas con lo cual amplía la imagen de las ideas matemáticas y desarrolla significados;

- sirve como introducción y motivación para un contenido básico y, por lo tanto, su presencia en el currículo desarrollado está justificada;
- supone un reto para la mayoría de los alumnos ya que incluye una gradación de dificultades para diferentes ritmos de aprendizaje, partiendo de las posibilidades de todos los alumnos y permitiendo su expansión para los más rápidos;
- facilita la implicación de todos los alumnos, ya que permite que el alumno pueda establecer conexiones con el contexto de fuera del aula;
- es flexible, permitiendo al alumno que establezca relaciones entre sus conocimientos para poder aplicarlos;
- pretende no únicamente la búsqueda de respuestas correctas sino también que los alumnos generen buenas preguntas;
- finaliza cuando el alumno es consciente de sus aprendizajes, reflexionando, interiorizando estableciendo relaciones tanto con aprendizajes anteriores como con vivencias de fuera del aula.

Es evidente que conseguir una actividad que cumpla todas estas condiciones es algo difícil. Sin embargo, consideramos que como profesores debemos plantearnos el reto de proponer a nuestros alumnos actividades que se acerquen al máximo a las condiciones propuestas.

Procesos de resolución de actividades en que la transformación geométrica es una rotación en el espacio

Tal como afirmábamos en el primer apartado, durante el proceso de elaboración de nuestra propuesta de implementación tenemos en cuenta las aportaciones de las investigaciones en el campo de la educación geométrica, en particular aquellas que contribuyen a la comprensión de los procesos de resolución por parte de los alumnos de las propuestas a implementar. Dado que las actividades de la secuencia didáctica que presentamos requieren una rotación en el espacio, los resultados de Gorgorió (1995 y 1998) han contribuido en gran manera tanto al planteamiento de las actividades como a su experimentación y su análisis, facilitando el proceso de interpretación de los procesos de resolución y las dificultades de los alumnos. Presentamos a continuación algunas de las aportaciones de los trabajos citados con la intención de facilitar la comprensión de los planteamientos del grupo de trabajo.

El constructo visualización aparece no únicamente en la mayoría de estudios acerca de las habilidades espaciales, sino también en muchas de las investigaciones relaciona-

*El constructo
visualización
aparece
no únicamente
en la mayoría
de estudios acerca
de las habilidades
espaciales,
sino también
en muchas de las
investigaciones
relacionadas
con los procesos
de resolución
de problemas
de matemáticas
en general.*

das con los procesos de resolución de problemas de matemáticas en general. Gorgorió recoge y amplía los estudios existentes hasta el momento en relación a las habilidades necesarias para la resolución de tareas geométricas que requieren una rotación en el espacio. Esta autora, propone analizar las estrategias que los alumnos utilizan en la resolución de dichas tareas desde tres puntos de vista: el origen y la organización de la información utilizada, el modo de representación mental y el foco de atención. A partir de estos tres puntos de vista, para cada alumno y en cada actividad, pueden distinguirse la *estrategia de estructuración*, la *estrategia de procesamiento* y la *estrategia de aproximación* utilizadas consideradas no como tres tipos distintos de estrategias cognitivas sino como tres aspectos distintos del proceso de resolución seguido por el alumno.

En este artículo nos centramos en las aportaciones de los trabajos citados en relación a las estrategias de procesamiento dado que son las que influyen en nuestro proceso de formulación de las actividades y su gestión en el aula. El lector puede encontrar información más amplia en las publicaciones citadas.

Para el análisis de las *estrategias de procesamiento* se considera el proceso de resolución del alumno desde el punto de vista del tipo de representación mental utilizada. Se parte de la hipótesis de que la resolución de cualquier problema matemático requiere razonamiento lógico. Además, si todas las actividades que se presentan a los alumnos utilizan soporte visual, el factor que determina el tipo de estrategia de procesamiento del alumno es si utiliza o no imágenes mentales visuales como elemento clave del proceso de resolución.

Las *estrategias de procesamiento* pueden caracterizarse como *visuales* o *no visuales*. Una estrategia de procesamiento se considera visual, cuando el alumno basa su proceso en la imaginación de alguno de los aspectos siguientes: el contexto de la actividad, una rotación o un cambio de posición ya sea del objeto o del

propio sujeto. En caso contrario, se considera la estrategia de procesamiento del alumno como no visual. Entre las estrategias de *procesamiento no visual*, son importantes las caracterizadas como estrategias *geométricas*, aquellas en que el alumno resuelve la actividad sin imaginar ninguna situación, basándose en hechos relacionados con las propiedades geométricas que conoce.

Entre los resultados de los trabajos mencionados, un aspecto remarcable desde el punto de vista de su aplicabilidad en el aula es la constatación del importante papel de las características de la actividad como factores que influyen en los procesos de resolución de los alumnos, en sus dificultades y sus errores. Entre las características de una actividad susceptibles de condicionar los procesos de resolución que van a utilizar los alumnos se encuentran la forma de presentación (lenguaje y códigos visuales utilizados), el requerimiento geométrico (proponiendo la situación de forma estática o dinámica), la forma de respuesta (verbal, gráfica o construcción), el contexto de la actividad (próximo o no a la experiencia del alumno) y la acción requerida (acción mental o física que el alumno debe efectuar para resolver la actividad).

Posiblemente, la característica más interesante desde el punto de vista del tema que aquí tratamos, sea la acción requerida por la actividad. Según Leinhardt y otros (1990) la acción requerida puede ser de *interpretación* o de *construcción*. La acción requerida por una actividad es de interpretación cuando el alumno debe dar sentido u obtener información partiendo de un objeto o su representación, requiriendo reaccionar frente a una acción geométrica presentada como finalizada. La acción requerida es de construcción cuando el alumno debe generar un nuevo objeto, ya sea construyéndolo o dibujándolo. Dado el objeto inicial el alumno debe producir el objeto final, efectuando la transformación geométrica, manipulativa o mentalmente, sobre el objeto inicial para generar un nuevo objeto, real, no imaginado. De acuerdo con estos autores, las activi-

*...las actividades
que se presenten
a los alumnos
deben ser
suficientemente
variadas
en su enunciado,
ya que
las características
de las actividades
condicionan
no únicamente
el éxito o fracaso
de los alumnos
sino también
los procesos
de resolución
seguidos
y las dificultades
encontradas.*

dades de construcción requieren, a menudo, de un cierto grado de interpretación, aunque no a la inversa.

Gorgorió (1995), intentando dar respuesta a la necesidad de ayudar a los alumnos a superar las dificultades en los procesos de resolución sin que éstos deban renunciar a sus propios procesos de resolución, hace distintas consideraciones en relación a la gestión en el aula de este tipo de actividades. A continuación presentamos algunos de los aspectos a tener en cuenta en el momento de elaborar y desarrollar propuestas para el aula.

En primer lugar, las actividades que se presenten a los alumnos deben ser suficientemente variadas en su enunciado, ya que las características de las actividades condicionan no únicamente el éxito o fracaso de los alumnos sino también los procesos de resolución seguidos y las dificultades encontradas. Además, como profesores debemos ser conscientes que también nosotros tenemos preferencias en la utilización de determinados tipos de estrategias, preferencias que posiblemente son distintas de las de nuestros alumnos. Tal como afirma Presmeg (1986, 1999), estas diferencias pueden provocar interferencias y ser fuente de conflictos. Por lo tanto, es necesario poner los medios para que los alumnos conozcan la existencia de posibles estrategias distintas, y puedan compartirlas con el profesor y sus compañeros. Además, consideramos imprescindible que el profesor promueva no únicamente la explicitación de las estrategias utilizadas por el alumno, sino que acepte como válidas las que conduzcan a resultados correctos, independientemente de si coinciden o no con las propias. De esta forma facilitamos también la posibilidad de que los alumnos descubran los errores resultado de la aplicación de sus propias estrategias. Por todo ello, creemos que como fuente de riqueza es importante el trabajo en grupos pequeños, formados por alumnos que prefieren utilizar estrategias distintas.

Si las estrategias de procesamiento geométrico pueden ser fácilmente explicitadas en público, no ocurre lo mismo con las de procesamiento visual, ya que la exteriorización de las imágenes visuales mentales utilizadas comporta, a menudo, grandes dificultades. En primer lugar, para favorecer la utilización de estrategias de procesamiento visual, se propone que el profesor acepte como estrategia válida el hecho de imaginar si conduce a resultados correctos, independientemente de si el alumno puede o no explicar en qué consisten sus imágenes mentales. Con la intención de ayudar a los alumnos a superar los posibles errores debidos a la aplicación de estrategias de procesamiento visual se propone que se den oportunidades suficientes a los alumnos de contrastar manipulativamente el resultado de las acciones previamente imaginado.

Algunos de los errores de los alumnos surgen durante la interpretación del enunciado de la actividad o en la explicitación de la respuesta. Tanto el enunciado como la res-

puesta de la actividad pueden tener contenido figurativo (objetos reales o representaciones) y/o verbal. Para mejorar los aspectos relacionados con la información verbal referida a objetos, relaciones y transformaciones geométricas se propone que el profesor utilice correctamente el lenguaje geométrico específico y fomente la corrección en el que utilizan sus alumnos.

Finalmente, en relación a la información transmitida a través de descripciones gráficas o con modelos, se sugiere que debe hacerse una introducción adecuada a la utilización de los distintos códigos de representación, tal como propone Parzys (1988). De este modo, creemos que no debe darse por supuesto que los alumnos entenderán y sabrán utilizar una determinada representación de un objeto simplemente por el hecho de haberla visto repetidas veces. Es necesario, por lo tanto, justificar y analizar las convenciones propias de los códigos utilizados, proponiendo a los alumnos que los utilicen para representar distintas situaciones, contrastando la representación con el modelo, que creen nuevos códigos y los expliquen, hecho que facilitará la comprensión de la idea de codificar.

Proceso hacia una secuencia de actividades ricas

El proceso de reflexión sobre nuestra práctica docente nos lleva a la conclusión de que, a menudo, las actividades relacionadas con el componente simbólico/conceptual sugeridas por el currículo intencional y que aparecen en el currículo desarrollado cumplen potencialmente ya varias de las condiciones requeridas para poder ser consideradas actividades ricas. Por otra parte, características como la posibilidad de establecer conexiones o de incorporar conocimientos no escolares, la adecuación a los distintos ritmos, la motivación, la posibilidad de generar preguntas y la reflexión que permiten la interiorización del aprendizaje, son frecuentemente aspectos condicionados por la gestión de la actividad por parte del profesor y la interacción entre contenido y alumno y, por lo tanto, dependen de la actuación docente. Por todo ello, las actividades de nuestra propuesta de implementación no son necesariamente actividades totalmente nuevas, sino que algunas de ellas, en particular las que presentamos, son actividades publicadas en distintos textos, planteadas en el aula desde un nuevo punto de vista, ya que nuestra intención es reflexionar sobre un proceso de enriquecimiento.

Tal como ya hemos expuesto anteriormente, una de las preocupaciones del grupo es la frecuencia con que se interpreta como conocimiento geométrico el conocimiento de conceptos y significados, olvidándose el desarrollo de habilidades y procedimientos. Por este motivo, las actividades de la secuencia didáctica que presentamos están

...las actividades de la secuencia didáctica que presentamos están relacionadas con el estudio de las proyecciones y responden a objetivos relacionados con el desarrollo de habilidades y procedimientos de representación e interpretación y de procesamiento visual del espacio tridimensional.

relacionadas con el estudio de las proyecciones y responden a objetivos relacionados con el desarrollo de habilidades y procedimientos de representación e interpretación y de procesamiento visual del espacio tridimensional.

El título genérico adoptado para la secuencia didáctica es «vistas». El nombre nos parece adecuado ya que, en definitiva, la representación plana de un objeto, o de una composición espacial, requiere de una proyección del espacio, y la palabra «vista» resulta comprensiva para el alumno ya que puede relacionarla con sus conocimientos de dibujo y con experiencias de la vida no escolar.

En el momento de fijar el contenido de una actividad y programar su gestión en el aula deben fijarse, de forma concreta, sus objetivos. Para esta secuencia de actividades los objetivos son:

- localización y orientación (utilización de sistemas de referencia);
- interpretación y construcción de representaciones bidimensionales de objetos y situaciones tridimensionales (proyecciones);
- utilización de estrategias de procesamiento visual y de procesamiento geométrico;
- utilización e interpretación de códigos (códigos concretos y significado del concepto de codificación).

La propuesta de trabajo de la que partimos estaba compuesta por 3 actividades⁵, concretamente:

El café (figura 2)

Esta actividad requiere una rotación en el espacio a partir de representaciones planas en las que intervienen códigos distintos. Puede ser resuelta a través de una estrategia de procesamiento geométrico o de una estrategia de procesamiento visual en la que el alumno imagina una rotación ya sea del objeto o del propio sujeto. De acuerdo a la caracterización establecida en la sección anterior, esta es una actividad de interpretación planteada estáticamente.

⁵ La actividad número 1 procede del «Taller de intuición espacial» de Floreal Gracia Alcaine (1995b). Las actividades 2 y 3 proceden de *Imágenes*, de Floreal Gracia Alcaine (1995a), páginas 30 y 93.

Actividad 1

Es tracta d'imaginar un cos des d'un angle diferent al qual es veié, la qual cosa permet desenvolupar la capacitat intuïtiva, d'imaginació i ubicació.

En Joan, la Laia, en Pere i la Mercè han anat a prendre un cafè. Els quatre amics s'han assegut en una butaca al voltant d'una taula. Tots tenen una vista diferent dels objectes que hi ha al damunt de la taula.

Identifiqueu la vista particular de cada amic dels objectes que hi ha sobre la taula.

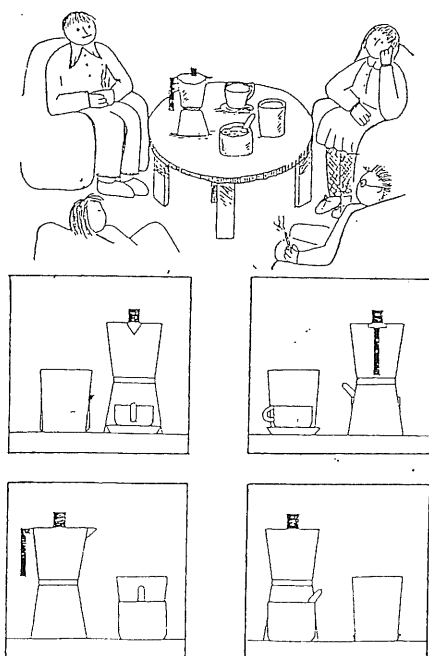


Figura 2

Paseando en barco (figura 3)

Igual que en el caso anterior requiere una rotación en el espacio a partir de representaciones planas en las que intervienen códigos distintos y puede ser resuelta a través de una estrategia de procesamiento geométrico o de una estrategia de procesamiento visual. De acuerdo a la caracterización establecida en la sección anterior, esta es una actividad de interpretación planteada dinámicamente. Por otra parte, para la resolución de esta actividad es necesario que los alumnos vean la necesidad de

6 La actividad número 4 procede del «Taller de intuición espacial» de Floreal Gracia Alcaine (1995b). La actividad número 5 procede de *Imágenes*, de Floreal Gracia Alcaine (1995a), página 26.

codificar las fotografías para ordenarlas. Además de establecer el orden en que fueron tomadas las fotografías que depende del sentido del movimiento, es necesario indicar la posición y la dirección en que fue tomada cada una de ellas, con lo cual es necesario la utilización de un tercer tipo de sistema de codificación

Una isla (figura 4)

La tarea planteada en esta actividad requiere, una vez mas, poner en juego estrategias de procesamiento visual y geométrico, coordinándolas, y requiere ubicarse en el espacio. Además requiere un cambio de orientación, no únicamente sobre un plano, sino en el espacio, ya que es necesario considerar en la respuesta puntos de vista situados en el nivel del mar. De acuerdo a la caracterización establecida anteriormente, esta es una actividad de construcción planteada dinámicamente siendo la inversa de la anterior.

Analizadas la secuencia formada por las 3 primeras actividades, teniendo en cuenta sus características, la consideramos incompleta. Creemos que para facilitar los objetivos pretendidos es necesario completar la secuencia con una actividad de construcción en una situación estática y una actividad de interpretación en una situación estática con un mayor nivel de dificultad ya que las características de la actividad condicionan el tipo de estrategias de procesamiento que los alumnos ponen en juego. A partir de esta necesidad se incluyen dos actividades⁶ más:

Las casas (figura 4)

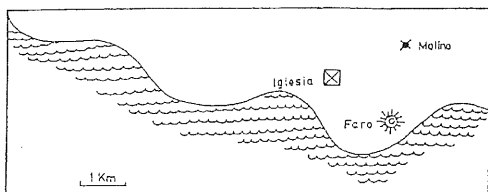
Dada la representación de una composición en el espacio, utilizando distintos códigos, esta actividad de interpretación en una situación estática requiere identificar las direcciones desde donde se han tomado los distintos puntos de vista y para su resolución hay que poner en juego estrategias de procesamiento visual y geométrico, ubicarse en el espacio y utilizar diferentes códigos.

El pueblo (figura 5)

Partiendo de representaciones de un grado de realismo semejante al de la fotografía, la actividad requiere dibujar una proyección plana de una composición en el espacio. La tarea planteada requiere poner en juego estrategias de procesamiento visual y geométrico y ubicarse en el espacio. De acuerdo a la caracterización establecida anteriormente, esta es una actividad de construcción planteada estáticamente. En el momento de incluirla en la secuencia, acordamos que si los alumnos manifiestan serias dificultades permitiremos la construcción de maquetas para facilitar el proceso de resolución.

Actividad 2

El mapa és una part de l'àrea costanera de la mar Mediterrània.



El capità d'un vaixell que passa prop de la costa, realitzà algunes fotografies de construccions que li agradaren. Malauradament, les fotografies caigueren y es barrejaren. En quin ordre foren efectuades les fotografies?

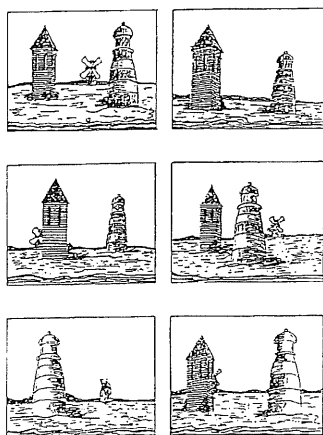


Figura 3

Las actividades de la secuencia didáctica que nos proponemos analizar son ya *a priori* actividades ricas. Responden a objetivos generales de la etapa, con lo cual están directamente relacionadas con el currículo intencional y responden a la introducción de lo que hemos considerado un contenido básico del componente simbólico/conceptual. Además, permiten establecer conexiones, con otras áreas del currículo (educación visual y plástica, tecnología y ciencias sociales), con otros contenidos matemáticos (ángulos, sistemas de referencia, giros, simetrías, movimientos...) y con la experiencia no escolar de los alumnos dado el contexto en que se plantean. La gestión de las actividades en clase, que justificamos y describimos en la sección siguiente, completan los aspectos que nos permiten considerar que esta propuesta contiene lo que llamamos actividades ricas.

Tanto la observación directa como el cuestionario tenían el objetivo de contrastar el aprendizaje esperado por el profesor con lo que el alumno realmente aprendía.

Experimentación de la secuencia

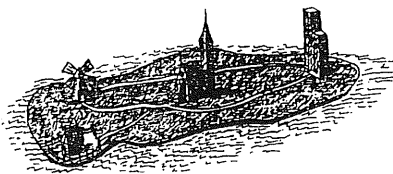
Diseñadas las actividades se llevan al aula para su experimentación con distintos grupos de alumnos. El objetivo de la experimentación era doble. Por una parte, analizar su validez como actividades ricas y, por otra, conocer las estrategias y las dificultades de los alumnos. Para ello elaboramos unas pautas de observación en clase y un cuestionario para el alumno que nos permitiera recoger la información deseada a partir de las respuestas de los estudiantes a nuestras cuestiones. Tanto la observación directa como el cuestionario tenían el objetivo de contrastar el aprendizaje esperado por el profesor con lo que el alumno realmente aprendía. Se pretendía establecer las orientaciones y las preguntas que como profesores debíamos dar y plantear para conseguir que el aprendizaje real del alumno fuera significativo y aplicable. Nuestro objetivo era determinar cómo la intervención del profesor podía facilitar que el estudiante fuese capaz de establecer conexiones ricas entre los conocimientos necesarios para, o adquiridos durante, la resolución de las actividades y los conocimientos poseídos, procedentes tanto del conocimiento académico, matemático o no, como de su experiencia en la vida no académica.

El cuestionario y la tabla de observación estaban destinados a recoger información sobre:

- la comprensión de la tarea propuesta en la actividad;
- las estrategias utilizadas por los alumnos;
- las dificultades que encuentran;
- los conocimientos matemáticos que ponen en juego;
- las relaciones que establecen con conocimientos no matemáticos;
- las conexiones con situaciones no escolares;
- aquello que los alumnos creen que han aprendido;

Actividad 1

Durant un creuer, visíteu una bonica illa y, per tal de veure-la millor, la rodegueu completamet amb el vaixell.



En el recorregut, feu quatre fotografies des de punts diferents. Podríeu dibuixar el que es veuria en cadascuna de les fotografies?

Actividad 4

En aquesta situació, determineu quines vistes corresponen a cada punt.

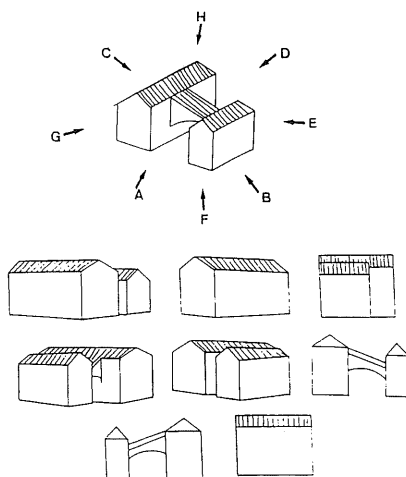


Figura 4

- la valoración de las actividades y las propuestas de cambio.

Para ello, por ejemplo, el cuestionario contenía preguntas como: ¿Has comprendido el enunciado, palabras y representaciones? ¿Cómo has resuelto la actividad? ¿Te has fijado en algún detalle en especial? ¿Te ha recordado alguna situación vivida? ¿Has utilizado algún dibujo para resolverla? ¿Has imaginado alguna situación concreta? ¿Cuál? ¿Has utilizado algo que habías aprendido en clase de matemáticas o de otras asignaturas? ¿Te has «atascado» en algún momento? ¿Cuándo y por qué? ¿Qué crees que has aprendido? ¿Qué valora-

ción darías a la actividad? ¿Qué aspectos crees que deberían cambiarse?

La experimentación de las actividades se desarrolló en distintos grupos clase, de diferentes niveles, en los que el profesor era miembro del grupo de trabajo. En general, se dejan al profesor las decisiones relativas a la organización de la clase en función del método con el que los alumnos están más familiarizados. De esta forma, los alumnos trabajan o bien en pequeño grupo, o bien individualmente aunque, en este caso, se les permite comentar y discutir entre ellos. En todos los casos, la secuencia se cierra con una puesta en común. En general, las actividades no tienen relación con la programación de matemáticas seguida en el momento en que se realizan y se presentan a los alumnos como actividades experimentales que se están desarrollando en un grupo de IES, como parte de un trabajo de innovación en el aula, y se les pide su colaboración.

El papel del profesor consiste, en general, en presentar las actividades, responder y orientar a los alumnos, aunque sin darles la respuesta, y conducir una reflexión final en un marco más amplio de resolución de problemas y hábitos de trabajo y estudio. El material del que disponen los alumnos son los instrumentos habituales de dibujo y el material de aula. En relación a la evaluación formal, la que se comunica a los alumnos, se considera, por una parte, la realización correcta de la actividad y, por otra, tanto las estrategias y procedimientos utilizados como las conexiones entre conceptos establecidas por los alumnos.

Las actividades se pasaron a dos grupos de 2.º de ESO del IES Voltrera de Abrera, dos grupos de 4.º de ESO del IES Pompeu Fabra de Martorell, un grupo de 4.º de ESO del IES Jaume I de Salou, un grupo de 4.º de ESO del IES Gabriel Ferrater de Reus y un grupo de alumnos de 4.º de ESO del IES Dolors Mallafre de Vilanova i la Geltrú.

A continuación presentamos, para cada una de las actividades, un resumen de las estrategias de los alumnos, así como el nivel de éxito, en el sentido de «completación correcta de la actividad», y la valoración asignada por los alumnos a las distintas actividades.

El café

En relación a las estrategias más comunes, la mayoría de los alumnos afirma haber imaginado estar en la situación de los personajes y algunos afirman haberse fijado en el asa de la cafetera como punto de referencia. Por lo que se refiere a las relaciones establecidas con otras situaciones, algunos alumnos dicen que la distribución de los perso-

Actividad 5

Disposen de quatre fotografies d'un poble. Podríeu dibuixar-ne el plànol?

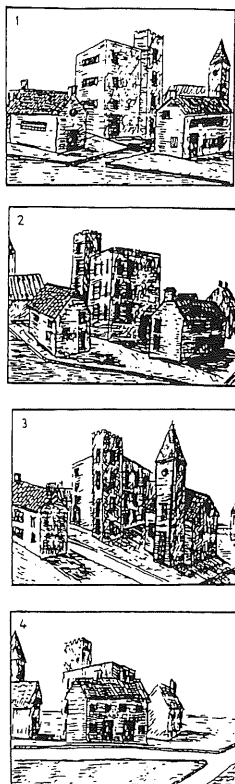


Figura 5

najes es análoga a la de los participantes en un juego de naipes. Los alumnos más jóvenes valoran con una puntuación muy alta esta actividad, sin embargo gran parte de los mayores la valoran poco, posiblemente por considerarla demasiado fácil. El nivel de éxito alcanzado por los alumnos en esta actividad es considerablemente alto.

Paseando en barco

La mayoría de los alumnos afirman resolver la actividad imaginando el desplazamiento del barco fijando la posición de alguno de los edificios, en particular, el molino. Los alumnos explicitan que necesitan conocer el sentido del desplazamiento y, en general, lo toman de izquierda a derecha. Los alumnos refieren que la situación les recuer-

da a la de un viaje en barca o en coche. Una gran mayoría de los alumnos de 4.º resuelven el problema, mientras que entre los jóvenes el éxito no llega al 50%. Esta actividad es valorada positivamente tanto por los alumnos de 2.º, como por los de 4.º, siendo estos últimos quienes la valoran más.

Una isla

De los alumnos de 2.º casi la mitad dibujan edificio por edificio, como estrategia cómoda frente a una tarea que no saben como atacar y los demás intentan resolverlo utilizando los códigos de la perspectiva, aunque, en general, el resultado es pobre. La mayoría de los de 4.º resuelven correctamente la actividad, o bien imaginando la situación o bien construyendo una maqueta que la represente con los materiales disponibles en el aula. En general, los alumnos manifiestan que la falta de calidad en el dibujo dado en la actividad resulta una dificultad para su trabajo. La situación les recuerda un viaje en coche y, a algunos, la ciudad donde está su centro. Sólo los alumnos mayores valoran bien esta actividad, aunque su puntuación no es la máxima.

Las casas

Los alumnos que resuelven la actividad dicen que imaginan que están situados en la posición indicada por las flechas, y utilizan códigos simbólicos (letras y números) para indicar las respuestas. El éxito entre los alumnos de 2.º no llega al 50%, mientras que entre los mayores es muy alto. Una vez más, únicamente los alumnos mayores valoran bien esta actividad, aunque su puntuación no es la máxima.

El pueblo

La mayoría de alumnos de 2.º abandona rápidamente la actividad y los pocos que lo intentan no consiguen resolverla correctamente. También para los alumnos de 4.º esta actividad resulta difícil, menos de la mitad la resuelven con éxito. Para ello utilizan distintas estrategias, imaginar la situación vista desde

un punto determinado o la imagen en movimiento, construir una maqueta con el material disponible en el aula o comparar la situación con una real. A pesar de su dificultad, la actividad es muy bien valorada entre los grupos de los mayores y les motiva.

Observaciones y resultados

Las actividades propuestas motivaron a los alumnos, ya que permiten su creatividad, sin tener que restringirse a un proceso de resolución algorítmico, previamente establecido y dirigido. En general, los alumnos se manifiestan muy creativos, inventando estrategias y procedimientos, muchos de ellos realmente sorprendentes para el profesor.

Sin embargo, la mayoría de las veces son incapaces de describir, de forma rigurosa, sus procesos de resolución, posiblemente porque no son conscientes de ellos. Por ello, la clasificación de las estrategias que utilizan no es más que el resultado de nuestra interpretación, a partir del conocimiento teórico, de las preguntas y comentarios que los alumnos hacen, y de la observación de sus procedimientos explícitos. De esta forma, observamos que en el desarrollo de las actividades por parte de ellos aparecen distintos tipos de estrategias:

- de procesamiento visual, imaginando una situación estática (por ejemplo, sentados alrededor de la mesa) o dinámica (por ejemplo, el desplazamiento del barco);
- de aproximación, tanto global, como parcial, fijándose en un elemento concreto (por ejemplo, el molino);
- de estructuración, en general relacionando la actividad con una situación real.

Constatamos, en primer lugar, que las estrategias que utilizan los alumnos están inducidas, en cierto modo, por la propuesta de la actividad. De esta forma, un desplazamiento incita estrategias dinámicas de procesamiento visual,

*Las actividades
propuestas
motivaron
a los alumnos,
ya que permiten
su creatividad,
sin tener
que restringirse
a un proceso
de resolución
algorítmico,
previamente
establecido
y dirigido.
En general,
los alumnos
se manifiestan
muy creativos,
inventando
estrategias
y procedimientos,
muchos de ellos
realmente
sorprendentes
para el profesor.*

mientras que una situación estática se resuelve mayoritariamente a través de estrategias de procesamiento visual estáticas. Además, las estrategias utilizadas pueden, en algunos casos, ser estrategias inesperadas por parte del profesor lo cual reafirma la importancia de que el profesor esté abierto a aceptar como válidas estrategias distintas de las propias si llevan a resultados correctos. Por otra parte, observamos que los alumnos, ante la dificultad de resolver una situación, son capaces de reconvertir la acción requerida por la actividad. Por ejemplo, al ser incapaces de imaginar la situación propuesta en las actividades 4 o 5, deciden construir una maqueta, con lo cual la necesidad de imaginar puede ser resuelta a partir de la observación directa de una situación real que la representa.

Por otra parte, en ningún caso aparecen espontáneamente estrategias de procesamiento geométrico. En general, los alumnos no relacionan, a menos que se les pida, la actividad con otros conocimientos matemáticos, excepto con aquellos con los cuales la relación es directa y evidente, por ejemplo con el proceso de elaboración de mapas, que, para algunos «no son matemáticas» y si las aceptan como tal es «porque las ha dado el profesor de matemáticas» ya que han desarrollado actividades parecidas con anterioridad en las áreas visual y plástica o ciencias de la naturaleza.

No obstante, al proponer a los alumnos que reflexionasen y preguntarles qué conceptos matemáticos estaban relacionados con las actividades y qué habían aprendido, ven relaciones con la traslación (sentido y dirección), la orientación y la posición (sistemas de referencia), los giros (ángulos), las simetrías, la representación plana de objetos tridimensionales (proyección y perspectiva), la utilización de códigos (numéricos y alfabéticos) y la semejanza (escalas), los mayores expresándolo en un lenguaje bastante adecuado, mientras que los de 2.º utilizan frases del estilo «ver el mismo elemento en distintas vistas» o «que una figura tiene más de una perspectiva».

En general, durante la experimentación se revela como muy importante el papel del profesor como conductor del aprendizaje. Actividades, interesantes *a priori* pueden no conseguir que los alumnos aprendan sin una intervención adecuada del profesor. Observamos, por ejemplo, que con frecuencia aunque los alumnos lleguen a la solución del problema no saben si el resultado obtenido es solución del problema, ni tampoco por qué es correcta. Además, en el caso de situaciones abiertas, les resulta difícil aceptar que un problema pueda tener soluciones diversas.

La valoración que los alumnos asocian a las actividades, junto con sus comentarios, en relación con el rendimiento en las actividades nos lleva a pensar que, los menores valoran las actividades en función del éxito que tienen en ellas, mientras que para los de 4.º la valoración va asociada al reto que les plantea la actividad. Además de suponer

un reto para los alumnos, las actividades no deben ser ni demasiado fáciles ni demasiado difíciles, sino que, si se pretende un aprendizaje real, deben ser próximas a sus posibilidades a la vez que les supongan un reto. Observamos también que al aumentar el nivel de dificultad de una actividad aumenta la variedad y riqueza de las estrategias que aparecen en los procesos de resolución.

Durante la experimentación constatamos también la importancia de que las actividades estén formuladas con un lenguaje que resulte claro para los alumnos. En particular, observamos que era necesario mejorar la calidad de las imágenes que aparecían en las actividades (somos conscientes de que en publicaciones posteriores algunas de estas actividades deben aparecer ya modificadas). Algunas de ellas llevaban a confusión a los alumnos y podían prestarse a distintas interpretaciones y, por lo tanto, a resultados erróneos.

Conclusiones

Después de este periodo de experimentación, creemos que la organización del currículo a partir de secuencias de «actividades ricas» puede facilitar que la geometría en la enseñanza sea algo más que una «lista de nombres, una colección de fórmulas para calcular áreas y volúmenes, el enunciado del teorema de Pitágoras y su aplicación a un listado de ejercicios». Las «actividades ricas» permiten la conexión del conocimiento geométrico con la experiencia y conocimientos previos de los alumnos, con otros aspectos de las matemáticas, con otras áreas del currículo y con el entorno. El establecimiento de estas conexiones podría conseguir que los alumnos llegasen a una interpretación más rica del significado y aplicabilidad de las matemáticas, interpretación especialmente interesante en un momento en que la Reforma nos permite poner énfasis en los procedimientos y en la adquisición de conocimientos globalizados.

Las «actividades ricas» resultan, a nuestro entender, motivadoras para los alumnos, especialmente porque resultan un reto para ellos ya que requieren que éstos pongan en juego su creatividad y van más allá de procesos algorítmicos rutinarios. Creemos que el esfuerzo para adaptar las múltiples e interesantes actividades, conocidas ya por el profesor, para convertirlas en «actividades ricas», puede favorecer el aprendizaje de los alumnos y la satisfacción de todos los implicados en el proceso de enseñanza.

En este proceso, el papel del profesor, como incitador, moderador y estructurador de la dinámica de la clase y de los procesos de aprendizaje de los alumnos, es de gran importancia. A él corresponde no sólo adaptar las actividades al currículo y sus objetivos, sino también adecuar su intervención de tal forma que las tareas que proponga a sus alumnos lleguen a ser realmente «actividades

ricas». Una actividad interesante *a priori* llegará a ser una «actividad rica» únicamente cuando el profesor proponga las cuestiones necesarias para que los alumnos puedan establecer conexiones y elaborar conclusiones y principios teóricos. Sin la intervención adecuada del profesor las actividades potencialmente «ricas» pueden ser intrascendentes para el aprendizaje del alumno. A él le corresponde el reto de dinamizar, fomentar y estructurar el proceso de aprendizaje.

En la introducción de este artículo, mencionábamos las dificultades que los profesores encontramos en el momento de plantearnos la concreción de un currículo de geometría básico y coherente. Desde este punto de vista, consideramos que el trabajo desarrollado en grupo en colaboración, profesores e investigadores en educación matemática, permite, a partir de la discusión conjunta, encontrar puntos de contacto para elaborar criterios que faciliten la concreción del currículo y su adecuación a la realidad de nuestras aulas.

Tal como indicábamos también al inicio de este escrito, otro de los retos al que se enfrentan los profesores está relacionado con la dificultad para encontrar referencias teóricas que clarifiquen los procesos de los alumnos en el desarrollo de actividades geométricas. Si se contrastan los conocimientos que los docentes tienen, respecto a este tema, en los aspectos de aritmética o álgebra con los de geometría se observa que son pocos los documentos al alcance del profesor de secundaria que le permiten interpretar los procesos de conocimiento de los alumnos. Desde esta perspectiva el trabajo desarrollado en el grupo Menaecme ha sido realmente interesante, ya que ha permitido contrastar las aportaciones teóricas provenientes de la investigación con la realidad del aula.

Como resultado de este contraste, comprendemos mejor los procesos de conocimiento de los alumnos, en particular, la importancia de que el profesor facilite la explicitación de modelos y estrate-

* Las
«actividades ricas»
permiten
la conexión
del conocimiento
geométrico
con la experiencia
y conocimientos
previos
de los alumnos,
con otros
aspectos de
las matemáticas,
con otras áreas
del currículo
y con el entorno.

gias de resolución distintas a las propias, cómo las características de la actividad condicionan o limitan los procesos de resolución y las dificultades de los alumnos y la necesidad de presentar las tareas de la forma más clara posible, especialmente la información a través de imágenes. Además, somos más conscientes de la necesidad de que desde la investigación se contribuya a la creación de útiles que ayuden realmente al profesor y, en particular, creemos que la investigación en colaboración puede ser un camino para ello.

El contraste entre teoría y práctica es también interesante desde otra perspectiva. Con frecuencia, el investigador desarrolla sus estudios alrededor de un tema relacionado con la docencia, pero en un marco muy distinto, trabajando con alumnos en situaciones empíricas muy distantes de la situación real del aula, y publica los resultados en revistas divulgativas de carácter científico. Sin embargo, y debido a la distancia entre el carácter empírico y la realidad docente, el investigador se cuestiona con frecuencia la utilidad real de sus esfuerzos. Por otra parte, los profesores al leer dichas publicaciones, en las que espera encontrar respuestas a sus dificultades en el aula, sienten con frecuencia que aquellas tienen un carácter excesivamente teórico que no contempla las posibilidades reales en el aula.

Desde este punto de vista, el trabajo del grupo Menaecme ha sido realmente interesante dado que ha permitido un intercambio real entre profesores e investigadores, permitiendo analizar cuáles de las preguntas del ámbito de la investigación eran realmente significativas para la práctica del aula y cómo sus resultados facilitaban la tarea de los docentes aportando modelos a los profesores para la comprensión de los procesos de los alumnos. Sin embargo, debemos reconocer que este tipo de estudios en colaboración tiene también dificultades, tanto de carácter práctico, por ejemplo las relativas a la dedicación o a las limitaciones de la experimenta-

...el trabajo del grupo Menaecme ha sido realmente interesante dado que ha permitido un intercambio real entre profesores e investigadores, permitiendo analizar cuáles de las preguntas del ámbito de la investigación eran realmente significativas para la práctica del aula y cómo sus resultados facilitaban la tarea de los docentes aportando modelos a los profesores para la comprensión de los procesos de los alumnos.

**Núria Gorgorió
Francesca Artigues
Francesc Banyuls
David Moyano
Núria Planas
Montse Roca
Àngel Xifré**

ción, como las relacionadas a la compatibilización de intereses o registros de lenguaje. A pesar de ello, creemos importante que desde la administración educativa, desde las universidades y desde el ámbito de la formación permanente se facilite el desarrollo de este tipo de estudios ya que los resultados son realmente enriquecedores, no sólo para el grupo que los desarrolla sino también para el colectivo de profesores e investigadores en general.

Bibliografía

- BISHOP, A. (1982): *Towards relevance in the teaching of geometry*, Conferencia plenaria en Conference on Geometry Teaching, International Commission on Mathematics Instruction, Mons, Belgica, Agosto 1982.
- BISHOP, A. (1988): *Mathematical Enculturation: a cultural perspective on mathematics education*, Kluwer, Dordrecht.
- BISHOP, A. (1998): «Equilibrando las necesidades matemáticas de la educación general con las de la instrucción matemática de los especialistas», *Suma*, n.º 27, 25-37.
- BROOMES, D. (1989): *Using goals to construct useful forms of school mathematics*, UNESCO, Col. Science and Technology Education, Document Series, n.º 35, Paris.
- GRACIA ALCAINE, F. (1995): *Imágenes*, Proyecto Sur de Ediciones, Granada.
- GRACIA ALCAINE, F. (1995): «Taller de intuición espacial», en *Séptimas JAEM*, Madrid.
- GORGORIÓ, N. (1995): *Estratègies, dificultats i errors en els aprenentatges de les habilitats espacials*, Tesi Doctoral, Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona. Universitat Autònoma de Barcelona.
- GORGORIÓ, N. (1998): «Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems», *Educational Studies in Mathematics*, n.º 35, 207-231.
- GORGORIÓ, N. y A. BISHOP (1998): *La geometría en el currículum 12-16*, *Biaix*, 12, Mayo 98.
- LEINHARDT, G., O. ZASLAVSKY Y M. K. STEIN (1990): «Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching», *Review of Educational Research*, n.º 60(1), 1-64.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1989): *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, N.C.T.M., Reston, Virginia.
- PARZYSZ, B. (1988): «"Knowing" vs "Seeing". Problems of the Plane Representation of Space Geometry Figures», *Educational Studies in Mathematics*, 19(1), 79-92.
- PRESMEG, N. (1986): «Visualisation in high school mathematics», *For the Learning of Mathematics*, n.º 6(3), 43-44.
- PRESMEG, N. (1999): «Las posibilidades y peligros del pensamiento basado en imágenes en la resolución de problemas matemáticos», *Suma*, 32, Noviembre 1999.
- ROBITAILLE, D. y M. DIRKS (1982): «Models for the Mathematics Curriculum», *For the Learning of Mathematics*, n.º 2, 3, 3-21.
- USISKIN, Z. (1987): «Resolving the Continuing Dilemma in School Geometry», en M. M. LINDQUIST y A. P. SHULTE, (Eds.), *Learning and Teaching Geometry*, K-12, N.C.T.M., Reston, Virginia.