

Aplicació dels sistemes dinàmics a l'estudi d'òrbites de cometes i de naus espacials*

REGINA MARTÍNEZ

1 Introducció

A primera vista podríem dir que el moviment dels planetes és senzill. Kepler ja va enunciar que es mouen descrivint el·lipses amb el Sol en un dels seus focus. Aquest seria el moviment exacte d'un planeta en una situació hipotètica en què només existissin el Sol i aquest planeta i considerant únicament la llei de gravitació universal. En realitat les el·lipses no són més que una primera aproximació del moviment dels planetes.

En el nostre sistema solar hi trobem, però, altres cossos amb comportaments diferents. Es poden trobar exemples d'aquest tipus en la família dels anomenats cometes de Júpiter. Aquests són cometes periòdics que descriuen, en principi, òrbites properes a el·lipses. Sovint, però, aquests cometes passen a prop de Júpiter, de manera que aquest planeta pot arribar a pertorbar fortament l'òrbita del cometa i fer, fins i tot, que hi pugui col·lidir. Aquest va ser el cas del cometa Shoemaker-Levy 9, que va ser capturat per Júpiter i finalment va impactar sobre la superfície del planeta el juliol de 1994. Primer es va trencar en diferents trossos, possiblement a causa de les forces de marea, i posteriorment aquests trossos van anar caient sobre Júpiter entre el 16 i el 22 de juliol d'aquell any.

En altres casos, l'apropament a Júpiter no té conseqüències tan dràstiques, però sí que produeix una forta desviació de l'òrbita del cometa. Un exemple el tenim en el cometa Oterma. Cap al 1910 l'Oterma es trobava movent-se en una òrbita exterior a la de Júpiter. Després de fer dues voltes al voltant del Sol mentre Júpiter en feia tres, el cometa va passar a prop del planeta, el qual el va desviar de l'òrbita exterior cap a una òrbita interior a la de Júpiter.

* Llició inaugural del curs 2000-2001 a la llicenciatura de matemàtiques de la UAB.

A partir d'aquest moment, el cometa va descriure tres voltes al voltant del Sol al mateix temps que Júpiter en feia dues. A continuació es va produir un nou apropament a Júpiter, que va desviar de nou el cometa, ara cap a una regió exterior. Un model senzill per estudiar aquesta transició és el problema restringit de tres cossos. L'estudi d'aquest model des del punt de vista dels sistemes dinàmics permet entendre geomètricament com es produeix aquesta transició. Actualment un mecanisme similar al del cometa Oterma s'utilitza en el disseny de determinades missions espacials.

Un dels primers punts en el disseny d'una missió espacial és la determinació d'una òrbita adequada als objectius de la missió (estudi d'un planeta, d'un cometa, observatoris espacials, etc). Aquesta òrbita, anomenada *òrbita nominal*, és la que haurà de seguir la nau mentre duri la missió. Inicialment es determinen una o diverses possibles òrbites utilitzant un model simplificat del problema real. Les òrbites així obtingudes són utilitzades com a primera aproximació en el càlcul de l'òrbita nominal d'un model més proper al problema real. Un dels recursos que han estat més utilitzats per obtenir aquesta primera aproximació consisteix a considerar diferents arcs de còniques, és a dir, solucions del problema de dos cossos. Aquesta és una bona aproximació inicial quan, per exemple, la nau es troba lluny dels planetes i es mou bàsicament per la influència del Sol. En altres regions, però, serà més convenient utilitzar un model de partida que tingui en compte l'existència d'altres cossos.

L'òrbita nominal es determinarà usant un model molt més aproximat del problema real que tingui en compte tots els cossos grans del sistema solar a més d'altres efectes com ara el vent solar, la pressió de radiació, les correccions relativistes, etc., que seran més o menys importants segons el tipus de missió. Tot i així, cal tenir present que l'òrbita que es pren com a nominal no és una òrbita del problema real (aquest no el coneixem de manera exacta). D'altra banda, encara que petits, es tenen errors en les mesures que impedeixen conèixer de manera exacta on es troba la nau a cada instant de temps. Els efectes d'aquestes incerteses es poden veure agreujats si l'òrbita nominal és inestable en el sentit que petites desviacions de l'òrbita poden fer que la nau s'allunyi considerablement de l'òrbita nominal fixada en un interval de temps petit. Això fa que, en general, calgui realitzar maniobres de control per mantenir la nau sobre l'òrbita desitjada. Aquests controls poden consistir en petits impulsos que canvien la velocitat de la nau en diferents instants de temps per tal d'anar-ne corregint l'òrbita. Tots aquests controls tenen un cost ja que consumeixen combustible. Òbviament, si cal molt combustible la nau haurà de ser més gran, pesarà més, i això vol dir que el coet necessari per llançar-la haurà de ser més gran i més potent i, per tant, tindrà un cost econòmic molt més elevat. Clarament, mentre millor sigui l'òrbita nominal, és a dir, mentre més s'apropi a una òrbita real, podem esperar que el control necessari sigui menor, i per tant també el cost serà menor.

A les seccions següents utilitzarem el model del problema restringit de tres cossos per explicar el comportament del cometa Oterma. Usant aquest mateix model veurem també com obtenir òrbites per a possibles missions espacials.

Cal tenir en compte que les òrbites així obtingudes no són més que la primera aproximació de l'òrbita nominal que haurà de seguir la nau.

2 El problema restringit, circular, pla de tres cossos

Per estudiar el moviment dels cometes del tipus de l'Oterma considerarem un model simplificat del problema real.

Observem en primer lloc algunes de les característiques d'aquests cometes. Com dèiem abans, descriuen en principi una òrbita el·líptica que en algun moment es veu fortament pertorbada per Júpiter. A més es mouen gairebé en el mateix pla de l'òrbita de Júpiter. D'altra part, l'excentricitat de l'òrbita de Júpiter és petita ($e = 0,0483$), de manera que com a primera aproximació la podem prendre igual a zero. D'acord amb aquestes observacions caldrà que el nostre model tingui en compte, com a mínim, dos cossos grans o *primaris*, que suposarem que són el Sol (S) i Júpiter (J), i un tercer cos petit que podem pensar que és el cometa o una nau espacial.

Si S i J tenen masses positives m_S i m_J , respectivament, sembla natural suposar que el seu moviment no notarà la presència d'un petit cometa. En aquest sentit direm que el tercer cos té massa zero. És clar, però, que el cometa es mourà per la influència dels dos primaris. Suposarem a més que S i J es mouen en un pla descrivint òrbites circulars al voltant del seu centre de masses, amb velocitat angular constant (que suposarem normalitzada a 1).

Per estudiar el moviment del tercer cos en el camp gravitatori creat pels primaris és convenient introduir un sistema de coordenades giratori o *sistema sinòdic*, amb l'origen en el centre de masses, que giri junt amb els cossos primaris de manera que, en aquest sistema giratori, S i J es mantinguin fixats en dos punts de l'eix x . Normalitzant a 1 la distància entre S i J, aquests cossos es trobaran fixats en dos punts $(-\mu, 0)$ i $(1 - \mu, 0)$ del sistema sinòdic. Aquí

$$\mu = \frac{m_J}{m_S + m_J}.$$

El moviment del cometa està determinat per dues funcions del temps $(x(t), y(t))$ que defineixen una corba en el pla (x, y) . Utilitzant la llei de gravitació universal i la segona llei de Newton es té que les funcions $x(t), y(t)$ han de satisfer el següent sistema d'equacions diferencials ordinàries de segon ordre:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \end{aligned} \tag{1}$$

on

$$\Omega(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu(1 - \mu)}{2},$$

$r_1^2 = (x + \mu)^2 + y^2$, $r_2^2 = (x - 1 + \mu)^2 + y^2$. Notem que per determinar una solució de (1) cal fixar la posició (x_0, y_0) i la velocitat (\dot{x}_0, \dot{y}_0) del tercer cos

en un instant inicial. Així, per (1) l'espai de fases (o espai d'estats) és l'espai de posicions i velocitats. El denotarem per \mathcal{E} .

Aquest model que acabem de plantejar es coneix com a problema restringit, circular i pla de tres cossos. Apareix per primera vegada en els treballs d'Euler (1772) sobre la teoria de la Lluna. En aquest cas, els primaris són el Sol i la Terra i el tercer cos és la Lluna. El valor del paràmetre de masses és $\mu = \frac{m_T}{m_S + m_T} \approx 3 \times 10^{-6}$, on m_T és la massa de la Terra.

Cap al 1836 Jacobi va descobrir que, en aquest problema, hi ha una quantitat que es conserva. De fet és una integral primera del sistema d'equacions diferencials (1) anomenada *integral de Jacobi*

$$F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + 2\Omega(x, y). \tag{2}$$

De l'existència d'aquesta integral es dedueixen restriccions sobre la regió del pla (x, y) on es pot moure el tercer cos. Per a una òrbita tal que la integral de Jacobi prengui un cert valor constant C s'ha de complir

$$2\Omega(x, y) - C \geq 0. \tag{3}$$

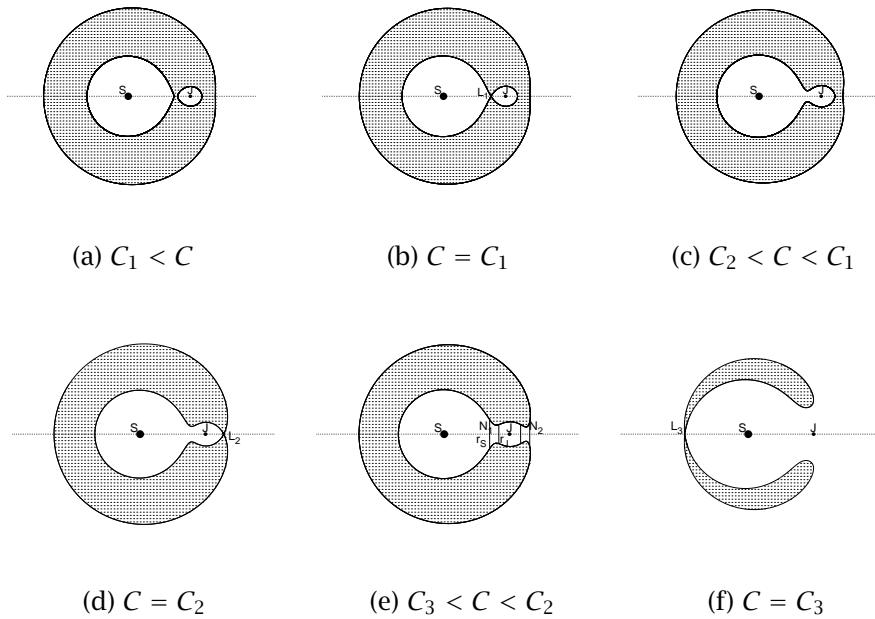


FIGURA 1: Regió de Hill per $\mu = 0,05$ i diferents valors de la constant de Jacobi C .

El conjunt de punts del pla que satisfan aquesta desigualtat s'anomena *regió de Hill* i la frontera d'aquesta regió és la *corba de velocitat zero* (cvz). Notem

que els punts de la cvz són punts on la velocitat (\dot{x}, \dot{y}) en el sistema giratori val zero. La figura 2 mostra la cvz per a diferents valors de la *constant de Jacobi* C . Si C és molt gran la regió de Hill té tres components connexos. En aquest cas, el tercer cos s'ha de moure sempre en un d'aquests components de manera que, si, per exemple, inicialment es troba a la regió que conté a S, en cap moment podrà passar a la regió de Júpiter i viceversa. Disminuint el valor de C es té un valor crític, C_1 , per sota del qual la regió de Hill passa a tenir dos components connexos. Ara és possible que el tercer cos passi d'una regió propera a S a una propera a J. A mesura que es disminueix el valor de C apareixen tres valors crítics addicionals de la constant de Jacobi, C_2, C_3, C_4 , on canvia qualitativament la regió de Hill. Per a valors de C , $C_3 < C < C_4$, la regió no accessible per al tercer cos té dos components connexos que, per a $C = C_4$, es redueixen a dos punts, L_4, L_5 , cadascun dels quals forma un triangle equilàter amb S i J. Per sota del valor C_4 tot el pla és accessible per al tercer cos. L'evolució de la regió de Hill en funció de la constant de Jacobi és la mateixa per a qualsevol valor del paràmetre de masses μ , però els valors crítics C_i , $i = 1, 2, 3, 4$ depenen de μ . Fixat un valor de C , definim el conjunt de nivell per la constant C com $\mathcal{E}_C = \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \in \mathcal{E} \mid F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = C\}$.

Per al sistema Sol-Júpiter el valor del paràmetre de masses és $\mu=0,0009537$ i els valors crítics de la constant de Jacobi són $C_1 = 3,467916391$, $C_2 = 3,401894141$, $C_3 = 3,097422198$ i $C_4 = 3$. Per a l'òrbita del cometa Oterma el valor de la constant de Jacobi es pot aproximar per 3,03. Per tant la regió de Hill és qualitativament com la mostrada a la figura 2(e).

Per a valors de C , $C_3 < C < C_2$, a la regió de Hill hi podem definir les regions N_1 i N_2 mitjançant segments verticals en el pla x, y com es mostra a la figura 2(e). Ara, N_1 i N_2 divideixen la regió de Hill en tres components. Un component que conté a S i que denotarem per S , un altre que conté a J, que denotarem per J , i el component exterior, E . És clar que si el tercer cos es mou per les regions S, J i E , en algun moment ha de passar per N_1 i N_2 . Vegem que succeeix en aquestes regions de pas.

3 Òrbites periòdiques de Lyapunov

Notem primer que el sistema d'equacions (1) té tres punts d'equilibri col·lineals, L_1, L_2, L_3 (figura 2), en què els tres cossos es troben sobre l'eix x , i els dos punts triangulars, L_4 i L_5 , amb els tres cossos en els vèrtexs d'un triangle equilàter. Aquests són punts d'equilibri en el sistema sinòdic mentre que en el sistema inercial corresponen a òrbites periòdiques en què els tres cossos descriuen cercles al voltant de l'origen amb velocitat angular constant.

El sistema linealitzat en els punts d'equilibri col·lineals té dos valors propis reals $\pm\lambda$ i dos d'imaginariis purs $\pm i\nu$ de manera que L_1, L_2 i L_3 són punts de tipus centre-sella i per tant inestables.

L'aplicació del teorema de Lyapunov en un entorn d'un punt d'equilibri col·lineal, L_i , $i = 1, 2, 3$, dona l'existència d'una família uniparamètrica de solucions periòdiques de (1). Les solucions d'aquesta família, que pot ser para-

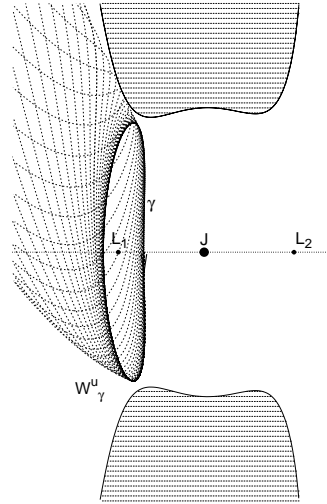


FIGURA 2: Òrbita periòdica de Lyapunov, γ , a prop de L_1 , i la seva varietat invariant inestable, W_γ^u , en el pla x, y .

metritzada per la constant de Jacobi C , tendeixen al punt d'equilibri L_i quan C tendeix a C_i . El període tendeix a $T = 2\pi/\nu$. Per a valors de C tals que $C_i - C > 0$ prou petit, les òrbites periòdiques de Lyapunov són també inestables ja que tret de l'1, els altres multiplicadors característics tendeixen a $e^{\pm\lambda T}$ quan C tendeix a C_i .

Pel teorema de la varietat estable tenim que, per a cadascuna d'aquestes òrbites periòdiques, γ , existeix una varietat invariant local 2-dimensional estable, W_γ^s , formada per les òrbites asimptòtiques a γ per temps positius. Anàlogament, existeix una varietat inestable de dimensió 2, W_γ^u , formada per les òrbites asimptòtiques a γ per temps negatius. La figura 3 mostra la projecció sobre el pla x, y de l'òrbita periòdica γ propera a L_1 i d'una de les branques de W_γ^u .

Conley [2] va veure que són aquestes varietats invariants les que *organitzen* els passos de les òrbites entre les diferents regions S, J i E . Estudiant l'espai de fases en un entorn d'un punt d'equilibri col·lineal, Conley classificava les òrbites en aquest entorn en: *òrbites de captura*, *òrbites de trànsit* i *òrbites de no-trànsit*. Les primeres són les òrbites asimptòtiques a la periòdica ja sigui per temps positius o per temps negatius. Són de fet les òrbites de les varietats invariants locals de l'òrbita periòdica. Les òrbites de trànsit són les que surten d'un entorn del punt d'equilibri per regions diferents (S, J o E) segons considerem temps positius o negatius, mentre que les de no-trànsit ho fan per la mateixa regió.

Podem resumir el treball de Conley pel que fa a l'estructura de l'espai de fases a l'entorn d'un punt d'equilibri col·lineal a la figura 3. Per interpretar

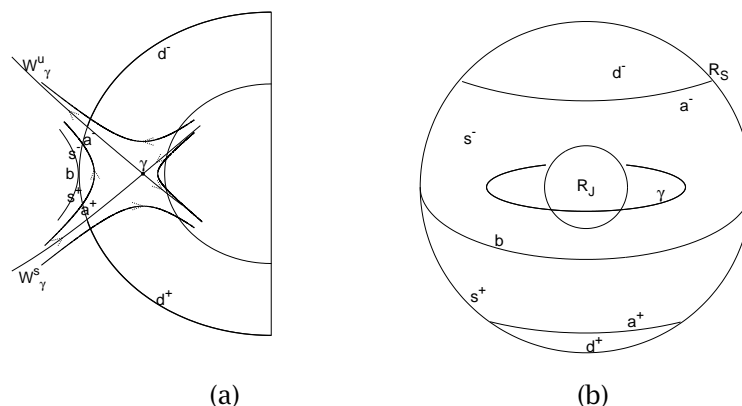


FIGURA 3: Flux en un entorn \hat{N}_1 d'un punt d'equilibri col·lineal.

aquesta figura fixem un punt d'equilibri col·lineal, per exemple, L_1 , i un valor de la constant de Jacobi $C < C_1$ i proper a C_1 . Sigui γ l'òrbita periòdica de Lyapunov continguda a \mathcal{E}_C . Siguin r_S i r_J els segments verticals que defineixen la regió N_1 que conté a L_1 (vegeu la figura 2(e)). Denotarem per \hat{N}_1, R_S, R_J els conjunts de punts de \mathcal{E}_C que es projecten en el pla x, y sobre N_1, r_S i r_J respectivament. Es té que \hat{N}_1 és homeomorf a $\mathbb{S}^2 \times I$, on I és un interval de la recta real. Les esferes frontera de \hat{N}_1 són R_S i R_J . El flux a \hat{N}_1 s'obté girant la figura 3(a) al voltant de l'eix vertical. Si denotem per R una de les esferes R_S o R_J , podem dividir R en dos hemisferis: R^+ , on el flux entra a R , i R^- , on el flux surt de R . Siguin a^+ i a^- les interseccions amb R de les varietats invariants locals estable i inestable, respectivament, de γ . Llavors a^+ (a^-) és una corba en R^+ (R^-) homeomorfa a \mathbb{S}^1 . a^+ defineix en R^+ una regió d^+ de manera que les òrbites que entren a \hat{N}_1 per d^+ són òrbites de trànsit que sortiran de \hat{N}_1 per l'altra esfera frontera. Sigui b la intersecció de R^+ i R^- i s^+ la zona esfèrica a R^+ amb fronteres b i a^+ . Els punts de s^+ corresponen a òrbites de no-trànsit ja que són òrbites que sortiran de \hat{N}_1 per la regió s^- de la mateixa esfera frontera R . Corbes i regions similars poden definir-se a l'altra esfera frontera.

Tenim, doncs, que les branques de les varietats invariants de γ separen els diferents tipus de moviments en \hat{N}_1 . Denotarem per $W_\gamma^{u,S}$ ($W_\gamma^{u,J}$) la branca de W_γ^u que surt de \hat{N}_1 per R_S (R_J). $W_\gamma^{s,S}, W_\gamma^{s,J}$ denotaran les corresponents branques de la varietat estable.

4 Cadenes heteroclíniques

Per obtenir informació de la dinàmica fora d'un entorn de l'òrbita periòdica globalitzem les varietats invariants, és a dir, continuem les òrbites de W_γ^u per temps positius i les de W_γ^s per temps negatius. Ara és possible que això doni lloc a interseccions entre W_γ^s i W_γ^u .

Una òrbita *homoclínica* a una òrbita periòdica γ és una òrbita asimptòtica a γ per temps positius i negatius, és a dir, és una òrbita que pertany a $W_\gamma^u \cap W_\gamma^s$. Diferents autors han demostrat l'existència ([2], [7], [6]) i la transversalitat ([6]) d'aquestes òrbites homoclíniques per determinats valors de μ i de C .

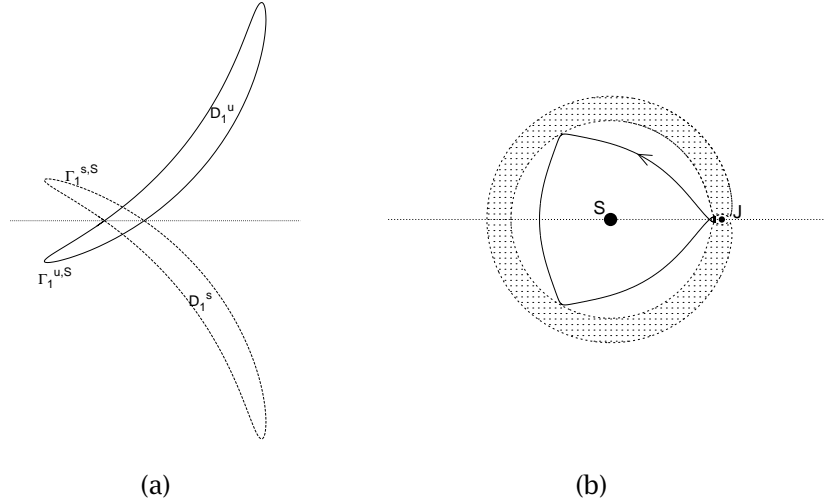


FIGURA 4: (a) Intersecció de $W_{\gamma_1}^{u,S}$ ($W_{\gamma_1}^{s,S}$ amb $\gamma = 0$).
(b) Una òrbita homoclínica simètrica a γ_1 a la regió S .

Destaquem que, a part dels resultats teòrics, podem calcular efectivament òrbites homoclíniques a una òrbita periòdica a partir de les interseccions de W_γ^u i W_γ^s amb una secció transversal al flux. Per veure això suposem de moment que γ_1 és l'òrbita periòdica propera a L_1 . Fixada la constant de Jacobi C , considerem la secció Σ_0 definida pels punts de \mathcal{E}_C amb $\gamma = 0, \dot{\gamma} < 0$ i prenem x, \dot{x} com a coordenades a Σ_0 . Denotem per $\Gamma_1^{u,S}$ ($\Gamma_1^{s,S}$) la primera intersecció de $W_{\gamma_1}^{u,S}$ ($W_{\gamma_1}^{s,S}$) amb Σ_0 fora d'un entorn de L_1 . Per a determinats valors de μ i C , $\Gamma_1^{u,S}$ és una corba homeomorfa a \mathbb{S}^1 ([7], [6]). La figura 4(a) mostra $\Gamma_1^{u,S}$ per a $\mu = 0,0009537$ i $C = 3,037$.

D'altra part, les simetries del problema impliquen que si $(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t))$ és una solució de (1) llavors $(x(-t), -y(-t), -\dot{x}(-t), \dot{y}(-t))$ també és solució. Es té així que $\Gamma_1^{s,S}$ és la corba simètrica de $\Gamma_1^{u,S}$ respecte a l'eix x . Ara, els punts d'intersecció de $\Gamma_1^{u,S}$ amb l'eix x corresponen a òrbites homoclíniques a γ_1 fent una volta al Sol en el sistema sinòdic. Aquestes òrbites homoclíniques són simètriques. A la figura 4(a) s'observa l'existència de dues òrbites homoclíniques a γ_1 simètriques així com de dues de no simètriques corresponents a punts d'intersecció de $\Gamma_1^{u,S}$ amb $\Gamma_1^{s,S}$ que no estan sobre l'eix x . Una de les òrbites homoclíniques simètriques s'ha representat a la figura 4(b).

Observem que els punts del component connex acotat, D_1^s (D_1^u), del pla x, \dot{x} definit per $\Gamma_1^{s,S}$ ($\Gamma_1^{u,S}$) donen condicions inicials per òrbites que passen de la regió S a la J per temps positius (negatius). Per tant els punts de $D_1^s \cap D_1^u$ corresponen a òrbites que *vénen* de la regió J i després de fer una volta al Sol tornen a entrar a la regió J .

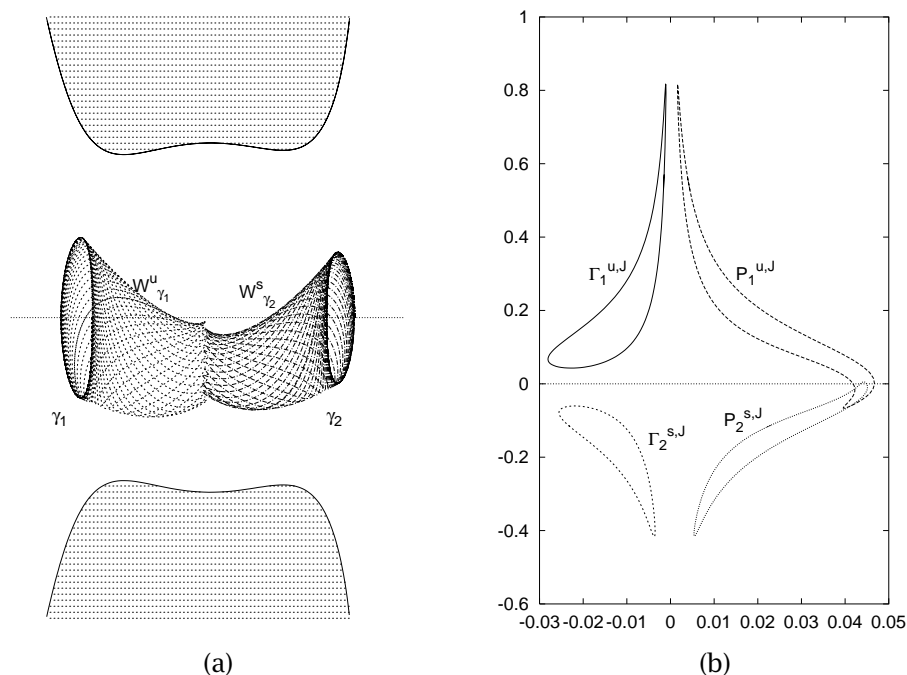


FIGURA 5: (a) Projectió de les varietats invariants de γ_1 i γ_2 sobre el pla x, y a la regió J . (b) Les dues primeres interseccions de $W_{\gamma_1}^{u,J}$ i $W_{\gamma_2}^{s,J}$ amb $x = 1 - \mu$.

Calculant numèricament successives interseccions de $W_{\gamma_1}^{u,S}$ amb Σ_0 es poden obtenir òrbites homoclíniques a γ_1 fent més d'una volta al Sol.

En principi, per a aquells valors de μ i $C_3 < C < C_2$ per als quals consisteixen les òrbites periòdiques de Lyapunov γ_1 i γ_2 prop de L_1 i L_2 respectivament, és possible que $W_{\gamma_1}^{u,J}$ ($W_{\gamma_1}^{s,J}$) talli $W_{\gamma_2}^{s,J}$ ($W_{\gamma_2}^{u,J}$) (figura 4). Si existeixen, les òrbites d'aquesta intersecció, anomenades òrbites *heteroclíniques*, són òrbites asimptòtiques a una òrbita periòdica per temps negatius i a l'altra per temps positius. A la figura 4(b), usant la secció $x = 1 - \mu$ es mostra un exemple en què les primeres interseccions, $\Gamma_1^{u,J}$ i $\Gamma_2^{s,J}$ de $W_{\gamma_1}^{u,J}$ i $W_{\gamma_2}^{s,J}$ no es tallen. Sí que ho fan, però, les segones interseccions $P_1^{u,J}$, $P_2^{s,J}$. Els punts de $P_1^{u,J} \cap P_2^{s,J}$ corresponen a òrbites asimptòtiques a γ_1 per temps negatius i a γ_2 per temps positius. Aquestes òrbites completen una volta a Júpiter en el sistema sinòdic.

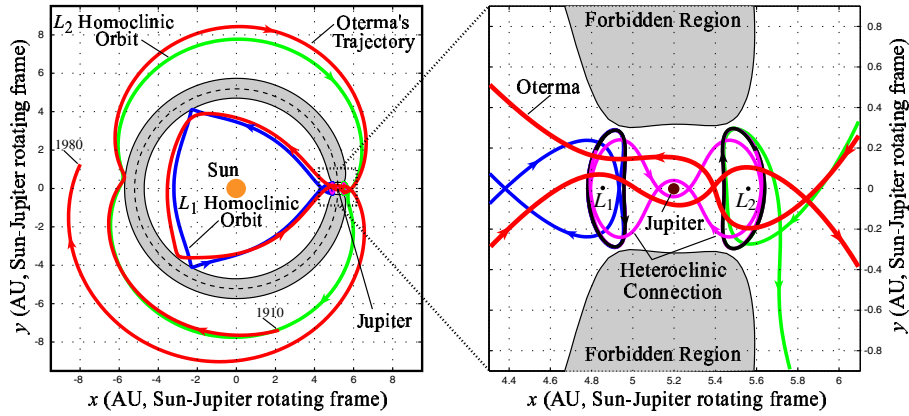


FIGURA 6: L'òrbita d'Oterma entre 1910 i 1980 en coordenades sinòdiques junt amb una cadena heteroclínica. A la dreta, una ampliació de la regió J que mostra les dues òrbites periòdiques i les connexions entre elles (figura reproduïda de [5]).

A [5], els autors veuen numèricament que per a $\mu = 0,0009537$ i $C = 3,03$ existeixen simultàniament les dues òrbites periòdiques γ_1 i γ_2 . Per a aquests valors de μ i C calculen numèricament una cadena heteroclínica formada per una òrbita homoclínica a γ_1 a la regió S , una d'homoclínica a γ_2 a E i dues òrbites heteroclíniques connectant γ_1 i γ_2 . La figura 4 mostra aquesta cadena juntament amb l'òrbita d'Oterma en el sistema sinòdic.

Sota determinades hipòtesis de transversalitat, les tècniques de dinàmica simbòlica ([1], [8]) permeten caracteritzar les òrbites properes a una cadena heteroclínica mitjançant successions de símbols, S, J, E , o itineraris que determinen les regions per on passa l'òrbita ([5], [6]).

De fet es poden calcular efectivament condicions inicials per a òrbites que descriguin un itinerari prefixat durant un interval finit de temps, mitjançant el càlcul de les varietats invariants de les corresponents òrbites periòdiques de Lyapunov.

5 Òrbites per a missions espacials

El procediment descrit a la secció anterior obre la possibilitat de determinar, en primera aproximació, possibles òrbites per a missions espacials. Com a exemple, a [5] s'ha calculat una òrbita per tal que una nau visiti algunes llunes de Júpiter. Recordem que Júpiter té tres llunes grans (ja conegudes per Galileo). La més propera a Júpiter és Ió, i la segueixen per aquest ordre, Europa, Ganimedes i Calixto. Suposem, per exemple, que hem portat una nau prop de Ganimedes. Podem considerar el sistema format per Júpiter i Ganimedes

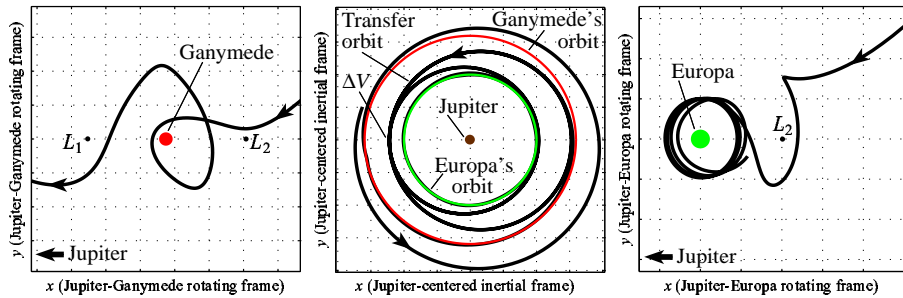


FIGURA 7: Òrbita de visita a les llunes de Júpiter (Figura reproduïda de [5]).

i la nau com a cos petit. Prop de Ganimeses es tenen els punts d'equilibri L_1 i L_2 , les corresponents òrbites periòdiques i les seves varietats invariants. Calculant una cadena heteroclínica adequada es pot aconseguir una òrbita en què la nau entra a la regió de Ganimeses i després de fer una volta se'n va cap a la regió interior, on hi ha Júpiter (vegeu la figura 5). Ara la nau es troba amb l'òrbita d'Europa. Per tant, cal considerar un nou sistema format per Júpiter i Europa com a primaris. Amb un petit impuls es pot situar la nau en una òrbita adequada per tal que, en el nou sistema, la nau entri a la regió que conté Europa i es mantingui en aquesta regió durant un cert temps. Observem que, en aquest cas, s'han combinat dos sistemes diferents: Júpiter-Ganimeses i Júpiter-Europa, és a dir, dos problemes restringits de 3 cossos amb diferents paràmetres de masses. Per canviar d'un sistema a l'altre pot ser necessari, com és en aquest cas, donar un petit impuls a la nau.

S'estan estudiant òrbites d'aquest tipus per a un projecte de la NASA, actualment en una fase preliminar, que consisteix a enviar una nau a prop de les llunes de Júpiter. Un dels objectius és estudiar Europa ja que es creu que conté una de les reserves d'aigua més importants del sistema solar.

Una primera generalització del model (1) que hem considerat fins ara consisteix a suposar que el tercer cos es pot moure a l'espai. Clarament, les solucions de (1) són també solucions del problema espacial prenent $z = 0, \dot{z} = 0$. En particular, els punts $L_i, i = 1, \dots, 5$ segueixen sent punts d'equilibri. Per al problema espacial, a prop del punt L_1 (de fet a prop de cada punt col·lineal, però no arbitràriament prop d'ell) hi ha una família d'òrbites periòdiques no planes anomenades òrbites halo. Aquesta família s'obté per bifurcació de la família plana de Lyapunov variant adequadament la constant de Jacobi. S'anomenen òrbites halo perquè, si considerem una nau en el sistema Sol-Terra, per exemple, quan l'amplitud en z és prou gran, des de la Terra aquestes òrbites es veuen envoltant el Sol sense arribar a creuar per davant del disc solar (figura 8). Aquestes òrbites, que es troben a una distància de la Terra d'aproximadament $1,5 \times 10^6$ km, són molt interessants com a observatoris per estudiar

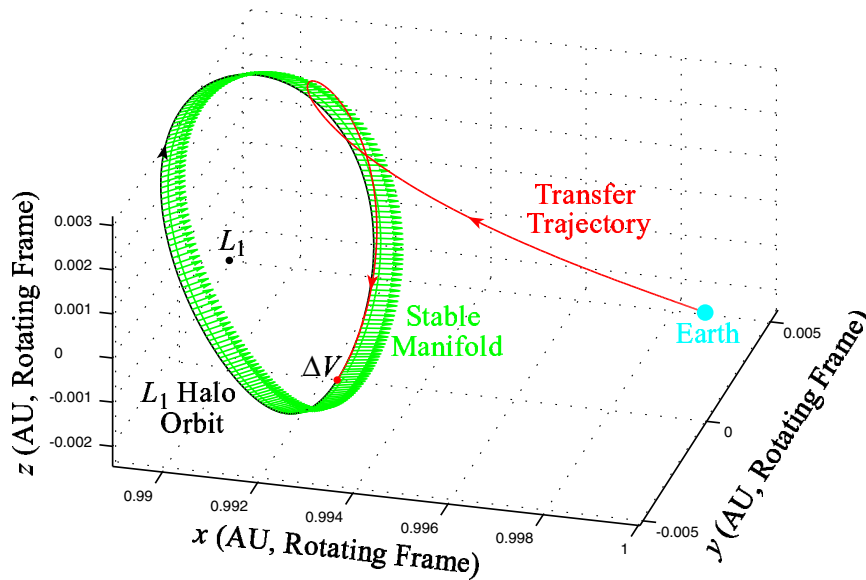


FIGURA 8: Una òrbita halo del sistema Sol-Terra junt amb una trajectòria de transferència construïda usant la varietat estable de l'òrbita halo (figura reproduïda de [5]).

el Sol. De fet ja han estat utilitzades en diferents missions. La primera missió a una òrbita halo va ser la del ISEE-C de la NASA entre el 1978 i el 1982. Actualment en una òrbita d'aquest tipus s'hi troba la nau SOHO de la ESA que va ser llençada el 1995.

El projecte Gènesis de la NASA té previst per a mitjan 2001 el llançament d'una nova nau cap a una òrbita halo. L'objectiu és que la nau es mantingui en una òrbita d'aquest tipus durant dos anys per recollir mostres de vent solar. Després es farà que la nau retorni a la Terra.

Per al disseny de la missió Gènesis s'aprofita el fet que la varietat estable, W_h^s , d'algunes òrbites halo passa a prop de la Terra. Així es pot determinar una òrbita propera a W_h^s que, amb molt poques maniobres de control, porta directament la nau cap a l'òrbita halo.

6 Conclusions

En problemes descrits per equacions diferencials ordinàries, sovint per a les aplicacions interessa només una solució determinada. Aquest és el cas, per exemple, del disseny d'una missió espacial, en què interessa trobar una òrbita que compleixi uns requisits determinats. En aquesta situació pot ser molt con-

venient fer un estudi global del problema per entendre'n la dinàmica. Això pot ajudar a determinar més eficientment la millor solució al mateix temps que pot donar llum sobre altres possibles aplicacions. Com hem vist, en aquest estudi global les varietats invariants de codimensió 1 hi juguen un paper essencial.

La introducció de les eines de sistemes dinàmics ([3], [4]) en el disseny de missions espacials està canviant la manera de tractar alguns problemes. En particular, fins fa poc es considerava que els objectes interessants eren els estables, per exemple, les òrbites periòdiques estables, ja que són les òrbites on, teòricament, es poden mantenir els cossos, ja siguin naturals o artificials. Però, com hem vist, les òrbites periòdiques són tan o més interessants que les estables ja que les seves varietats invariants, en general, no queden confinades en una petita regió de l'espai de fases, sinó que es passegen per àmplies zones d'aquest espai. Les connexions entre aquestes varietats invariants, és a dir, les òrbites homoclíniques i heteroclíniques, permeten viatjar per diferents regions de l'espai seguint òrbites naturals del sistema i, per tant, amb un cost molt baix.

Tot i que el problema restringit de tres cossos es coneix des de fa més de dos-cents anys, segueix mantenint la seva validesa com a model bàsic per al disseny de determinades missions espacials. Crec que això és degut al fet que té les característiques que ha de tenir un bon model bàsic. Per una part, és prou simple per a ser estudiat de forma raonable (un problema pla amb deu cossos porta a un sistema de 40 equacions diferencials de primer ordre reduïble, usant les integrals primeres, a 32). A la vegada, preserva l'estructura necessària per a mostrar una gran varietat de comportaments que poden aproximar bastant bé el problema real.

Agraïments

Voldria agrair al Dr. Wang Sang Koon la informació sobre el cometa Oterma i sobre algunes futures missions espacials, així com la seva amabilitat a facilitar-me les figures 4, 5 i 8 de l'article [5] que ha inspirat gran part d'aquesta conferència.

Referències

- [1] ALEKSEEV, V. M. «Quasirandom dynamical systems, I, II, III». *Math. USSR-Sb.*, 5. (1968), 73-128; 6 (1968), 505-560; 7 (1969), 1-43.
- [2] CONLEY, C. «Low energy transit orbits in the restricted three-body problem». *SIAM J. Appl. Math.*, 16 (1968), 732-746.
- [3] GÓMEZ, G.; LLIBRE, J.; MARTÍNEZ, R.; SIMÓ, C. *Dynamics and Mission Design Near Libration Points*. Volum 1: *Fundamentals: The Case of Collinear Libration Points*. Volum 2: *Fundamentals: The Case of Triangular Libration Points*. World Sci. Pub. Monograph Ser. Math. Vol. 2 i 3. Singapore,

2001. [Reimpressió de *Station keeping of libration point orbits*, ESA Technical Report, 1985, i *Study on orbits near the triangular libration point in the perturbed restricted three-body problem*, ESA Technical Report, 1987, respectivament.]
- [4] GÓMEZ, G.; JORBA, À.; MASDEMONT, J.; SIMÓ, C. *Dynamics and Mission Design Near Libration Points*. Volum 3: *Advanced Methods for Orbits Near Collinear Libration Points*. Volum 4: *Advanced Methods for Orbits Near Triangular Libration Points*. World Sci. Pub. Monograph Ser. Math. Vol. 4 i 5. Singapore, 2000. [Reimpressió de *Study refinement of semi-analytical halo orbit theory*, ESA Technical Report, 1991, i *Study of Poincaré Maps for Orbits near Lagrangian Points*, ESA Technical Report, 1993, respectivament.]
- [5] KOON, W. S.; LO, M.; MARSDEN, J. E.; ROSS, S. D. «Heteroclinic Connections between Periodic Orbits and Resonance Transitions in Celestial Mechanics». *Chaos*, 10 (2000), 427–469.
- [6] LLIBRE, J.; MARTÍNEZ, R.; SIMÓ, C. «Transversality of the Invariant Manifolds Associated to the Lyapunov Family of Periodic Orbits near L_2 in the Restricted Three-Body Problem». *Journ. of Differential Equations*, 58 (1985), 104–156.
- [7] MCGEHEE, R. P. *Some homoclinic orbits for the restricted three-body problem*. Ph. D. Thesis. University of Wisconsin, 1969.
- [8] MOSER, J. *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*. Princeton University Press 1973.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
08193 BELLATERRA
reginamb@mat.uab.es