

# La percepció d'optimalitat en el Pla Cerdà. El model p-median en el disseny ortogonal $L_1$ de l'Eixample de Barcelona

**Montserrat Pallarès Barberà<sup>1</sup>**  
*Departament de Geografia*  
*Universitat Autònoma de Barcelona*  
*montserrat.pallares@uab.es*

## Resum

Moltes de les ciutats contemporànies van ser transformades des del seu pasat medieval per projectes dibuixats per planificadors urbans visionaris. Ildefons Cerdà va ser un d'aquests urbanistes, i l'adveniment de la moderna estructura de la ciutat de Barcelona es basa en el seu pla de desenvolupament de la ciutat (1860). Aquest Pla plantejava unes tècniques urbanístiques molt avançades en l'estudi de les necessitats socials, fruit d'una intensa industrialització en una zona completament saturada. L'objectiu d'aquest article és posar de manifest la percepció d'optimalitat en l'estudi de la distribució de serveis públics en el Pla Cerdà, la relació de la població servida per aquests serveis i el model que fonamenta la seva distribució sobre tota la ciutat. El problema a resoldre és determinar l'extensió de la població servida per cada servei públic. Així mateix, en aquest article es plantegen metodologies de resolució del model òptim.

**Paraules clau:** Optimalitat, urbanisme, serveis urbans, model p-median.

1. En la part gràfica d'aquest article també han treballat Natàlia Cabeza Bentané i Neus Ballesteros.

## Resumen

Muchas de las ciudades contemporáneas fueron transformadas desde su pasado medieval por proyectos dibujados por planificadores urbanos visionarios. Ildefonso Cerdà fue uno de estos urbanistas, y el advenimiento de la moderna estructura de la ciudad de Barcelona se basa en su plan de desarrollo de la ciudad (1860). Este Plan planteaba unas técnicas urbanísticas muy avanzadas en el estudio de las necesidades sociales fruto de una intensa industrialización en una zona completamente saturada. El objetivo de este artículo es poner de manifiesto la percepción de optimalidad en el estudio de la distribución de servicios públicos en el Plan Cerdà, la relación de la población servida por los mismos y el modelo que subyace en su distribución sobre toda la ciudad. El problema a resolver es determinar la extensión de la población servida por cada servicio público. Así mismo, en este artículo se plantean metodologías de resolución del modelo óptimo.

**Palabras clave:** Optimalidad, urbanismo, servicios urbanos, modelo p-mediano.

## Abstract

Many of the present days 'modern cities were transformed from their medieval past based on blueprints laid out by visionary city planners. These city planners resorted to methods of calculation prevailing in their day and age. This was probably combined with an uncanny instinct and intuition that identified the talented city planner from the rest. Ildefonso Cerdà was one of such planner and the advent of the city structure of modern Barcelona must be attributed to his plan. Although Barcelona today is not entirely as Cerdà had visualized it, it is important to note that it is the result of changes imposed subsequently on the original Cerdà Plan. In order to chart out a course for future city planning in Barcelona it is essential to understand the original plan in the context of the objectives and analytical tools currently in vogue.

Several programming techniques have been developed to resolve problems posed by various constraints to desirable objectives. Hence, various programming models have been applied to the problem of suitable locating facilities, like schools, subject to criteria that define the user's convenience.

The objective of this paper is to demonstrate how the p-Median Model can be used to test the optimality of the distribution of schools in Barcelona as proposed by Cerdà. The purpose here is to show different methodologies for making such comparisons. A meaningful optimality check would ordinarily require using the whole plan. However, a small sample of nodes

has been considered for the limited purpose of showing the application of techniques.

**Key words:** optimality, urban planning, urban facilities, p-median model.

## 1. El model p-median i el Pla Cerdà

Moltes de les ciutats contemporànies foren transformades des del seu pasat medieval per projectes dibuixats per planificadors urbans visionaris. Aquests urbanistes van basar els seus mètodes en càlculs que es varen avançar al seu propi temps. Probablement, això fou resultat de l'instint i de la intuïció nata que identificaven l'urbanista amb talent de la resta. Ildefons Cerdà (1815-1876) va ser un d'aquests urbanistes, i l'adveniment de la moderna estructura de la ciutat de Barcelona es basa en el seu pla de desenvolupament de la ciutat (1860). L'aportació de Cerdà va ser un intent de racionalitzar l'arbitrarietat de la planificació urbana. Encara que l'estructura actual de Barcelona no és enterament com Cerdà la va visualitzar, és important subratllar que és a causa de les modificacions posteriors imposades al pla original. Però per entendre com s'ha desenvolupat la planificació de Barcelona, és essencial entendre el pla original, els seus objectius i les tècniques d'anàlisi que rauen en ell. El Pla Cerdà plantejava unes tècniques urbanístiques molt avançades en l'estudi de les necessitats socials que sorgien de la intensa industrialització en una zona completament saturada per un creixement vertiginós. L'objectiu d'aquest article és posar de manifest la percepció d'optimalitat en l'estudi de la distribució de serveis públics en el Pla Cerdà, la relació de la població servida per aquests, i el model en què es basa la seva distribució sobre tota la ciutat. El problema a resoldre és determinar l'extensió de la població servida per cada servei públic i l'esfera d'influència de cada servei en termes de l'àrea servida per aquest. Així mateix, en aquest article es plantegen metodologies de resolució del model per a trobar la solució òptima.

L'alta densitat en la Barcelona de la segona meitat del segle dinou, produïda per una intensa industrialització, produí una saturació de les estructures urbanes. La Barcelona de dintre muralla no podia absorbir de cap manera les grans necessitats d'aquest creixement industrial. Aquestes necessitats s'estructuraven a dos nivells. En primer lloc, els densos i insalubres habitatges de la població treballadora havien de ser replantejats. En segon lloc, havia de trobar-se una solució urbana que inclogués els canvis tecnològics que estaven succeïnt en la societat a mitjan segle dinou, que repercutien no solament en la infraestructura industrial sinó també en la vida social a tots els nivells.

L'anàlisi social requereix un enfocament temporal i històric, al mateix temps que necessita incorporar la perspectiva territorial. En el procés seguit per les ciutats en els últims dos segles es poden trobar les bases de molts dels seus pro-

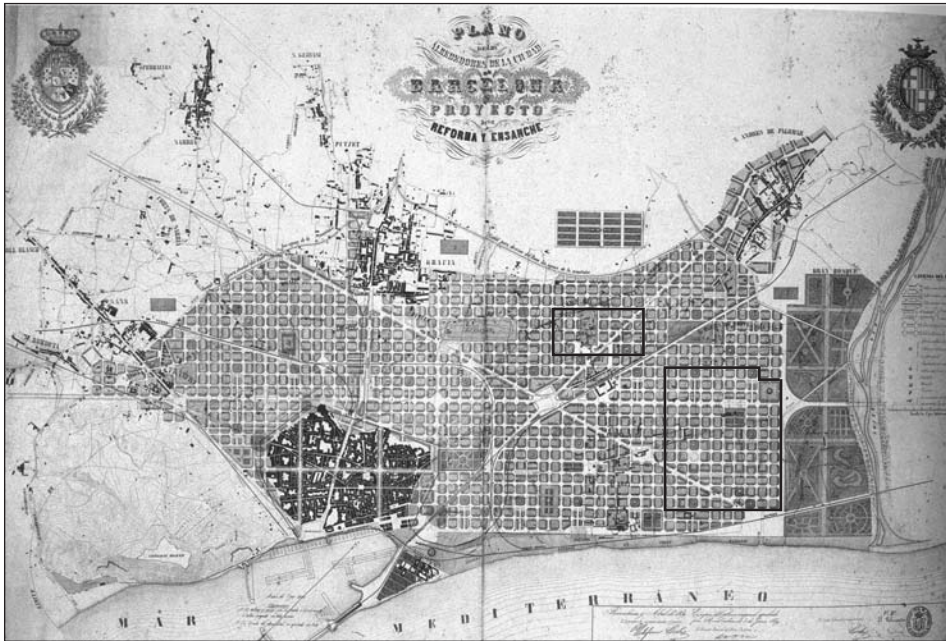
bles actuals. Les ciutats i el seu territori van canviar la seva fisonomia amb la Revolució Industrial. Amb aquesta transformació les distorsions urbanes no planificades van començar a aflorar i també es va fer patent la necessitat d'una regulació urbana. La tensió entre la necessitat social i les aspiracions polítiques i econòmiques se situen sota les directrius del desenvolupament del Pla Cerdà. A partir dels seus plantejaments socials marcats per les necessitats existents, el Pla Cerdà es va desviar cap a uns interessos més econòmics i especulatius que socials. La previsió de població per volum de sòl residencial en el Pla Cerdà no va ser seguida, sinó augmentada, i tampoc no es va respectar la seva proposta de serveis públics o parcs i jardins.

La història urbana, com a suport de la planificació d'una ciutat, estudia el conjunt d'eines que ajuden a racionalitzar el creixement de les ciutats. Però, el caràcter científic d'aquesta racionalització necessita ser establert a través d'una anàlisi rigorosa i multidisciplinària de l'estructura urbana. En el moment que es veu necessària una regulació, aquesta necessita una base teòrica com a suport. A partir de mitjans del segle vint, s'han desenvolupat diferents tècniques de programació per a resoldre problemes amb restriccions als objectius desitjats; i diferents models de programació lineal s'han implicat per a resoldre el problema de localitzar serveis, com escoles, subjectes als criteris que defineixen les necessitats dels usuaris. L'objectiu-hipòtesi d'aquest article és aportar els elements d'eficiència i igualtat existents en el model p-median, i de com aquests poden servir per a examinar l'optimalitat de la distribució d'escoles en la Barcelona proposada per Cerdà. La proposta d'aquest article és, primer, ressaltar com en la naturalesa dels models de localització-assignació es poden veure uns principis més filosòfics d'igualtat i eficiència. Segon, plantejar com diverses metodologies de resolució del model p-median podrien ser aplicades a l'estudi dels serveis en el plànol Cerdà.

El disseny ortogonal de carrers i avingudes en diagonal dibuixades en el Pla Cerdà, constitueixen l'esquelet de la ciutat (Figura 1). Mercats, escoles, parcs, hospitals, així com altres serveis urbans rellevants foren planificats però mai construïts en les successives implementacions de l'original (Figura 2). Tanmateix, la disposició dels serveis en el Pla suggereix un sentit de regularitat i reflecteix l'existència de criteris d'optimització. En aquest article, la distribució d'un dels serveis, les escoles, s'ha estudiat més profundament, com a base per a un futur desenvolupament d'un model d'optimització lineal per a tota la Barcelona del Cerdà. Es plantegen tres metodologies per a la resolució d'aquest model i es comparen els seus resultats en seccions del plànol Cerdà de Barcelona.

Aquest article s'organitza de la següent manera. En la segona secció es fa un plantejament de les idees d'Ildefons Cerdà com a urbanista. S'intenta posar de relleu quines van ser les causes de la seva inquietud per a inventar i introduir millores socials i urbanes fins llavors mai imaginades en el plànol d'una ciutat. Amb aquest petit estudi s'intenta raonar com la idea d'optimització, base dels models actuals de planificació, sobretot els d'assignació-localització de pobla-

**Figura 1**  
**Projecte d'Eixample de Barcelona, de Ildefons Cerdà, 1860**



□ Cas 1   □ Cas 2

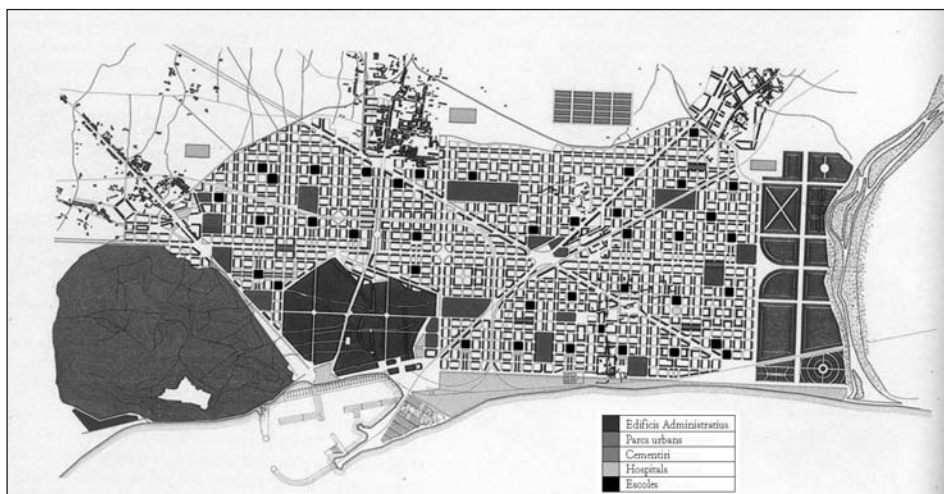
Font: Elaboració pròpia a partir de Corporació Metropolitana de Barcelona, 1985.

ció a serveis, rau en la naturalesa del concepte de benestar social. Concepte que, basat en l'equitat i l'eficiència, així com en aconseguir el benefici del màxim de la població, és anterior a la utilització matemàtica dels models actuals de programació lineal. En la tercera secció, s'exposen les principals idees en les quals Cerdà incidia en els serveis personals en el seu pla d'urbanisme. En la secció quarta s'especifica la naturalesa, la funció objectiu i les restriccions pròpies del model p-median, així com els conceptes i aplicacions rellevants d'aquest tema. En la secció cinquena es descriuen les dades usades en aquest article, així com la metodologia de preparació de les mateixes per a l'anàlisi. En la secció sisena s'articula el model p-median per a la seva resolució en les distàncies regulars de les mansanes de Cerdà, en un exemple denominat Cas 1. Per a calcular els resultats s'utilitza el paquet informàtic *Mathematical Programming System-Extended (MPSX)*.

En la secció set es calcula la localització òptima de serveis pel mètode del *centroide* en un exemple o Cas 2. En la secció vuit l'obtenció del punt òptim s'aconsegueix utilitzant un algorisme implementat amb un programa en llenguatge Pascal, que minimitza les distàncies ponderades.

En la secció novena, com a conclusions, es comparen i comenten els resultats de les diferents metodologies per a la distribució de serveis des de les reso-

**Figura 2**  
**Ubicació de serveis urbans en el Pla Cerdà**



Font: Elaboració pròpia a partir de Fundació Catalana per a la Recerca, 1994.

lucions del model p-median, amb la intenció d'obtenir unes primeres aproximacions als objectius d'optimalitat continguts intrínsecament en el Pla Cerdà. En l'apèndix s'afegeixen diferents taules i figures que han estat necessàries per al desenvolupament de l'article. Finalment, la bibliografia conclou l'article.

## **2. La percepció i intuïció d'optimalitat en l'urbanisme d'Ildefons Cerdà**

El Pla Cerdà intentà una metodologia de planificació de la ciutat basada en l'estudi de les necessitats socials que eren causades per una forta industrialització en la Barcelona de la revolució industrial. En aquesta secció es vol determinar quins elements de la teoria de Cerdà foren utilitzats per a donar solució al problema de l'habitatge i els serveis en ple segle dinou a Barcelona i quina fou la motivació de Cerdà per a definir aquests elements i no d'altres. Finalment, es busca determinar si aquests van ser els elements apropiats per a donar una solució al problema urbà.

La Barcelona del segle dinou dintre-muralla era una àrea que, per circumstàncies de la seva pròpia estructura industrial, estava completament saturada i no podia ni absorbir ni resoldre les seves necessitats de creixement. Així com els valors de les ciutats han anat canviant en cada gran etapa d'expansió o de davallada, Barcelona, en el pas des de la ciutat agrícola i menestral a la ciutat de fàbriques i obrers, propicià una nova estratificació social amb un canvi clar

en la jerarquia dominant, des de la ciutat clerical a la ciutat mercantil i burgesa-industrial, grups socials d'on van sorgir els dirigents de la ciutat. El 1854 existia un sentiment comú que el progrés de la ciutat passava pel progrés del benestar i la millora en la salut pública (Corporació Metropolitana de Barcelona, 1985). Per tal de solucionar els problemes agreujats per la massiva densificació dels habitatges dels treballadors, però també per a satisfer les necessitats d'aquesta burgesia urbana, amb nous valors de qualitat de vida, Cerdà va desenvolupar en la seva *Teoría General de la Urbanización* (Cerdà, 1868, editat per F. Estapé, 1968). Un urbanisme de planificació normativa, que donava importància sobretot, a la connexió dels valors humans que la ciutat podia crear si es planificava una morfologia basada en “la bona forma de ciutat” (Lynch, 1986), amb formes d'assentament estructurades en habitatges i serveis públics, que podien proporcionar un major benestar global a la seva població.

Fou a partir del coneixement de com era la ciutat dintre muralles, que Cerdà desenvolupà un nou planejament que es fonamentava en valors socials i que incorporava les seves intuïcions encaminades a solucionar el benestar social fins a llavors tan malmès. Se situen a l'origen dels projectes d'eixample algunes idees d'economia territorial i urbana de Balmes i Monclau i alguns aspectes essencials de l'optimització de les relacions urbanes que postula Jaussley (Torres Capell, 1985). Un model de ciutat que el seu patró espacial es dirigiria a millorar els hàbits habituals i quotidians dels seus habitants. En el model d'urbanització de Cerdà ja s'introduí el concepte que l'espai urbà està produït per estructures socials existents, basades en una o diverses organitzacions prèvies i fonamentades en realitats històriques, concepte que posteriorment ha estat debatut àmpliament per altres disciplines durant el segle vint (Bergeron i Roncayolo, 1974; Castells, 1976, 1977).

Capel i Tatjer (1997) apunten que fou el 1844, durant un viatge de Cerdà al sud de França que, a partir de veure el ferrocarril, aquest pren consciència de com l'impacte de les noves tecnologies poden modificar l'urbanisme. Impacte que igualment li produí l'aplicació del vapor a la indústria (Cerdà, 1867, p. 5). No fou la única influència, l'aplicació del vapor i l'electricitat, i els seus derivats immediats com el telègraf van impactar en un urbanista profundament motivat per la introducció d'aquestes noves tecnologies a les ciutats i pels canvis que aquests invents poguessin produir. Per altra banda, existeix la faceta de Cerdà com a “revolucionari” social, a partir dels seus estudis, a les estadístiques prèvies a la seva *Teoría General de la Urbanización*, sobre les repercussions de les condicions industrials a les condicions de vida dels treballadors i el nivell de salubritat dels serveis de clavegueram.

També, les condicions polítiques i socials alterades per lluites obreres, epidèmies i mortalitat, de la primera i segona meitat del segle dinou impac-taren Ildefons Cerdà. Així, a la fi del segle divuit en la primera etapa de la revolució industrial, Barcelona estava ocupada per manufactures i obrers que necessitaven habitatges, una demanda molt intensiva que provocà que en deu

anys els lloguers es doblesin (Soria i Puig, 1979). Al 1779, la morfologia de la ciutat dintre-muralla dibuixava els següents elements: un extrem veïnatge dels barris pobres amb els fums insalubres de les fàbriques contigües o properes (Cabré i Muñoz, 1994), una falta d'higiene per densificació d'edificis, en alçades de planta baixa més cinc pisos (Capel, 1977), habitatges entremitgeres situades en carrers de dos a quatre metres d'ample, en parcel·la petita, sense aigua corrent o clavegueram. El 1785, Barcelona estava ocupada per una gran concentració d'operaris i per l'afluència incessant d'obriers a la ciutat. L'espai dedicat a l'habitatge augmentà, construint en els antics patis i horts, i també augmentant el nombre de pisos. Les epidèmies eren molt seguides. A principis del segle dinou, el 1821, s'originà una epidèmia de febre groga, que en 111 dies va provocar 6.244 morts. A mitjans segle dinou s'uniren el creixement demogràfic molt accelerat per l'expansió econòmica amb la desamortització i l'increment veloç de la civilització industrial. Entre 1834 i 1870 hi hagueren brots d'epidèmia que duraren entre 2 i 4 mesos cadascun, de còlera, de morb asiàtic i el 1854 de febre groga, que rebrotà el 1865 altra vegada. Entre 1836 i 1847 hi hagueren més morts que naixements. El nombre de població augmentà en 53.712 habitants a causa de la immigració, arribant a un total de 133.541 habitants. Des del panorama polític que englobava aquest escenari social, el 1835 se suprimiren les ordres religioses, el 1836 hi hagué la desamortització eclesiàstica, amb la qual s'aconseguien convents per a edificis públics i places. El 1842 es dictà una llei autoritzant llibertat absoluta de contractació i desnonament d'habitatges que provocà un augment del preu de lloguer. El 1859 la densitat mitjana, al recinte antic, era de 859 habitants per ha, mentre que als barris rondaven els 378 i 1.761 habitants per ha.

Segons Cerdà, a mesura que disminuïa la superfície urbana per habitant augmentava la mortalitat de la població. Entre 1837 i 1847 la vida mitjana dels habitants a Barcelona, de totes les edats, incloent la mortalitat infantil, era de 25,71 anys. Contant-se a partir de 6 anys en endavant, era de 47,78 anys. Mentre que la vida mitja per habitant i per classes, en les classes més adinerades era de 38 anys i les menys adinerades era de 20 anys. El 1855, la mortalitat de Barcelona era de 28,6 morts anuals per 1000 habitants; entre 1856 i 1865 la mortalitat va pujar a 33,1 habitants anuals per cada 1000 habitants. El 1856 hi havia nens de menys de vuit anys treballant a les fàbriques i a més amb una alimentació insuficient.

La tensió que es crea entre les zones i els elements de la ciutat (Rosi, 1981) era present en la Barcelona dintre-muralla, incentivada per les lluites socials. El 1855 hi hagué la primera vaga general de Barcelona i d'Espanya, les vagues de 1856 i la insurrecció de 1867 (Nadal, 1987; Fontana, 1979) eren conflictes agreujats pel tractament d'indole militar que se'ls donava a la seva repressió, amb el consegüent deteriorament de tot el procés. Les muralles medievals de la ciutat de Barcelona, que foren destruïdes el 1854, van ser punt de partida del desenvolupament urbà de la ciutat. Cerdà estava immers en tota

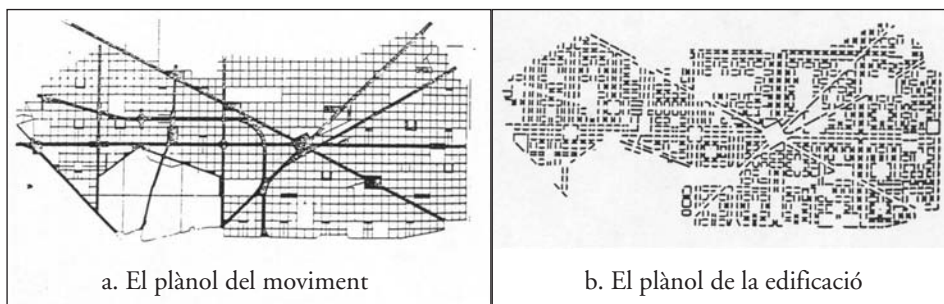


aquesta societat en ebullició amb l'encàrrec el 1855 de la redacció de l'avantprojecte de l'Eixample. Cerdà, sensibilitzat pels estudis estadístics que feu sobre els nivells de salubritat de la classe obrera ("Qué moral, qué higiene, qué sociedad") els desenvolupà i inclogué en la seva *Teoría General de la Urbanización* (TGU) (vol I, 460-464). "Urbanització" paraula que interpreta (p. 52) i defineix a partir de la seva ideologia que incloïa conceptes com igualitarisme i progressisme conjugats amb individualisme. Aquest últim ho definia en urbanisme com "independencia del individuo en el hogar" i "del hogar a la urbe" (p. 77).

La percepció d'igualitarisme i progressisme rau en la naturalesa dels conceptes i definicions de Cerdà en la seva TGU, on la condició de sociabilitat humana i el concepte de ciutat resulten indissociables: "Ciudad es un conjunto de cosas diversas y heterogéneas armonizadas por la fuerza de la sociabilidad humana" on la urbanització és "cualquier acto que tienda a agrupar la edificación y a regularizar su funcionamiento en el grupo ya formado. Conjunto de principios, doctrinas y reglas que deben aplicarse para que la edificación y su agrupamiento, lejos de comprimir y desvirtuar las facultades físicas, morales e intelectuales del hombre social, sirvan para fomentar su desarrollo y vigor y para acentuar el bienestar individual, cuya suma forma la felicidad pública" Cerdà està convençut que a cada època la urbanització ha estat diferent i aquesta ha donat resposta sempre a la necessitat de procurar refugi i benestar a l'individu. Per aquesta causa a la fi del segle dinou, la urbanització té entre els objectius més importants, la necessitat d'amples avingudes i carrers que afavoreixin la mobilitat, tant de carruatges com de transeünts, que facilitin la sociabilitat entre ells. La quadrícula i la sensació d'obertura del traçat de Cerdà són producte del sentiment col·lectiu d'opressió que proporcionaven les muralles i del traçat en ziga-zaga dels carrers, com un laberint, de la Barcelona de dintre-muralla.

La fase de modernització de la ciutat amb l'Eixample, després del període d'industrialització feroç, preservà l'entramat de carrers de l'antiga ciutat i els seus antics edificis, però a més fou capaç de desenvolupar, malgrat molta resistència per conflictes econòmics i polítics, el desenvolupament urbà més interessant del segle dinou, que fou guiat pel citat Pla d'Expansió Urbana de Barcelona d'Ildefons Cerdà. El govern central li donà suport i l'aprovà el 1860, i en ell es plantejà, per primera vegada, la idea d'un eixample il·limitat. Fou el primer pla general d'ordenació urbana de Barcelona (Corporació Metropolitana de Barcelona, 1987; Internacional Centre for Urban Studies, 1989; Serratosa, 1997). L'esquema de Cerdà englobava una intersecció de carrers paral·lels al mar amb d'altres carrers que els eren perpendiculars. Aquesta reixa paral·lela era tallada superposant dues grans avingudes diagonals que creuaven el traçat de la ciutat en forma de X (Figura 3a). Aquest model d'expansió urbana fou dissenyat per a facilitar el moviment del trànsit i, pel mateix motiu, les cantonades dels blocs quadrats que configuraven cada illa de cases foren tallades en diagonal per a facilitar la visió, resultant cada illa en una figura octogonal, però

**Figura 3**  
**Estructura del Pla Cerdà**



Font: Cerdà, I. 1979.

que en el seu conjunt l'entramat donava una perspectiva de figura ortogonal (Figura 3b).

Una altra de les característiques específiques del Pla Cerdà fou l'organització d'edificis i jardins. Els edificis estaven organitzats ocupant solament dos de les cares de cada bloc d'illes (Figura 4). Els jardins, dissenyats a l'interior de l'illa, eren visibles des dels edificis. El mapa final del Pla Cerdà indicava també la localització d'edificis per a activitats de benefici social com escoles, hospitals, mercats, o esglésies (Figura 2). El Pla es completava amb el disseny de la localització de parcs, jardins i places.

Finalment, Cerdà tractà la ciutat com un sistema on elements físics i socials (Bourne, 1978; 1982) dintre de la seva definició "d'urbanització", estaven absoluta i indefinidament relacionats entre si.

### 3. El model de distribució de serveis de Cerdà

A la quadrícula que planificà Cerdà destinà un grup d'illes a serveis distribuïts per tota la ciutat, per a satisfer les necessitats de la població més immediata. Parcs públics, escoles, esglésies i mercats estaven planificats i distribuïts per la trama de tota la ciutat.

Al 1855, l'Ajuntament de Barcelona en les Resolucions de la Comissió Consultiva de l'Eixample (1859)<sup>2</sup> determinava unes "Bases que deben servir para la formación del plano general de ensanche". Concretament, la base 8<sup>a</sup> establí que: "En el plano deberán designarse los puntos en que deban situarse los edificios siguientes: Parroquias. Escuelas. Alcaldías y juzgados de paz y de primera instancia. Hospitales." i especificava que eren edificis "Sujetos a la

2. En la qual s'inclouen les bases redactades al 1955 per una comissió especial de la Municipalitat, on s'especificaven els criteris d'ordenació urbana que havien de contenir els projectes d'eixample que es presentessin a concurs (p. 397, Estapé vol. 3 i p. 68 Torres Capell et al. 1985).

localidad” (o edificis que necessàriament havien d'estar assenyalats en el plànol), a diferència d'aquells “Edificios no sujetos a la localidad y deben estar dentro de la población.” (edificis que no havien necessàriament d'estar localitzats en el plànol) o bé, “Edificios fuera de la población.” (pàg. 400-401 Estapé, 1968 vol. III). Per la qual cosa en el plànol de l'exemple de Cerdà, els edificis subjectes a la localitat estan degudament assenyalats amb una creu. A la llegenda que acompanya el plànol, aquest símbol es refereix a “Iglesias, crechas, salas de asilo, escuelas y demás edificios y admones (administracions) para el culto y la beneficiencia parroquial”. Aquests edificis estan distribuïts al llarg de la trama de l'exemple, donant una percepció d'una regularitat òptima per a la població que viu a les altres illes. Als “Documentos referentes a las resoluciones transcritas” (pàg. 400-401, op. Cit.) estableixen que “En el plano deberan designarse los puntos en que deban situarse los edificios siguientes: Una parroquia por cada 10.000 almas de población. Escuelas elementales y de párvulos en número proporcionado a la misma, y los demás edificios que se consideren necesarios. (...) Los edificios de primera clase se situarán de forma o por necesidad o comodidad, en los puntos más céntricos entre la antigua y la nueva que queden convenientemente distribuidos. Los que deban ser visitados con frecuencia población.”

Per tant, en el plànol de Cerdà hi ha especificades 31 illes on poden construir-se escoles. A més dels restants serveis especificats en la quadrícula.

#### **4. Els models de localització i assignació òptima de població a serveis**

El grup de models als qual s'emmarca el p-median, estan basats en disseny en xarxes amb restricció en el nombre de serveis a localitzar. Estan enfocats a descobrir les decisions de localitzar, orientades a satisfer les demandes de consumidors (“orientados al consumidor”). Són models on les restriccions s'apliquen al cost de construir un servei  $i$ , es té en compte sobretot, l'objectiu de minimitzar la distància que la població ha de recórrer per aconseguir el servei. En el cas que hi hagués una sola restricció i aquesta fos de cost, la millor solució per a minimitzar aquest cost seria localitzar un sol servei que seria construït en un punt central de l'àrea; atès que el cost fix de construir el servei seria el mateix  $i$ , malgrat la grandària del servei, el cost total de la construcció del servei seria el mínim. Però, atès que assignem importància a minimitzar la distància de la població  $a_i$  al node  $j$ , hem de localitzar un nombre màxim de serveis en el model, augmentant el cost total destinat a serveis. Per tant, existeix un *trade-off* entre el nombre de serveis destinats a servir a una població, o bé de cost dels mateixos  $i$ , per altra banda, els costos de desplaçament o transport que, implícitament, fan disminuir els primers (reduint la xifra d'instal·lacions que sol assumir el proveïdor) i implica un increment dels segons (suportat pels usuaris).

#### 4.1 El concepte de bé públic en el model p-median

La teoria de la localització de serveis públics comporta el desenvolupament d'algunes tècniques d'optimització modernes. El model p-median pot considerar-se com la formalització del problema d'optimització de serveis; i el seu objectiu es concreta a localitzar serveis de manera que es minimitzi el terme mediana de la distància, en temps o cost, que els usuaris han de recórrer per utilitzar el servei. Les restriccions bàsiques són, en primer lloc, que existeix un cost fix per al sistema de serveis i, en segon lloc, que cada servei té el mateix cost d'inversió i de funcionament per usuari.

El model p-median, desenvolupat per Hakimi (1965; 1964) localitza un nombre fix de serveis, dels considerats "que s'ha de viatjar per a aconseguir-los" en contraposició a aquells en els "quals es lliura el servei". En el primer cas, els consumidors han de viatjar per a aconseguir el servei mentre que, en el segon, el bé o servei és lliurat al consumidor. Addicionalment, el model p-mediana es considera part del grup anomenat *Models de Localització Orientats al Consumidor*. En aquests models l'objectiu consisteix a minimitzar la distància o temps ponderat que els usuaris triguen a aconseguir arribar al servei; subjecte a restriccions relacionades amb costos d'inversió i d'operació del servei. Com a contrast, el grup de *Models de Localització Orientats a Béns o Mercaderies* que a l'objectiu es contempla no tan sols el cost de transportar els béns sinó també el cost de produir-los o emmagatzemar-los.

Els models orientats a l'assignació de població a serveis públics són normatius des del punt de vista de la teoria de benestar de l'economia de l'espai públic. Els models de dotació de béns públics proveïts en serveis, on els consumidors han de viatjar per a consumir-los, constitueixen la base de la teoria de benestar espacial (Lea, 1979); on es pot parlar d'una teoria normativa de l'economia de l'espai públic i de la localització de serveis públics (Teitz, 1968).

Les diferents definicions del que constitueix un bé públic estan immerses en la naturalesa del model p-median. Què constitueix un bé públic i com es valora aquest, parteix de la teoria de béns públics, l'exponent principal dels quals es troba en el treball seminal de Samuelson (1955), que al seu torn es basava en teòrics polítics (com Hume (1739), Hamilton (1780) i Mill (1848) en la seva idea del *free-riding*) o els denominats *The Voluntary Exchange Theorist* (Musgrave, 1939),<sup>3</sup> que distingien béns que eren apropiats per a la producció pública, dels que eren apropiats per a la producció privada. Samuelson va definir un bé públic com aquell que cada individu consumeix la totalitat del bé, mentre que definia com béns privats aquells que el seu consum total és la suma de cada consumició individual. Per tant, un bé públic pur es defineix com aquell bé que roman sense disminuir, tot i ser consumit. Bigman i ReVelle (1978) defineixen un bé públic com aquell bé que "cada

3. Dougherty (2003).

individu pot consumir en la seva totalitat sense disminuir la capacitat de qualsevol altre individu de consumir-lo". Implícitament en aquesta definició s'hi fonamenta la idea que un bé públic pur ha d'estar "igualmente disponible" per a tots els individus en qüestió. Això duu a la pregunta, des del punt de vista espacial, Com es defineix el grup d'individus que és rellevant? ¿Quina és la porció de població que queda dintre de l'espai servit per un bé? Per tant a nivell espacial, un bé públic està restringit per la distància que els individus tenen i poden viatjar per a aconseguir aquest bé; i per tant, un bé públic deixa de ser-ho en el moment que la distància a aquest bé no pot superar-se per la població o demanda insatisfeta. Conceptes de rang i abast d'un bé (Christaller, 1938) delimiten la utilitat d'un bé públic per a un determinat grup de població.

Aquesta definició abasta la propietat pura de "no congestió" dels béns públics, la capacitat és il·limitada o suficient per a tots els individus del grup "rellevant" que hagin d'utilitzar el servei. La literatura econòmica més recent reconeix altres propietats inherents en els béns públics purs. La propietat de "no exclusió", en la qual el consum del bé no pot ser exclusiu d'uns grups de clients i no d'uns altres. Per tant, cap consumidor pot ser exclòs; si el bé està disponible per a un individu, està disponible automàticament per a tots els altres individus. La segona propietat de "no refutabilitat", es refereix a que no solament els individus poden consumir la totalitat del bé, sinó que han de consumir-la. L'impacte d'aquestes propietats de béns públics en els consumidors és que els individus consumeixen la mateixa quantitat del bé; això és, la mateixa quantitat entra a cadascuna de les funcions d'utilitat de tot individu. Per tant, un bé pur públic, donat que ho és per a un grup d'individus, deixa de ser-ho a l'aplicar-li el vector distància.

## 4.2 El model p-median

Emmarcat com un model de localització de béns públics, el model p-median pot ser desenvolupat com un model amb dos objectius. El primer objectiu és minimitzar la distància viatjada entre un centre de població i un servei. El segon és trobar un temps viatjat màxim o òptim que separa a l'usuari del seu servei més pròxim.

Així doncs, desenvolupant el primer, es pot dir que l'objectiu del model p-median és: (A) minimitzar el temps viatjat ponderat de tots els usuaris al seu servei més pròxim; en aquest objectiu s'assumeix que cada usuari prefereix viatjar al seu servei més pròxim, sense distorsions d'altre tipus (s'omet gustos de demanda estratificada, per exemple). Aquest objectiu està subjecte a les següents restriccions que assegurin que (B) tots els usuaris reben el servei; (C) que el servei es proveeix solament des de serveis que estan oberts; i (D) que el nombre total de serveis o la seva capacitat no s'excedeix.

La formulació matemàtica d'aquest model és com segueix:

$$\text{Minimitzar } Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i d_{ij} x_{ij}, \quad (\text{A})$$

$$\text{Subjecte a } \sum_{j=1}^m x_{ij} = 1, \text{ per a totes les } i. \quad (\text{B})$$

$$x_{ij} - x_{ji} = 0 \text{ per a tots els } i, j; i \neq j. \quad (\text{C})$$

$$\text{Subjecte a } \sum_{j=1}^m x_{jj} = p, \text{ per a tots } j. \quad (\text{D})$$

$$x_{ij} = (0,1), \text{ per a tots } i, j. \quad (\text{E})$$

On,

$a$  = població del node  $i$ ,

$j$  = possible node de localització de servei,

$i$  = node de població,

$d$  = la distància més curta entre el node  $i$  i el node  $j$ .

$$X_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ si el node } i \text{ s'assigna al node } j. \\ 0, \text{ si succeeix d'una altra forma.} \end{array} \right\} \quad (\text{F})$$

$$X_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ si el servei s'obre en el node } j. \\ 0, \text{ si succeeix d'una altra forma.} \end{array} \right\} \quad (\text{G})$$

## 5. El disseny ortogonal L1 de distàncies en l'estructura ortogonal de carrers i el càlcul de població per mansana

En aquest problema i sobre la quadrícula ortogonal del Pla Cerdà, la distància es pren considerant *Distància Manhattan* o *Distància ortogonal*  $L_1$ , en la qual una persona no pot viatjar en diagonal entre les illes de cases, sinó que ha de seguir el model ortogonal definit per una estructura de carrers ordenats de Nord-est a Nord-oest amb dos grans diagonals que travessen tota la quadrícula en forma de X. Els angles quadrats de cada illa estan tallats formant octògons, per a facilitar la visió del trànsit. En l'estructura ortogonal del Pla Cerdà la majoria de carrers són de 20 metres d'amplària i cada illa té 133,33 metres de costat. Les illes de cases s'estructuren en grups de tres, on cadascuna de les tres té formes distintes, és a dir amb un total de 400x400 metres (Bohigas Guardiola, 1959) dins els quals es podia edificar, –segons el dibuix de cadascuna– blocs de cases de 16 metres d'altura aïllats per jardins. Existia la previsió de 8 parcs públics de 82,35 hectàrees en total. L'organització d'unitats veïnals, amb la revitalització del paper del carrer i la plaça pública com a centre comercial i de comunicació social entre totes les zones és un objectiu vital del Pla de Cerdà. L'acordonament de la vegetació dels carrers, amb la plantació d'arbres al llarg del carrer, no tancats en un jardí –a similitud dels jardins angle-

sos— volia facilitar el paper del carrer com eix del comerç, deixant els jardins de l'interior de les illes com a centre de reunió de veïns i de jocs de nens.

El Pla Cerdà proposa una població de 250 habitants per hectàrea, o 40 metres quadrats per habitant. La majoria de les illes de Cerdà tenen un àrea de 12.370 metres quadrats. Per tant, la població en cada illa és de 310 habitants. La distribució distingida de població entre l'edat de 4 a 14 anys en la piràmide d'edat és de 27 per cent (percentatge aproximat basat en Cabré i Muñoz, 1997). Llavors en cada illa es considera que són escolaritzables 84 persones. A illes desiguals, la població es calcula proporcionalment a l'àrea de cada illa en particular. En aquest article, es consideren nodes de població, les illes separades unes de les altres per l'estructura de carrers que el plànol de Cerdà divideix Barcelona. En algunes parts de la superfície, el node o illa es divideix en dues o en quatre, segons l'estructura dels carrers.

Es considera que la població de cada node es concentra en un punt al centre del node, o centroide. Aquesta restricció es fa atès que es considera que cada node és suficientment petit per a suposar que la població de tot el node té la mateixa distància a viatjar fins al pròxim node. Així és, si la comunitat  $i$  es troba en el node on es localitza un servei, la població d'  $i$  ha de viatjar zero metres per a aconseguir arribar al servei. Els problemes de localització-assignació basats en estimacions de demanda agregada estan moltes vegades subjectes a errors deguts a pèrdua d'informació durant l'agregació. Aquest problema addicional ha estat tractat en diferents articles (Hillsman i Horda, 1978; Goodchild, 1979; Park, 1983) dins la teoria de la localització i es tenen en compte els seus resultats per a la construcció de la matriu de demanda agregada en aquest article.

## 6. El model p-median en distàncies regulars de l'àrea d'estudi del Cas 1

En l'adequació del model p-median en la distribució dels serveis de la Barcelona de Cerdà, el problema queda assimilat a la distribució d'un nombre de serveis en un territori, donada una restricció d'inversió (Rojeski i ReVelle, 1970) amb l'objectiu de minimitzar la mitjana de la distància en temps de la població que viatja per a aconseguir el servei. La descripció del problema per a fer-lo més manejable i precís ha d'incloure les següents assumpcions: a) l'espai és dividit en nodes de diferent superfície. La majoria de nodes tenen la mateixa grandària, però no tots ells. La població està distribuïda homogèniament sobre el total de l'àrea del Pla Cerdà. La població de cada node és proporcional a cada superfície. b) Els nodes on el servei està localitzat no té població. Són nodes "buits" (Narula, Ogbu i Samuelsson, 1977). c) La població en cada punt de demanda ha d'estar assignada a un i solament a un servei.

Per a resoldre aquest problema de localització de serveis, aquest ha de ser

estructurat com un problema de programació lineal de valors zero-u. Proposem transformar el problema proporcionat icònicament per Cerdà en el seu mapa general de la ciutat en un problema analògic i matemàtic; definint els següents paràmetres:

- $n$  = nombre de punts de demanda o nodes,
- $a_i$  = la població del node  $i$ ,
- $j$  = la possible localització d'un servei,
- $d_{ij}$  = la distància més curta des del node  $i$  al node  $j$ ,

$$x_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ si el node no s'assigna al node } j. \\ 1, \text{ si el node s'assigna al node } j. \end{array} \right\} \quad (F)$$

Per a minimitzar la distància, la funció objectiu a ser minimitzada és la següent:

$$z = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_i d_{ij} x_{ij}$$

on es requereixen dos tipus de restriccions:

- 1) Cada node ha de ser assignat completament,

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1; \quad A i = 1, 2, \dots, n$$

- 2) Els límits de la inversió que ha de fer-se en cada servei han d'estar definits.

El cost (L) d'un servei  $j$  ve donat per:

$$L_j = b_j + c_j s_j$$

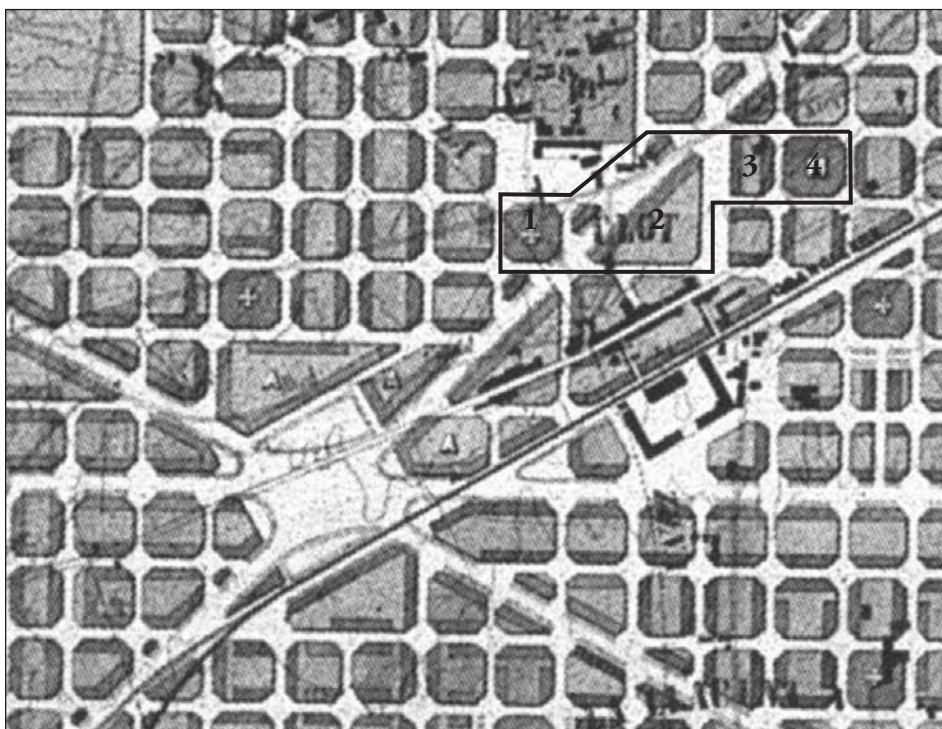
on:

- $b_j$  = el cost fix que s'incorre si un servei es construeix,
- $s_j$  = la grandària d'un servei,
- $c_j$  = el cost per unitat d'expansió que es construeix.

En el Cas 1, per a treballar en el plànol Cerdà, el model p-median s'utilitza per a la localització òptima d'escoles en un grup de quatre nodes de població, on s'han de localitzar dues escoles per a servir la població d'aquests quatre nodes (Figura 4). La població de cada node  $i$  i la distància entre nodes s'estableix segons les dades del Pla Cerdà (Quadres 1 i 2). La distància entre nodes es calcula sobre la base dels perímetres de les illes (illa regular = 133 metres de longitud) i dels carrers (carrer regular = 20 metres d'amplària). Per la qual cosa, una persona per a desplaçar-se del node  $u$  al dos hauria de viatjar 153 metres, (133+20



**Figura 4**  
**Àrea d'estudi del Cas 1**



Font: Elaboració pròpia a partir de Corporació Metropolitana de Barcelona, 1985.

metres). Per a obtenir els resultats requerits s'ha formalitzat el model, amb la funció objectiu i les restriccions (Pallarès, 1986), en una estructura de dades preparada per a ser llegida pel paquet informàtic *Mathematical Programming System-Extended (MPSX)*, paquet especialment programat per a solucionar models d'optimització lineal amb àmplies bases de dades (Quadre 1 de l'Apèndix).

**Taula 1**  
**Matriu de població escolar del Cas 1, del Pla Cerdà**

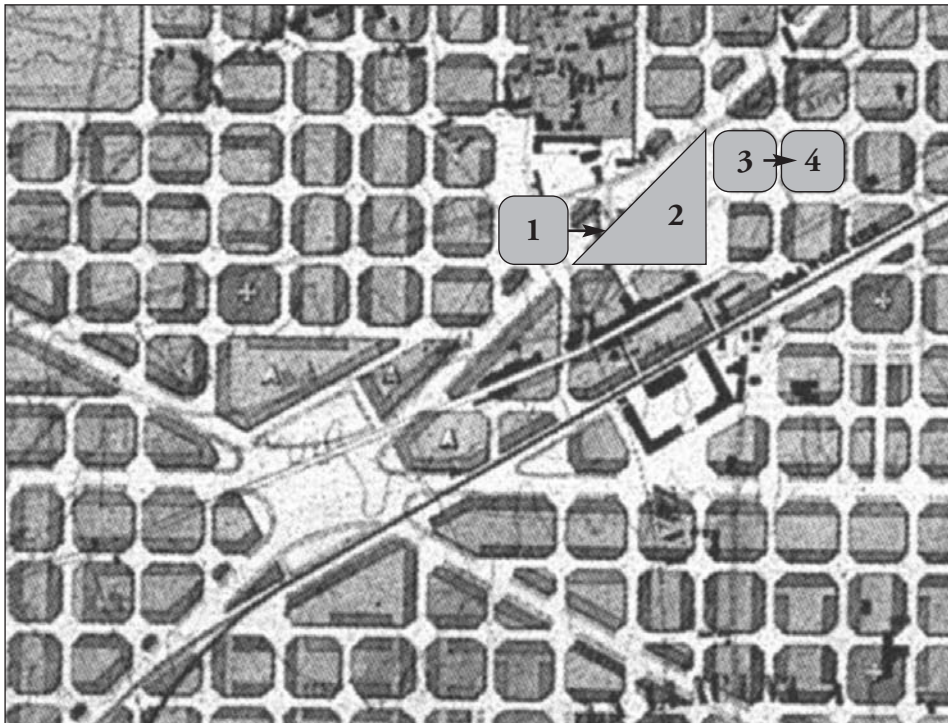
Número de node	Població escolar
1	84
2	126
3	74
4	84

**Taula 2**  
**Matriu de distàncies mínimes del Cas 1 del Pla Cerdà**

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	0	153	439	572
2		0	153	286
3			0	133
4				0

Els resultats obtinguts en l'optimització de la funció objectiu mostren que si les escoles es localitzen en el node nombre dos i nombre quatre, el valor de la funció objectiu és igual a 22.700 metres. Valor que representa la distància mínima total ponderada que la població ha de viatjar per a anar a escola (Quadre 3). Les assignacions són les següents, la població dels nodes u i dos ha de ser servida per l'escola en el node dos, amb una distància total ponderada de 12.900. Mentre que la població del node tres i quatre ha de ser servida per l'escola en el node quatre, amb una distància total ponderada de 9.800 metres (Figura 5).

**Figura 5. Localització d'escoles i assignació de població escolar al Caso 1 del Pla Cerdà**



Font: Elaboració pròpia a partir de Corporació Metropolitana de Barcelona, 1985.

Basat en la formulació del problema, aquest resultat constitueix la distància mínima que la població agregada en cada node ha de viatjar per a anar a escola en el Cas 1; per tant, aquesta localització és òptima.

**Taula 3**  
**Localització d'escoles en els nodes 2 y 4 y cost mínim agregat de la població per a aconseguir el servei. Cas 1 del Pla Cerdà (solució en MPSX)**

Número de possibles fluxos	Possibles fluxos de població escolar	Activitat	Cost d'entrada	Cost reduït	Cost de viatjar al servei
1	X11				
2	X12	1	12.9		12.9
3	X13		36.9	24.0	
4	X14		48.0	35.1	
5	X21		19.3	6.4	
6	X22	1			0.0
7	X23		19.5	6.6	
8	X24		36.0	23.1	
9	X31		32.5	21.2	
10	X32		11.3		
11	X33			1.4	
12	X34	1	9.8		9.8
13	X41		48.0	36.6	
14	X42		24.0	12.6	
15	X43		11.2		
16	X44	1			0.0
				<b>Total:</b>	<b>22.7</b>

## 7. El procediment del centroide o minisum i la delimitació de l'àrea d'estudi del Cas 2

El Cas 2 ens permet desenvolupar la metodologia del centroide, on el problema se centra en la minimització de la distància rectilínia ponderada, i pot ser formulat matemàticament de la següent forma:

$$\text{Minimitzar } f(x,y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_i (|x_i - x_j| + |y_i - y_j|)$$

On,

$(x_i, y_i)$ , i  $(x_j, y_j)$  són les coordenades dels punts de demanda en un plànol, i,  $w_i$  és la ponderació inherent en cada node; per tant, en aquest cas seria la població escolaritzable en cada node.

Aquest model és conegut pel nom de minisum, p-median o punt de desplaçament mínim, on l'objectiu és resoldre el clàssic problema de localització de Weber (1929), la resolució algorítmica de la qual van assolir Khun i Kuenne (1962).

El plantejament del procediment del centroide comença amb la restricció del nombre d'escoles a localitzar (p), en tot el plànol de la Barcelona de Cerdà. A partir de la Figura 2, es poden observar 32 escoles ( $p = 32$ ). Per raons d'operativitat, en comptes de 32, assumirem per a aquest cas  $p = 36$ . D'aquesta manera, dividint el plànol Cerdà en trenta-sis seccions, el problema es redueix a aconseguir la localització òptima d'una escola a cada secció. Aquesta divisió es fa de la següent forma. Se superposa en la totalitat del plànol Cerdà una quadrícula per a treballar en coordenades cartesianes  $x$  i  $y$ . Cada eix, el de les ordenades i el de les abcises, es divideix en sis seccions iguals, d'aquesta manera es divideix el plànol en trenta-sis seccions. Qualsevol àrea seria útil per a fer l'estudi, s'escull doncs una de les trenta-sis de forma aleatòria que constituirà l'àrea d'estudi del Cas 2 (Figures 2 i 6). La localització òptima d'una escola a cadascuna de les trenta-sis seccions seria en un lloc central ponderat per la distància i per la població de la secció. Això s'aconsegueix esbrinant el punt centroide de les ordenades i de les abcises en la secció, que en aquest cas en particular, vam denominar Cas 2 (Figura 6).

### 7.1 El procediment del centroide aplicat a la divisió ponderada d'àrees

La metodologia per trobar el centroide de les coordenades d'una àrea determinada per a obtenir el resultat d'una divisió ponderada d'àrees, en un plànol de carrers d'estructura ortogonal, es basa en els següents passos. Primerament, l'àrea d'estudi del Cas 2 es tracta com una unitat, que es vol dividir en quatre parts ponderadament iguals (Figura 6). A aquest efecte, es calcula el centroide de l'àrea, definit aquest com un punt en el plànol que minimitza les distàncies ponderades en les coordenades  $x$  i  $y$ . Hi ha diferents metodologies per a calcular la solució centroide. Francis i White (1974 184) proposen minimitzar la funció objectiu, on la formulació del problema és la següent:

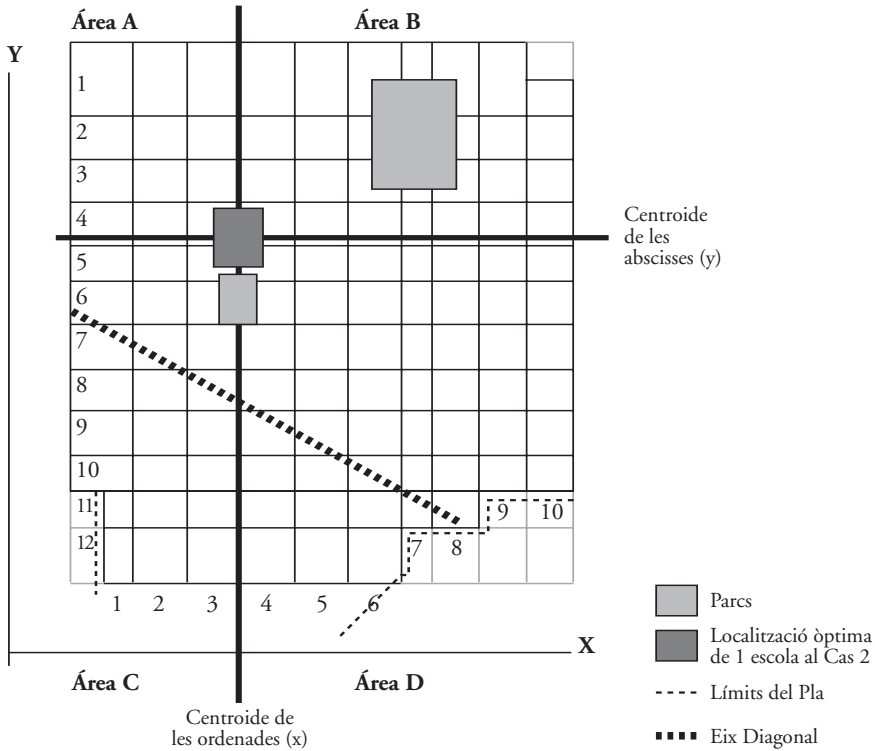
$$\text{Minimitzar } f(x, y) = \sum_{i=1} w_i [(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2]$$

on  $x$ ,  $i$ ,  $a_i$ ,  $b_i$ , són les coordenades de punts en un àrea determinada.

Qualsevol punt  $(x^*, y^*)$  que minimitza aquesta funció objectiu deu satisfer les següents condicions:

$$\frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x^*}, \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y^*} = (0, 0)$$

**Figura 6. Àrea d'estudi del Cas 2.**  
**Procediment del centroide aplicat a la divisió ponderada d'àrees**



on, computant les derivades parcials de la funció objectiu respecte a  $x$  i a  $y$ , i igualant-les a zero, dóna la següent solució única:

$$x_i = \frac{\sum_{l=1}^m w_l a_l}{\sum_{l=1}^m w_l}, y^* = \frac{\sum_{l=1}^m w_l b_l}{\sum_{l=1}^m w_l}$$

Les coordenades  $x^*$ , i  $y^*$  són les que minimitzen la funció objectiu anteriorment proposada. Aquesta enunciació és aplicada de forma similar per ReVelle i Church (1984 10) i desenvolupada per a la Distància Rectilínia  $L_1$ , i s'utilitza en aquesta part de l'article per a trobar els límits ponderats per a dividir la secció del Cas 2, del Pla Cerdà (Figura 6) en quatre parts iguals.

En primer lloc, es planteja localitzar el *punt òptim ponderat* en una línia de punts espaiats en una línia, on la població pot viatjar tant a la dreta com a l'esquerra, en aquest cas es comença per l'eix de les  $y$ 's de la trama superposada, en la secció delimitada pel cas 2 (Figura 6). La població està situada a cada node o punt de demanda. En aquesta part de la metodologia es considera la

restricció que cada node té diferent població, però estan a una distància equidistant un de l'altre; per això en el procediment de càlcul, es desestima ponderar la població segons la distància entre nodes, ja que la distància entre ells és una constant. El centroide es pot moure al llarg de l'eix de les  $y$ 's, des de la dreta a l'esquerra, en un esforç per a trobar el punt on la distància ponderada des dels altres punts sigui la mínima. A cada punt on sigui possible temporalment posar un centroide, és necessari avaluar la suma dels pesos per la distància a l'instant en qüestió. El punt òptim ponderat pot ser localitzat al llarg de l'eix de les  $y$ 's, des de dreta a esquerra, en un esforç de trobar el punt on la distància ponderada des dels altres punts sigui la mínima. A cada punt susceptible que el punt òptim ponderat pugui ser localitzat, es fa necessari avaluar la suma de les distàncies ponderades a aquest punt, tant des de la dreta com des de l'esquerra del punt (vegeu Figura 7).

Quan s'han avaluat cadascun dels punts en la línia de les  $y$ 's, s'escull com possible punt de localització aquell que sigui mínim. ¿Com se sap quin és el punt que minimitza les distàncies ponderades? El procediment que s'utilitza es descriu a continuació. Es tracta d'un mètode iteratiu, on el resultat es compara amb altres resultats possibles per a observar en quin moment el valor del resultat canvia de signe. Com a il·lustració d'aquest procediment, se suposa, en el Pas 1 de la Figura 7, un lloc de prova en l'eix de les  $y$ 's, on es postula el primer punt possible de partició dels nodes ponderats, entre els nodes 6 i 7. Es calcula el pes ponderat a dreta i esquerra del punt proposat (Pas 1), s'esbrina la diferència ( $\Delta = (\sum_{i=1}^6 w_i - \sum_{i=7}^{12} w_i)$ ) entre els pesos de la dreta i l'esquerra del punt

proposat; en aquest Pas 1,  $\Delta = +189$ . El procediment funciona de manera que si el lloc de prova és mogut cap a la dreta per  $\Delta$  unitats de distància, la distància ponderada des dels punts en l'esquerra augmenta i la distància ponderada dels punts a la dreta decreix. En el Pas 2, se segueix el mateix procediment, traslladant el punt possible de partició, un lloc cap a l'esquerra, nodes 5 i 6, i es calcula altra vegada la distància ponderada (Pas 2), en aquest cas  $\Delta = +21$ . El valor encara és positiu, encara que ha disminuït de pes. Es vol arribar a obtenir aquell punt on el resultat del càlcul en el canvi del moviment ( $\Delta$ ) vagi decreixent, fins a arribar al canvi de signe. Per tant, es prova encara una altra translació, aquesta vegada en el Pas 3, un punt situat més a l'esquerra que en el pas 2, entre els nodes 4 i 5 (Pas 3, Figura 7); en aquest cas el valor resultant canvia de signe,  $\Delta = -147$ . En el punt on el terme entre parèntesi,  $\Delta$ , sigui zero, seria on la suma de les distàncies ponderades en l'esquerra iguala a la suma de les distàncies ponderades de la dreta. Per tant, *la distància mínima ponderada ocorre, bé en el punt on el pendent de l'objectiu canvia de signe o en els punts on l'objectiu és constant*. En aquest cas el punt mínim en l'eix de la  $y$  és el node 5 (Figura 6); en aquest punt el valor de  $\Delta$  canvia de signe —de +21 a -147—. Per tant aquest punt correspon al centroide o *punt òptim ponderat* en l'eix de les  $y$ 's.

Si s'estén aquest procediment a dues dimensions, el centroide de l'adreça horitzontal, l'eix de les  $x$ 's (Figura 1 de l'Apèndix) es troba independentment

**Figura 7. Càlcul del centre de gravetat en l'eix de les y. Partició de l'àrea de estudi del Cas 2 (1/6 del Plànol Cerdà) en quatre subàrees (A, B, C, D)**

Punts de demanda en l'eix de la y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Població assignada a cada node	84	84	84	84	84	84	63	84	84	84	0	0

$X_1$     $X_2$     $X_2$     $X_2$     $X_2$     $X_2$     $X_2$     $X_2$     $X_2$     $X_2$     $X_2$     $X_2$     $X_2$    Eix de les Y's

**1. Pas 1:**

$$\sum_{i=1}^6 w_i = 504 \quad \left( \sum_{i=1}^4 w_i - \sum_{i=7}^{12} w_i = +189 \right)$$

$$\sum_{i=7}^{12} w_i = 315$$

**2. Pas 2:**

$$\sum_{i=1}^5 w_i = 420 \quad \left( \sum_{i=1}^5 w_i - \sum_{i=6}^{12} w_i = +21 \right)$$

$$\sum_{i=6}^{12} w_i = 399$$

**3. Pas 3:**

$$\sum_{i=1}^4 w_i = 336 \quad \left( \sum_{i=1}^4 w_i - \sum_{i=5}^{12} w_i = -147 \right)$$

$$\sum_{i=5}^{12} w_i = 483$$

$X_1$ : Possible punt òptim en el pas 1.  
 $X_2$ : Possible punt òptim en el pas 2.

$X_3$ : Possible punt òptim en el pas 3.  
 ↑: Punt on  $\Delta$  (el valor de la variable) canvia de signe.

del centre de gravetat en l'adreça vertical. En aquest cas el punt mínim en l'eix de la x és 4 (Figura 6). Sobre aquests dos centres de gravetat es perllonguen dues línies que interseccionen entre si i separen l'àrea d'estudi del Cas 2 en quatre parts més petites (Figura 6). En el punt on interseccionen aquestes línies seria la localització òptima d'una escola per al Cas 2.

**Figura 1 (Apèndix)  
 Càlcul del centre de gravetat en l'eix de les x**

Punts de demanda en l'eix de la y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Població assignada a cada node	0	84	84	84	63	42	21	0	0	0

$$\sum_{i=1}^4 w_i = 252 \quad \left( \sum_{i=1}^3 w_i - \sum_{i=5}^{10} w_i = +126 \right)$$

$$\sum_{i=5}^{10} w_i = 126$$

$$\sum_{i=1}^3 w_i = 168 \quad \left( \sum_{i=1}^3 w_i - \sum_{i=4}^{10} w_i = -42 \right)$$

$$\sum_{i=4}^{10} w_i = 210$$

↑: Punt on  $\Delta$  canvia de signe.

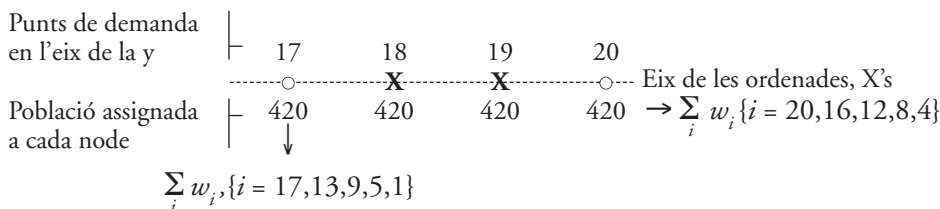
## 7.2 El procediment del centroide aplicat a la localització d'escoles

Dins d'aquestes àrees més petites (A, B, C, D) es vol calcular el centroide on es localitzarà un servei, una escola, que minimitzarà les distàncies ponderades. El procediment a utilitzar és similar al de la secció anterior, el resultat és la solució al problema p-median en distàncies  $L_1$  d'estructures de base ortogonals com en el Cas 2 de la Barcelona de Cerdà (Figura 8). Els resultats s'expliquen a continuació.

Pel que fa a l'Àrea A, a partir dels càlculs recollits en la Figura 8, el centroide en les ordenades dona com resultat dos punts òptims, 18 i 19, per la qual cosa, per a l'Àrea A es dibuixaran dues línies a partir del centroide de les x's. A l'abcisa, el punt òptim és el 9, a partir del qual es perllongarà una línia que interseccionarà amb, en aquest cas, les dues de l'eix de les x's. Així, a l'Àrea A ens trobem amb dues localitzacions òptimes, que són alternatives; així, el planificador podrà escollir entre edificar una escola en el node 10 o 11 (Figura 9).

**Figura 8. Càlcul de la localització de l'escola, utilitzant el procediment del centroide en l'àrea A del Cas 2**

### a. Càlcul del centroide en l'eix de les ordenades de la subàrea A.



$$\sum_{i=17}^{18} w_i = 840 \quad \left( \sum_{17}^{18} w_i - \sum_{19}^{20} w_i \right) = 0$$

$$\sum_{i=19}^{20} w_i = 840$$

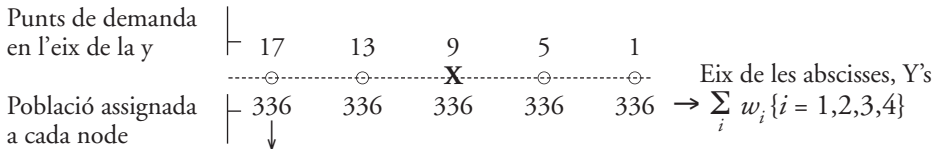
Node	Pobl. (1) $w_i$	Node	Pobl. $w_i$	Node	Pobl. $w_i$	Node	Pobl. $w_i$
1	84	2	84	3	84	4	84
5	84	6	84	7	84	8	84
9	84	10	84	11	84	12	84
13	84	14	84	15	84	16	84
17	84	18	84	19	84	20	84
Total	420		420		420		420

X: Punts òptims per localitzar el centroide: nodes 18 ó 19.



**Figura 8** (Continuació)

**b. Càlcul del centre de gravetat en l'eix de les abscisses de la subàrea A.**



$$\sum_i w_i, \{i = 20, 19, 18, 17\}$$

$$\sum_{i=17}^{13} w_i = 672 \quad \left( \sum_{17}^{13} w_i - \sum_9^1 \right) = -336$$

$$\sum_{i=9}^1 w_i = 1008$$

$$\sum_{i=17}^{19} w_i = 1008 \quad \left( \sum_{17}^9 w_i - \sum_5^1 \right) = +336$$

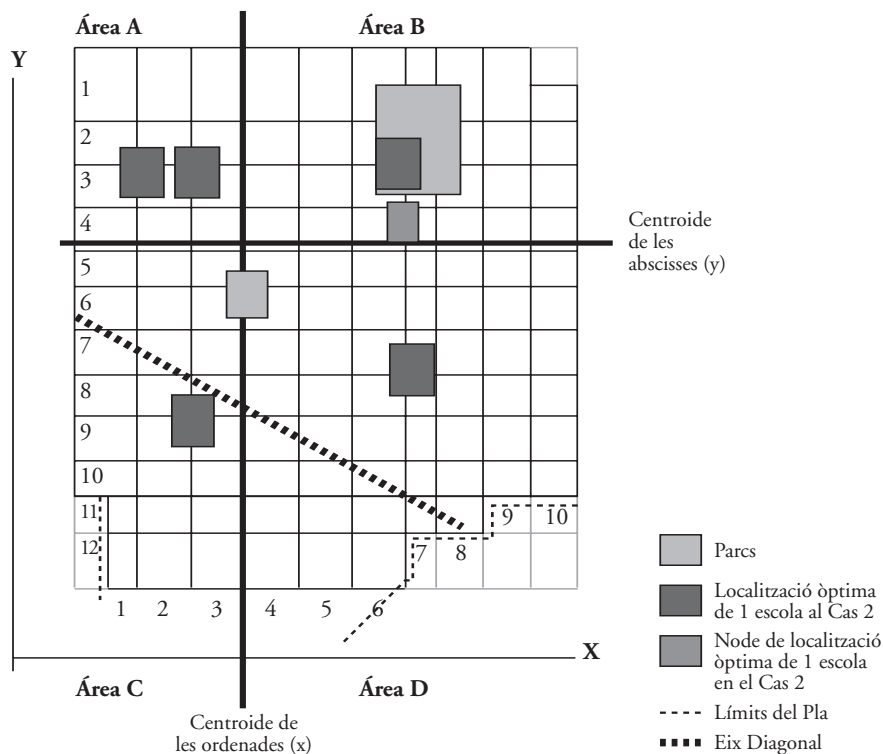
$$\sum_{i=5}^1 w_i = 672$$

	<b>Pobl.</b>		<b>Pobl.</b>		<b>Pobl.</b>		<b>Pobl.</b>		<b>Pobl.</b>
<b>Node</b>	<b>(1) w<sub>i</sub></b>	<b>Node</b>	<b>w<sub>i</sub></b>	<b>Node</b>	<b>w<sub>i</sub></b>	<b>Node</b>	<b>w<sub>i</sub></b>	<b>Node</b>	<b>w<sub>i</sub></b>
39	84	28	84	19	84	10	84	1	84
40	84	29	84	20	84	11	84	2	84
41	84	30	84	21	84	12	84	3	84
42	84	31	84	22	84	13	84	4	84
<b>Total</b>	<b>336</b>		<b>336</b>		<b>336</b>		<b>336</b>		<b>336</b>

**X:** Punts òptims per localitzar el centre de gravetat: node 9.  
 (1) Població escolar associada a cada node, w<sub>i</sub>.

Seguint el procediment del centre de gravetat, per a la resta de les àrees tenim el resultat de punts òptims per a la localització d'escoles. Clarament, aquests queden dibuixats tant en l'Àrea C, com en la D (Figura 9). Pel que es refereix a l'Àrea B, el resultat del centre de gravetat localitza el punt òptim en una zona qualificada com a parc, on se suposa que no es pot construir. A l'Àrea B doncs, el procediment del centre de gravetat no és útil per a determinar el punt òptim de localització de serveis. Per a aquest tipus de problemes es desenvolupa, a continuació, un altre procediment denominat Mètode de Minimització de Distàncies Ponderades (Pallarès, 1986).

**Figura 9. Localització òptima d'escoles en les Àrees A, B, C, D, per el procediment del centroide y el procediment MMDP**



## 8. El Mètode de la Minimització de les Distàncies Ponderades (MMDP)

Atès que el mètode centroide a l'Àrea B dona com resultat la localització d'una escola en una àrea qualificada com a parc, on suposadament l'edificació no és possible. Per a trobar un punt de minimització de distàncies alternatiu a aquesta àrea es recorre a un algorisme, programat convenientment utilitzant el llenguatge *Pascal* (Pallarès, 1986), en el qual es troba el punt òptim a través de trobar les distàncies ponderades de tots els punts de l'Àrea B entre si; escollint-se aquell punt on les distàncies a viatjar siguin mínimes. Els resultats del MMDP a l'Àrea B donen com a resultat que el punt òptim correspon al node assenyalat en la Figura 9, com a node de localització alternativa, amb un viatge agregat de 50.820 metres a recórrer pel total de la població. S'ha realitzat el càlcul de les distàncies ponderades també per a les Àrees A, C i D, on es comprova que els punts òptims coincideixen amb els trobats pel mètode del centroide, i a on els resultat de distàncies mínimes són els següents: per a l'Àrea A, la població té 20.496 metres a recórrer per a aconseguir el servei en aques-

ta Àrea; a l'Àrea C la distància mínima a recórrer és de 36.015 metres; finalment a l'Àrea D, si el centroide se situa al punt assenyalat a la Figura 9, el recorregut total de la població és de 85.848 metres (Quadre 4) (Pallarès, 1986).

**Taula 4**  
**Solució final del problema p-median del Cas 2 del Pla Cerdà**

Àrees Cas 2	Cost mínim en metres (1)
A	20.496
B	50.840
C	36.015
D	85.848

(1) Cost mínim del viatge agregat de la població a les escoles.

## 9. Resultats i conclusions

L'objectiu principal d'aquest article era demostrar com el model d'optimització p-median aplicat a l'urbanisme del Pla Cerdà és representatiu de l'optimalitat en la distribució de serveis en els quals intervenen, com agents principals, la població i la minimització de costos viatjats d'aquesta per a aconseguir el servei. Aquest objectiu es fonamenta en la idea defensada per l'autora en aquest article, que en el Plànol Cerdà de Barcelona, l'urbanista cerqués la millor distribució dels serveis en una estructura urbana ideal, i que aquesta *millor distribució* correspongués al concepte contemporani de la disciplina sota els conceptes i mètodes de la qual es coneix com a *Teoria de la Localització* en el marc més ampli de la *Geografia Econòmica*. Disciplina que gaudeix actualment d'uns plantejaments formals —com són els models matemàtics, amb els seus objectius i restriccions—, i de resolucions quantitatives d'aquests models mitjançant metodologies de càlcul i de maneig de dades a través de l'ordinador.

Així doncs, l'article ha plantejat en primer lloc el model p-median formalment, proposant a continuació el desenvolupament de tres resolucions del mateix en distàncies  $L_1$  ortogonals, emmarcades en una estructura de carrers ortogonal. Per descomptat, aquestes resolucions no són les úniques a utilitzar i tampoc no són discriminatòries entre si; per contra, es poden completar unes a les altres depenent del problema amb què l'analista es trobi. Amb l'al·licient que poden implementar-se amb tècniques d'anàlisi d'espais més amplis que proporcionen els Sistemes d'Informació Geogràfica, que, encara que no tractats en aquest article, podria ser un camí futur per al seu estudi en un altre article sobre la planificació de serveis a Cerdà.

També es vol ressaltar que en aquest article l'èmfasi s'ha posat més en la metodologia que en els resultats, i que des del punt de vista de l'autora ha estat més un exercici enfocat a la flexibilitat en el tractament i la utilització combi-

nada de tècniques i metodologies cap a un objectiu comú. Per tant, els resultats es comenten a nivell metodològic emfatitzant la flexibilitat que requereix qualsevol tractament de la realitat social i econòmica on s'emmarquen els estudis urbanístics i de localització-distribució de serveis.

En primer lloc, la formulació del model p-median que s'ha optat en aquest article com pot observar-se en les restriccions, es planteja com un model de càlcul zero-u. Aquest plantejament ve forçat per la posterior metodologia de preparació del model i de les dades per a la seva primera resolució en el paquet matemàtic *Mathematical Programming System-Extended (MPSX)*. Aquesta opció podria reflectir-se en la resolució del model p-median per altres paquets informàtics, existents en el mercat –LINDO, per exemple–, que oferirien resultats, sobretot en la restricció de la distribució de la demanda, similars sense la rigidesa de considerar que el total de la població escolaritzable en un node no pot distribuir-se en dos nodes d'oferta (en escoles diferents). Però és necessari ressaltar la capacitat de flexibilització i adaptació que ofereix la mateixa formulació del model p-median, on s'observa una adaptació no solament als objectius de l'anàlisi espacial d'una zona determinada, com és la Barcelona de Cerdà, sinó als necessaris ajustaments que requereix la metodologia que l'investigador es veu obligat a emprar. El resultat quantitatiu en aquest Cas 1, no és obvi a causa que es generen 16 variables de decisió (fluxos) a partir de les dues variables originals, població i distància, fins i tot considerant la poca quantia de nodes analitzats (quatre) del total de la Barcelona de Cerdà, en els quals s'havien de localitzar dues escoles capaces de servir a l'agregat de tota la població. La localització òptima de les escoles recau en aquells dos nodes on el total de la distància ponderada que ha de recórrer la població per a aconseguir escola és més petit: nodes dos i quatre, amb un pes de població pròpia de 126 i de 84. On cada node destinació s'assigna a si mateix, i on el node 1 (població = 84) s'assigna al node dos, i al node tres (població = 74) s'assigna a node quatre, clarament per raons de proximitat (Figura 5). En aquest cas les escoles serien de diferent capacitat –escola 2 = 210 alumnes, escola 4 = 158 alumnes–, per tant amb un cost d'inversió diferent. D'això es desprèn en aquest resultat que malgrat fixar el nombre de serveis a distribuir, la capacitat o els costos de cada servei s'han deixat lliures, per la qual cosa seria possible una reformulació en les restriccions del model inicial plantejat donant possibilitat a altres alternatives, com limitar la capacitat màxima de cada servei –llavors la població restant no servida, hauria de dirigir-se al servei més pròxim. O de limitar la distància màxima a viatjar per la població, per citar els models de desenvolupament, potser, més pròxims, que originarien plantejament de models de *maximal covering* (Church i ReVelle, 1976), multifuncionalitat o-i jerarquia de serveis.

El procediment del centroide i el procediment del mínim de les distàncies ponderades s'executen sobre un mateix espai, el delimitat en el Cas 2. Són dos procediments que s'han utilitzat per raons de complementaritat però que en alguns casos podrien ser substituïtoris, atès que s'ha de ressaltar que amb l'excepció de l'existència de parcs o altres elements que constitueixen barreres urba-

nes, els resultats són els mateixos. Vegi's sinó, els resultats en les seccions A, C, D que coincideixen a localitzar de forma òptima les escoles en els mateixos nodes –secció A, nodes 10 i 11 (nodes amb el mateix cost, alternatius); i en les seccions C i D, es mostren en la Figura 9 . Mentre que en la secció B sorgeix la situació característica que pel procediment centroide, la localització òptima seria en una zona declarada urbanísticament com d'equipament lliure o parc, en la qual, per imperatius legals i propis, no es veu la necessitat de construir cap edificació, encara que sigui la d'un servei públic. Per això s'ha desenvolupat l'algorisme de la minimització de les distàncies ponderades a través de programar-lo amb el llenguatge informàtic *Pascal*; donant en aquest cas, el resultat que el node òptim en la secció B és el qual correspon a l'alternatiu marcat en la mateixa figura. Comparant-se, com ja s'ha apuntat, la igualtat de resultats en ambdós mètodes emprats. La peculiaritat d'aquest últim cas, duria a plantejar-se altre tipus de models, també d'optimització, però amb diferent formulació que inclouen en els seus objectius i restriccions impediments físics o sobre impostos en el viatge de l'usuari per a aconseguir el servei. Models que vénen a anomenar-se amb barreres urbanes o d'altre tipus i que requereixen un nou plantejament en la seva funció, objectiu i restriccions, estudi que es deixa per a posteriors investigacions.

## 10. Referències bibliogràfiques

- BERGERON, L.; RONCAYOLO, M. (1974). “De la ville pré-industrielle à la ville industrielle”. *La formazione della città industriale. Quaderni Storici*, núm. 27.
- BIGMAN, D.; REVELLE, C. (1978). “The theory of welfare considerations in public facility location problems”. *Geographical Analysis*, núm. 10, p. 229-240.
- BOHIGAS GUARDIOLA, O. (1959). “Le plan Cerdà”. *Architecture, Formes et Fonctions*, p. 57-72.
- BOURNE, L. S. (1982). *Internal structure of the city. Readings on urban forms, growth and policy*. Nova York: Oxford University Press.
- BOURNE, L. S.; SIMMONS, J.W. [eds.]. *Systems of cities, readings on structure, growth, and policy*. Nova York: Oxford University Press.
- CABRÉ, A.; MUÑOZ, F.M. “Evolució demogràfica”. A: Sobrequés, J. [ed.]. *Història de Barcelona. El segle XX, II. Del creixement desordenat a la ciutat olímpica*. Barcelona: Ajuntament de Barcelona. Enciclopèdia Catalana, vol. 8, p. 105-133.
- CABRÉ, A.; MUÑOZ, F.M. (1994). “Ildefons Cerdà i la insuportable densitat urbana. Algunes consideracions a partir de la cartografia i anàlisi de les estadístiques contingudes a la ‘Teoría General’”. *Papers de Demografia*, núm. 93.
- CAPEL, H. (1977). *Capitalismo y morfología urbana en España*. Barcelona: Libros de la frontera.
- CAPEL, H.; TATJER, M. (1997). “Ildefonso Cerdà y la instalación del telégrafo en Barcelona”. Coloquio sobre “El desarrollo urbano de Montreal y Barcelona

- en la época contemporánea: estudio comparativo” Universidad de Barcelona, 5-7 de mayo de 1997, <<http://www.ub.es/geocrit/cptjbcn.htm>>.
- CASTELLS, M. (1977). *Sociología del espacio industrial*. Madrid: Ayuso.
- CASTELLS, M. (1976). *La cuestión urbana*. Madrid: Siglo XXI.
- CERDÀ, I. *Teoría general de la urbanización, vol. 1; La urbanización como un hecho concreto. Estadística urbana de Barcelona, vol. 2; Vida y obra de Ildefonso Cerdà. Anexo documental y bibliografía, vol. 3*. Estapé, Fabià [ed.]. Madrid: Instituto de Estudios Fiscales, 1968-1971.
- CERDÀ, I. *La Theorie Generale de l'Urbanization*. Paris: Editions du Seuil, 1979.
- CHURCH, R.; REVELLE, C. (1976). “Theoretical and computational links between the p-median, location set-covering and the maximal covering problem”. *Geographical Analysis*, núm. 8, p. 406-415.
- CORPORACIÓ METROPOLITANA DE BARCELONA (1987). *Aportació al debat sobre la organització territorial de Catalunya*. Barcelona: Corporació Metropolitana de Barcelona.
- CORPORACIÓ METROPOLITANA DE BARCELONA (1985). *Inicis de la urbanística municipal de Barcelona: Mostra dels fons municipals dels plans i projectes d'urbanisme: 1750-1930*. Barcelona: Ajuntament de Barcelona.
- LEA, A. C. (1979). “Welfare theory, public goods and public facilities location”. *Geographical Analysis*, núm. 11, p. 217-239.
- FABRE, J.; HUERTAS, J.M. “La penúltima mort de La España Industrial. Un assaig d'història oral”. *L'Avenç*, núm. 34, p. 19-35.
- FONTANA, J. (1979). “Catalunya i la revolució de 1868”. *L'Avenç*, núm. 17, p. 48-71.
- FRANCIS, R. L.; WHITE, J.A. (1974). *Facility layout and location*. Englewood Cliffs, N. J. : Prentice Hall.
- FUNDACIÓ CATALANA PER A LA RECERCA. (1994). *Cerdà, urbs i territori. Una visió de futur*. Barcelona: Electa.
- GOODCHILD, M. F. (1979). “The aggregation problem in location-allocation”. *Geographical Analysis*, núm. 11, p.: 240-255.
- HAKIMI, S. L. (1965). “Optimum locations of switching centers in communication network and some related graph theoretic problems”. *Operations Research*, núm. 13, p. 462-475.
- HAKIMI, S. L. (1964). “Optimal Locations of Switching Centers and Medians of A Graph”. *Operations Research* núm. 12, p. 450-459.
- HILLSMAN, E. L.; RHODA, R. (1978). “Errors in measuring distances from populations to service centers”. *Annals of Regional Science* 12, núm. 3, p. 74-88.
- INTERNATIONAL CENTRE FOR URBAN STUDIES (1989). *Eurociudades*. Barcelona: Organising Committee of the Eurocities Conference.
- LYNCH, K. (1981). *The good city form*. Cambridge, MA: MIT Press.
- NADAL, J. (1987). “Catalunya al segle XIX”. *Grans Temes L'Avenç. Imatges i fets de la Catalunya Contemporània (1808-1978)*. Barcelona: L'Avenç, p. 7-34.
- NARULA, S.C.; OGBU, U.I.; SAMUELSSON, H.M. (1977). “An algorithm for the p-Median problem”. *Operations Research*, núm. 25, p. 709-713.

- PALLARÈS, M. (1986). *The p-Median model and the location of schools in the Cerdà Plan of expansion of Barcelona*. Master Thesis. Boston University. Department of Geography.
- PARK, S. (1983). "Aggregation effects and disaggregation on demand in location-allocation analyses". Discussion Paper núm. 36. Department of Geography. The University of Iowa.
- REVELLE, C.; CHURCH, R. L. (1984). *Location analysis theory*. Department of Geography. John Hopkins University.
- ROGESKI, P.; REVELLE, C. (1970). "Central facilities location under an investment constraint". *Geographical Analysis*, núm. 2, p. 343-360.
- ROSI, A. (1981). *La arquitectura de la ciudad*. Barcelona: Gustavo Gili.
- SAMUELSON, P. A. (1955). "Diagrammatic exposition of a theory of public expenditure". *Review of Economics and Statistics* 37, p. 350-356.
- SERRATOSA, A. (1977). "La revisió del pla comarcal de 1953: alternatives a l'origen i organització dels treballs". *Papers. Els 20 anys del Pla General Metropolità de Barcelona* 28, p. 9-14.
- SORIA Y PUIG, A. (1979). *Ildefonso Cerdà, hacia una teoría general de la urbanización*. Madrid: Turner.
- TEITZ, M. B. (1968). "Toward a theory of urban public facility location". *Papers of the Regional Science Association* 21, p. 35-51.