# GÉOMÉTRIE SYSTOLIQUE DES SOMMES CONNEXES ET DES REVÊTEMENTS CYCLIQUES

IVAN BABENKO AND FLORENT BALACHEFF

Abstract. Nous étudions la constante systolique de la somme connexe de $n$ exemplaires d'une variété $M$ en fonction de ce nombre. Le comportement asymptotique de cette constante, connu dans le cas deux dimensionnel, demeure un problème ouvert dans les dimensions plus grandes que deux. Nous exhibons une borne supérieure, montrant ainsi que la croissance de la constante systolique en fonction de $n$ est toujours plus lente que la croissance linéaire. La méthode utilisée est appliquée à l'étude du comportement systolique des revêtements cycliques en fonction du nombre de feuilles.

## 1. Introduction

Parmi les problèmes modernes de la géometrie systolique, celui de la distribution des constantes systoliques est de tout premier plan. Ce problème, actuellement très avancé dans le cas deux-dimensionnel, reste obscur pour les dimensions supérieures. Le cas deux-dimensionnel illustre bien le coeur des questions abordées dans cet article. Rappelons d'abord quelques définitions principales; pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux survols [3] , [4] , [12] , voir aussi les livres [5] et [13]. Pour une variété riemannienne fermée non simplement connexe $(M, g)$ de dimension $m$, désignons par $\mathrm{sys}(M, g)$ la plus petite longueur d'une ligne géodesique fermée non contractile sur $M$. Cette valeur est appelée *la systole* ou *1-systole* de $M$ respectivement à la métrique $g$. La principale direction de recherche en géométrie et en topologie des systoles unidimensionnelles consiste à étudier l'invariant numérique suivant de $M$ :

$$\sigma(M) = \inf_g \frac{\mathrm{Vol}(M, g)}{\mathrm{sys}(M, g)^m}, \tag{1.1}$$

où $g$ parcourt l'ensemble des métriques riemanniennes lisses sur $M$. Le nombre (1.1) est appelé *constante systolique* de $M$. On sait actuellement que le sous-ensemble des variétés dont la constante systolique est strictement positive est important. Il contient par exemple toutes les surfaces sauf la sphère $S^2$. Plus généralement, il contient toutes les variétés asphériques (non-simplement connexes). Une condition topologique suffisante sur $M$ pour assurer la stricte positivité de $\sigma(M)$ a été trouvée par Gromov : $M$ doit être *essentielle.* Comme nous n'utilisons pas ce concept dans la suite, nous renvoyons le lecteur vers [11] pour une définition précise et un énoncé du théorème. La valeur exacte de $\sigma(M)$ n'est actuellement connue que dans les trois cas suivants :

1. le tore $T^2$ (Loewner, voir [3]) : $\sigma(T^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 53C20,53C23.
*Key words and phrases.* constante systolique, graphe, revêtement cyclique, somme connexe.

2. le plan projectif $\mathbf{R}P^2$ ([15]) : $\sigma(\mathbf{R}P^2) = \frac{2}{\pi}$

3. la bouteille de Klein $K^2$ ([2]) : $\sigma(K^2) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

Soit $M_\pm(h)$ une surface de genre $h > 1$ où le signe $\pm$ désigne le cas orientable ou non orientable. La constante systolique

$$\sigma_\pm(h) = \sigma(M_\pm(h))$$

est strictement positive mais la distribution des valeurs de cette fonction n'est pas encore bien étudiée. On connait le comportement de cette fonction à l'infini (Gromov [11], [12]; Buser, Sarnak [9])

$$c\frac{h}{(\ln h)^2} \leq \sigma_\pm(h) \leq C\frac{h}{(\ln h)^2} \tag{1.2}$$

où $c$ et $C$ sont deux constantes théoriques dont les valeurs ne sont pas optimales. Nous pouvons voir les surfaces de grand genre comme des sommes connexes d'une même variété :

$$M_+(h) = \mathop{\#}_{i=1}^{h} T_i^2 \quad \text{et} \quad M_-(h) = \mathop{\#}_{i=1}^{h} \mathbf{R}P_i^2.$$

Le comportement (1.2) s'interprète maintenant comme celui d'une fonction du nombre de copies dans la somme connexe correspondante. Remarquons que le comportement (1.2) est intéressant puisqu'il établit une croissance en $h$ un peu moins rapide que la croissance lineaire à laquelle on peut s'attendre en faisant la somme connexe de $h$ exemplaires du tore $T^2$ dans le cas orientable ou du plan projectif $\mathbf{R}P^2$ dans le cas contraire. Ce point de vue nous amène à la première question abordée dans cet article.

**Question 1.** *Soit $M$ une variété fermée de dimension $m \geq 3$. On considère la somme connexe*

$$\#_n M = \mathop{\#}_{i=1}^{n} M_i \tag{1.3}$$

*de $n$ copies de $M$. Comment se comporte $\sigma(\#_n M)$ en fonction de $n$ ?*

On suppose évidemment $M$ essentielle pour que cette question soit non vide. Si $M$ est orientable, les choix d'orientation pour les différents termes de la somme connexe ne jouent pas de rôle fondamental. Pour être précis, nous supposerons que les termes sont orientés de manière cohérente. La somme connexe est une opération topologique fondamentale en topologie des variétés, et la question 1 est donc tout à fait naturelle. Posée il y a déjà plusieurs années (voir par exemple [12]), elle représente un problème non-trivial. Il est même difficile de conjecturer l'éventuel comportement de $\sigma(\#_n M)$ dans le cas général, et le lecteur pourra trouver dans [12] différents exemples de comportements envisageables. Il n'est pas évident de savoir si (1.2) est la manifestation d'une règle générale ou bien si c'est un phénomène deux-dimensionnel. Un des principaux buts de cet article est le résultat suivant.

**Théorème A** *Soient $M$ une variété fermée de dimension $m \geq 3$. Alors il existe une constante $C(M)$ telle que pour tout $n \geq 3$ , l'inégalité suivante soit vérifiée :*

$$\sigma(\#_n M) \leq C(M)\frac{n\sqrt{\ln\ln n}}{\sqrt{\ln n}}.$$

Soient $M_1$ et $M_2$ deux variétés de même dimension $m \geq 3$. Dans la somme connexe $M_1 \# M_2$, on contracte la sphère de recollement dans un point : on obtient ainsi la projection naturelle

$$M_1 \# M_2 \longrightarrow M_1 \bigvee M_2$$

qui induit un isomorphisme des groupes fondamentaux. Nous en déduisons l'inégalité suivante :

$$\sigma(M_1 \# M_2) \leq \sigma(M_1) + \sigma(M_2).$$

Ceci implique que quelle que soit la variété $M$, la fonction $\sigma(\#_n M)$ est semi-additive en $n$, et par conséquent que la limite

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\sigma(\#_n M)}{n}$$

existe. Le cas deux-dimensionnel est couvert par (1.2), et donc du théorème **A**, nous obtenons immédiatement :

**Corollaire A1** *Pour toute variété fermée $M$, on a :*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\sigma(\#_n M)}{n} = 0.$$

Le théorème **A** montre une différence importante entre la constante systolique et l'*entropie volumique minimale* (*volume asymptotique*) d'une variété. On sait (cf [14]) que pour une variété $m$-dimensionnelle $M$, l'entropie volumique minimale $Ent(M)^m$ est estimée inférieurement par le volume simplicial de $M$. Ce dernier est linéaire par rapport à la somme connexe ([14]). On constate donc que le phénomène du corollaire **A2** n'est jamais vérifié pour $Ent(\#_n M)^m$, où $M$ est une variété hyperbolique.

Soient $M$ une variété, $\pi = \pi_1(M)$ son groupe fondamental et $f : M \longrightarrow K(\pi, 1)$ l'application canonique, où $K(\pi, 1)$ désigne le complexe d'Eilenberg-Maclane. Si $\mathbf{a} = f_*([M])$ est une classe homologique d'ordre infini dans $H_m(\pi, \mathbf{Z})$, alors, comme il a été démontré dans [1], $\sigma(M)$ ne dépend que de cette classe. On note cette constante systolique $\sigma(\mathbf{a})$.

**Corollaire A2** *On suppose ici $m \geq 4$. Soit $\mathbf{a} \in H_m(\pi, \mathbf{Z})$ une classe homologique d'ordre infini représentable par une variété. Alors il existe une constante $C_1 = C_1(\mathbf{a})$ telle que pour tout $n \geq 3$, on ait l'inégalité suivante :*

$$\sigma(n\mathbf{a}) \leq C_1 \frac{n\sqrt{\ln \ln n}}{\sqrt{\ln n}}.$$

On suppose évidemment que **a** est représentable par une variété, sinon, d'après Thom (cf [17]), on remplace **a** par un multiple convenable.

La somme connexe représente un moyen naturel de fabriquer une suite de variétés en partant d'une variété donnée. Un autre moyen de fabrication d'une telle suite est le passage au revêtement cyclique. Soit $M$ une variété dont le premier nombre de Betti $b_1(M)$ est non nul. On choisit une classe non-triviale $\mathbf{h} \in H^1(M, \mathbb{Z})$, et on considère le revêtement cyclique à $n$ feuilles $M_{\mathbf{h}}(n)$ correspondant à la classe **h**. La suite de variétés obtenue $\{M_{\mathbf{h}}(n); \quad n = 1, 2, ...\}$ nous conduit à la seconde question abordée dans cet article (voir également [12] à ce sujet).

**Question 2.** *Comment se comporte $\sigma(M_{\mathbf{h}}(n))$ en fonction de $n$ ?*

Dans le cas des variétés orientables deux-dimensionnelles, cette question se réduit à la question 1, le cas non-orientable en différant légèrement. Dans les dimensions supérieures, la différence entre ces deux questions est plus marquée. Dans la partie 4, nous avons indiqué quelques exemples montrant que le comportement de $\sigma(M_{\mathbf{h}}(n))$ peut varier considérablement. Cependant, notre méthode nous permet d'établir une borne supérieure pour $\sigma(M_{\mathbf{h}}(n))$ analogue à celle du théorème **A**.

**Théorème B** *Soient $M$ une variété fermée de dimension $m \geq 3$ et $\mathbf{h} \in H^1(M, \mathbb{Z})$ une classe non-triviale. Il existe une constante $C(M, \mathbf{h})$ dépendant de $\mathbf{h}$ et de la topologie de $M$ tels que pour tout $n \geq 3$, on ait l'inégalité suivante :*

$$\sigma(M_{\mathbf{h}}(n)) \leq C(M, \mathbf{h}) \frac{n\sqrt{\ln \ln n}}{\sqrt{\ln n}}.$$

Compte-tenu des résultats obtenus et du cas des surfaces, nous pouvons formuler deux conjectures sur les fonctions $\sigma(\#_n M)$ et $\sigma(M_{\mathbf{h}}(n))$ :

**Conjecture 1.** *Pour toute variété fermée essentielle de dimension $m$, on a*

$$\sigma(\#_n M) \sim \frac{n}{(\ln n)^m}.$$

**Conjecture 2.** *Pour toute variété fermée essentielle de dimension $m$ et pour une classe $\mathbf{h} \in H^1(M, \mathbb{Z})$ non nulle, on a*

$$\sigma(M_{\mathbf{h}}(n)) \lesssim \frac{n}{(\ln n)^m}, \quad n \gg 1.$$

Les graphes sont les complexes simpliciaux les plus simples possible, et le problème systolique est clairement posé pour eux dans le cadre métrique comme dans le cadre combinatoire. Etudié depuis déjà plusieurs années, il représente un problème difficile. En théorie des graphes, il a été plutôt étudié du point de vue combinatoire, et à la place du terme "systole", on utilise dans ce domaine le terme "*girth*". Les premiers résultats dans cette direction sont attribués à Erdös et Sachs [10]. Nos démonstrations s'appuient sur une construction de graphes "systoliquement économiques" dûe à ces derniers, qui fournit une bonne estimée supérieure du comportement de la constante systolique en fonction du nombre de Betti de ce graphe. Cette construction, bien que non explicite, convient parfaitement à nos besoins. Pour une meilleure orientation du lecteur sur le sujet, la seconde section est consacrée aux théorèmes utilisés et à quelques références clefs.

La troisième section est consacrée à la démonstration du théorème **A**. Pour une somme connexe d'un grand nombre de copies d'une variété donnée, nous construisons une métrique spéciale adaptée à cette somme. Ceci nous permet d'estimer supérieurement la constante systolique pour un très grand nombre de copies dans la somme connexe. Dans notre construction métrique, la somme connexe ressemble à une éponge très poreuse, le graphe systoliquement économique jouant le rôle d'une ossature pour cette somme. Dans la quatrième section, pour un revêtement cyclique d'un grande nombre de feuilles, nous utilisons à nouveau la construction de graphes d'Erdös et Sachs. On peut choisir ces graphes de sorte qu'ils possèdent une très longue chaîne passant en chacun des sommêts du graphe (circuit *hamiltonien*), à laquelle on recolle un certain nombre d'arêtes supplémentaires (voir [10]). Dans notre construction, la chaîne de base correspond au revêtement et les arêtes supplémentaires à des anses ajoutées à celui-ci. Ces anses supplémentaires apparaissent pour des raisons techniques et jouent un rôle important. En effet, nous démontrerons dans la suite que le recollement d'anses d'indice 1 ne modifie pas la constante systolique.

## 2. Problème systolique sur les graphes :

2.1. **Estimée inférieure en fonction du premier nombre de Betti :** Rappelons quelques définitions standards au sujet des graphes, et pour de plus amples détails, le lecteur pourra se reporter au livre [7]. Un *graphe fini* $G = (V, E)$ est un complexe simplicial fini de dimension 1. C'est la donnée d'une paire d'ensembles finis $\{V, E\}$, où $V$ désigne les *sommets* et $E \subset V \times V$ les *arêtes* du graphe. Tous les graphes considérés ici sont des *multigraphes*, i.e. des graphes finis dans lesquels on autorise les boucles et les arêtes multiples. Les graphes seront également supposés connexes.

Une arête $a$ est *incidente* à un sommet $s$ s'il existe $t \in V$ tel que $a = (s, t)$. Le *degré* d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet. Le graphe est dit *$k$-régulier* si le degré de ses sommets est constant égal à $k$. Deux arêtes sont dites *adjacentes* si elles sont incidentes à un même sommet.

Un *chemin* de $V$ est une suite $a_1, ..., a_p$ d'arêtes adjacentes de $G$. Le chemin est dit *fermé* ou *cycle* si $a_1$ et $a_p$ sont elles-mêmes adjacentes ; le cycle est dit *simple* si parmi les arêtes composant le cycle, les seules arêtes adjacentes à une arête donnée sont celle qui la précède et celle qui lui succède dans le cycle. On note $[a_1, \ldots, a_p]$ ce cycle et on le considère comme un sous-graphe de $G$.

Suivant [8], nous nous plaçons dans le cadre des *multigraphes pondérés*. Un *graphe pondéré* est une paire $(G, w)$ où $G = (V, E)$ est un graphe et $w$ est une *fonction poids* sur les arêtes $w : E \to \mathbb{R}_+$. On appelle $w(e)$ le *poids* d'une arête ou d'un lacet. Le *poids* d'un sous-graphe est la somme des poids de ses arêtes. Le poids du graphe pondéré $(G, w)$ est appelé *volume* et est noté $\mathrm{Vol}(G, w)$. Tout graphe est naturellement identifié à un graphe pondéré dans lequel le poids de chaque arête vaut 1. Soit $(G, w)$ un graphe pondéré de premier nombre de Betti $b_1(G)$ non nul. On appelle *systole* de $(G, w)$ et on note $\mathrm{sys}(G, w)$ le minimum des poids d'un cycle de $G$ (en théorie des graphes, on utilise le terme de *girth*). On pose pour $r \geq 1$,

$$\sigma(r) = \inf\{\frac{\mathrm{Vol}(G, w)}{\mathrm{sys}(G, w)} : (G, w) \text{ tel que } b_1(G) = r\}. \tag{2.1}$$

Dans [8], les auteurs font plusieurs constats. Tout d'abord, on voit facilement que l'on peut se restreindre à l'étude des graphes connexes de degré minimal 3 (le degré de chacun des sommets est au moins 3) pour $r \geq 2$ et un argument de compacité montre que pour $r \geq 1$, il existe un graphe pondéré de volume 1 et de premier nombre de Betti $r$ qui réalise $\sigma(r)$. On peut même choisir comme rationnels les poids des arêtes de ce graphe. Les auteurs établissent ensuite le résultat suivant :

**Théorème 1.** *La fonction $\sigma(r)$ est strictement décroissante en $r$ et vérifie pour $r \geq 3$ l'estimée inférieure*

$$\sigma(r) \geq \frac{3}{2} \frac{r - 1}{\log_2(r - 1) + \log_2 \log_2(r - 1) + 4},$$

*où $\log_2$ désigne le logarithme en base 2.*

Remarquons que cela nous fournit le comportement asymptotique suivant :

$$\sigma(r) \geq \frac{3\ln 2}{2}\frac{r}{\ln r} + o\left(\frac{r}{\ln r}\right). \tag{2.2}$$

2.2. **Estimée supérieure en fonction du premier nombre de Betti :** On s'intéresse maintenant à la recherche de graphes extrémaux, i.e. à l'obtention d'une estimée supérieure de $\sigma(r)$. On travaille désormais avec des graphes *simples*, i.e. ne possédant ni boucles, ni arêtes multiples. Dans [10], le résultat suivant a été démontré :

**Théorème 2.** *Soient $d \geq 2$, $l \geq 4$ et posons*

$$N(d,l) = 2\sum_{t=1}^{l-2}(d-1)^t. \tag{2.3}$$

*Alors pour $n \geq N(d,l)$, il existe un graphe $d$-régulier $\Gamma$ à $2n$ sommets tel que $sys(\Gamma) \geq l$ (pour la fonction poids constante égale à $1$). De plus, on peut choisir ce graphe de sorte qu'il possède un cycle hamiltonien, i.e. un chemin fermé simple passant en chacun de ses sommets.*

On a donc la majoration suivante (comparer avec (2.2))

**Corollaire 1.** *Pour $r \geq 2$,*

$$\sigma(r) \leq 8\ln 2\frac{r}{\ln r}. \tag{2.4}$$

**Démonstration.** *Soit $\Gamma(2;r)$ le graphe à deux sommets et $r+1$ arêtes entre ces deux sommets. On a*

$$b_1(\Gamma(2;r)) = r, \quad Vol(\Gamma(2;r)) = r+1 \quad et \quad sys(\Gamma(2;r)) = 2.$$

*L'inégalité (2.4) est donc vérifiée avec $\Gamma(2;r)$ pour $r \leq 16$. Supposons maintenant $r \geq 16$. Pour $l \geq 4$, notons $\Gamma(l)$ un graphe 3-régulier à $2^{l+1}-2$ sommets vérifiant le théorème 2 pour $d=3$ et ce $l$. On calcule facilement*

$$b_1(\Gamma(l)) = 2^l, \quad Vol(\Gamma(l)) = 3\cdot 2^l - 3 \quad et \quad sys(\Gamma(l)) \geq l.$$

*On déduit de là l'inégalité suivante :*

$$\sigma(\Gamma(l)) \leq 3\ln 2\frac{r}{\ln r}.$$

*Soit $r$ un entier naturel vérifiant $2^l < r < 2^{l+1}$ où $l \geq 4$, et posons $r_1 = r - 2^l$. On peut ôter $2^l - r_1$ arêtes à $\Gamma(l)$, et ainsi obtenir un nouveau graphe $\Gamma(l;r_1)$ de premier nombre de Betti $b_1(\Gamma(l;r_1)) = r_1$ . Cette opération diminue le volume mais ne diminue pas la systole. Ensuite on considère le bouquet de deux graphes*

$$\Gamma(r) = \Gamma(l)\bigvee\Gamma(l;r_1).$$

*$\Gamma(r)$ vérifie les propriétés suivantes :*

$$b_1(\Gamma(r)) = b_1(\Gamma(l)) + b_1(\Gamma(l;r_1)) = 2^l + r_1 = r,$$
$$Vol(\Gamma(r)) = Vol(\Gamma(l)) + Vol(\Gamma(l;r_1)) \leq 2(3\cdot 2^l - 3),$$
$$et \quad sys(\Gamma(r)) \geq l.$$

*On tire de ces estimées*

$$\sigma(\Gamma(r)) \leq \frac{6(2^l-1)}{l} \leq 6\ln 2\frac{r}{\ln r - \ln 2}.$$

*La dernière borne supérieure est inférieure à celle du théorème pour* $r > 16$*, ce qui achève la démonstration.*

Remarquons que les estimées (2.2) et (2.4) fournissent le comportement aymptotique de $\sigma(r)$. Il existe d'autres constructions de graphes extrémaux pour des $r$ aussi grand que l'on veut, plus optimales que celle d'Erdös et Sachs mais n'atteignant pas la borne inférieure. Pour la démonstration des théorèmes **A** et **B**, ces constructions n'apportent pas d'amélioration et le lecteur intéressé pourra trouver dans [6] les références nécessaires.

## 3. Sommes connexes :

3.1. **Préliminaires topologiques:** Pour cette section, soit $M^m$ une variété fermée de dimension $m \geq 3$. Nous étudions le comportement asymptotique de $\sigma(\#_n M)$ en fonction de $n$. Nous utiliserons de manière décisive le résultat technique suivant :

**Proposition 1.** *Soit $M$ une variété de dimension $m \geq 3$. Alors*

$$\sigma(M\#(S^1 \times S^{m-1})) = \sigma(M). \tag{3.1}$$

Le contenu topologique de notre construction est le suivant. On prend $2n$ exemplaires de $M$ dont on a ôté au préalable $D$ disques $m$-dimension-nels disjoints. On recolle deux exemplaires entre eux le long de la frontière d'un disque : nous obtenons ainsi la somme connexe de deux exemplaires percée de $2D-2$ trous. On répète l'opération en recollant l'un après l'autre les exemplaires à la somme connexe formée à l'étape précédente jusqu'à obtenir la somme connexe de $2n$ exemplaires de $M$ percée de $2n(D-2)+2$ trous. Recollons maintenant deux par deux les frontières de ces trous : on forme ainsi $n(D-2)+1$ anses sur la somme connexe et l'égalité (3.1) implique que la variété ainsi obtenue possède la même constante systolique que la somme connexe elle-même.

Pour estimer supérieurement cette constante, nous allons donc construi-re une métrique sur la variété $M$ percée de $D$ trous et fixer les anses selon un arrangement particulier.

La suite de cette sous-section est consacrée à la démonstration de la proposition 1.

**Démonstration.** *1) Démontrons l'inégalité*

$$\sigma(M\#(S^1 \times S^{m-1})) \leq \sigma(M). \tag{3.2}$$

*Soit $g$ une métrique sur $M$ et $\varepsilon > 0$. Fixons une géodésique systolique de $(M, g)$ (géodésique dont la longueur réalise la systole) et choisissons deux points $p_1$ et $p_2$ de $M$ ne se trouvant pas sur celle-ci. On peut modifier la métrique $g$ dans deux voisinages $U_i$ de $p_i$ disjoints entre eux et de la géodésique systolique choisie, de sorte que la nouvelle métrique $g'$ vérifie les propriétés suivantes :*
*a) $g \leq g'$ ;*
*b) $g'$ est plate dans un voisinage $V_i$ de $p_i$ contenu dans $U_i$ pour $i = 1, 2$;*
*c) $Vol(M, g') \leq Vol(M, g) + \frac{\varepsilon}{2}$.*
*Le choix des $p_i$ et a) impliquent que*

$$sys(M, g') = sys(M, g) = s.$$

*On choisit $r > 0$ de manière à vérifier l'inégalité*

$$\nu_{m-1} r^{m-1}(s+1) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

*et tel que les disques $g'$-géodésiques de rayon $r$ centrés en les $p_i$ soient contenus dans $V_i$ pour $i = 1, 2$. Ici, $\nu_k$ désigne le volume de la sphère euclidienne $k$-dimensionnelle de rayon 1. On ôte ces deux disques de rayon $r$ de $M$, et on y attache un cylindre euclidien $Z = S^{m-1} \times [0, s]$ de même rayon $r$ et de hauteur $s$ en identifiant ces deux trous au bord du cylindre.*

*Ce procédé nous amène à une métrique spéciale $g_1$, lisse par morceaux, sur $M\#(S^1 \times S^{m-1})$. Le choix de $r$ et c) nous assurent l'inégalité*

$$Vol(M\#(S^1 \times S^{m-1}), g_1) \leq Vol(M, g) + \varepsilon. \tag{3.3}$$

*On considère une courbe fermée non-contractile $\gamma$ sur $M\#(S^1 \times S^{m-1})$. Si $\gamma$ intersecte chaque composante connexe du bord de $Z$, sa $g_1$-longueur vérifie $l_{g_1}(\gamma) \geq s$ par construction. Si elle n'intersecte qu'une seule composante connexe du bord de $Z$, on peut projeter la partie $\gamma \cap Z$ le long des génératrices de $Z$ sur $M$, et cette projection diminue les distances. La nouvelle courbe est non-contractile dans $M$, et alors $l_{g_1}(\gamma) \geq s$. Si $\gamma$ n'intersecte pas $Z$, cette dernière inégalité est évidemment vérifiée. On obtient donc*

$$sys(M\#(S^1 \times S^{m-1}), g_1) \geq s.$$

*Ceci avec (3.3) nous amène à*

$$\frac{Vol(M\#(S^1 \times S^{m-1}), g_1)}{sys(M\#(S^1 \times S^{m-1}), g_1)^m} \leq \frac{Vol(M, g) + \varepsilon}{sys(M, g)^m}.$$

*Cette inégalité étant valable pour toute métrique $g$ sur $M$ et pour tout $\varepsilon > 0$, ceci implique (3.2).*
*2) Démontrons maintenant l'inégalité réciproque*

$$\sigma(M\#(S^1 \times S^{m-1})) \geq \sigma(M). \tag{3.4}$$

*On munit $M\#(S^1 \times S^{m-1})$ d'une métrique quelconque $g$. On peut supposer que la sphère de recollement $S = S^{m-1}$ de $M\#(S^1 \times S^{m-1})$ n'intersecte pas chaque fibre $S^1$ de l'anse $S^1 \times S^{m-1}$ et on se fixe une telle fibre $F = S^1 \subset M\#(S^1 \times S^{m-1})$. Sa longueur $f = l_g(F)$ est supérieure à $s = sys(M\#(S^1 \times S^{m-1}), g)$. On attache à $M\#(S^1 \times S^{m-1})$ un chapeau demi-sphérique euclidien $C$ deux-dimensionnel de rayon $\frac{f}{2\pi}$ le long de la courbe $F$. Notons*

$$K = M\#(S^1 \times S^{m-1}) \bigcup_F C$$

*le complexe ainsi obtenu. Il possède une triangulation lisse $\theta$, de sorte que $F$, $S$ et $C$ en soient des sous-complexes. La métrique $g$ et celle de $C$ définissent une métrique $g'$ sur $K$, qui est simpliciale (voir* [1]*) respectivement à $\theta$. Pour des raisons de dimension,*

$$Vol(K, g') = Vol(M\#(S^1 \times S^{m-1}), g). \tag{3.5}$$

*L'inclusion naturelle*

$$(M \setminus B^m) \subset M\#(S^1 \times S^{m-1}) \subset K$$

*se prolonge en une application $h : M \longrightarrow K$ et on peut choisir cette application simpliciale et monotone sur les simplexes de dimension supérieure (voir* [1]*) . La fonction $h$ induit alors un isomorphisme des groupes fondamentaux. Par le principe de comparaison* [1]*, on a*

$$\sigma(M) \leq \sigma(K),$$

*et pour établir (3.4) sachant (3.5), il nous reste à démontrer que*

$$sys(K, g') \geq s.$$

*Considérons une courbe fermée $\gamma$ (lisse par moceaux), non-contractile dans $K$. Si $\gamma$ est contenue dans $M\#(S^1 \times S^{m-1}) \subset K$, elle est non-contractile dans ce sous-ensemble et alors $l_{g'}(\gamma) = l_g(\gamma) \geq s$.*

*Supposons que $\gamma$ intersecte l'intérieur du chapeau $C$. Si $\gamma(t_i)$ et $\gamma(t_{i+1})$ désignent deux points successifs (le long de $\gamma$) d'intersection avec $F = \partial C$,*

*nous remplaçons l'arc $\{\gamma(t);\ t_i \leq t \leq t_{i+1}\}$ par l'arc de plus petite longueur de $F$ qui joint $\gamma(t_i)$ à $\gamma(t_{i+1})$. Cette opération modifie $\gamma$ sans modifier sa classe d'homotopie et ne peut que diminuer sa longueur (de part la structure de $g'$ sur $C$). En faisant cette opération un nombre nécessaire de fois, nous obtenons une courbe $\gamma'$, homotope à $\gamma$, de longueur inférieure à celle de $\gamma$ contenue dans $M\#(S^1 \times S^{m-1}) \subset K$. Les arguments du paragraphe précédent impliquent donc $l_{g'}(\gamma) \geq l_{g'}(\gamma') = l_g(\gamma') \geq s$. Ceci achève la démonstration.*

3.2. **Préparatifs métriques :** Rappelons que $m \geq 3$. Soit $\Theta$ une partition de $M$ en cubes m-dimen-sionnels, de sorte que deux cubes s'intersectent toujours par une face de dimension inférieure. Pour une telle partition, les faces $(m-1)$-dimensionnelles sont communes à deux $m$-cubes exactement. Une telle partition existe : on peut la construire par exemple à partir d'une triangulation de $M$ en décomposant chaque $m$-simplexe en $m+1$ cubes. On choisit $\Theta$ avec un nombre minimal d'éléments que l'on notera $c(M)$.

On munit chaque cube $m$-dimensionnel de la métrique plate euclidienne, de sorte que ses arêtes soient de longueur 1. Cela définit une métrique polyhédrale que nous notons $g_0$ (voir [1]). Immédiatement,

$$\mathrm{Vol}(M, g_0) = c(M).$$

Posons $l_0 = \mathrm{sys}(M, g_0)$. On a :

**Lemme 1.**

$$l_0 \geq 2.$$

**Démonstration.** *Considérons une courbe qui réalise la systole de $M$ pour $g_0$. Remarquons que la courbe est linéaire par morceaux. Quitte à la translater, on peut supposer qu'elle intersecte une face (m-2)-dimension-nelle. Si on considère le voisinage simplicial (voir* [16]*) de cette face, la systole doit intersecter le bord de ce voisinage en deux points au moins. Ceci démontre le lemme.*

Soit un entier naturel $k > 2(2+[\sqrt{m-1}/2])$ et fixons un m-cube $\mathcal{C}^m$ de $\Theta$. Nous subdivisons de manière évidente $\mathcal{C}^m$ en $k^m$ cubes réguliers de taille $1/k$ et on note $\mathcal{F}(\mathcal{C}^m, k)$ la famille de cubes ainsi obtenue. Considérons la sous-famille suivante

$$\mathcal{G}(\mathcal{C}^m, k) = \{C \in \mathcal{F}(\mathcal{C}^m, k); d(C, \partial\mathcal{C}^m) \geq \frac{2+[\sqrt{m-1}/2]}{k}\}$$

de cardinal $(k - 2(2+[\sqrt{m-1}/2]))^m$.

3.3. **Fabrication d'une écumoire :** On perce maintenant dans chaque cube $C$ de $\mathcal{G}(\mathcal{C}^m, k)$ le petit cube (ouvert) $C' = \{x \in C; d(x, \partial C) > 1/(2k^2)\}$ de taille $(k-1)/k^2$ centré en le barycentre de $C$. L'ensemble $\mathcal{C}^m(k) = \mathcal{C}^m \setminus \{C'; C \in \mathcal{G}(\mathcal{C}^m, k)\}$ est le cube initial $\mathcal{C}^m$ auquel on a ôté $(k-2(2+[\sqrt{m-1}/2]))^m$ cubes identiques disjoints.

**Lemme 2.**

$$Vol(\mathcal{C}^m(k)) \leq \frac{4m^{3/2}}{k}. \tag{3.6}$$

**Démonstration.** *En étudiant le volume de* $\cup\{C'; C \in \mathcal{G}(\mathcal{C}^m, k)\}$ *et le volume de* $\mathcal{C}^m \setminus \{C \in \mathcal{G}(\mathcal{C}^m, k)\}$ *séparément, on obtient*

$$\begin{aligned} Vol(\mathcal{C}^m(k)) &\leq 1 - (1 - \frac{2(2 + [\sqrt{m-1}/2])}{k})^m \\ &\quad + \frac{(k - 2(2 + [\sqrt{m-1}/2]))^m}{k^m}(1 - (1 - \frac{1}{k})^m) \\ &\leq \frac{m(4 + \sqrt{m-1})}{k} + \frac{m}{k} \\ &\leq \frac{m(4\sqrt{m})}{k}. \end{aligned}$$

Définissons la $k$-*écumoire* de la variété $(M, g_0)$ en posant

$$M(k) = \bigcup_{\mathcal{C}^m \in \Theta} \mathcal{C}^m(k), \tag{3.7}$$

munie de la métrique $\overline{g}_0$ induite par $g_0$. De (3.6) et de (3.7), on déduit

$$\mathrm{Vol}(M(k), \overline{g}_0) \leq \frac{4m^{3/2}}{k} c(M). \tag{3.8}$$

$M$ et $k$ étant fixés, on note

$$D = (k - 2(2 + [\sqrt{m-1}/2]))^m c(M).$$

$M(k)$ est la pl-variété à bord obtenue en ôtant $D$ disques m-dimensionnels à $M$.

Définissons le graphe suivant :

$$\mathcal{A}_D = \{\{s_0, ..., s_D\}; \{(s_0, s_i), 1 \leq i \leq D\}\}. \tag{3.9}$$

Chaque élément de $\bigcup_{\mathcal{C}^m \in \Theta} \mathcal{G}(\mathcal{C}^m, k)$ est indexé comme $C_1, ..., C_D$.

On note $\overline{C}_i = C_i \cap M(k)$ pour $i$ variant de 1 à $D$. Définissons alors l'application $f : M(k) \to \mathcal{A}_D$ par les formules :

$$f(x) = \begin{cases} s_0 \text{ si } x \notin \bigcup_{i=1}^{D} \overline{C}_i, \\ \\ 2k^2 d(x, \partial C_i) s_i + (1 - 2k^2 d(x, \partial C_i)) s_0 \text{ si } x \in \overline{C}_i. \end{cases} \tag{3.10}$$

On munit $\mathcal{A}_D$ de la métrique linéaire, où la longueur de chaque arête vaut $1/(2k^2)$. Quelque soit $x \in \overline{C}_i$, on a :

$$d(s_0, f(x)) = d(x, \partial C_i).$$

**Lemme 3.** $f : M(k) \to \mathcal{A}_D$ *contracte les distances.*

**Démonstration.** *Choisissons deux éléments $x$ et $y$ de $M(k)$.*

- *Si $f(x)$ et $f(y)$ appartiennent à deux arêtes différentes $(s_0, s_i)$ et $(s_0, s_j)$, alors*
$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= d(f(x), s_0) + d(s_0, f(y)) \\ &= d(x, \partial C_i) + d(y, \partial C_j) \\ &\leq d(x, y). \end{aligned}$$
- *Si $f(x)$ et $f(y)$ appartiennent à une même arête $(s_0, s_i)$, alors*
$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= |d(x, \partial C_i) - d(y, \partial C_i)| \\ &= d(x, \partial C_i) - d(y, \partial C_i) \text{ quitte à intervertir } x \text{ et } y \\ &\leq d(x, y) + d(y, \partial C_i) - d(y, \partial C_i) = d(x, y). \end{aligned}$$

3.4. **Construction d'une éponge :** Nous allons maintenant construire à partir d'un grand nombre d'écu-moires une *éponge*.

D'après le théorème 2 et comme $k > 1$, on peut choisir pour tout $n \geq N(D, k^2)$ un graphe $\Gamma$ à $2n$ sommets de valence $D$ tel que la longueur de la systole combinatoire soit plus grande que $k^2$. Construisons une nouvelle variété $M(2n, k)$ ainsi qu'une application $F : M(2n, k) \to \Gamma$. On considère tout d'abord la subdivision barycentrique $\overline{\Gamma}$ de $\Gamma$ : c'est un graphe, qui n'est plus $D$ régulier. On note $t_1, ..., t_{2n}$ les sommets de valence $D$ de $\overline{\Gamma}$, et $t_{ij}$ les barycentres de $(t_i, t_j)$, si $(t_i, t_j) \in \Gamma$ où $1 \leq i, j \leq 2n$.

En considérant $\overline{\Gamma}$ comme un complexe simplicial, on peut identifier
$$\mathcal{A}_{D,i} = \mathrm{st}(t_i); 1 \leq i \leq 2n,$$
où st désigne l'étoile d'un sommet. Chaque $\mathcal{A}_{D,i}$ est une copie de $\mathcal{A}_D$ (voir 3.9). Remarquons que $\mathcal{A}_{D,i} \cap \mathcal{A}_{D,j} \neq \emptyset$ si et seulement si $(t_i, t_j) \in \Gamma$, et alors $\mathcal{A}_{D,i} \cap \mathcal{A}_{D,j} = t_{ij}$.

On munit $\overline{\Gamma}$ de la métrique linéaire $h$, pour laquelle la longueur de chaque arête vaut $1/(2k^2)$. On a donc $\mathrm{sys}(\overline{\Gamma}, h) \geq 1$. Ce graphe se plonge alors naturellement au sens métrique dans le graphe $\Gamma$ muni de la métrique linéaire pour laquelle la longueur de chaque arête vaut $1/k^2$. Si on considère $2n$ copies $M_1(k), \ldots, M_{2n}(k)$ de $M(k)$, on peut définir par analogie avec (3.10), une application pour tout $i \in \{1, \ldots, 2n\}$
$$f_i : M_i(k) \to \mathcal{A}_{D,i}. \tag{3.11}$$
Soient $i, j \in \{1, \ldots, 2n\}$ tels que $\mathcal{A}_{D,i} \cap \mathcal{A}_{D,j} = t_{ij}$. Les images réciproques de ce point par $f_i$ et $f_j$ sont deux bords de cubes m-dimensionnels isométri-ques, que l'on recolle naturellement par une isométrie $\alpha_{ij}$.

Définissons alors la $(2n, k)$-*éponge*
$$M(2n, k) = \coprod_{i=1}^{2n} M_i(k)/\sim \tag{3.12}$$
où $\sim$ est donnée par l'identification selon les isométries $\alpha_{ij}$ définies pour $\mathcal{A}_{D,i} \cap \mathcal{A}_{D,j} = t_{ij}$. Remarquons que $M(2n, k)$ dépend du graphe $\Gamma$ choisi. On a facilement
$$M(2n, k) = \mathop{\#}_{i=1}^{2n} M_i \mathop{\#}_{j=1}^{n(D-2)+1} (S^1 \times S^{m-1})_j.$$

Rappelons ici que $D$ dépend de $M$ et de $k$. De (3.1), nous déduisons :
$$\sigma(M(2n, k)) = \sigma(\#_{2n} M). \tag{3.13}$$
$M(2n, k)$ est munie de la métrique $g_1$ coïncidant sur chaque $M_i(k)$ avec $\overline{g}_0$. On note $l_1 = \mathrm{sys}(M(2n, k), g_1)$. Pour cette métrique,
$$\mathrm{Vol}(M(2n, k), g_1) = 2n\mathrm{Vol}(M(k), \overline{g}_0). \tag{3.14}$$

**Proposition 2.** *L'application*

$$\begin{array}{rcl} F : M(2n,k) & \longrightarrow & \overline{\Gamma} \subset \Gamma \\ x & \longrightarrow & f_i(x) \text{ si } x \in M_i(k) \end{array}$$

*est bien définie et contracte les distances.*

**Démonstration.** *Si $i, j$ sont tels que $\mathcal{A}_{D,i} \cap \mathcal{A}_{D,j} = t_{ij}$, on a le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{array}{ccccccc} M_i(k) & \hookleftarrow & f_i^{-1}(t_{ij}) & \underset{\alpha_{i,j}}{\overset{\sim}{\rightarrow}} & f_j^{-1}(t_{ij}) & \hookrightarrow & M_j(k) \\ f_i \downarrow & & f_i \downarrow & & f_j \downarrow & & f_j \downarrow \\ \mathcal{A}_{D,i} & \hookleftarrow & \{t_{ij}\} & \overset{id}{\rightarrow} & \{t_{ij}\} & \hookrightarrow & \mathcal{A}_{D,j} \end{array}$$

*donc $F$ est bien définie.*

*Pour chaque paire $x, y \in M(2n,k)$, si $x, y \in M_i(k)$, l'application $f_i$ contracte les distances, comme démontré dans le lemme 3.*
*Si $x \in M_i(k)$ et $y \in M_j(k)$ avec $i \neq j$, $d_h(F(x), F(y)) = d_h(f_i(x), f_j(y))$.*
*Soit $\tau$ un chemin de $x$ à $y$, tel que $l_{g_1}(\tau) = d(x,y)$. Il existe $(i_2, \ldots, i_{s-1}) \in \{1, \ldots, 2n\}$ deux à deux distincts tel que $\tau$ se décompose en une concaténa-tion $\tau_1 \star \ldots \star \tau_s$ de chemins paramétrés sur l'intervalle $[0,1]$ avec $\tau_1 \subset M_i(k), \tau_2 \subset M_{i_2}(k), \ldots, \tau_{s-1} \subset M_{i_{s-1}}(k)$ et $\tau_s \subset M_j(k)$.*
*Alors*

$$\begin{array}{rcl} d_h(F(x), F(y)) & \leq & d_h(f_i(x), f_i(\tau_1(1))) + d_h(f_{i_2}(\tau_2(0)), f_{i_2}(\tau_2(1))) + \ldots \\ & & + d_h(f_{i_{s-1}}(\tau_{s-1}(0)), f_{i_{s-1}}(\tau_{s-1}(1))) + d_h(f_s(\tau_s(0)), f_s(y)) \\ & \leq & d_{g_1}(x, \tau_1(1)) + d_{g_1}(\tau_2(0), \tau_2(1)) + \ldots + d_{g_1}(\tau_s(0), y) \\ & \leq & l_{g_1}(\tau) = d(x,y), \end{array}$$

*ce qui achève la démonstration.*

**Proposition 3.** *Pour $n \geq N(D, k^2)$,*

$$\frac{\sigma(\#_{2n} M)}{2n} \leq \frac{4m^{3/2} c(M)}{k}. \tag{3.15}$$

**Démonstration.** *Soit $\gamma : S^1 \to M(2n,k)$ une courbe qui réalise la systole de $M(2n,k)$ pour la métrique $g_1$.*
*Si $F(\gamma)$ est une courbe non contractile de $\overline{\Gamma}$, on a :*

$$\begin{array}{rcl} l_1 = l_{g_1}(\gamma) & \geq & l_h(F(\gamma)) \\ & \geq & sys(\overline{\Gamma}, h) \\ & \geq & 1. \end{array}$$

*Supposons maintenant que $F(\gamma)$ est contractile.*

- *Si il existe $i \in \{1, ..., 2n\}$ tel que $\gamma \subset M_i(k)$, on a*

$$l_1 \geq l_0 \geq 2.$$

- *Supposons que $\gamma$ intersecte l'intérieur de plusieurs exemplaires de $M(k)$. On énumère les exemplaires $\{M_{i_1}(k), ..., M_{i_l}(k)\}$ pour lesquels $\gamma \cap int(M_{i_p}(k)) \neq \emptyset$ pour $p = 1, ..., l$ (où $int(A)$ désigne l'intérieur d'un sous-ensemble).*

  *Donc il existe $t_1, t_2 \in S^1$ tels que, pour un $i \in \{1, ..., 2n\}$ et un $j \in \{1, ..., D\}$, $\gamma(t_1)$ et $\gamma(t_2) \in \partial C'_{i,j}$ et $\gamma_{|]t_1,t_2[} \subset int(M_i(k))$, où $C'_{i,j}$ est le $j$-ème cube de taille $(k-1)/k^2$ que l'on a percé dans $M_i$.*
  *On introduit $\nu$ un arc géodésique minimisant de $\gamma(t_1)$ à $\gamma(t_2)$ dans $\partial C'_{i,j}$. On a :*
  $$l_g(\nu) \leq (2 + \sqrt{m-1})/k.$$
  *Si $\gamma_{|[t_1;t_2]}$ est un élément non trivial de $\pi_1(M_i(k), \partial C'_{i,j})$, la concaténa-- tion de $\gamma_{|[t_1;t_2]}$ avec $\nu$ nous fournit un élément non trivial de $\pi_1(M_i(k))$, d'où, comme $k > \sqrt{m-1} + 2$,*
  $$l_1 \geq l_0 - \frac{\sqrt{m-1}+2}{k} \geq 1.$$
  *Supposons maintenant que $\gamma_{|[t_1,t_2]}$ est trivial dans $\pi_1(M_i(k), \partial C'_{i,j})$. Si il existe $t_3 \in ]t_1; t_2[$ tel que $\gamma(t_3) \in \partial \mathcal{C}^m$ où $\mathcal{C}^m \in \Theta_i$ est le cube de taille 1 contenant $C'_{i,j}$,*
  $$\begin{aligned} l_{g_1}(\gamma_{|[t_1,t_2]}) &\geq d_{g_1}(\gamma(t_1), \partial\mathcal{C}^m) + d_{g_1}(\gamma(t_2), \partial\mathcal{C}^m) \\ &\geq 2(\frac{2 + [\sqrt{m-1}/2]}{k}) \\ &> \frac{\sqrt{m-1}+2}{k}. \end{aligned}$$
  *On peut alors remplacer $\gamma_{|[t_1;t_2]}$ par $\nu$ ce qui diminue la systole de $M(2n,k)$ : une contradiction.*
  *Si $\gamma_{|[t_1;t_2]} \subset \mathcal{C}^m$, on peut à nouveau diminuer la longueur de la systole par le même procédé. D'où une contradiction.*

*Donc*
$$l_1 = sys(M(2n,k), g_1) \geq 1.$$

*Cette estimée implique, avec (3.8) et (3.14),*
$$\frac{1}{2n}\frac{Vol(M(2n,k),g_1)}{sys(M(2n,k),g_1)^m} \leq \frac{4m^{3/2}c(M)}{k}.$$
*De (3.13), on déduit le résultat.*

3.5. **Obtention de l'estimée supérieure :** Notre but est maintenant d'estimer la constante systolique $\sigma(\#_n M)$ en fonction de $n$. D'après (2.3),
$$N(D,k^2) = 2\sum_{t=1}^{k^2-2}(D-1)^t,$$
avec $D = (k - 2(2 + [\sqrt{m-1}/2]))^m c(M)$. Prenons
$$(k^m c(M))^{k^2} \leq n \leq ((k+1)^m c(M))^{(k+1)^2}.$$

Pour $k$ suffisamment grand ($k \geq k_0$ où $k_0$ est un entier naturel), on a

$$\frac{\ln \ln 2n}{\ln 2n} \geq \frac{1}{4mk^2}.$$

Comme $n \geq N(D, k^2)$, l'estimée (3.15) est valable et on obtient pour tout $n \geq N_1(M) = ({k_0}^m c(M))^{k_0^2}$

$$\frac{\sigma(\#_{2n} M)}{2n} \leq 8m^2 c(M) \sqrt{\frac{\ln \ln 2n}{\ln 2n}}.$$

D'autre part, on a

$$\sigma(\#_{2n+1} M) \leq \sigma(\#_{2n} M) + \sigma(M).$$

Fixons $N_2(M)$ le premier entier naturel plus grand que $N_1(M)$ vérifiant pour tout $n \geq N_2(M)$

$$\sigma(M) \leq 16m^2 c(M) \frac{n\sqrt{\ln \ln 2n}}{\sqrt{\ln 2n}}.$$

Nous obtenons pour tout $n \geq N_2(M)$

$$\begin{aligned} \sigma(\#_{2n+1} M) &\leq 16m^2 c(M) \frac{n\sqrt{\ln \ln 2n}}{\sqrt{\ln 2n}} + \sigma(M) \\ &\leq (4m)^2 c(M) \frac{(2n+1)\sqrt{\ln \ln (2n+1)}}{\sqrt{\ln (2n+1)}}. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \geq N(M) = 2N_2(M)$,

$$\sigma(\#_n M) \leq (4m)^2 c(M) \frac{n\sqrt{\ln \ln n}}{\sqrt{\ln n}}.$$

On en déduit le théorème **A**.

3.6. **Démonstration des corollaires :** Le corollaire **A1** est immédiat. Démontrons le corollaire **A2**. Soient $\mathbf{a} \in H_m(\pi, \mathbf{Z})$ une classe d'ordre infinie et $M$ une variété qui représente $\mathbf{a}$. Cela signifie que $\pi_1(M) = \pi$ et que pour l'application classifiante $f : M \longrightarrow K(\pi, 1)$, $f_*([M]) = \mathbf{a}$. Remarquons alors que $M$ est nécessairement orientable. On considère la somme connexe $\#_n M$ et l'application naturelle $p : \#_n M \longrightarrow M$ de degré $n$. Pour l'application

$$f \circ p : \#_n M \longrightarrow K(\pi, 1),$$

on a $(f \circ p)_*([\#_n M]) = n\mathbf{a}$. D'autre part, d'après [1], nous avons

$$\sigma(n\mathbf{a}) = \sigma_{p_*}(\#_n M) \leq \sigma(\#_n M).$$

Ceci avec le théorème **A** implique le corollaire **A2**.

## 4. Revêtements cycliques :

Dans cette section, étant donnée une variété $M$ dont le premier nombre de Betti est non nul, nous allons étudier le comportement systolique asymptotique du revêtement cyclique à $k$ feuilles associé à une classe cohomologique de $H^1(M, \mathbb{Z})$.

4.1. **Position du problème :** Soit $M$ une variété lisse de dimension $m \geq 2$, telle que $b_1(M) > 0$. On choisit un élément $a \in H^1(M, \mathbb{Z})$ non trivial.

On note $M(a)$ le revêtement de $M$ correspondant au sous-groupe $G$ du groupe fondamental obtenu comme noyau de l'application suivante :

$$\pi_1(M) \stackrel{H}{\to} H_1(M, \mathbb{Z}) \stackrel{a}{\to} \mathbb{Z},$$

où $H$ désigne l'homomorphisme de Hurewitz.

$\mathbb{Z}$ agit librement sur cette variété, et donc, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on considère le revêtement cyclique à $k$ feuilles obtenu comme le quotient

$$M_k(a) = M(a)/k\mathbb{Z}.$$

On s'intéresse ici au comportement asymptotique de $\sigma(M_k(a))$. Les exemples suivants montrent que le comportement de $\sigma(M_k(a))$ en fonction de $k$ est bien plus irrégulier que celui de $\sigma(\#_k M)$. Il dépend fortement de la topologie de $M$. Cependant, une borne supérieure universelle en $k$ pour ce comportement existe.

4.2. **Exemples de comportement : Exemple 1.** Soient $X$ une variété de dimension $n \geq 3$ et $Y$ une variété de dimension $(n+1)$. Posons

$$M = (X \times S^1)\#Y.$$

Nous projettons naturellement la variété $M$ sur $S^1$ en contractant d'abord la variété $Y$ dans un point puis en projettant $X \times S^1$ sur $S^1$ par la projection sur le second facteur. Cette application nous définit une classe $h \in H^1(M, \mathbb{Z})$, et pour les revêtements correspondants, nous obtenons

$$M_k = (X \times S^1)\#_k Y,$$

d'où

$$\sigma(M_k) \leq \sigma(X \times S^1) + \sigma(\#_k Y).$$

De plus, si les variétés sont supposées orientables (voir [1]) ,

$$\sigma(\#_k Y) \leq \sigma(M_k),$$

ce qui fournit le comportement

$$\frac{\sigma(M_k)}{k} \sim \frac{\sigma(\#_k Y)}{k}.$$

Du théorème **A** nous obtenons l'estimée supérieure :

$$\frac{\sigma(M_k)}{k} \leq C\frac{\sqrt{\ln \ln k}}{\sqrt{\ln k}} + \frac{\sigma(X \times S^1)}{k} \lesssim \frac{\sqrt{\ln \ln k}}{\sqrt{\ln k}}.$$

**Exemple 2.** Soit $p : M \to S^1$ un fibré de fibre $N$. Il existe un difféomor-phisme $F$ de $N$ tel que

$$M = N \times I/F$$

où $I$ désigne le segment $[0, 1]$. On note $a = p^*(d\phi)$ où $d\phi$ est la 1-forme canonique de $S^1$. Si on définit, pour $k$ entier naturel, $M_k$ comme le revêtement cyclique à $k$ feuilles de $M$ correspondant à la classe $a$, on obtient :

$$M_k = N \times I/F^k.$$

Dans le cas où $F$ est un difféomorphisme périodique de période $l$, la suite $\{\sigma(M_k)\}_k$ est une suite périodique de période $l$.

En particulier, si $M = \mathbb{K}^2$ est la bouteille de Klein et $p$ sa projection naturelle sur le cercle,

$$M_k = \begin{cases} \mathbb{K}^2 \text{ si k est impair,} \\ \\ \mathbb{T}^2 \text{ si k est pair,} \end{cases}$$

et $\sigma(M_k)$ vaut alternativement $2\sqrt{2}/\pi$ et $\sqrt{3}/2$.

4.3. **Démonstration du théorème B :.** Dans cette démonstration, nous utilisons les mêmes idées et la même technique que pour la démonstration du théorème **A**. La plupart des étapes fonctionnent de manière similaire et, dans un souci de concision, seuls les détails spécifiques au théorème **B** sont précisés.

**Préparatifs métriques.** Etant donnée une classe $\mathbf{h} \in H^1(M, \mathbb{Z})$ que nous choisirons toujours indivisible, soit

$$f : M \quad \to \quad S^1$$

une application classifiante pour $h$. On peut supposer cette application lisse, et choisir un point $x_0$ régulier, ce qui nous fournit un cobordisme : la variété $M$ peut être identifiée au quotient d'une variété à bord $M'$, où $\partial M' = N_1 \cup N_2$ consiste en deux exemplaires de la sous-variété $f^{-1}(x_0) = N$, par l'application identité entre les deux composantes du bord. On note $q : M' \to M$ cette application. Il existe une partition $\Theta$ de $M$ par une famille de cubes $m$-dimensionnels, tels que toute face $(m-1)$-dimensionnelle soit l'intersection de deux cubes $m$-dimensionnels, et $N$ soit l'union de faces de dimension $m-1$. Cette partition fournit une partition $\Theta'$ de $M'$ en cubes $m$-dimensionnels par l'application $q$ . On choisit $f$, $x_0$ et $\Theta'$ de sorte que $\Theta'$ ait un nombre minimal de cubes que l'on note $c'(M, \mathbf{h})$. Munissons $M'$ de la pl-métrique $h_0$ construite de manière similaire à celle construite dans le paragraphe **3.2**. Cette métrique se projette en une métrique sur $M$ que l'on note $q_* h_0$. Notons $l'_0 = \text{ sys}(M, q_* h_0)$. Du lemme 1, on déduit aussitôt :

$$l'_0 \geq 2.$$

**Fabrication de l'écumoire.** Soit $k > 2(2 + [\sqrt{m-1}/2])$. Comme en (3.7), on considère la $k$-écumoire de cette variété à bord :

$$M(\mathbf{h}, k) = \underset{\mathcal{C}^m \in \Theta'}{\cup} \mathcal{C}^m(k),$$

munie de la pl-métrique $\overline{h_0}$ induite par $h_0$. L'image de $M(\mathbf{h}, k)$ par $q$ est la variété $M$ percée de $(k - 2(2 + [\sqrt{m-1}/2]))^m c'(M, \mathbf{h})$ trous isométriques.

Nous obtenons (voir (3.6) et (3.8)) :

$$\text{Vol}(M(\mathbf{h}, k), \overline{h_0}) \leq \frac{4m^{3/2}}{k} c'(M, \mathbf{h}).$$

Chaque élément de $\cup\{\mathcal{G}(\mathcal{C}^m, k) \mid \mathcal{C}^m \in \Theta'\}$ est indexé comme $C_1, \ldots, C_{D'}$, où $D' = (k - 2(m+1))^m c'(M, \mathbf{h})$, et posons $\overline{C}_i = C_i \cap M(\mathbf{h}, k)$.

Par analogie avec la formule (3.10) et ayant à l'esprit la définition (3.9), définissons l'application $\psi : M(\mathbf{h},k) \to \mathcal{A}_{D'+2}$ par les formules :

$$\psi(x) \quad = \quad \begin{cases} s_0 \text{ si } x \notin \cup \overline{C_i} \text{ et } d(x, \partial M(\mathbf{h},k)) > \frac{1}{2k^2}; \\ \\ 2k^2 d(x,\partial C_i)s_i + (1 - 2k^2 d(x,\partial C_i))s_0 \\ \qquad\qquad\qquad \text{si } x \in \overline{C}_i, 1 \leq i \leq D'; \\ \\ 2k^2 d(x,N_j)s_0 + (1-2k^2 d(x,N_j))s_{D'+j} \\ \qquad\qquad \text{si } d(x,N_j) \leq \frac{1}{2k^2} \text{ et } j = 1,2. \end{cases}$$

On munit $\mathcal{A}_{D'+2}$ de la métrique linéaire, où la longueur de chaque arête vaut $\frac{1}{2k^2}$. Par analogie avec le lemme 3, on obtient

**Lemme 4.** $\psi : M(\mathbf{h},k) \to \mathcal{A}_{D'+2}$ *contracte les distances.*

**Construction d'une éponge.** D'après le théorème 2, on peut choisir pour $n \geq N(D'+2,k^2)$ un graphe $\Gamma'$ à $2n$ sommets de valence $D'+2$ tel que la longueur de la systole soit minorée par $k^2$.

Nous allons construire une nouvelle variété $M(\mathbf{h},k;2n)$ à l'aide de $\Gamma'$ et de $M(\mathbf{h},k)$ de sorte que $\sigma(M(\mathbf{h},k;2n)) = \sigma(M_{\mathbf{h}}(2n))$.

On considère tout d'abord une subdivision barycentrique $\overline{\Gamma'}$ de $\Gamma'$. D'après le théorème 2, on peut noter $\{t_1,\ldots,t_{2n}\}$ les sommets de $\Gamma'$ de sorte qu'ils forment un chemin fermé simple $c$. On note, pour $1 \leq i,j \leq 2n$ tels que $(t_i,t_j) \in \Gamma'$, $t_{i,j}$ le barycentre de $(t_i,t_j)$.

Considérant $\overline{\Gamma'}$ comme un complexe simplicial, posons

$$\mathcal{A}_{D'+2,i} = \mathrm{st}(t_i),$$

pour $1 \leq i \leq 2n$. On munit $\overline{\Gamma'}$ de la métrique linéaire pour laquelle la longueur de chaque arête vaut $\frac{1}{2k^2}$.

Considérons $2n$ copies $M_1(\mathbf{h},k),\ldots,M_{2n}(\mathbf{h},k)$ de $M(\mathbf{h},k)$ et définissons par analogie avec (3.11) pour chaque $1 \leq i \leq 2n$

$$\psi_i : M_i(\mathbf{h},k) \to \mathcal{A}_{D+2,i},$$

de sorte que $\psi_i^{-1}(t_{i-1,i}) = N_{1,i}$ et $\psi_i^{-1}(t_{i,i+1}) = N_{2,i}$.

Soient $1 \leq i,j \leq 2n$ tels que $t_{i,j} \in \overline{\Gamma'}$ mais $t_{i,j} \notin c$. Alors $\psi_i^{-1}(t_{i,j})$ et $\psi_j^{-1}(t_{i,j})$ sont deux bords de cubes $m$-dimensionnels isométriques que l'on recolle par une isométrie $\beta_{i,j}$.

Si $1 \leq i \leq 2n-1$, $\psi_i^{-1}(t_{i,i+1})$ et $\psi_{i+1}^{-1}(t_{i,i+1})$ sont deux exemplaires de la même variété que l'on recolle par l'application identité $\beta_{i,i+1}$. De même, $\psi_1^{-1}(t_{2n,1})$ et $\psi_{2n}^{-1}(t_{2n,1})$ sont deux exemplaires de la même variété que l'on identifie par l'application identité $\beta_{2n,1}$.

On définit alors par analogie avec (3.12)

$$M(\mathbf{h},k;2n) = \coprod_{i=1}^{2n} M_i(\mathbf{h},k)/\sim,$$

où la relation $\sim$ est donnée par l'identification selon les isométries $\{\beta_{i,j}\}$ pour $1 \leq i,j \leq 2n$ avec $t_{i,j} \in \overline{\Gamma'}$.

On a :

$$M(\mathbf{h},k;2n) = M_{\mathbf{h}}(2n) \mathop{\#}_{j=1}^{nD'} (S^1 \times S^{m-1})_j.$$

De la proposition 1, on déduit:

$$\sigma(M(\mathbf{h},k;2n)) = \sigma(M_{\mathbf{h}}(2n)).$$

$M(\mathbf{h},k;2n)$ est munie de la métrique $h_1$ coïncidant sur chaque exemplaire $M_i(\mathbf{h},k)$ avec $\overline{h}_0$.

Pour cette métrique,

$$\mathrm{Vol}(M(\mathbf{h},k;2n),h_1) = 2n.\mathrm{Vol}(M(\mathbf{h},k),\overline{h}_0).$$

De manière similaire à la proposition 2, nous obtenons

**Proposition 4.** *L'application*

$$\begin{array}{rcl}\Psi : M(\mathbf{h},k;2n) & \longrightarrow & \overline{\Gamma'} \\ x & \longrightarrow & \psi_j(x) \ \textit{si}\ x \in M_j(\mathbf{h},k)\end{array}$$

*est bien définie et contracte les distances.*

En estimant inférieurement la systole de $M(\mathbf{h},k;2n)$ pour la métrique $h_1$ par 1, on obtient :

**Proposition 5.** *Pour $n \geq N(D'+2,k^2)$,*

$$\frac{\sigma(M(\mathbf{h},k;2n),h_1)}{2n} \leq \frac{4m^{3/2}}{k}c'(M,\mathbf{h}).$$

**Obtention de l'estimée supérieure.** On procède comme dans le paragraphe **3.5**. Il existe un entier naturel $k'_0$ tel que pour tout $k \geq k'_0$, et $n$ vérifiant

$$(k^m c'(M,\mathbf{h})+2)^{k^2} \leq n \leq ((k+1)^m c'(M,\mathbf{h})+2)^{(k+1)^2},$$

on ait

$$\frac{\ln\ln 2n}{\ln 2n} \geq \frac{1}{4mk^2}.$$

Donc, si on pose

$$N'_1(M,\mathbf{h}) = ({k'_0}^m c'(M,\mathbf{h})+2)^{{k'_0}^2},$$

pour tout $n \geq N'_1 = N'_1(M,\mathbf{h})$,

$$\sigma(M_{\mathbf{h}}(2n)) \leq 8m^2 c'(M,\mathbf{h})\frac{2n\sqrt{\ln\ln 2n}}{\sqrt{\ln 2n}}.$$

On fixe $N' = N'(M,\mathbf{h})$ comme le premier entier supérieur à $N'_1$ tel que pour $n \geq N'$,

$$\mathrm{Vol}(M',h_0) \leq 8m^2 c'(M,\mathbf{h})\frac{2n\sqrt{\ln\ln 2n}}{\sqrt{\ln 2n}}.$$

On insère alors de manière évidente au-dessus de $t_{2n,1}$ entre les exemplaires $M_{2n}(\mathbf{h},k)$ et $M_1(\mathbf{h},k)$ de $M(\mathbf{h},k;2n)$ un exemplaire de $M'$ muni de la métrique

$h_0$, ce qui ne diminue pas la systole et augmente le volume de $\mathrm{Vol}(M',h_0)$. La variété $M(\mathbf{h},k;2n+1)$ ainsi obtenue vérifie pour tout $n \geq N'$

$$\begin{array}{rcl}\sigma(M_{\mathbf{h}}(2n+1)) & = & \sigma(M(\mathbf{h},k;2n+1)) \\ & \leq & \sigma(M(\mathbf{h},k;2n)) + \mathrm{Vol}(M',h_0) \\ & \leq & (4m)^2 c'(M,\mathbf{h})\dfrac{(2n+1)\sqrt{\ln\ln(2n+1)}}{\sqrt{\ln(2n+1)}}.\end{array}$$

On en déduit pour tout $n \geq 2N'$

$$\sigma(M_{\mathbf{h}}(n)) \leq (4m^2)c'(M, \mathbf{h})\frac{n\sqrt{\ln\ln n}}{\sqrt{\ln n}}.$$

Le théorème **B** est alors immédiat.

**Remerciements.** Les auteurs tiennent à exprimer ici leurs remerciements au référé anonyme pour ses remarques constructives. Le premier auteur a été particulièrement soutenu par le Fonds National Russe de Recherches Fondamentales (grant 02-01-00572).

## References

[1] Babenko, I.: Nature topologique des systoles unidimensionnelles. Preprint 2003 www.math.univ-montp2.fr/lsprepub/prepub/html.

[2] Bavard, C.: Inégalité isoperimétrique pour la bouteille de Klein. Math. Annalen. **274,** 439-441 (1986)

[3] Berger, M.: A l'ombre de Loewner. Ann. scient. École Norm. sup. **5,** 241-260 (1972)

[4] Berger, M.: Systoles et applications selon Gromov. Séminaire N. Bourbaki **216**(771), 279-310 (1993)

[5] Berger, M.: Riemannian geometry during the second half of the twentieth century. Jahresber. Deutsch. Math.-Verein **100,** 45-208 (1998)

[6] Biggs, N.: Constructions for cubic graphs with large girth. Electron. J. Combin. **5**, A1 (1998)

[7] Bollobás, B.: Extremal graph theory (Academic Press, London, 1978)

[8] Bollobás, B., Szemerédi, E.: Girth of sparse graphs. J. Graph Theory **39**(3), 194-200 (2002)

[9] Buser, P., Sarnak, P.: On the period matrix of a Riemannian surface of large genus. Invent. Math. **117,** 27-56 (1994)

[10] Erdös, P., Sachs, H.: Reguläre Graphen gegebener Taillenweite mit minimaler Knotenzahl. Wiss. Z. Martin-Luther-Univ.Halle-Wittenberg **12,** 251-257 (1963)

[11] Gromov, M.: Filling Riemannian manifolds. J.Diff.Geom. **18,** 1-147 (1983)

[12] Gromov, M.: Systoles and intersystolic inequalities. Actes de la table ronde de géométrie différentielle en l'honneur de Marcel Berger, Collection SMF **1,** 291-362 (1996)

[13] Gromov, M.: Metric structures for Riemannian non-Riemannian spaces (Birkhäuser, 1999)

[14] Gromov, M.: Volume and bounded cohomology. Publ. Math. IHES **56,** 5-100 (1982)

[15] Pu, P.: Some inequalities in certain non-orientable Riemannian manifolds. Pacific J. of Math. **2,** 55-71 (1952)

[16] Rourke, C., Sanderson, B.: Introduction to Piecewise-linear topology, (Springer, 1972)

[17] Thom, R.: Quelques propriétés globales des variétés différentiables. Comment.Math.Helv. **28**, 17-86 (1954)

Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier - Université Montpellier 2

*Email address*: `babenko@math.univ-montp2.fr`

Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier - Université Montpellier 2

*Email address*: `balachef@math.univ-montp2.fr`