
Modelo de análisis de videos para el estudio de procesos de construcción de conocimiento matemático

Núria Planas

Resumen: En la última década han sido cada vez más frecuentes los trabajos empíricos en educación matemática basados en contenidos de video. Sin embargo, muy pocos de estos trabajos detallan aspectos relacionados con el proceso de análisis seguido en el estudio de los videos, el contexto de generación de los datos, el papel otorgado a las transcripciones o las categorías de análisis aplicadas. En este artículo describo las fases de un modelo de análisis de videos utilizado en una investigación reciente desarrollada en un aula de secundaria (15-16 años), y proporciono ejemplos del modelo llevado a la práctica. El objetivo de la investigación es indagar entornos de aula y pautas de interacción social que facilitan procesos de construcción de conocimiento matemático. Para ello, se ha observado y grabado en video un aula de matemáticas durante cuatro sesiones de clase. Está previsto aplicar en breve el modelo de análisis a otras aulas.

Palabras clave: metodología de investigación, datos de video, situación de aula, interacción social, conocimiento matemático, procesos de construcción de significados.

Abstract: In mathematics education, empirical studies based on video contents have become very frequent over the past years. However, only a few of these studies show in detail issues such as the process of analyzing the videos, the generation of data and its context, the role given to transcriptions, or the analytical categories that are to be applied. This paper describes the phases of a model for analyzing videotape data that has been recently used in a research conducted in a secondary classroom (15-16 years old). It also provides examples of the model in action. The main goal of the research is to explore learning environments and social interactions that promote processes of constructing mathematical meaning. To do so, a mathematics classroom has been observed and videotaped during four consecutive regular lessons. In the near future it is planned to develop the model in its current version in more classrooms.

Fecha de recepción: 10 de diciembre de 2005.

Keywords: research methodology, videotape data, classroom situation, social interaction, mathematical knowledge, processes of meaning construction.

INTRODUCCIÓN

En este artículo describo las fases de un modelo de análisis de videos, utilizado en una investigación reciente desarrollada en un aula de matemáticas de secundaria,¹ y proporciono ejemplos del modelo llevado a la práctica. El modelo actual es el resultado de un proceso de refinamiento iniciado a partir de modelos usados en investigaciones anteriores (Planas, 2001, 2004). En el proceso de refinamiento, han sido de gran ayuda los trabajos de Powell y sus colegas (*e.g.*, Powell, 2003; Powell y Maher, 2002; Powell, Francisco y Maher, 2003). Estos autores han aplicado su modelo al estudio de los procesos de argumentación y demostración matemática en aulas diseñadas con el propósito de promover estos procesos. En el trabajo que presento, no se ha intervenido de manera intencional en la planificación de las situaciones de enseñanza. El modelo de análisis pretende indagar relaciones entre entornos de aula ya existentes, interacciones sociales y procesos de construcción de conocimiento matemático.

El estudio forma parte de un proyecto de investigación más amplio, Educación Matemática Crítica, que a su vez forma parte del grupo de investigación Educación Matemática y Contextos Socioculturales (EMICS). En esta ocasión me centro en dos objetivos del proyecto: 1) explorar procesos de construcción de conocimiento matemático y 2) establecer relaciones significativas entre estos procesos y pautas de interacción social. En el marco de la comunidad de profesores e investigadores del proyecto, contamos con objetivos adicionales como, por ejemplo, analizar métodos de actuación docente e indagar formas eficaces de compartir datos. Para la consecución de los dos primeros objetivos, se ha observado y grabado en video un aula de matemáticas durante cuatro sesiones de clase consecutivas en septiembre de 2005. En una segunda fase del estudio (enero 2006-enero 2007), está previsto aplicar el modelo de análisis a otras cinco aulas de matemáticas conducidas por profesores que participan en el proyecto.

¹ Esta investigación ha sido financiada por la Direcció General de Recerca de la Generalitat de Catalunya ("Educació Matemàtica Crítica", Xarxa REMIC-MUMA, 8598-165003).

EL ESTUDIO DE LA INTERACCIÓN SOCIAL

La interacción social es un medio a través del cual se intercambian y (re)construyen significados matemáticos (César y Oliveira, 2005; Kumpulainen, 2005). Por interacción social se entiende el proceso de orientación hacia los otros y actuación en respuesta a sus comportamientos y a expectativas compartidas. El término social señala que más de una persona está implicada en la situación, mientras que el término interacción significa que todas las partes del intercambio influyen unas sobre otras. Los procesos de la interacción social son la base para la creación de relaciones sociales. Numerosos estudios etnográficos en educación matemática se han centrado en la noción de relación social (e.g., O'Toole y Abreu, 2005), a diferencia de otros estudios de tipo observacional centrados en la noción de interacción social (e.g., Lerman y Zevenbergen, 2004). Unos y otros estudios suponen que las estructuras sociales y su concreción por medio de ciertas interacciones condicionan el desarrollo de la actividad matemática.

Otros estudios se han preocupado del discurso del aula y de las formas de interacción promovidas por distintos tipos de discurso (e.g., Forman y Ansell, 2002; Ryve, 2004; Sfard, 2001). Al examinar los modos de interacción social promovidas por un discurso, se obtiene información sobre los procesos de aprendizaje y se conoce el grado de acceso de los alumnos a dichos procesos. La cuestión es, por una parte, cómo deben actuar los participantes del aula para que se cree un entorno discursivo de comunicación fluida y, por otra, qué acciones alejan el discurso del aula de los objetivos de comunicación y aprendizaje. En su estudio sobre interacciones sociales en el aula de matemáticas, Brodie (2001) muestra los efectos negativos de ciertas interacciones profesor-alumnos y alumno-alumno en los procesos que denomina "de pensamiento matemático". Dekker y Elshout-Mohr (2004) relacionan intervenciones por acción u omisión del profesor con obstáculos en el aprendizaje matemático y dificultades en la participación.

Desde la perspectiva de las teorías socioculturales, el carácter social de un contexto de aprendizaje viene dado por el impacto de las interacciones entre participantes en los procesos de construcción de conocimiento y por la influencia de las relaciones sociales en el desarrollo de las interacciones (Ten Dam, Volman y Wardekker, 2004). Según esto, el aprendizaje es un proceso social que puede entenderse como una forma de participación. Diversos autores (e.g., Bielaczyc y Collins, 1999; Van der Linden y otros, 2000) muestran que el uso de la dimensión social del aprendizaje, por medio de dinámicas de aula colaborativas y de trabajo en pequeños grupos, facilita el aprendizaje. Estos autores también destacan el ca-

rácter maleable de una misma interacción, que puede ser a la vez obstáculo y ayuda en el aprendizaje.

USOS DEL VIDEO EN EL ANÁLISIS DE LA INTERACCIÓN SOCIAL

La selección del video como instrumento de recolección de datos es habitual en estudios de muy distinta índole (Roschelle, 2000). La existencia de tres revistas científicas, *Visual Sociology*, *Visual Anthropology* y *Visual Anthropology Review*, para trabajos basados en videos e informaciones visuales, señala la importancia de este instrumento. En particular, la mayoría de los autores que desarrollan investigaciones acerca del papel de la interacción social en entornos de práctica matemática recurren a grabaciones de video. Éste es un rasgo común en estudios etnográficos de tipo longitudinal (e.g., Freire y César, 2003) y en estudios basados en microanálisis (e.g., Wood, 1999). Por otra parte, el video ha sido el soporte principal en estudios internacionales de gran difusión como el proyecto Videotape Classroom Study (Stigler, Gonzales, Kawanaka, Knoll y Serrano, 1999), enmarcado en el Third International Mathematics and Science Study, y en estudios estatales de gran repercusión internacional como el proyecto alemán Teaching and Learning Processes in Physics Instruction (Prenzel y Seidel, 2002).

En la literatura en educación matemática relacionada con el uso de videos, hay autores que discuten aspectos metodológicos de manera implícita al exponer los resultados de su investigación (e.g., Elbers y De Haan, 2005). Otros autores, sin embargo, se refieren de manera explícita a aspectos metodológicos relativos al uso de videos en las fases de recolección de datos, análisis e interpretación (e.g., Cobb y Whitenack, 1996). En la fase de recolección de datos, el video de una sesión de clase proporciona una perspectiva poliédrica de las interacciones entre participantes y permite volver sobre los datos originales una y otra vez. Pirie (1998) habla de densidad y permanencia para referirse a estas dos características. Aun así, la densidad es relativa, porque las cámaras sólo tienen acceso a parte de lo que ocurre. Del mismo modo, la permanencia se refiere a los datos pero no al investigador, cuya mirada a los datos varía según el momento.

En la fase de análisis e interpretación de datos, el énfasis no está en lo que la cámara recoge, sino en lo que ve la mirada del investigador (Lerman, 2001). En primer lugar, hay dos tareas: el investigador ha de interpretar qué representa la escena de recolección de datos, qué tipo de datos puede proporcionar y ha de decidir si lo que ve es suficiente para justificar ciertas inferencias sobre relaciones

entre participantes y comportamientos individuales o si va a necesitar más datos (entrevistas, protocolos escritos...). La dimensión técnica de estas tareas no excluye el papel del investigador. Los recursos tecnológicos que se usan en esta fase no deciden los significados dados a lo que se ve ni las relaciones entre significados. Loizos (2000) señala que muchos estudios basados en análisis de videos sustituyen la interpretación de datos por una aplicación rutinaria de categorías sugeridas por programas informáticos (e.g., Catmovie, Videograph). Estos programas hacen una lectura literal y única de las imágenes. Loizos propone una lectura crítica que incluya el contexto como dato y explicaciones alternativas: ¿quién/qué no aparece en las imágenes?, ¿en qué circunstancias tiene lugar la grabación?, ¿cuál es la relación entre investigador e investigados?, etcétera.

El modelo de análisis de videos utilizado por Powell y sus colegas (Powell, 2003; Powell y Maher, 2002; Powell, Francisco y Maher, 2003) desarrolla una lectura crítica mediante un tipo particular de portafolios (*videoportfolios*, en Powell, Francisco y Maher, 2003, p. 410), con una primera parte de contextualización de la grabación y una segunda parte centrada en contenidos literales. Para estudiar procesos de argumentación en el aula, estos autores toman dos unidades de análisis: quiénes argumentan (agentes matemáticos) y qué se argumenta (objetos matemáticos). Cada videoportafolio incluye interacciones, acompañadas de transcripciones, en torno a un proceso de argumentación. Aunque el proceso de transcripción implica la representación de interacciones, éstas se interpretan en una fase previa a la obtención de datos textuales y su significatividad se decide mediante el análisis directo del video. Esta situación contrasta con otros estudios donde los datos principales provienen de la transcripción y de la aplicación de categorías dadas por un programa informático.

Un aspecto controvertido en relación con el uso de videos es el papel otorgado a la transcripción. Pirie (1998) distingue dos tipos de estudios según se interpreten los contenidos del video o de la transcripción como fuente principal de generación de datos. El video permite establecer conexiones más directas entre comportamientos y acciones observables e interpretaciones del investigador. Hay autores, entre ellos Pirie, que no creen necesario elaborar transcripciones completas y, en su lugar, sugieren iniciar los procesos de simplificación de datos a partir del estudio del video. Sin embargo, otros autores, entre ellos Clement (2000) y Seidel, Prenzel y Hoffmann (2001), insisten en los peligros metodológicos de manejar el exceso de datos de un video. Para Clement, cuando el investigador ha fijado los aspectos por observar y ha elaborado un registro mediante una transcripción, conviene dar prioridad al análisis de los contenidos de la transcripción

por delante de los contenidos del video. Por lo general, esta última opción va ligada a modelos de análisis del discurso, mientras que se acostumbra adoptar la primera opción en modelos sociológicos de análisis microetnográfico.

Autores ubicados en la tradición sociológica han llevado a cabo análisis de video sin la construcción, ni completa ni parcial, de transcripciones. Morera (2001) elabora informes sociométricos de aulas de secundaria a partir del estudio directo de contenidos de videos de clase. Esta autora parte de una contextualización general del grupo clase para luego analizar el contexto en el que se enmarcan ciertas relaciones entre participantes. El análisis de los contenidos del video permite configurar representaciones gráficas sobre elecciones y rechazos recíprocos entre participantes. Un video puede mostrar cómo no se cede la palabra a un alumno que levanta la mano para participar, cómo se gestionan y consideran los errores conceptuales de dos alumnos distintos, cuáles son las diferencias en las demandas de tareas a los diferentes alumnos, etc. y, además, puede mostrar cambios en las relaciones entre participantes producidos en periodos breves.

En general, la revisión sobre el uso de videos en el análisis de la interacción social me ha llevado a considerar cuatro aspectos principales durante la elaboración del modelo que propongo:

1. El objetivo último del análisis es el video, no la transcripción, de modo que todas las fases han de revisarse desde la perspectiva de la información contenida en el video y la transcripción ha de entenderse como un elemento auxiliar.
2. La representación de interacciones mediante transcripciones requiere el establecimiento de categorías de análisis cuya selección y aplicación dependen de las cuestiones de investigación y no son reducibles a programas informáticos.
3. La organización de interacciones requiere un núcleo aglutinador con estructura de estudio de caso. En la definición del caso deben distinguirse con claridad los objetos matemáticos (*e.g.*, ¿qué significados se revisan?) de los agentes matemáticos (*e.g.*, ¿quiénes revisan dichos significados?).
4. La interpretación de los casos, desde la perspectiva de las variables seleccionadas y de acuerdo con las bases de un posicionamiento crítico, ha de incluir la confrontación de explicaciones alternativas.

DESCRIPCIÓN DEL MODELO DE ANÁLISIS

El modelo de análisis de videos desarrollado pretende ser útil en la identificación de situaciones de interacción social en el aula de matemáticas vinculadas a procesos de construcción de conocimiento matemático. En una fase previa a la identificación de estas situaciones he tenido en cuenta, además de las investigaciones en el ámbito de la interacción social ya señaladas, investigaciones en el ámbito de la construcción de conocimiento. En particular, he utilizado los trabajos de Dörfler (2000) y White (2003). Estos autores vinculan de un modo directo los procesos de construcción de conocimiento matemático con la existencia de un entorno de enseñanza y aprendizaje que promueva la interacción entre participantes. La identificación de situaciones de interacción social es un primer paso metodológico en la búsqueda de procesos de construcción de conocimiento, según White, o de generación de ideas, según Dörfler.

No es habitual recurrir a los videos como dato principal en investigaciones basadas en la exploración de procesos de construcción de conocimiento matemático. El hecho de que este tipo de investigaciones se hayan enmarcado tradicionalmente en un paradigma cognitivo ha llevado a seleccionar cuestionarios, mapas conceptuales y protocolos escritos como instrumentos de recolección de datos. En este estudio no pretendo describir en profundidad procesos de construcción. El objetivo es identificar situaciones de reelaboración de significados matemáticos ocurridas bajo la influencia de interacciones sociales. Para ello, necesito disponer de información precisa sobre comportamientos verbales y no verbales y sobre cambios en estos comportamientos. La reelaboración de una idea matemática puede manifestarse a partir de un significado concreto, expresado de manera más o menos sutil por medio de un comportamiento verbal o no verbal. En este sentido, los videos son un recurso muy recomendable.

Para cada video de una sesión de clase, aplico seis fases de análisis lineales. Son lineales en tanto que avanzar en cada una de ellas supone revisar fases anteriores. Las fases son:

1. Estudio y descripción general del video
2. Identificación de episodios de revisión de significados matemáticos
3. Búsqueda de procesos de reelaboración de estos significados
4. Caracterización de interacciones sociales
5. Elaboración de historias explicativas
6. Comparación de los episodios de revisión

El análisis de cada episodio de revisión se interpreta como el estudio de un caso. Las tres primeras fases del modelo llevan al establecimiento de dos grupos de casos, según haya o no reelaboración en torno a significados matemáticos revisados durante la sesión. Las tres últimas fases exploran pautas de interacción social que contribuyen a desencadenar procesos de reelaboración. Los procesos de revisión y los de reelaboración se caracterizan a partir de manifestaciones concretas extraídas de los videos, tales como presentaciones verbales de ideas, gestos de visualización de estas ideas, ritmos de habla reflexivos, movimientos de asentimiento, etcétera.

El modelo se ha pensado suficientemente abierto para poder orientar otros diseños de investigación centrados en la exploración de pautas de interacción social. La estructuración del modelo en las fases señaladas y los criterios generales planteados en el análisis de videos (véanse los cuatro puntos de la sección anterior) no están directamente relacionados con el tema de estudio. El tema se concreta en las categorías de análisis, que serán unas u otras según los intereses de cada investigador. Puede, por tanto, hacerse una lectura amplia del modelo sustituyendo los casos por estudiar y las categorías de análisis que han de facilitar su estudio. En el modelo propuesto, por ejemplo, al tomar como caso los episodios de revisión, integro el interés por objetos matemáticos (significados revisados) con el interés por agentes matemáticos (alumnos que revisan). Si el caso se centrara en la variación de interpretaciones para un mismo significado matemático, tendría sentido aplicar la misma estructura de análisis, aunque las categorías de interacción deberían incluir, muy probablemente, los tipos semiótico y epistemológico, entre otros, en lugar de los tipos cognitivo y emocional.

ESTUDIO Y DESCRIPCIÓN GENERAL DEL VIDEO

La observación presencial de la sesión permite una primera experiencia de lo acontecido. Tras la edición técnica del video, miro y escucho con detenimiento dos o más veces la grabación de la sesión. A continuación, elaboro un informe descriptivo que sirve para la familiarización con los contenidos del video de un modo panorámico. Este informe no debe confundirse con un documento de simplificación de datos, puesto que continúo pensando el video como el escenario principal del análisis. Organizo el informe por medio de descripciones breves para intervalos de tiempo centrados en temas de conversación o de acción (*e.g.*, “desacuerdo en torno a una idea”, “organización de los alumnos en grupos”). Esto permite ubicar rápida-

mente, en fases posteriores del análisis, episodios e interacciones concretas en el contexto de la sesión.

IDENTIFICACIÓN DE CASOS (EPISODIOS DE REVISIÓN)

En esta fase busco y transcribo episodios que muestren procesos de revisión de significados matemáticos. Elaboro la transcripción para facilitar el análisis posterior de interacciones. Las transcripciones no incluyen referencias a comportamientos no verbales, notaciones relativas al énfasis en las palabras, tonos de (des)acuerdo, ruidos del entorno o pausas y silencios, porque el análisis se completa con el estudio directo del video. Un “episodio de revisión” de un significado matemático ocurre cuando, a partir de los contenidos del video, se determinan comportamientos de “duda”, “error” o “bloqueo” para un alumno. En estos tipos, ya descritos en Planas (2004), el alumno:

- Reconoce dudas en torno al significado y pide a otros participantes que hagan explícitas sus interpretaciones.
- Comete un error o inexactitud en el uso del significado y muestra interés por conocer en qué ha consistido dicho error.
- Expresa un cierto bloqueo en torno al significado, pero no deja de atender las conversaciones de otros participantes acerca de este significado.

Entiendo por transcripción de un episodio de revisión el conjunto de enunciados del video, los cuales contemplan desde que se generan comportamientos de “duda”, “error” o “bloqueo” hasta que deja de hablarse acerca del significado matemático que ha generado dichos comportamientos. De acuerdo con esto, un mismo grupo de enunciados del video puede pertenecer a más de una transcripción e informar sobre más de un caso. Dentro de cada transcripción, busco procesos de representación y comunicación de significados matemáticos. La identificación de estos procesos justifica el contenido matemático de la situación transcrita y antecede a la caracterización de procesos de construcción.

BÚSQUEDA DE PROCESOS DE REELABORACIÓN

Para cada episodio de revisión, busco procesos de reelaboración en torno al significado matemático revisado. Para ello, repaso la transcripción del episodio y los contenidos del video en el intervalo dado por la transcripción. Al igual que ocurre con los procesos de revisión, busco procesos de reelaboración con algún tipo de manifestación social en los que el alumno represente o comunique modificaciones. Un “proceso de reelaboración” ocurre cuando, en el alumno para el cual se ha identificado un comportamiento de “duda”, “error” o “bloqueo”, se detecta “resolución de la duda”, “reparación del error” o “superación del bloqueo”, respectivamente. En estos tipos, el alumno:

- Resuelve en mayor o menor grado las dudas iniciales y pone de relieve la importancia de las interpretaciones de los otros en el proceso de cambio.
- Utiliza de nuevo el significado matemático sin cometer inexactitud ni error y precisa la influencia de los otros en la toma de conciencia del error.
- Aporta interpretaciones alternativas y alude al papel de las conversaciones de otros participantes en el proceso de implicación creciente.

La caracterización de las parejas de comportamientos (“duda y resolución”, “error y reparación”, “bloqueo y superación”) se ha pensado como un modo de caracterizar procesos de construcción de conocimiento. Interpreto que los episodios de revisión con procesos de reelaboración indican un tipo de procesos de construcción de conocimiento matemático. La construcción de conocimiento no requiere necesariamente que el alumno llegue a una comprensión correcta y “completa” de unos determinados significados. Los comportamientos señalados deben entenderse desde la perspectiva dada por su carácter de indicadores de mejoras en la comprensión que pueden ser, a su vez, mejoras en la motivación y en la participación.

CARACTERIZACIÓN DE INTERACCIONES SOCIALES

Para cada episodio de revisión con o sin reelaboración, desarrollo un análisis de las interacciones en las que está implicado el alumno que ha expresado “duda”, “error” o “bloqueo”. La implicación puede ser directa (el alumno es un interlocutor) o indirecta (el alumno presta atención, pero no interviene). Busco interac-

ciones en torno a contenidos de tipo “matemático”, “emocional” e “instruccional” en la parte del video relativa al episodio y en su transcripción. Analizo los tres tipos de contenidos por separado, aunque en ocasiones sea inevitable introducir referencias entre tipos de contenidos. Dentro de cada tipo, distingo dos grupos de interacciones. La clasificación que sigue fue introducida en Planas (2005).

Los contenidos de tipo matemático informan sobre la actividad mental desarrollada por el alumno y sobre la actividad comunicada de manera explícita por otros alumnos o por él mismo como reacción a ciertos razonamientos. De acuerdo con esto, hay contenidos:

- *cognitivos* (e.g., el alumno desarrolla un método de ensayo y error en la fase de aproximación a la tarea matemática propuesta), y
- *discursivos* (e.g., el alumno aporta contraargumentos tras una demanda de justificación por parte de otro alumno que no acepta los argumentos dados).

Los contenidos de tipo emocional informan sobre vivencias en torno a la tarea experimentada públicamente por el alumno o por otros participantes en un entorno físico cercano a él. De acuerdo con esto, hay contenidos:

- *internos* (e.g., el alumno disfruta planteando nuevas ideas y estrategias a los compañeros de su grupo de trabajo), y
- *externos* (e.g., el profesor expresa desagrado ante algunas de las ideas sugeridas por el alumno y desesperación ante su insistencia).

Los contenidos de tipo instruccional informan sobre normas establecidas y formas de participación que condicionan la organización del trabajo de matemáticas a lo largo de la sesión de clase. De acuerdo con esto, hay contenidos:

- *culturales* (e.g., el uso de la pizarra queda reducido a la fase de discusión conjunta y sólo en caso que más de un alumno lo requiera), y
- *sociales* (e.g., cuando un grupo de alumnos entra en conflicto a raíz de un desacuerdo, el profesor propone a otro alumno como mediador).

Una interacción en torno a uno de estos grupos de contenidos viene dada por el conjunto de enunciados y acciones, extraídos de la transcripción del episodio

y del intervalo del video, que contemplan aspectos concretos cognitivos, discursivos, internos, externos, culturales o sociales. Para cada episodio, construyo una tabla con seis columnas. Dentro de cada columna, ubico las interacciones de un mismo grupo. El resultado es un primer cuadro de grandes dimensiones que da lugar a un cuadro-resumen donde, dentro de cada columna, redacto los enunciados y acciones de inicio y final de las interacciones y, cuando convenga, acciones que caracterizan el desarrollo de la interacción. Además, para cada interacción, doy un descriptor que la resume. Construyo el cuadro-resumen para los dos tipos de episodios de revisión, con y sin reelaboración, para poder tener más adelante elementos de comparación entre ambos tipos.

ELABORACIÓN DE HISTORIAS EXPLICATIVAS

Tras la caracterización de interacciones sociales y la organización de los episodios de revisión basados en estas interacciones, construyo una historia explicativa para cada caso. La construcción de esta historia es el resultado del proceso de dar sentido a los contenidos del video y de la transcripción, prestando atención a relaciones emergentes entre aspectos discursivos, cognitivos, internos, externos, culturales y sociales. En la delimitación de estas relaciones, el procedimiento es especialmente no lineal y conviene volver con frecuencia a los contenidos del video. En primer lugar, elaboro una síntesis de aspectos significativos relativos a los tres tipos de contenidos, a partir de la respuesta a seis cuestiones generales, una para cada grupo de interacciones:

- Síntesis de contenidos del tipo matemático:
¿Qué habilidades y actitudes matemáticas expresa el alumno?
¿Qué habilidades y actitudes matemáticas se expresan ante él?
- Síntesis de contenidos del tipo emocional:
¿Cuál es la evolución de las reacciones emocionales del alumno?
¿Cuáles son las actitudes y emociones más frecuentes hacia él?
- Síntesis de contenidos del tipo instruccional:
¿Hay normas del aula de aplicación directa a la actividad del alumno?
¿Hay formas de participación que lo incluyan o excluyan?

La selección de estas cuestiones se realiza tras intentar sintetizar aspectos de las interacciones sociales en el aula que pueden estar facilitando u obstaculizando

los procesos de reelaboración de significados matemáticos. En el proceso de escritura de las respuestas, inicio la búsqueda de relaciones: ¿cómo reacciona el alumno al percibir formas de participación que lo excluyen?, ¿hay intentos del entorno por comprender y usar algunos de sus razonamientos?, ¿se esfuerza por entablar conversación con quienes le ofrecen apoyo?, ¿cómo se distribuyen los turnos de habla y de qué modo condiciona esta distribución sus intervenciones?, ¿existen diferencias entre sus maneras de planificar la tarea y las esperadas?, etc. En este punto, la construcción de historias explicativas coherentes requiere la implicación de más de un investigador, a fin de validar las relaciones e historias construidas para los distintos episodios.

COMPARACIÓN DE LOS EPISODIOS DE REVISIÓN

En esta última fase, planteo comparaciones en dos niveles: entre los episodios de revisión de un mismo tipo (con y sin reelaboración) y entre los dos tipos de episodios. Para los episodios de un mismo tipo, busco similitudes en un número significativo de historias explicativas. A continuación, busco diferencias entre los grupos de similitudes encontradas para cada uno de los tipos. Aunque este doble proceso de comparación (por similitudes y por diferencias) se desarrolla inicialmente para el conjunto de casos de cada sesión, el objetivo final es una comparación que incluya los episodios identificados en las cuatro sesiones grabadas. El procedimiento es el siguiente:

- Clasificación de historias explicativas:
 - Grupo de historias para casos con reelaboración
 - Grupo de historias para casos sin reelaboración
- Comparación por similitud entre las historias de un mismo grupo:
 - Características del grupo “con reelaboración”
 - Características del grupo “sin reelaboración”
- Comparación por diferencia entre los dos grupos de historias:
 - Características exclusivas del primer grupo
 - Características exclusivas del segundo grupo

Organizo la comparación entre los episodios de revisión con reelaboración y los episodios sin reelaboración por medio de una narrativa. Esta narrativa es el resultado de un proceso de simplificaciones progresivas, donde supongo que los

avances en los procesos de construcción de conocimiento matemático tienen que ver con la implicación del alumno en tipos “favorables” de interacciones. Los tipos “favorables” que habrán de construirse estarán necesariamente condicionados por el modelo de análisis, el cual explora seis categorías de las muchas posibles, por las características del grupo clase, por el perfil de los alumnos cuyos procesos de construcción se exploran y por la interpretación de estos procesos con base en actividades de revisión y reelaboración, entre otros aspectos.

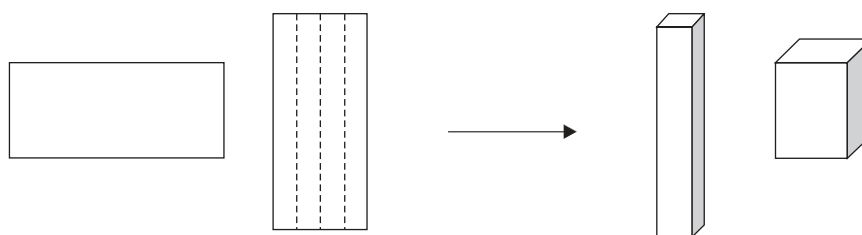
EJEMPLOS DEL MODELO LLEVADO A LA PRÁCTICA

El modelo de análisis se ha aplicado a cuatro sesiones de clase de 50 minutos con un mismo grupo de alumnos de cuarto nivel de enseñanza secundaria (15 y 16 años) en una escuela de Barcelona. En este apartado describo las fases de análisis aplicadas al video de una sesión. De los 20 alumnos del aula, 8 son varones. La mayoría comparten clase desde hace tres o más años. El profesor tiene 45 años, es licenciado en ciencias exactas, lleva 15 años dando clases de matemáticas, ha asistido a cursos de formación permanente coordinados por mí y ha elaborado por iniciativa propia un cuaderno de actividades para los cursos que imparte en la escuela. Las sesiones grabadas pertenecen a una unidad de resolución de problemas de geometría y se estructuran en cuatro partes: presentación de la tarea, trabajo en grupos, discusión conjunta y reflexión final. En el cuaderno del curso, hay un espacio después de cada problema para escribir los comentarios que cada alumno considere oportunos durante el tiempo destinado a la reflexión final.

La figura 1 contiene el enunciado del problema dado a los alumnos al inicio de la sesión. Es un problema de geometría extraído de Castelnuovo (1993) y seleccionado por el profesor para el cuaderno de actividades. Junto con el enunciado, se reparten dos cartulinas de tamaño DIN-A4 (21 × 29.7 cm) por alumno. El cuaderno se dio cuatro semanas antes, de modo que los alumnos pueden haber leído antes el problema. El día anterior tuvo lugar la primera grabación. Es la cuarta semana de clases del primer trimestre del curso y la segunda semana dedicada a la unidad de resolución de problemas.

Figura 1 Enunciado del problema

Una hoja de papel se puede doblar en cuatro partes iguales de dos maneras: a lo largo o a lo ancho. Con dos hojas iguales, si pegamos un fondo, se pueden construir, por tanto, dos contenedores de base cuadrada. Estos contenedores, contruidos con hojas iguales, ¿tienen el mismo volumen?



ESTUDIO Y DESCRIPCIÓN GENERAL DEL VIDEO

El informe inicial tiene cuatro partes diferenciadas de acuerdo con los momentos de presentación de la tarea, trabajo en grupos, discusión conjunta y reflexión final. Para cada parte, organizo los intervalos de tiempo de manera temática. La figura 2 reproduce parte del informe centrado en el trabajo del grupo formado por Pablo, Miguel y Eva. El técnico encargado de grabar la discusión deja la cámara fija a metro y medio de la mesa de estos alumnos. Al disponer de una única cámara, en la fase de trabajo en grupos siempre selecciono un único grupo, que es distinto para cada una de las sesiones grabadas, y continúo observando lo que ocurre en el aula de un modo más general.

La aproximación manipulativa dada por la construcción de los contenedores condiciona el posterior establecimiento de conexiones entre las nociones de capacidad y volumen y la aparición de dudas entre las interpretaciones física y matemática de estas magnitudes. Aunque la actividad de exploración está presente en toda la discusión, hay un momento en el que se investigan y generan posibilidades que condicionan los aspectos del problema que se examinarán más cuidadosamente. No hay, sin embargo, actividad de síntesis. No se cierra el proceso de resolución, ni se unifica la información obtenida, ni tampoco se organizan los argumentos finalmente aceptados. La confusión entre las nociones de capacidad y volumen no tiene continuidad en la fase de discusión conjunta.

Figura 2 Fragmento de informe inicial relativo al trabajo de un grupo

Intervalo	Descripción de contenidos del video
(09:32, 13:10)	<p>Construcción de los contenedores. Pablo y Miguel toman las cartulinas DIN-A4. Eva los observa. Pablo dice a Miguel: "Tú doblas así y yo al revés". Eva construye uno de los contenedores y Pablo, el otro. Miguel se ofrece para recortar dos fondos de base cuadrada de una tercera cartulina. Usa una regla para medir. En una esquina de la cartulina dibuja dos líneas paralelas a los márgenes. Saca de su estuche unas tijeras y recorta. Eva le hace notar que ha recortado dos fondos iguales. Pablo dice que no es necesario tener los dos fondos porque basta con imaginarlos. Eva pide una engrapadora a un alumno de otro grupo y, con la ayuda de Miguel, engrapa dos caras laterales consecutivas de los prismas. Se aplauden.</p>
(13:10, 15:20)	<p>Reflexión en silencio. Pablo coloca los prismas en el centro de la mesa y dice: "¿Y ahora qué?" Se miran y se produce un silencio. Pablo coge un prisma y lo mira por dentro. Miguel sostiene el otro. Eva toma dos cartulinas sin doblar y las coloca, respectivamente, en posición vertical y horizontal a una cierta distancia.</p>
(15:20, 20:00)	<p>Exploración de posibilidades. Eva dice: "Yo diría que los volúmenes son iguales, o al menos eso parece". Pablo responde: "Si los dos volúmenes fueran iguales, el problema no tendría ninguna gracia". Eva responde: "Pero las superficies son iguales, eran dos DIN-A4". Miguel introduce la noción de capacidad: "Si vemos que cabe lo mismo, ¿eso sirve para luego decir que los volúmenes son iguales?" Pablo y Eva asienten. Los tres introducen ideas para comparar capacidades: llenar los contenedores con arena, con objetos pequeños de sus estuches o con tizas de clase. Miguel propone recuperar el fondo de base cuadrada para el prisma de mayor altura y recortar un fondo para el otro prisma. Eva responde: "Yo aún no haría los fondos, porque antes falta mucho por decidir". Pablo sugiere optar por la arena, porque "así no van a quedar espacios vacíos que luego nos van a despistar". Eva hace callar a sus compañeros para escuchar mejor la conversación de otro grupo. Luego explica a Pablo y Miguel que no está convencida de que sea una buena idea usar la noción de capacidad. Miguel asegura que, en el caso de cuerpos geométricos regulares, volumen y capacidad coinciden. Eva dice no estar segura.</p>
(20:00, 22:05)	<p>Manifestación de desacuerdos. Pablo vuelve a colocar los prismas en el centro de la mesa. Miguel toma dos cartulinas sin doblar y las dispone como aparecen en el enunciado. Eva escribe en su cuaderno "¿Área es superficie y volumen es capacidad?" Pablo dice que no basta con experimentar con arena: "Llenar de arena los contenedores y luego ver cuánta arena cabe sirve para saber la capacidad, pero aún falta ver si los volúmenes son iguales o diferentes". Discuten este comentario sin ponerse de acuerdo hasta que se produce un silencio y el profesor sugiere iniciar la discusión conjunta. Pablo exclama: "¡Aún no está!"</p>

IDENTIFICACIÓN DE EPISODIOS DE REVISIÓN

Tras la familiarización con los contenidos del video, procedo a su interpretación. Las figuras 3 y 4 reproducen las transcripciones elaboradas para dos episodios de revisión en torno a comportamientos de duda y error, respectivamente. En esta sesión identifiqué un total de siete casos: tres de duda, tres de error y uno de bloqueo. He seleccionado dos ejemplos que, después del análisis, resultaron ser significativamente distintos desde la doble perspectiva de los procesos de reelaboración involucrados y de los contenidos matemáticos, emocionales e instruccionales de las interacciones. En el primer ejemplo, el caso está centrado en Miguel. En el segundo, el caso está centrado en Pablo.

Ejemplo de un caso del tipo “duda”

En la fase de trabajo en grupos, Miguel expresa una duda acerca de la relación entre las nociones de volumen y capacidad (“Si vemos que cabe lo mismo, ¿eso sirve para luego decir que los volúmenes son iguales?”), pide información a sus compañeros de grupo, Pablo y Eva, y se inicia una discusión donde Pablo y Eva expresan, a su vez, nuevas dudas (“Llenar de arena los contenedores y luego ver cuánta arena cabe sirve para saber la capacidad, pero aún falta ver si los volúmenes son iguales, o diferentes”, “¿Área es superficie y volumen es capacidad?”). El profesor no interviene en ningún momento.

De acuerdo con el método descrito, en los episodios de revisión busco procesos de representación y comunicación de conocimiento matemático. A partir de una situación inicial de duda, error o bloqueo, observo cómo el alumno que experimenta dicha situación intercambia significados matemáticos más o menos completos con otros participantes. En este caso, por ejemplo, Miguel, Pablo y Eva intercambian representaciones para las nociones de volumen y capacidad y las relaciones entre ambas. Destacan la representación empírica de capacidad (magnitud determinada con “tierra del patio”, “cosas pequeñas del estuche” o “tizas de la clase”), la representación física de volumen (magnitud determinada con “envases”) y la representación parcialmente integrada de capacidad-volumen (equivalencia entre espacio ocupado y cantidad medida o contada en casos de cuerpos específicos).

Figura 3 Transcripción de un episodio de revisión del tipo “duda”

Orden	Descripción de un episodio de revisión
	Tras haber construido los contenedores, Miguel duda acerca del uso de la noción de capacidad en el contexto del problema. El episodio dura hasta que el profesor mira el reloj y sugiere ampliar la discusión a toda la clase.
1	Miguel: Si vemos que cabe lo mismo, ¿eso sirve para luego decir que los volúmenes son iguales? ¿Seguro?
2	Pablo: Yo diría que sí...
3	Eva: Casi que sí... Lo hacemos juntos.
4	Miguel: Pues entonces llenamos los contenedores con cosas. Primero llenamos uno hasta arriba con cosas pequeñas del estuche y luego vemos si todas las cosas caben en el otro.
5	Pablo: Yo usaría tierra del patio, porque así va a quedar más perfecto.
6	Eva: Las tizas de la clase también nos pueden servir.
7	Miguel: Pues más vale que pongamos un buen fondo, porque si no, se nos va a caer todo y no vamos a poder medir nada.
8	Eva: Yo aún no haría los fondos porque aún falta mucho por decidir.
9	Pablo: Yo lo tengo claro, es mejor la tierra del patio, porque así no van a quedar espacios vacíos que luego nos van a despistar.
10	Eva: Un momento, que no oigo lo que dicen.
11	Pablo: ¿Qué?
12	Eva: No creo que sea una buena idea ver lo que cabe...
13	Miguel: ¿Por qué?
14	Eva: Pues, porque no.
15	Miguel: El contenedor es muy cuadrado, en estos casos, es lo mismo ver el volumen que la capacidad, ¿no?
16	Eva: Yo no estoy tan segura. ¿Hemos hecho algo parecido?
17	Pablo: Llenar de arena los contenedores y luego ver cuánta arena cabe sirve para saber la capacidad, pero aún falta ver si los volúmenes son iguales o diferentes, ¿es eso?
18	Eva: No sé, si se tratara de ver la capacidad, el enunciado preguntaría si tienen la misma capacidad. Es más complicado...
19	Miguel: ¿Preguntamos qué ocurre con los envases? Ahí da lo mismo, ¿no?
20	Eva: Yo intentaría hacer el problema con lo que sabemos seguro, y esto de la capacidad y el volumen no lo sabemos seguro.
21	Pablo: Sabemos que se parecen.
22	Eva: Aquel grupo piensa sólo en volumen, que es lo que saben seguro. Yo no me complicaría la vida. Si vosotros lo tuvierais un poco claro, pero encima estáis más liados que yo.
23	Miguel: Liado, liado, lo estoy bastante. ¡Y con vuestra ayuda!

Figura 4 Transcripción de un episodio de revisión del tipo "error"

Orden	Descripción de un episodio de revisión
	Un grupo ha tomado medidas numéricas para cada contenedor, las ha multiplicado y ha concluido que los volúmenes son diferentes. El episodio dura hasta que se plantea llenar los contenedores con arena y se propone ir a recoger arena del patio.
1	Pablo: ¿De dónde salen los números que dices?
2	Jorge: De encontrar volúmenes, de multiplicar.
3	Pablo: De multiplicar... Umm..., multiplicar... base por altura. Más o menos.
4	Jorge: Bueno, más o menos...
5	Ana: ¿Qué?
6	Profesor: Hay que hablar por turnos para que nos entendamos. Me da igual el que hable primero, pero por turnos, por favor.
7	Ana: ¿Qué?
8	Profesor: ¿Base por altura? ¿Seguro? No me ha parecido que ellos hicieran base por altura cuando he pasado por ahí... ¿qué dices?
9	Jorge: Ya sabes, lo piensa como un área, pero es igual, multiplicar dimensiones.
10	Profesor: ¿Qué quieres decir?
11	Jorge: Si te sabes el área, añades un dato y te sale la fórmula del volumen, porque para pasar de 2 a 3, multiplicas por altura.
12	Ana: Es verdad, cuando éramos pequeños hacíamos cuadrículas y veíamos los cuadrados en un rectángulo. Luego veíamos los cubos en una caja.
13	Profesor: ¿Y qué le decimos a Pablo, que aquí base por altura está bien?
14	Ana: Habrá que preguntarle si está pensando en el área.
15	Pablo: No lo veo, pero da igual.
16	Ana: ¿Qué es lo que no ves?
17	Pablo: No veo qué tienen que ver las cuadrículas y los cubos. Ya sé que base por altura no da el volumen, pero como la base es cuadrada en los dos casos, comparamos los rectángulos grandes de cada contenedor.
18	Profesor: A ver, ¿es lo mismo comparar dos rectángulos que dos cajas rectangulares?
19	Carmen: Él no ha dicho eso.
20	Ana: Un rectángulo no es una caja rectangular, pero se parecen. Si pienso en triángulos, me va a costar encontrar el volumen del contenedor, ¿no?
21	Profesor: Yo ya he dicho demasiado. ¿Pablo?
22	Ana: ¿Pablo?
23	Pablo: Umm...
24	Profesor: ¡Venga!
25	Pablo: No se me ocurriría pensar en un triángulo. ¿Qué queréis decir?
26	Profesor: Entendido. ¿Qué tipo de caja tendríamos que haber construido para que el área de un triángulo nos fuera bien?
27	Carmen: ¿Volumen y área coinciden si la base es cuadrada o si el triángulo tiene los lados iguales?

Figura 4 (continuación) Transcripción de un episodio de revisión del tipo "error"

Orden	Descripción de un episodio de revisión
28	Ana: Área y volumen no pueden coincidir porque tienen dimensiones distintas. No son la misma cosa. Puede dar la casualidad de que den el mismo número, pero aun así, una cosa está al cuadrado y la otra cosa está al cubo.
29	Pablo: Sí, volumen tiene que ver con capacidad y área con superficie. Ya lo hemos dicho en mi grupo. Sería extraño que coincidieran.
30	Ana: Entonces, ¿por qué hablas de base por altura como si fuera un rectángulo?
31	Jorge: A lo mejor se ha confundido.
32	Carmen: No se ha confundido, ha dicho que la base del contenedor era cuadrada.
33	Ana: ¿Tú ves por qué eso está mal?
34	Pablo: Recuerdo bien la fórmula del prisma, pero pensé que comparando los rectángulos más grandes de cada contenedor era suficiente.
35	Carmen: ¿Basta con comparar los rectángulos?
36	Jorge: ¿Tú te acuerdas cuando trabajamos perímetro y área?
37	Pablo: ¿El problema de la isla?
38	Profesor: Sí, las islas griegas. ¿Os gustó, verdad?
39	Jorge: Había islas con área pequeña y perímetro grande... si queréis lo dibujo.
40	Pablo: Sí, está claro que área y perímetro no son lo mismo porque puedes tener muy poca área y mucho perímetro. Pero yo necesito más ejemplos. Cada ejemplo nos va a ayudar a entender un poco mejor.
41	Profesor: Área y perímetro hablan de dimensiones distintas. Busca ejemplos de eso.
42	Ana: Ni son lo mismo, ni uno es grande porque el otro lo sea. Las dimensiones son distintas.
43	Profesor: Os puedo decir que eso está caliente, caliente.
44	Pablo: Caliente... volumen y área tampoco son lo mismo, pero si sabes la fórmula de un área, según el volumen que te pidan la vas a poder usar, ¿no?
45	Ana: ¿Pero usar cómo? ¿Cómo?
46	Jorge: ¿Usar exactamente igual? ¿Base por altura?
47	Profesor: ¿Carmen? ¿Pablo? ¿Alguna idea?
48	Carmen: Hay que dar fondo al rectángulo para que se convierta en contenedor. Si no, sólo es un rectángulo. La base cuadrada no quiere decir que haya datos repetidos, sino que el contenedor tiene fondo cuadrado.
49	Profesor: ¿Pablo?
50	Pablo: Es darle fondo y altura. Si me cargo uno de los números, me cargo la caja porque falta una dimensión. Es fondo, ancho y alto.
51	Profesor: Solucionada la confusión, ¿verdad?
52	Pablo: Sí, la forma cuadrada de la base tiene que ver con la forma de la caja, pero no con los cálculos para encontrar el volumen... Mejor así que con arena.

Ejemplo de un caso del tipo "error"

Durante la fase de discusión conjunta, Pablo se equivoca al aplicar la fórmula del volumen de un prisma. Jorge, con la ayuda del profesor y de otros alumnos, pone de manifiesto el error. Esta situación da lugar a un proceso de revisión de las nociones de área y volumen y de las relaciones entre ambas. El error inicial de Pablo muestra la confusión de este alumno entre las estrategias de cálculo de áreas y volúmenes y los procesos de cálculo para cada una de estas magnitudes, pero también la confusión de otros alumnos al intentar dar explicaciones a Pablo.

En este episodio de revisión, coexisten significados muy distintos para las nociones de área y volumen. Pablo usa una representación autónoma del área (el área como magnitud mensurable). Jorge y Ana, sin embargo, utilizan una representación proyectiva (el área como parte de un volumen). Además, hay una representación aritmética de volumen y área (medida de longitudes y aplicación de fórmulas) que coexiste con una representación geométrica (visualización de cuadrículas y cubos). Durante la discusión se va construyendo una representación por dimensiones de la situación física dada (líneas y perímetro-figuras y área-cuerpos y volumen), de modo que la idea de volumen evoluciona desde la caracterización de un cuerpo mediante algunas de sus partes hasta la delimitación de un cuerpo constituido por formas inseparables.

BÚSQUEDA DE PROCESOS DE REELABORACIÓN

He documentado reelaboraciones en cuatro de los siete casos identificados. El episodio de la figura 3 es un ejemplo donde no he encontrado muestras de resolución de las dudas expresadas inicialmente por Miguel. Además de reconocer que no ha resuelto sus dudas, Miguel no confía en recibir ayuda: "Liado, liado, lo estoy bastante. ¡Y con vuestra ayuda!" Cuando el profesor sugiere iniciar la discusión conjunta, este alumno no retoma sus dudas ni pide ayuda, a pesar de que hay una pregunta abierta ("¿Por dónde queréis empezar? ¿Hay alguna duda?") que lo facilitaría. Más tarde, en su cuaderno, Miguel adopta como propia la resolución numérica de otro grupo donde no es necesario clarificar las nociones de volumen y capacidad.

En el episodio de la figura 4, hay indicios de reparación del error en la obtención del volumen de un prisma y de comprensión de los términos involucrados en la fórmula manejada. Pablo introduce tres dimensiones en el cálculo del volumen del contenedor: "Si me cargo uno de los números, me cargo la caja por-

que falta una dimensión. Es fondo, ancho y alto". Tras la explicación de Carmen, el alumno sonríe y hace gestos de haber comprendido su error. Cuando el profesor interviene para confirmar la comprensión, Pablo responde: "Sí, la forma cuadrada de la base tiene que ver con la forma de la caja, pero no con los cálculos para encontrar el volumen". Enuncia la última frase del episodio con lentitud, como si le resultara costoso verbalizar sus razonamientos o como si los estuviera formalizando a medida que los expresa. Pero es una frase construida completamente por él (no hay repetición de lo dicho por otro participante), donde relaciona los elementos de dos dimensiones del prisma con áreas.

En estos dos casos hay construcción conjunta de conocimiento matemático en cuanto que se produce un intercambio efectivo de significados e ideas (e.g., las situaciones de equivalencia entre volumen y capacidad se introducen a partir de la representación empírica de volumen propuesta por Miguel). Sin embargo, en el primero de los episodios no hay la construcción del tipo "duda y resolución" para la duda que se ha identificado. En este caso, los procesos de reelaboración no son útiles en la resolución de la distinción entre volumen y capacidad. En el segundo episodio, los enunciados que muestran la reparación del error surgen tras la reacción de Pablo ante interpelaciones directas donde otros alumnos desarrollan argumentaciones diversas. Pablo acepta la tercera dimensión en los cálculos después de haber escuchado cinco argumentos: "un rectángulo no es una caja rectangular", "área y volumen no pueden coincidir porque tienen dimensiones distintas", "si sabes la fórmula de un área, según el volumen que te pidan la vas a poder usar", "hay que dar fondo al rectángulo para que se convierta en contenedor" y "la base cuadrada no quiere decir que haya datos repetidos".

CARACTERIZACIÓN DE INTERACCIONES SOCIALES

La fase de caracterización de interacciones sociales es la que genera más datos y la que requiere más tiempo para su organización. En esta fase, exploro los episodios de revisión de significados matemáticos desde la perspectiva de las interacciones sociales en torno al alumno de cada caso. La figura 5 reproduce sólo parte del cuadro-resumen construido para el episodio de la figura 4. Indago contenidos de tipo matemático, emocional e instruccional sugeridos por interacciones producidas tras los errores cometidos por Pablo en el uso de las nociones de área y volumen. Para completar la lectura de estas interacciones conviene hacer una lectura conjunta de las figuras 4 y 5.

Figura 5 Fragmento de un cuadro-resumen de tipos de interacción

Contenidos de tipo "matemático"		Contenidos de tipo "emocional"		Contenidos de tipo "instruccional"	
Cognitivos	Discursivos	Internos	Externos	Culturales	Sociales
<p><i>Retención de datos:</i> [1] "¿De dónde salen los números que dices?" [34] "Recuerdo bien la fórmula del prisma"; Pablo antepone la memorización de datos a la comprensión de la tarea matemática.</p> <p><i>Elaboración de suposiciones:</i> [29] "Sería extraño que coincidieran" [34] "Pensé que comparando los rectángulos más grandes de cada contenedor era suficiente"; Pablo expresa ideas basadas en intuiciones.</p>	<p><i>Demanda de detalles:</i> [17] "No veo qué tienen que ver las cuadrículas y los cubos" [25] "No se me ocurriría pensar en un triángulo. ¿Qué queréis decir?"; Ana y el profesor se esfuerzan por responder a Pablo.</p> <p><i>Exposición de contraargumentos:</i> [17] "Como la base es cuadrada en los dos casos, comparamos los rectángulos grandes" [29] "Volumen tiene que ver con capacidad y área con superficie"; Pablo reacciona ante ideas de compañeros.</p>	<p><i>Sorpresa:</i> [1] "¿De dónde salen los números que dices?" [5] "¿Qué?"; después de escuchar a Jorge y a Ana, Pablo deja de asentir bruscamente y hace gestos de atender a un dato inesperado.</p> <p><i>Inhibición:</i> [15] "No lo veo, pero da igual" [20] "Él no ha dicho eso"; Pablo modera el ánimo por unos instantes y se abstiene de intervenir.</p>	<p><i>Impaciencia:</i> [5] "¿Qué?" [16] "¿Qué es lo que no ves?"; Ana se alarma ante las dudas de Pablo y se muestra algo nerviosa, hasta el punto de lanzar un bolígrafo.</p> <p><i>Paciencia:</i> [20] "Él no ha dicho eso" [35] "¿Basta con comparar los rectángulos?"; el profesor y Carmen esperan tranquilos a que Pablo se tome su tiempo.</p> <p><i>Interés:</i> [13] "¿Y qué le decimos a Pablo?" [22] "Yo ya he dicho demasiado. ¿Pablo?"; hay un interés general en escuchar los razonamientos de Pablo y darle explicaciones.</p>	<p><i>Orden por turnos:</i> [6] "Hay que hablar por turnos para que nos entendamos" [18] el profesor interpela con la mirada a Carmen; se levanta la mano y se respetan los turnos.</p> <p><i>Diferenciación de tareas:</i> [13] "¿Y qué le decimos a Pablo, que aquí base por altura está bien?" [41] "Busca ejemplos de eso"; el profesor distribuye responsabilidades y adopta un papel no directivo al que los alumnos parecen estar acostumbrados.</p>	<p><i>Neutralización de la autoridad de Ana:</i> [32] "A lo mejor se ha confundido" [47] "¿Carmen? ¿Pablo? ¿Alguna idea?"; cuando Ana pretende hablar, el profesor, Jorge y Carmen minimizan los intentos de interrumpir por parte de Ana.</p> <p><i>Apoyo a Pablo:</i> [9] "Ya sabes, lo piensa como un área" [20] "Él no ha dicho eso"; hay reacciones de defensa, protección e interpelación hacia Pablo, en especial durante sus minutos de mayor inseguridad.</p>

Figura 5 (continuación) Fragmento de un cuadro-resumen de tipos de interacción

Contenidos de tipo "matemático"		Contenidos de tipo "emocional"		Contenidos de tipo "instruccional"	
<i>Cognitivos</i>	<i>Discursivos</i>	<i>Internos</i>	<i>Externos</i>	<i>Culturales</i>	<i>Sociales</i>
<p><i>Búsqueda de un problema más simple:</i> [36] "¿Tú te acuerdas cuando trabajamos perímetro y área?" [44] "Volumen y área tampoco son lo mismo"; Pablo vincula la relación área-perímetro con área-volumen.</p>	<p><i>Uso de ejemplos:</i> [37] "¿El problema de la isla?" [44] "Si sabes la fórmula de un área, según el volumen que te pidan la vas a poder usar"; Jorge, Ana y el profesor apoyan sus razonamientos en dos ejemplos.</p>	<p><i>Interés:</i> [26] "¿Qué queréis decir?" [44] "Caliente... volumen y área tampoco son lo mismo"; Pablo desea resolver sus dudas y se implica activa y progresivamente en la conversación.</p> <p><i>Ánimo:</i> Pablo infunde ánimos a Carmen y a sí mismo con gestos y palmadas en la espalda sin traducción literal.</p>	<p><i>Curiosidad:</i> A medida que avanza el episodio, los rostros relajados de los alumnos muestran que aumenta el clima general de gusto por la discusión.</p>	<p><i>Asunción de un repertorio común:</i> [12] "Cuando éramos pequeños hacíamos cuadrículas" [36] "¿Tú te acuerdas cuando trabajamos perímetro y área?"; se hacen varias menciones a situaciones de aula compartidas.</p>	<p><i>Legitimación del alumno como interlocutor:</i> al hablar, los alumnos miran a algún compañero sin buscar de inmediato el acuerdo del profesor; el profesor interviene sin haber sido requerido.</p>

Los contenidos de tipo matemático, en las dos primeras columnas de la figura 5, están centrados en Pablo. Los descriptores cognitivos señalan la actividad mental desarrollada por el alumno, mientras que los descriptores discursivos indican situaciones de comunicación relacionadas con la discusión matemática. El objetivo no es explorar en detalle los descriptores, sino usarlos para caracterizar el escenario matemático que antecede a la reparación del error. La lectura conjunta de todos los descriptores cognitivos (Pablo retiene datos [1-3, 33-34], elabora suposiciones [29-34], recurre a un problema más simple [36-44], hace comparaciones [18-25] y reconstruye explicaciones [49-52]) ha de orientar sobre el esfuerzo cognitivo del alumno. Por otra parte, la lectura conjunta de todos los descriptores discursivos (Pablo pide detalles [17-25], expone contraargumentos [17-29], se beneficia de ejemplos [37-44], hace repetir explicaciones [21-26] y facilita síntesis [37-41]) ha de orientar sobre el papel de los otros en los procesos de revisión y cuestionamiento de significados matemáticos. Unos y otros descriptores deben entenderse como pautas de interacción social presentes en el entorno cercano a Pablo y manifestadas durante los momentos previos a la reparación del error.

Hasta este punto, he realizado una interpretación por separado de las pautas de interacción social y de los procesos de construcción de conocimiento matemático. Una de las pretensiones del modelo es establecer, de manera razonable y razonada, relaciones entre pautas de interacción y construcción de conocimiento. Sin embargo, la presencia de unas determinadas pautas de interacción social en los momentos previos a la reparación del error no implica necesariamente que algunas de estas pautas estén favoreciendo el proceso de reparación. Hay muchas explicaciones posibles para comprender las circunstancias que llevan a Pablo a reparar su error. Es posible, por ejemplo, que Pablo se dé cuenta del error por sí mismo, que recuerde la fórmula correcta del prisma rectangular sin haber recibido influencia alguna. Pero esta posibilidad es poco razonable dadas las interacciones sociales producidas: sería difícil razonar el aislamiento del alumno en medio de una actividad comunicativa muy intensa. El apartado que sigue tiene como objetivo plantear historias explicativas que consideren la información recogida en las fases anteriores del análisis y sean coherentes con ella.

ELABORACIÓN DE HISTORIAS EXPLICATIVAS

La figura 6 reproduce las historias explicativas construidas para dos casos. La columna de la izquierda contiene la historia para el episodio de la figura 4, en el que Pablo acaba estableciendo una distinción entre estrategias de cálculo y procesos de cálculo para el volumen de un prisma. La columna de la derecha se refiere al episodio de la figura 3 y se centra en los procesos de revisión de Miguel. Este alumno no resuelve sus dudas acerca de las relaciones entre volumen y capacidad y, por tanto, se trata de una historia asociada a un episodio sin reelaboración. Las tres primeras filas de cada columna responden a las síntesis de los escenarios matemático, emocional e instruccional, caracterizados en el estudio de las interacciones. La cuarta fila es el resultado de la búsqueda de relaciones entre aspectos cognitivos, discursivos, internos, externos, culturales y sociales. En el proceso de escritura, recorro al video para valorar la coherencia de la historia y revisar interpretaciones desarrolladas en fases anteriores.

En general, para cada caso, se acepta una única historia de entre más de una historia construida. El procedimiento es el siguiente: tras redactar una primera historia, la presento al profesor del aula y le pido que valore las suposiciones y relaciones entre construcción de conocimiento y pautas de interacción. El profesor acostumbra a introducir matices que llevan a un primer refinamiento de la historia. A continuación, pido la colaboración a dos investigadores, miembros del proyecto, que previamente han visto el video y han leído toda la información generada en torno al caso. Estos investigadores, que no siempre son los mismos para cada caso, pueden mostrarse conformes con la historia construida o, en su lugar, proponer una o varias historias alternativas que pueden llegar a ser muy distintas entre sí. Cuando esto último ocurre, se organiza una reunión para confrontar las distintas opciones. En todos los casos, yo soy quien decide la opción más razonable, que habitualmente suele ser el resultado de integrar aspectos de varias historias alternativas que han sido objeto de consenso.

Aunque no presento todos los datos que intervienen en la elaboración de las dos historias de la figura 6, puede seguirse parte del proceso de análisis. Las interacciones caracterizadas en la figura 5 orientan sobre los datos resaltados en la elaboración de la historia reproducida en la columna de la izquierda. En cualquier caso, la ejemplificación de dos episodios, con y sin reelaboración, mediante sus historias es un modo de mostrar la eficacia del modelo. Por otra parte, la distribución en dos columnas de un mismo cuadro de dos historias significativamente distintas ha de facilitar la tarea de comparación. Los dos ejemplos ilus-

Figura 6 Ejemplos de historias explicativas

Historia explicativa de un "episodio de revisión con reelaboración"	Historia explicativa de un "episodio de revisión sin reelaboración"
<i>Escenario matemático</i>	
<p>Hay una dificultad para comprender la relación entre área y volumen que se deriva de una confusión entre los procesos de cálculo de estas magnitudes y las estrategias para desarrollar dichos cálculos. Se recurre a la memoria (volumen del prisma y área del rectángulo), la deducción (razonamiento de 2 a 3 dimensiones), la visualización (perímetro y área de las islas griegas) y la comparación (rectángulo y triángulo, cubo y cuadrícula).</p>	<p>Hay una dificultad para comprender la relación entre volumen y capacidad que se intenta superar con estrategias de particularización (contenedor cúbico vs. contenedor rectangular) y de experimentación (rellenar con material el interior del contenedor). La utilidad de estas estrategias se descarta tras una secuencia de argumentos y contraargumentos donde se plantean y rechazan nuevas particularizaciones (capacidad y volumen en los envases).</p>
<i>Escenario emocional</i>	
<p>Destaca una actitud de resistencia hacia las ideas de algunos compañeros y de desinterés por responder a las interpelaciones directas. A medida que la discusión va incorporando a más alumnos y que el profesor interviene dando muestras de confianza, van apareciendo señales de relajamiento e incluso de entusiasmo.</p>	<p>Destaca una actitud inicial de colaboración con los compañeros de grupo y de interés en la tarea que progresivamente va derivando hacia una actitud de desesperación y una percepción negativa de la interacción con estos compañeros, para los que también disminuye el ánimo y la disposición al trabajo en grupo.</p>
<i>Escenario instruccional</i>	
<p>Se avanza con apoyo del profesor, que promueve la discusión conjunta y provoca la participación de quienes han expresado algún tipo de duda. Después de introducir una idea o dar una explicación, el profesor señala con claridad a quién cede el turno de palabra y de quién espera una escucha con atención. Los alumnos respetan los turnos establecidos y atienden las demandas del profesor.</p>	<p>Se asumen y promueven formas de trabajo autónomo (en relación con el profesor) y conjunto (en relación con los compañeros de grupo), hasta que se redirige la atención hacia los contenidos de la discusión en otro grupo y se propone considerar su enfoque. No hay interacción entre los dos grupos de trabajo hasta la fase de discusión conjunta guiada e iniciada por el profesor.</p>

Figura 6 (continuación) Ejemplos de historias explicativas

Historia explicativa de un "episodio de revisión con reelaboración"	Historia explicativa de un "episodio de revisión sin reelaboración"
---	---

Interacción entre escenarios

Pablo comete un error en la aplicación del volumen de un prisma y, aunque inicialmente no parece interesado en reparar su error, acaba avanzando debido a: la gestión de la participación por parte del profesor, el énfasis colectivo en la discusión conjunta, la neutralización de las intervenciones de Ana, los argumentos correctos expuestos por otros alumnos, las interpretaciones de estos argumentos desarrolladas por el profesor y su capacidad por relacionar conocimientos previos con argumentos expuestos.

Miguel expresa dudas en torno a la relación entre volumen y capacidad e inicialmente hace esfuerzos cognitivos (busca analogías, particulariza..) y sociales (atiende a otros alumnos, contraargumenta..) por obtener información. Poco después, deja de insistir, dando muestras de cansancio, de resistencia a tareas que exigen pensar y de falta de confianza en las posibles aportaciones de sus compañeros de grupo, que han dejado de interesarse en la discusión y han cuestionado abiertamente las oportunidades de avanzar.

tran algunas de las tendencias más destacadas en las interacciones que conforman el grupo de episodios de revisión con reelaboración y en las del grupo sin reelaboración, así como algunos contrastes entre tendencias.

COMPARACIÓN DE CASOS

En la descripción del modelo, he hablado de una fase final de comparación entre los episodios identificados en las cuatro sesiones de clase. En este apartado sólo me refiero a la comparación llevada a cabo entre los siete episodios de la sesión que ejemplifico. Las tendencias expuestas en las columnas de la figura 7 surgen de la exploración conjunta de las historias explicativas correspondientes a los dos grupos de episodios. Cada una de las tendencias no está necesariamente presente en todas las historias de un grupo: las tendencias de la columna de la izquierda aparecen al menos en tres de los cuatro episodios con reelaboración, mientras que las tendencias de la columna de la derecha aparecen al menos en dos de los tres episodios sin reelaboración. Por otra parte, la identificación de tendencias de la columna de la izquierda en un episodio cualquiera no debe confundirse con la identificación de procesos de reelaboración de significados. Los episodios con reelaboración de la sesión de clase estudiada tienen en

Figura 7 Tendencias para los dos grupos de episodios

Caracterización parcial del grupo "revisión con reelaboración"	Caracterización parcial del grupo "revisión sin reelaboración"
<i>Tendencias en el escenario matemático</i>	
<ul style="list-style-type: none"> • Ejemplificación de situaciones matemáticas análogas o similares. • Propuesta compartida y desarrollo conjunto de estrategias informales de razonamiento. • Búsqueda de problemas más simples. 	<ul style="list-style-type: none"> • Énfasis en las fases de planificación y organización de los procesos de razonamiento. • Uso fallido de la memoria y rechazo sin argumentación de razonamientos intuitivos. • Exposición de argumentos sin réplica.
<i>Tendencias en el escenario emocional</i>	
<ul style="list-style-type: none"> • Evolución gradual del alumno hacia reacciones de mayor tranquilidad y confianza. • Receptividad y satisfacción ante las aportaciones de los otros. • Dominio de un clima de curiosidad y ánimo en torno a la tarea matemática. 	<ul style="list-style-type: none"> • Alternancia de reacciones emocionales positivas y negativas por parte del alumno. • Cuestionamiento del sentido de la tarea y de la utilidad de colaborar en su resolución. • Dominio de un clima de impaciencia y de desconfianza hacia aportaciones de los otros.
<i>Tendencias en el escenario instruccional</i>	
<ul style="list-style-type: none"> • Diferenciación de tareas y distribución de responsabilidades en el proceso de revisión. • Comunicación entre alumnos promovida de manera explícita por el profesor. • Dedicación de un tiempo a la reflexión sobre el proceso y la recapitulación de ideas. 	<ul style="list-style-type: none"> • Falta de apoyo de alumnos que no dan prioridad a la clarificación de significados. • Insistencia del profesor y de algún alumno en la necesidad de optimizar el tiempo disponible. • Interrupción de procesos de razonamiento verbal para escritura de ideas en la pizarra.
<i>Tendencias en la interacción entre escenarios</i>	
<ul style="list-style-type: none"> • Organización de momentos de recapitulación y síntesis exigidos por algún alumno. • Reconocimiento de estrategias alternativas de razonamiento mediante conversaciones iniciadas y promovidas por el profesor. • Aumento del interés por las preguntas del profesor y las respuestas de los compañeros. 	<ul style="list-style-type: none"> • Demandas intermitentes de ayuda a los otros en función de las muestras de apoyo y rechazo. • Oposición a la autoridad del profesor y a la colaboración con determinados alumnos a raíz de algunas de sus intervenciones. • Pérdida de concentración por desorden en los turnos de habla y en la exposición de ideas.

común una “evolución gradual del alumno hacia reacciones de mayor tranquilidad y confianza”, una “búsqueda de problemas más simples”, una “organización de momentos de síntesis y recapitulación”, etc. Sin embargo, el modelo de análisis no garantiza que, al darse estos contenidos, se resuelvan dudas, se reparen errores o se superen bloqueos.

Para la redacción de tendencias dentro de cada grupo, tomo los descriptores elaborados en la caracterización de interacciones y busco coincidencias de títulos en los cuadros-resumen de los casos. Cuando encuentro coincidencias, voy a las historias explicativas y valoro la importancia de estos descriptores en el conjunto de interacciones de cada episodio. Este proceso lleva a establecer tendencias como, por ejemplo, “Reconocimiento de estrategias alternativas de razonamiento mediante conversaciones iniciadas y promovidas por el profesor”. El enfoque del artículo justifica que no explique el proceso de construcción de cada tendencia ni discuta en profundidad las diferencias y similitudes entre grupos de episodios. Aun así, una lectura atenta de la figura 7 orienta sobre la gran diferencia entre las condiciones dadas por las pautas de interacción social en unos y otros episodios. Se observa, entre otros aspectos, que a pesar de haber en ambos casos un escenario matemático de fuerte implicación cognitiva, los escenarios emocionales e instruccionales tienen signos muy distintos.

CONCLUSIONES

En este artículo he señalado la contribución del análisis de videos a la investigación en educación matemática. He revisado el uso del video en distintas investigaciones y he presentado el modelo de análisis utilizado en un estudio en torno a las relaciones entre construcción de conocimiento matemático e interacción social. El modelo de análisis debe interpretarse de un modo flexible que se adapte a las circunstancias de cada grupo de investigación. La elaboración de un informe descriptivo acerca de los contenidos del video, por ejemplo, no es estrictamente necesaria. Otro investigador puede decidir que ver el video una o más veces es suficiente antes de proceder a identificar episodios de revisión y reelaboración. Aún otro investigador puede decidir incluso que los episodios de reelaboración son identificables sin necesidad de explorar primero los de revisión.

El modelo de análisis no es reducible al análisis de transcripciones. En todas las fases recorro a los contenidos del video. Las transcripciones que elaboro son parciales, relativas a los episodios de revisión y, cuando las descompongo en in-

teracciones, vuelvo sobre el video para incluir en el análisis las acciones de tipo no verbal. El hecho de volver una y otra vez a los contenidos del video tiene que ver con un cierto posicionamiento teórico sobre los procesos de aprendizaje. Podría haber interpretado que una lectura en profundidad de los textos extraídos del video bastaría para indagar factores de influencia en los procesos de construcción de conocimiento matemático. De acuerdo con esto, los datos principales procederían de la transcripción del video. Sin embargo, desde una perspectiva sociocultural, la interacción social no puede reducirse a un análisis textual basado en una identificación estricta de procesos de explicación, argumentación, justificación, etc. Las implicaciones de una argumentación están relacionadas con quién argumenta, en qué contexto lo hace, de qué modo, etcétera.

El modelo de análisis también está condicionado por mi interpretación de los procesos de construcción de significados. Supongo que la construcción de conocimiento es un proceso de reelaboración de conocimientos previos cuya revisión se activa a partir de la interacción con distintos tipos de información. Para la identificación de episodios de revisión y reelaboración, indago formas individuales de representación de duda, error y bloqueo, de modo que caracterizo parte de la actividad matemática en función de estas formas. Esto significa que examino habla, texto, gestos y acciones. Si un alumno toma el contenedor construido y lo mira por dentro, interpreto esta acción como la expresión de una actividad matemática de tipo figurativo que parte de las características físicas y geométricas de un objeto referenciado. Si el mismo alumno frunce el ceño al observar el contenedor, este gesto expresa un conflicto entre representaciones o la dificultad por concretar una representación interna sobre aspectos relacionados con la tarea.

Mi interpretación de la tarea de investigación es otro factor que influye en la construcción y desarrollo del modelo. Aunque la responsabilidad de un estudio recae en el investigador principal, los procesos de análisis se enriquecen con la diversidad de perspectivas y con las actividades de introspección. Las características del investigador condicionan el análisis del mismo modo, e incluso más, que las del grupo investigado. Esto hace recomendable confrontar las decisiones del investigador principal. Para la elaboración de las historias explicativas y para la comparación entre historias, he colaborado con otros investigadores con posicionamientos teóricos similares a los míos, y he consultado mis interpretaciones con el profesor del aula. La colaboración con otros investigadores ha garantizado la confiabilidad del modelo. En la elaboración de historias, ha tenido lugar un ejercicio sistemático de formulación de narraciones alternativas, facilitado por las di-

ferentes miradas de cada investigador. La revisión del video y la discusión colectiva han servido para aceptar y rechazar historias.

El estudio se centra en una única aula y se aplica a cuatro sesiones de clase. El carácter reducido en cuanto a la población y la aplicación del modelo limitan el conocimiento de las relaciones entre construcción de significados matemáticos e interacción social. Sin embargo, pueden extraerse conclusiones acerca de la validez del modelo. Se trata de un modelo que permite establecer diferencias entre los episodios de revisión de significados que concluyen en procesos de reelaboración y aquéllos donde no hay reelaboración. Además, la aplicación del modelo sugiere conexiones entre estas diferencias y el tipo de interacciones sociales que predominan en unos y otros episodios. Un modelo de análisis de video centrado en la transcripción completa del video difícilmente habría sugerido las mismas conexiones. La caracterización de las interacciones sociales que parecen influir en la (no) reelaboración de significados matemáticos incluye referencias a la situación social en el aula. Por ejemplo, tendencias como "Interrupción de procesos de razonamiento verbal" tienen que ver con aspectos no reducibles a un análisis conversacional de texto y habla.

Para explorar la situación social en el aula, se requiere un análisis directo y continuado de los contenidos del video. No obstante, estos contenidos son insuficientes. El acceso a los motivos por los cuales se produce una "interrupción" requiere incorporar de manera más detallada las perspectivas de los participantes, junto con una "historia de vida" del grupo clase. Para futuros trabajos, las relaciones obtenidas entre construcción de conocimiento e interacción social han de servir para justificar la necesidad de introducir entrevistas individuales y de grupo que informen sobre la situación social generada en el aula. En un futuro inmediato también conviene realizar un análisis conjunto de los casos que aquí se han estudiado por separado. El análisis de casos de construcción conjunta de conocimiento matemático mediante el estudio de episodios de revisión informa sobre la relevancia de ciertas pautas de interacción social en la reconstrucción de significados matemáticos concretos. Urge indagar en qué medida una visión global de estos casos ha de aportar mayor comprensión sobre los mecanismos de influencia de la interacción social en los procesos de construcción de conocimiento matemático.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bielaczyc, K. y A. Collins (1999), "Learning Communities in Classrooms: A Reconceptualization of Educational Practices", en C. Reigeluth (ed.), *Instructional Design Theories and Models: A New Paradigm of Instructional Theory*, Londres, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 269-292.
- Brodie, K. (2001), "Teacher Intervention in Small-Group Work", *For the Learning of Mathematics*, vol. 20, núm. 1, pp. 9-16.
- Castelnuovo, E. (1993), *Pentole, ombre e formiche*, Italia, Nuova Italia.
- César, M. e I. Oliveira (2005), "The Curriculum as a Tool for Inclusive Participation: Students' Voices in a Case Study in a Portuguese Multicultural School", *European Journal of Psychology of Education*, vol. 20, núm. 1, pp. 29-44.
- Clement, J. (2000), "Analysis of Clinical Interviews: Foundations and Model Viability", en A.E. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of Research Data Design in Mathematics and Science Education*, Mahwah, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 547-589.
- Cobb, P. y J.W. Whitenack (1996), "A Method for Conducting Longitudinal Analysis of Classroom Videorecordings and Transcripts", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 30, núm. 1, pp. 213-228.
- Dekker, R. y M. Elshout-Mohr (2004), "Teacher Interventions Aimed at Mathematical Level Raising during Collaborative Learning", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 56, núm. 1, pp. 39-65.
- Dörfler, W. (2000), "Means for Meaning", en P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (eds.), *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms: Perspectives on Discourse, Tools, and Instructional Design*, Mahwah, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 99-131.
- Elbers, E. y M. de Haan (2005), "The Construction of Word Meaning in a Multicultural Classroom: Mediational Tools in Peer Collaboration during Mathematics Lessons", *European Journal of Psychology of Education*, vol. 20, núm. 1, pp. 45-60.
- Forman, E. A. y E. Ansell (2002), "Orchestrating the Multiple Voices and Incriptions of a Mathematics Classroom", *The Journal of the Learning Sciences*, vol. 11, núms. 2-3, pp. 251-274.
- Freire, S. y M. César (2003), "Inclusive Ideals/Inclusive Practices: How Far is Dream from Reality? - Five Comparative Case Studies", *European Journal of Special Needs Education*, vol. 18, núm. 3, pp. 341-354.
- Kumpulainen, K. (2005), "When Effective Becomes Meaningful and when Learning Becomes Participation: Conceptual Shifts in Research on Social Interaction in

- Learning and Instruction”, en C.P. Constatinou y otros (eds.), *Integrating Multiple Perspectives on Effective Learning Environments*, Nicosia, University of Cyprus, pp. 339-349.
- Lerman, S. (2001), “Accounting for Accounts of Learning Mathematics: Reading the ZPD in Videos and Transcripts”, en D. Clarke (ed.), *Perspectives on Practice and Meaning in Mathematics and Science Classrooms*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 53-74.
- Lerman, S. y R. Zevenbergen (2004), “The Socio-political Context of the Mathematics Classroom: Using Bernstein’s Theoretical Framework to Understand Classroom Communications”, en P. Valero y R. Zevenbergen (eds.), *Researching the Socio-political Dimensions of Mathematics Education: Issues of Power in Theory and Methodology*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 27-42.
- Loizos, P. (2000), “Video, Film and Photographs as Research Documents”, en M.W. Bauer y G. Gaskell (eds.), *Qualitative Research with Text, Image and Sound*, Londres, Sage, pp. 44-66.
- Morera, D. (2001), “El informe sociométrico en el contexto escolar”, en A. Rodríguez y D. Morera (eds.), *El sociograma: estudio de las relaciones informales en las organizaciones*, Madrid, Pirámide, pp. 123-148.
- O’Toole, S. y G. Abreu (2005), “Parents’ Past Experiences as a Mediation Tool for Understanding their Child’s Current Mathematical Learning”, *European Journal of Psychology of Education*, vol. 20, núm. 1, pp. 75-90.
- Pirie, S.E.B. (1998), “Where do We Go from Here?”, en A.R. Teppo (ed.), *Qualitative Research Methods in Mathematics Education*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 156-163.
- Planas, N. (2001), *Obstacles en l’aprenentatge matemàtic: la diversitat d’interpretacions de la norma*, tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, España.
- (2004), “Metodología para analizar la interacción entre lo cultural, lo social y lo afectivo en educación matemática”, *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 22, núm. 1, pp. 19-36.
- (2005), “El papel del discurso en la construcción del Discurso de la práctica matemática”, *Cultura y Educación*, vol. 17, núm. 1, pp. 19-34.
- Powell, A.B. (2003), “So Let’s Prove It!” *Emergent and Elaborated Mathematical Ideas and Reasoning in the Discourse and Inscriptions of Learners Engaged in a Combinatorial Task*, tesis doctoral, The State University of New Jersey, Estados Unidos.
- Powell, A.B. y C.A. Maher (2002), “Inquiry into the Interlocution of Students Engaged with Mathematics: Appreciating links between Research and Practice”, en

- D.S. Mewborn y otros (eds.), *Proceedings of the 24th Annual Meeting of the North American Chapter of the PME Group*, Columbus, Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education, pp. 317-329.
- Powell, A.B., J.M. Francisco, y C.A. Maher (2003), "An Analytical Model for Studying the Development of Learners' Mathematical Ideas and Reasoning Using Videotape Data", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 22, núm. 4, pp. 405-435.
- Prenzel, M. y T. Seidel (2002), "Videostudie zum Physikunterricht", *Lehrerinfo*, vol. 4, p. 4.
- Roschelle, J. (2000), "Choosing and Using Video Equipment for Data Collection", en A.E. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of Research Data Design in Mathematics and Science Education*, Mahwah, Lawrence Erlbaum, pp. 709-731.
- Ryve, A. (2004), "Can Collaborative Concept Mapping Create Mathematically Productive Discourses?", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 56, núm. 3, pp. 157-177.
- Seidel, T., M. Prenzel y L. Hoffmann (2001), "A Videotape Classroom Study about Teaching and Learning in Physics Classes: Teaching Characteristics and Student's Cognitive Learning Activities", en M. Grossen y otros (eds.), *Proceedings of the 9th Conference of the European Association for Research on Learning and Instruction*, Fribourg, University of Fribourg, pp. 35-39.
- Sfard, A. (2001), "There is More to Discourse than Meets the Ears: Looking at Thinking as Communication to Learn More about Mathematical Learning", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 46, núm. 1, pp. 13-57.
- Stigler, J.W., P. Gonzales, T. Kawanaka, S. Knoll y A. Serrano (1999), *The TIMMS Videotape Classroom Study: Methods and Findings from an Exploratory Research Project on Eighth-Grade Mathematics Instruction in Germany, Japan, and the United States*, Washington, Department of Education, National Center for Education Statistics.
- Ten Dam, G., M. Volman y W. Wardekker (2004), "Making Sense through Participation: Social Differences in Learning and Identity Development", en J. van der Linden y P. Renshaw (eds.), *Dialogic Learning: Shifting Perspectives to Learning, Instruction, and Teaching*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 63-85.
- Van der Linden, J., G. Erkens, H. Schmidt y P. Renshaw (2000), "Collaborative Learning", en P. Simons, J. van der Linden y T. Duffy (eds.), *New Learning*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 37-54.
- White, D. (2003), "Promoting Productive Mathematical Classroom Discourse with Diverse Students", *The Journal of Mathematical Behavior*, vol. 22, núm. 1, pp. 37-53.

Wood, T. (1999), "Creating a Context for Argument in Mathematics Class", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 30, núm. 2, pp. 171-191.

DATOS DE LA AUTORA

Núria Planas

Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales,
Universidad Autónoma de Barcelona, España

Nuria.Planas@uab.es