



Robson Alexandrino Trevizan Santos

Bifurcações em Sistemas Dinâmicos Suaves por Partes

São José do Rio Preto

2013

Robson Alexandrino Trevizan Santos

Bifurcações em Sistemas Dinâmicos Suaves por Partes

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Sistemas Dinâmicos, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi

Coorientador: Prof. Dr. Tiago de Carvalho

São José do Rio Preto

2013

Robson Alexandrino Trevizan Santos

Bifurcações em Sistemas Dinâmicos Suaves por Partes

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Sistemas Dinâmicos, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Tiago de Carvalho
Professor Assistente Doutor
UNESP - Bauru
Coorientador

Prof. Dr. Durval José Tonon
Professor Adjunto
Universidade Federal de Goiás - UFG

Profa. Dra. Luci Any Francisco Roberto
Professor Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 28 de fevereiro de 2013.

Dedico este trabalho aos meus pais,
Eva e João, e aos meus irmãos
Suelen e Marlon.

Agradecimentos

Agradeço:

A Deus, por me permitir chegar até aqui.

Ao Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi por tudo: pela grande receptividade no início do mestrado, pelos conhecimentos transmitidos nas disciplinas, pela confiança depositada em mim ao aceitar me orientar, pelo enorme apoio e dedicação ao meu trabalho.

Ao Prof. Dr. Tiago de Carvalho, pelo excelente trabalho de orientação, pelas importantes dicas e ensinamentos, por sua enorme paciência e disposição.

A minha querida família, pelo apoio crescente desde o início dos estudos, por compreenderem os momentos de ausência, pelos incentivos nos momentos difíceis, pelo estímulo e torcida depositados sobre mim. Agradeço em especial minha mãe, pelo carinho, por me escutar, me compreender e me ajudar a superar todos os obstáculos.

Aos meus amigos de mestrado Gustavo, Letícia, Willian, Juliana, Jhony, Gislaine, Flavio, Rodrigo, Edcarlos, Camila e todos os outros colegas da pós-graduação que estiveram envolvidos comigo durante este trabalho, pelo agradável convívio e por compartilhar dos bons e maus momentos.

Aos professores dos Departamentos de Matemática do IBILCE/UNESP e FEIS/UNESP, por todo conhecimento transmitido no mestrado e graduação. Em especial, agradeço meus orientadores de graduação Prof. Dr. Osmar Aléssio e Prof. Dr. Edson Donizete de Carvalho.

À CAPES pelo apoio financeiro.

“Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de atingir a meta.”

Carl Friedrich Gauss

Resumo

A presente dissertação é um estudo de bifurcações de pontos de equilíbrio em sistemas dinâmicos suaves por partes com uma única fronteira de descontinuidade. O objetivo deste trabalho é investigar os cenários que podem surgir nos retratos de fase, de duas classes específicas de sistemas, quando um parâmetro real age como perturbação do sistema inicial. Particularmente estudamos bifurcações para pontos de equilíbrio de fronteira. Damos atenção especial aos sistemas planares, onde observa-se o aparecimento de ciclos limite. Além disso, dedicamos uma seção ao estudo de bifurcações “grazing-sliding”, quando ocorre a colisão de um ciclo limite com a fronteira de descontinuidade. Procuramos exemplificar o texto com aplicações.

Palavras-chave: Bifurcações, grazing-sliding, sistemas de Filippov.

Abstract

This work is a study of bifurcations of equilibrium points in piecewise-smooth dynamical systems with a single boundary discontinuity set. The goal of this study is to investigate the scenarios that can arise in the phase portraits, for two special class of systems, when a real parameter acts a perturbation of the unperturbed system. Particularly, we study bifurcations of boundary equilibrium points. We give special attention to planar systems, where it can arise limit cycles. In addition, we dedicate a section studying ‘grazing-sliding’ bifurcations, when it occurs the collision of a limit cycle with the boundary discontinuity set. We try to illustrate the text with applications.

Keywords: *Bifurcations, grazing-sliding, Filippov systems.*

Sumário

Introdução	10
1 Teoria qualitativa de sistemas dinâmicos suaves por partes	13
1.1 Sistemas dinâmicos suaves	13
1.1.1 Estabilidade assintótica e estrutural	16
1.1.2 Bifurcações de sistemas suaves	19
1.2 Sistemas dinâmicos suaves por partes	20
1.2.1 Campos deslizantes	23
1.2.2 Estabilidade e bifurcação de sistemas suaves por partes	26
2 Bifurcações em pontos de equilíbrio de fronteira	28
2.1 Fluxos contínuos suaves por partes	29
2.1.1 Classificação dos cenários mais simples	34
2.1.2 O circuito de Chua	39
2.1.3 Sistemas contínuos suaves por partes no plano	45
2.2 Fluxos de Filippov	49
2.2.1 Classificação dos casos possíveis	54
2.2.2 Sistemas de Filippov planares	57
3 Bifurcações grazing-sliding	67
3.1 Colisão de um ciclo limite com a fronteira	67
3.1.1 Modelo Presa-Predador	71
Referências Bibliográficas	75

Introdução

A teoria dos sistemas dinâmicos é fruto de um longo desenvolvimento científico. Determinar sua origem não é uma tarefa simples. No entanto, podemos identificar rudimentos desta teoria já no século XVI, nos trabalhos de mecânica celeste de Johannes Kepler e na formalização da mecânica clássica de Isaac Newton. Considerados fundadores da teoria moderna dos sistemas dinâmicos, os matemáticos Aleksander Lyapunov e Henri Poincaré introduziram vários conceitos da análise qualitativa das equações diferenciais, tais como estabilidade de soluções, comportamento assintótico, entre outros.

Dentro desta abrangente área, o estudo dos sistemas dinâmicos suaves por partes (ou sistemas não-suaves) é recente e tem ganhado grande destaque no cenário da pesquisa científica. Os trabalhos pioneiros de Andronov [1] sobre bifurcações em sistemas não-suaves, e Filippov [3] sobre movimento deslizante, forneceram a base para o desenvolvimento desta linha de pesquisa.

Assim, motivados pelos crescentes avanços no desenvolvimento desta teoria e pelas questões em aberto ainda existentes, realizamos um estudo de bifurcações em sistemas dinâmicos suaves por partes. Tais sistemas são dados por um conjunto finito de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{x} = F_i(x, \mu), \quad x \in S_i, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

onde S_i é um aberto de \mathbb{R}^n e cada interseção não vazia $S_i \cap S_j$ é uma variedade $(n - 1)$ -dimensional, chamada fronteira de descontinuidade.

Dentre as aplicações estudadas destacamos o circuito de Chua, cuja dinâmica pode ser dada

por um sistema 3-dimensional do tipo

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha(y - x - h(x)) \\ \dot{y} &= x - y + z \\ \dot{z} &= -\beta y \end{cases},$$

onde h representa a característica do resistor não-linear (um dos elementos que compõem o circuito). Este modelo pode ser abordado do ponto de vista de sistemas suaves por partes, onde as fronteiras de descontinuidade são induzidas pela função h .

No intuito de auxiliar a compreensão dos conceitos e resultados desenvolvidos, optamos por inserir diversas figuras nos exemplos, demonstrações e até mesmo em algumas definições.

Estruturamos este trabalho da seguinte maneira:

Capítulo 1: Apresentamos os conceitos que serão utilizados no decorrer do trabalho, entre eles definições formais de sistemas dinâmicos suaves por partes, fronteira de descontinuidade, grau de suavidade, campos deslizantes, e bifurcações induzidas pela descontinuidade. Antes disso, apresentamos uma breve introdução à teoria qualitativa de sistemas dinâmicos suaves.

Capítulo 2: Tratamos de bifurcações de pontos de equilíbrio de fronteira em sistemas com grau de suavidade uniforme. Analisamos os cenários de bifurcação que ocorrem em tais sistemas através da perturbação de um parâmetro real. Dividimos esta análise em duas seções, tratando este estudo para fluxos contínuos suaves por partes e fluxos de Filippov separadamente. Neste capítulo, fornecemos também alguns exemplos de aplicações com abordagem de sistemas não-suaves.

Capítulo 3: Apresentamos uma classe específica de bifurcação global em um sistema de Filippov planar conhecida como bifurcação grazing-sliding, a qual envolve deslize na colisão de um ciclo com a fronteira de descontinuidade. Fornecemos um exemplo deste tipo de bifurcação através de uma bifurcação de Hopf padrão de sistemas suaves. Além disso, estudamos um exemplo de aplicação apresentando esse fenômeno.

A estrutura deste trabalho é baseada no livro [2] e complementada pelas referências [8] e [13]. Além destas, as obras [5], [6] e [11] também foram utilizadas como base para as definições e teoria de sistemas suaves, nas quais constam as demonstrações dos resultados clássicos enunciados. Para as aplicações e exemplos, consultamos alguns trabalhos (veja [7], [9], [10], [13]) com o intuito de aprofundar os exemplos expostos em [2].

Claramente, toda a teoria aqui discutida é apoiada em diversas obras de grande importância para o desenvolvimento da teoria de sistemas dinâmicos não-suaves, dentre as quais destacamos [1], [3] e [4].

Teoria qualitativa de sistemas dinâmicos suaves por partes

O objetivo deste capítulo é expor de forma sucinta a estrutura matemática e as notações que utilizaremos no decorrer deste trabalho. Começamos apresentando uma breve introdução a teoria qualitativa para sistemas dinâmicos suaves, incluindo uma rápida revisão de bifurcações para tais sistemas, destacando que estas também fazem sentido para sistemas suaves por partes. Em seguida, introduzimos formalmente os sistemas dinâmicos suaves por partes, dos quais abordaremos basicamente duas categorias: os sistemas contínuos suaves por partes e os sistemas de Filippov. Apresentamos também os conceitos de estabilidade estrutural e bifurcação para sistemas suaves por partes. A definição prática de bifurcação induzida pela descontinuidade (DIB) é dada a partir de um ponto de vista topológico.

1.1 Sistemas dinâmicos suaves

Começamos com uma definição formal de um sistema dinâmico e recordamos os conceitos essenciais da teoria de sistemas dinâmicos suaves que também podem ser aplicados a sistemas não-suaves. A grosso modo, sistemas dinâmicos são sistemas cujos estados evoluem ao longo do tempo. Conhecendo-se o estado presente do sistema e as leis que regem sua evolução, o comportamento de um sistema desse tipo pode ser previsto, em certa medida, desde que essas leis não se alterem com o tempo. Assim, um sistema dinâmico pode ser definido através de três

componentes: um espaço de seus estados possíveis (espaço de estados), um conjunto não-vazio representando o espaço de tempo, e uma lei de evolução de estado no tempo.

Seja X um espaço de estados. Podemos definir um operador ϕ em X que evolui elementos x_0 previamente conhecidos através de um “tempo” t para um estado x_t :

$$\begin{aligned}\phi^t : X &\rightarrow X \\ x_0 &\mapsto \phi^t(x_0) = x_t\end{aligned}$$

O tempo t assume valores em um conjunto de índices \mathcal{T} , o qual geralmente é discreto (os inteiros \mathbb{Z}) ou contínuo (os números reais \mathbb{R}). O operador ϕ^t é chamado um **operador evolução** e define um sistema dinâmico quando munido de uma estrutura de semi-grupo.

Definição 1.1 *Um espaço de estados X , um conjunto de tempo \mathcal{T} e um operador evolução ϕ^t definem um **sistema dinâmico** se*

- (i) $\phi^0(x) = x$, para todo $x \in X$,
- (ii) $\phi^{t+s}(x) = \phi^t(\phi^s(x))$, para todo $x \in X$ e para todos $t, s \in \mathcal{T}$ em que ambos os membros da equação estão definidos.

A Definição 1.1 é bastante geral e engloba as duas grandes vertentes da teoria dos sistemas dinâmicos, a saber, os sistemas dinâmicos de tempo contínuo e os de tempo discreto. Vamos considerar aqui apenas sistemas do primeiro tipo, isto é, quando \mathcal{T} for um intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

Considere um sistema de **equações diferenciais ordinárias (EDOs)**

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

onde \mathcal{D} é um domínio (aberto e conexo) e $F : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo de vetores suficientemente diferenciável (suave). Se definirmos $X = \mathcal{D}$, $\mathcal{T} = I \subset \mathbb{R}$ e $\phi^t(x) = \varphi(x, t)$, onde $\varphi(x, t)$ é o **fluxo** que leva a condição inicial x para sua solução no momento t :

$$\varphi(x, 0) = x, \quad \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t) = F(\varphi(x, t)), \quad (1.2)$$

então $\{X, \mathcal{T}, \phi^t\}$ define um sistema dinâmico de tempo contínuo.

A partir de agora, quando escrevermos ‘sistemas dinâmicos’, ficará subentendido que estamos tratando de sistemas de tempo contínuo, isto é, quando o operador evolução for um fluxo gerado por um sistema de EDOs dados por (1.1) e (1.2).

Dizemos que um sistema dinâmico é **suave de índice r** , ou C^r , se as r primeiras derivadas de φ em relação a x existem e são contínuas em todo ponto $x \in X$. Assim, se supormos o campo F em (1.1) de classe C^{r-1} para algum $r \geq 2$, então (1.2) implica que o fluxo $\varphi(x, t)$ é um índice mais suave e portanto o sistema dinâmico $\{\mathcal{D}, I, \varphi\}$ é C^r .

Definição 1.2 O subconjunto $\mathcal{O}(x_0) = \{x \in \mathcal{D} : x = \varphi(x_0, t), t \in I\}$ chama-se **órbita** através do ponto x_0 . O **retrato de fase** do sistema dinâmico é o particionamento do espaço de estados em órbitas.

Definição 1.3 Um ponto $x_0 \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ é dito um **ponto de equilíbrio** de (1.1) se $F(x_0) = 0$.

Definição 1.4 Um **ciclo** (ou uma **órbita fechada**) é uma órbita periódica, ou seja, uma órbita γ não reduzida a um ponto tal que cada ponto $x \in \gamma$ satisfaz $\varphi(x, t + t_0) = \varphi(x, t)$ para algum $t_0 > 0$.

Definição 1.5 Uma órbita fechada γ em uma vizinhança na qual não existem outros ciclos é chamada um **ciclo limite**.

O conceito de isóclina é de grande utilidade pois permite analisar o comportamento de um sistema dinâmico, principalmente no caso planar.

Considere um sistema suave $\dot{x} = F(x)$, com $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D}$ e $F = (f_1, \dots, f_n)$, isto é,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1.3)$$

A x_j -**isóclina** de (1.3) é o conjunto dos pontos em \mathcal{D} onde \dot{x}_j se anula, isto é, o conjunto dos pontos determinado por $f_j(x_1, \dots, x_n) = 0$. As x_j -isóclinas geralmente separam $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ em um conjunto de regiões, em cada uma das quais o campo de vetores F tem uma “determinada direção”.

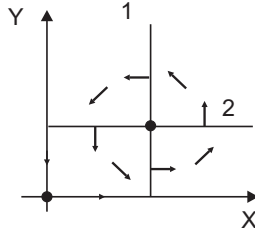


Figura 1.1: Isóclinas e direções do campo de vetores $F(x_1, x_2) = (x_1(a - bx_2), x_2(-c + dx_1))$.

1.1.1 Estabilidade assintótica e estrutural

Geralmente, ao considerar aplicações físicas, é de interesse que a dinâmica do sistema apresente um comportamento estável, isto é, que o estado final da dinâmica não se altere por pequenas alterações nas condições iniciais.

Definição 1.6 Um ponto de equilíbrio x_0 de (1.1) é (**Lyapunov**) **estável** se para toda vizinhança $U_1 \subset \mathcal{D}$ de x_0 existe uma vizinhança $U_2 \subset U_1$ de x_0 tal que toda solução $\varphi(t)$ de (1.1) com $\varphi(0) \in U_2$ está definida e em U_1 para todo $t \geq 0$.

Definição 1.7 Um ponto de equilíbrio x_0 de (1.1) é dito **assintoticamente estável** se:

1. x_0 é (Lyapunov) estável;
2. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = x_0$, diminuindo U_2 se necessário.

Definição 1.8 Seja x_0 um ponto de equilíbrio de $\dot{x} = F(x)$, onde $F : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo suave. Seja $L : W \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável numa vizinhança $W \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 . Dizemos que L é uma **função de Lyapunov** de F em x_0 se:

1. $L(x_0) = 0$ e $L(x) > L(x_0)$ para cada $x \in W \setminus \{x_0\}$;
2. $\dot{L}(x) = \frac{\partial}{\partial t}(L(\varphi(t, x)))|_{t=0} \leq 0$ em W .

Se $\dot{L} < 0$ em $W \setminus \{x_0\}$, dizemos que L é uma **função de Lyapunov estrita**.

Teorema 1.1 *Seja $x_0 \in \mathcal{D}$ um ponto de equilíbrio para o sistema dinâmico suave (1.1) .*

1. *Se existe uma função de Lyapunov $L : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de F em x_0 , então x_0 é estável;*
2. *Se existe uma função de Lyapunov estrita $L : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de F em x_0 , então x_0 é assintoticamente estável.*

A demonstração deste teorema, também conhecido por Critério de Lyapunov, pode ser encontrada em [11].

Um dos objetivos da teoria de sistemas dinâmicos é o de classificar a dinâmica qualitativamente. Informalmente, sistemas estruturalmente estáveis são aqueles em que todos os sistemas “próximos” possuem dinâmica qualitativamente “equivalente”. A noção de proximidade e equivalência deve, portanto, ser formalizada.

Vamos denotar por $\Omega^r = \Omega^r(\mathcal{D})$ o espaço dos campos de vetores de classe C^r em \mathcal{D} , $r \geq 1$. Consideramos em Ω^r a topologia C^r , cujas vizinhanças básicas de raio ε de um campo $F_0 \in \Omega^r$ são dadas por $\mathcal{V}(F_0, \varepsilon) = \{F \in \Omega^r; \|F - F_0\|_r < \varepsilon\}$, onde

$$\|F\|_r = \max_{x \in \mathcal{D}} \{\|F\|, \|DF\|, \dots, \|D^r F\|\}. \quad (1.4)$$

Observação 1.1 *Aqui, $\|\cdot\|$ denota a norma de vetores e/ou matrizes em \mathbb{R}^n , ou seja,*

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad , \quad \|A\| = \sqrt{\sum_{ij=1}^n a_{ij}^2},$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $A = (a_{ij})$.

Considere dois sistemas dinâmicos

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n, \quad (1.5)$$

$$\dot{x} = G(x), \quad x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n, \quad (1.6)$$

onde F, G são campos suaves em \mathcal{D} . Dizemos que os sistemas (1.5) e (1.6) estão ε -**próximos** em \mathcal{D} se $\|F - G\|_r < \varepsilon$ para algum $\varepsilon > 0$, ou equivalentemente, se $F, G \in \Omega^r$ estão em uma mesma vizinhança básica \mathcal{V}_ε de Ω^r .

Definição 1.9 Uma **perturbação** a um parâmetro do sistema (1.5) é outro sistema dado por

$$\dot{x} = F(x) + \mu g(x), \quad x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad (1.7)$$

onde g é suave em \mathcal{D} e μ é um parâmetro pequeno.

Observe que se $\mu = 0$ em (1.7), temos (1.5). Assim, (1.7) pode ser reescrito como

$$\dot{x} = G(x, \mu), \quad x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (1.8)$$

com $G(x, 0) = F(x)$. A perturbação (1.7) tem tamanho máximo ε se (1.7) está ε -próximo do sistema (1.5).

Definição 1.10 Dois sistemas dinâmicos $\dot{x} = F(x)$ e $\dot{x} = G(x)$ são **topologicamente equivalentes** se existe um homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que leva as órbitas do primeiro sistema nas órbitas do segundo, preservando a orientação das trajetórias.

Uma vez definido equivalência topológica, podemos definir estabilidade estrutural.

Definição 1.11 Um sistema é **estruturalmente estável** se existe um $\varepsilon > 0$ tal que todas perturbações de tamanho máximo ε para o campo de vetores F são topologicamente equivalentes a F .

Existe também o conceito de conjugação de sistemas suaves, onde o tempo de percurso de uma trajetória é preservado pelo homeomorfismo.

Definição 1.12 Dois sistemas $\dot{x} = F(x)$ e $\dot{x} = G(x)$ são ditos **topologicamente conjugados** se existe um homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\varphi(x, t) = h^{-1}(\psi(h(x), t)) \quad (1.9)$$

onde $\varphi(x, t)$ e $\psi(y, t)$ são os fluxos gerados pelos campos F e G , respectivamente.

Definição 1.13 *Um ponto de equilíbrio x_0 de um sistema dinâmico suave $\dot{x} = F(x)$ chama-se **hiperbólico** se todos os autovalores de $JF(x_0) := F_x(x_0)$ têm parte real não nula.*

A demonstração do seguinte teorema também pode ser encontrada em [11].

Teorema 1.2 (Hartman-Grobman). *Sejam $F : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial suave e $x_0 \in \mathcal{D}$ um ponto de equilíbrio hiperbólico. Então, existem vizinhanças W de x_0 em \mathcal{D} e U de $0 \in \mathbb{R}^n$ tais que $F|_W$ é topologicamente conjugado a $F_x(x_0)|_U$.*

1.1.2 Bifurcações de sistemas suaves

Considere novamente um sistema dinâmico suave que depende de parâmetros, isto é,

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^p. \quad (1.10)$$

Ao considerar uma perturbação do sistema sob a ação dos parâmetros, seu retrato de fase pode variar. Assim, existem duas possibilidades: ou o sistema permanece topologicamente equivalente ao original, ou sua topologia muda. Definimos então uma bifurcação simplesmente em termos da perda de estabilidade estrutural quando um parâmetro age como perturbação do sistema.

Definição 1.14 *Uma **bifurcação** ocorre em um parâmetro μ_0 se o sistema dinâmico não é estruturalmente estável.*

Um **diagrama de bifurcação** é uma representação gráfica que auxilia no estudo de como o retrato de fase do sistema varia com o parâmetro. Este diagrama consiste de um plano onde o eixo horizontal representa o parâmetro e o eixo vertical o estado do sistema. Podemos então traçar nesse plano o conjunto dos pontos de equilíbrio do sistema (ramo de equilíbrios), facilitando assim o estudo da variação da dinâmica em relação ao parâmetro. Veja Figura 1.2.

Vários tipos de bifurcação de sistemas suaves têm sido estudadas e classificadas; veja Kuznetsov [6] para detalhes.

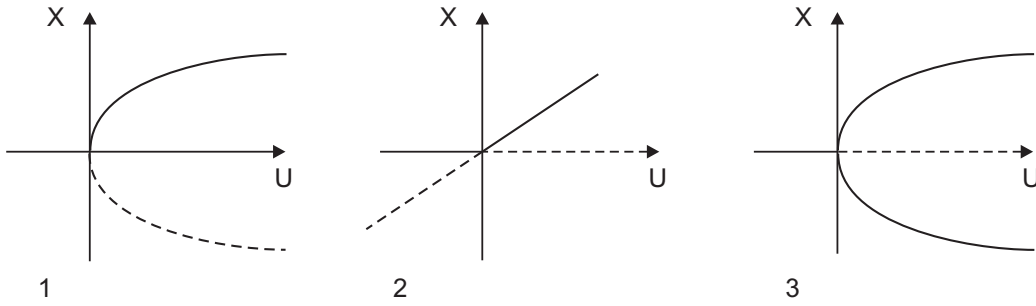


Figura 1.2: Diagramas de bifurcação associados à bifurcações a um parâmetro do tipo (a) dobra, (b) transcritical, (c) pitchfork.

1.2 Sistemas dinâmicos suaves por partes

Começamos com uma definição geral de sistemas dinâmicos suaves por partes em um espaço n -dimensional.

Definição 1.15 *Um fluxo suave por partes é dado por um conjunto finito de EDOs*

$$\dot{x} = F_i(x, \mu), \quad x \in S_i, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

onde $\cup_i S_i = \mathcal{D}$, e cada S_i é um aberto de \mathbb{R}^n . Aqui, qualquer interseção não vazia $\Sigma_{ij} := \overline{S_i} \cap \overline{S_j}$ é uma variedade $(n-1)$ -dimensional contida nas fronteiras ∂S_i e ∂S_j . Além disso, cada campo de vetores F_i é suave tanto no estado x quanto no parâmetro μ , e define um fluxo suave $\varphi_i(x, \mu, t)$ em um aberto $U \supset S_i$. Em particular, cada fluxo φ_i está bem definido em ambos os lados da fronteira ∂S_i .

Um fluxo suave por partes também será chamado, indistintamente, um **sistema suave por partes**, ou ainda, um **campo de vetores suave por partes**. Os abertos S_i são **regiões** do domínio \mathcal{D} , e uma variedade Σ_{ij} entre duas regiões S_i e S_j , é dita uma **fronteira de descontinuidade** ou um **conjunto de descontinuidade**.

Observe que a Definição 1.15 não especifica como a dinâmica do sistema evolui dentro de um conjunto de descontinuidade Σ_{ij} . Isto depende basicamente de como as dinâmicas dos campos F_i e F_j se comportam próximo à fronteira. Uma possibilidade seria o fluxo suave por partes cruzar transversalmente a fronteira de descontinuidade Σ_{ij} , como na Figura 1.3; neste caso podemos, sem perda de generalidade, fixar Σ_{ij} como pertencente a uma única região $\overline{S_i}$

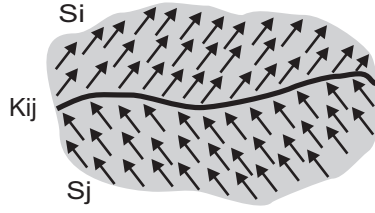


Figura 1.3: Campo de vetores suave por partes

e, assim, aplicamos F_i em vez de F_j em Σ_{ij} . No entanto, pode ocorrer o caso em que o fluxo suave por partes torna-se confinado à fronteira após o contato com a mesma. Neste caso, a formulação de Filippov pode ser utilizada para descrever o comportamento do sistema dentro do conjunto de descontinuidade.

A seguinte definição é bastante útil e nos permitirá identificar o comportamento do fluxo suave por partes na vizinhança de um ponto de Σ_{ij} .

Definição 1.16 *O grau de suavidade em um ponto $x_0 \in \Sigma_{ij}$ de um sistema suave por partes é a mais alta ordem r para a qual as expansões em séries de Taylor de $\varphi_i(x_0, t)$ e $\varphi_j(x_0, t)$ em relação à t , calculadas em $t = 0$, coincidem em termos de $O(t^{r-1})$. Isto é, a primeira derivada parcial não nula em relação à t da diferença $(\varphi_i(x_0, t) - \varphi_j(x_0, t))|_{t=0}$ é de ordem r .*

Considere um fluxo local com um único conjunto de descontinuidade Σ_{12} , isto é, um sistema suave por partes escrito como

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x, \mu), & \text{se } x \in S_1, \mu \in \mathbb{R} \\ F_2(x, \mu), & \text{se } x \in S_2, \mu \in \mathbb{R} \end{cases},$$

onde F_1 gera um fluxo φ_1 e F_2 gera um fluxo φ_2 . Temos

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi_i(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= F_i(\varphi_i(x, 0)) = F_i(x), \\ \left. \frac{\partial^2 \varphi_i(x, t)}{\partial t^2} \right|_{t=0} &= \left. \frac{\partial (F_i(\varphi_i(x, t)))}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial F_i}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right|_{t=0} = F_{i,x} F_i(x), \end{aligned}$$

onde $F_{i,x}$ denota a matriz jacobiana do campo F_i . Analogamente,

$$\left. \frac{\partial^3 \varphi_i(x, t)}{\partial t^3} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F_i}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right) \right|_{t=0} = \left(\left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \varphi_i^2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial \varphi_i} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \right) \Big|_{t=0} = F_{i,xx} F_i^2 + F_{i,x}^2 F_i,$$

etc. Assim, se F_1 e F_2 diferem na k -ésima derivada parcial com relação ao estado x , os fluxos φ_1 e φ_2 diferem na $(k+1)$ -ésima derivada parcial com relação à t . Logo, se $F_1(x) \neq F_2(x)$ em um ponto $x \in \Sigma_{12}$ então temos grau de suavidade $r = 1$ em x . Sistemas com uma única fronteira de descontinuidade Σ_{12} e de grau $r = 1$ em $x \in \Sigma_{12}$, são ditos ser do tipo *Filippov* em x .

Por outro lado, se $F_1(x) = F_2(x)$ em um ponto $x \in \Sigma_{12}$ mas existe uma diferença nas matrizes jacobianas $F_{1,x} \neq F_{2,x}$ em x , então o grau de suavidade é $r = 2$. Já uma diferença na segunda derivada $F_{1,xx} \neq F_{2,xx}$ dá grau de suavidade $r = 3$, etc. Sistemas com grau de suavidade dois ou mais em $x \in \Sigma_{12}$ são chamados *sistemas contínuos suaves por partes* em x .

Note que o grau de suavidade é dado apenas em um ponto da fronteira de descontinuidade. Assim, ainda temos casos em que o grau de suavidade é o mesmo em todos pontos em Σ_{ij} e casos em que não é (veja Exemplo 1.1). Esta distinção será crucial quando iniciarmos o estudo de bifurcações em pontos de Σ_{ij} no Capítulo 2. Dessa forma faz sentido a seguinte definição.

Definição 1.17 *Um conjunto de descontinuidade Σ_{ij} é dito ser **uniformemente descontínuo** em algum domínio \mathcal{D} se o grau de suavidade do sistema é o mesmo para todos os pontos $\Sigma_{ij} \cap \mathcal{D}$. Dizemos que a descontinuidade é **uniforme com grau m** se a primeira derivada parcial não nula de $F_i - F_j$ avaliada em Σ_{ij} é de ordem $m - 1$. Além disso, o grau de suavidade uniforme é um se $F_i(x) - F_j(x) \neq 0$ para todo $x \in \Sigma_{ij} \cap \mathcal{D}$.*

Exemplo 1.1 *Considere em \mathbb{R}^2 o seguinte sistema suave por partes*

$$\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \begin{cases} F_1(x_1, x_2), & \text{se } x_2 > 0 \\ F_2(x_1, x_2), & \text{se } x_2 < 0 \end{cases}, \quad (1.11)$$

onde $F_1(x_1, x_2) = (1, -x_1)$, $F_2(x_1, x_2) = (1, 1)$ e $\Sigma_{12} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$. Observe que

$$F_1(x_1, x_2) = F_2(x_1, x_2) \text{ se, e somente se, } x_1 = -1.$$

Logo, (1.11) tem grau de suavidade $r = 1$ em todos os pontos de $\Sigma_{12} \setminus \{(-1, 0)\}$. Por outro lado, $F_{1,x} \neq F_{2,x}$ em \mathbb{R}^2 e portanto, (1.11) tem grau de suavidade $r = 2$ em $(-1, 0)$.

Um sistema suave por partes arbitrário com um único conjunto de descontinuidade $\Sigma := \Sigma_{12}$, pode localmente ser escrito como

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x), & \text{se } H(x) > 0 \\ F_2(x), & \text{se } H(x) < 0 \end{cases}, \quad (1.12)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, com $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave tal que $0 \in \mathbb{R}$ é valor regular de H , e $\Sigma = H^{-1}(0)$.

A seguir apresentamos duas abordagens existentes na literatura utilizadas para descrever o comportamento de um fluxo suave por partes no conjunto de descontinuidade.

1.2.1 Campos deslizantes

Nesta seção estamos interessados em sistemas que apresentam grau de suavidade $m = 1$ em pontos de Σ . Sistemas desse tipo podem apresentar “movimento deslizante” em Σ . Para introduzir o conceito de “movimento deslizante” será útil considerarmos um sistema local da forma (1.12), isto é

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x), & \text{se } H(x) > 0 \\ F_2(x), & \text{se } H(x) < 0 \end{cases},$$

para um conjunto de descontinuidade entre duas regiões definido por $\Sigma = H^{-1}(0)$, com

$$S_1 = \{x \in \mathcal{D} : H(x) > 0\} \quad e \quad S_2 = \{x \in \mathcal{D} : H(x) < 0\}.$$

A região de Σ onde ocorre o “movimento deslizante” é conhecida por região de deslize, definida a seguir:

Definição 1.18 *Uma região de deslize em um conjunto de descontinuidade de um sistema da forma (1.12) com grau de suavidade $m = 1$ é dada pelo conjunto dos pontos de $\Sigma = H^{-1}(0)$ para os quais*

$$(H_x F_1) \cdot (H_x F_2) < 0.$$

Notação: Região de deslize (Σ_d).

Note que, em uma região de deslize, a componente $H_x F_1$ de F_1 normal a Σ , tem sinal oposto a $H_x F_2$. Assim, nessa região, a fronteira Σ está simultaneamente atraindo (ou repelindo) de

ambos os lados; veja Figura 1.4.

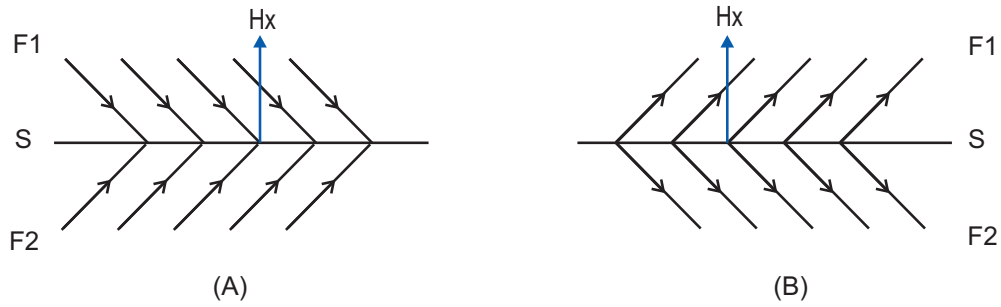


Figura 1.4: Regiões de Deslize: atraindo (a) e repelindo (b).

A região de deslize repelindo também é conhecida na literatura como *região de escape* (Σ_e).

Proposição 1.1 *Nas regiões de deslize o grau de suavidade do sistema é sempre um.*

Demonstração. Suponha que exista $x \in \Sigma_d$ para o qual $F_1(x) = F_2(x)$. Logo, $H_x F_1(x) = H_x F_2(x)$ e, então, $(H_x F_1(x)) \cdot (H_x F_2(x)) = (H_x F_1(x))^2 \geq 0$. Contradição.

Portanto, $F_1(x) \neq F_2(x)$ para todo $x \in \Sigma_d$.

■

Além das regiões de deslize, existe outro tipo de região em Σ , conhecida por **região de costura** (Σ_c) e caracterizada por

$$(H_x F_1) \cdot (H_x F_2) > 0.$$

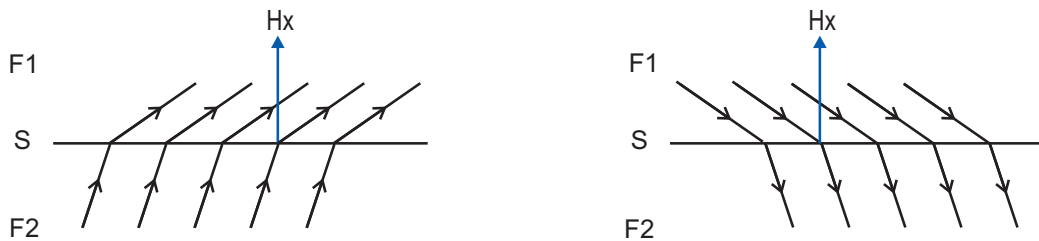


Figura 1.5: Regiões de Costura.

Observação 1.2 *A recíproca da Proposição 1.1 não vale; isto é, em um ponto $x \in \Sigma$ o sistema pode ter grau de suavidade $r = 1$ ($F_1(x) \neq F_2(x)$) sem que x pertença a uma região de deslize. Veja Figura 1.5.*

Mesmo com todas essas considerações feitas até o momento, nada foi dito sobre como é a evolução do sistema nas regiões de deslize. Existem duas abordagens na literatura para esse propósito, quando o sistema está escrito na forma padrão (1.12). Especificamente, trata-se do *Método de Controle de Utkin* [12] e do *Método Convexo de Filippov* [3].

No Método de Utkin o sistema flui segundo o campo de vetores deslizante F_{12} , que é a média dos dois campos de vetores F_1 (na região S_1) e F_2 (na região S_2) mais um controle $\beta(x) \in (-1, 1)$ na direção da diferença entre os campos de vetores, ou seja,

$$F_{12} = \frac{F_1 + F_2}{2} + \frac{F_2 - F_1}{2}\beta(x) \quad (1.13)$$

onde

$$\beta(x) = -\frac{H_x F_1 + H_x F_2}{H_x F_2 - H_x F_1}. \quad (1.14)$$

Já o Método de Filippov toma uma combinação convexa simples dos dois campos de vetores, ou seja,

$$F_{12} = (1 - \alpha)F_1 + \alpha F_2 \quad (1.15)$$

com $\alpha(x) \in (0, 1)$, onde

$$\alpha(x) = \frac{H_x F_1}{H_x(F_1 - F_2)}. \quad (1.16)$$

Neste caso, (1.15) é chamado um ***campo de Filippov***.

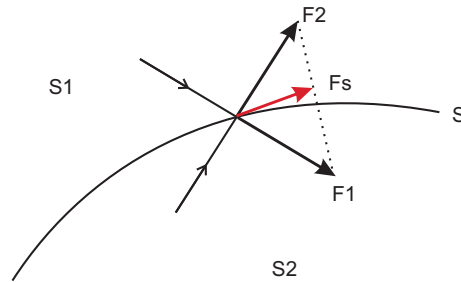


Figura 1.6: Campo de Filippov.

Quando não houver perigo de ambiguidade, escreveremos $F_{12} := F_d$ para representar um dos campos de vetores acima, os quais são também chamados *campos deslizantes*.

É interessante notar que:

$$2\alpha - 1 = \frac{2H_x F_1}{H_x(F_1 - F_2)} - 1 = \frac{2H_x F_1 - H_x(F_1 - F_2)}{H_x F_1 - H_x F_2} = -\frac{H_x F_1 + H_x F_2}{H_x F_2 - H_x F_1} = \beta$$

e

$$\begin{aligned} \frac{F_1 + F_2}{2} + \frac{F_2 - F_1}{2}\beta &= \frac{F_1 + F_2}{2} + \frac{F_2 - F_1}{2}(2\alpha - 1) = \frac{F_1 + F_2}{2} + \frac{2\alpha(F_2 - F_1)}{2} - \frac{(F_2 - F_1)}{2} = \\ &= F_1 + \alpha(F_2 - F_1) = (1 - \alpha)F_1 + \alpha F_2. \end{aligned}$$

Assim, os dois métodos apresentados acima são algebricamente equivalentes com $\beta = 2\alpha - 1$. Além disso, em ambos os casos, o campo de vetores F_d é ortogonal à H_x e assim é tangente a Σ . De fato, para o Método de Filippov temos:

$$\begin{aligned} \langle H_x, F_s \rangle &= \langle H_x, (1 - \alpha)F_1 + \alpha F_2 \rangle \\ &= (1 - \alpha)\langle H_x, F_1 \rangle + \alpha\langle H_x, F_2 \rangle \\ &= \langle H_x, F_1 \rangle - \alpha(\langle H_x, F_1 \rangle - \langle H_x, F_2 \rangle) \\ &= \langle H_x, F_1 \rangle - \alpha\langle H_x, F_1 - F_2 \rangle \\ &= \langle H_x, F_1 \rangle - \langle H_x, F_1 \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

uma vez que $\alpha = \frac{H_x F_1}{H_x(F_1 - F_2)}$. Como os dois métodos são algebricamente equivalentes, o mesmo vale para o Método de Utkin.

1.2.2 Estabilidade e bifurcação de sistemas suaves por partes

O estudo de sistemas dinâmicos suaves por partes tem por objetivo estender os conceitos bem estabelecidos de sistemas suaves. Nesse sentido, é necessário descrever o que se entende por bifurcações em sistemas não-suaves.

Considere um conjunto invariante geral de um sistema suave por partes. Bifurcações que envolvem conjuntos invariantes contidos em uma única região S_i para todos os valores de

parâmetro de interesse podem ser estudadas usando a teoria de bifurcações para sistemas suaves. No entanto, outras bifurcações são exclusivas para sistemas suaves por partes, as quais envolvem, tipicamente, interações de um conjunto invariante com uma fronteira de descontinuidade. Dessa forma, a definição de bifurcação para sistemas não-suaves é dada assim como para o caso suave, do ponto de vista topológico. Neste caso, chamamos uma bifurcação induzida pela descontinuidade (DIB - “*discontinuity-induced bifurcation*”).

Definição 1.19 *Dois sistemas suaves por partes*

$$\dot{x} = F_i(x), x \in S_i, \quad \dot{x} = \tilde{F}_i(x), x \in \tilde{S}_i,$$

com fronteiras de descontinuidade Σ_{ij} e $\tilde{\Sigma}_{ij}$ são **topologicamente equivalentes por partes** se:

1. *Eles são topologicamente equivalentes, isto é, existe um homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que leva as órbitas do primeiro sistema nas órbitas do segundo, preservando a orientação das trajetórias, tal que $\varphi(x, t) = h^{-1}(\tilde{\varphi}(h(x), s))$, onde a aplicação $t \mapsto s(t)$ é contínua e inversível.*
2. *O homeomorfismo h preserva cada uma das fronteiras de descontinuidade, isto é, $h(\Sigma_{ij}) = \tilde{\Sigma}_{ij}$.*

Definição 1.20 *Um sistema suave por partes é **estruturalmente estável por partes** se existe um $\varepsilon > 0$ tal que todas perturbações de tamanho máximo ε do sistema leva a retratos de fase topologicamente equivalentes por partes, e deixe o número de fronteiras e os respectivos graus de suavidade inalterados.*

Definição 1.21 *Uma **bifurcação induzida pela descontinuidade (DIB)** ocorre em um parâmetro μ_0 em que o sistema suave por partes não é estruturalmente estável por partes. Isto é, existe uma perturbação arbitrariamente pequena que conduz a um sistema que não é topologicamente equivalente por partes.*

Nosso principal objetivo agora é uma análise e classificação dos tipos mais comuns de DIBs. Realizamos este estudo nos capítulos posteriores, investigando bifurcações em equilíbrios de fronteira e bifurcações “grazing-sliding”.

Bifurcações em pontos de equilíbrio de fronteira

Neste capítulo começamos nosso estudo das bifurcações em sistemas dinâmicos suaves por partes com um único conjunto de descontinuidade. Dividiremos nossa análise em duas seções, cada uma dedicada a um tipo genérico de sistema, isto é, estudaremos bifurcações em fluxos contínuos suaves por partes (mais precisamente, em sistemas com grau de suavidade uniforme $m = 2$ em Σ) e em fluxos de Filippov (sistemas com grau de suavidade uniforme $m = 1$ em Σ) separadamente. É essencial iniciarmos definindo os tipos de equilíbrios de cada sistema considerado, pois agora existe a possibilidade de equilíbrios sobre a fronteira. Sendo assim, introduzimos os conceitos de equilíbrio de fronteira e pseudo-equilíbrio, respectivamente. Apresentamos uma classificação dos cenários genéricos mais simples de bifurcações que podem ocorrer em cada caso, e damos atenção especial aos sistemas planares, os quais possuem uma teoria mais desenvolvida.

Antes de iniciarmos nosso estudo de bifurcações, convém enfatizar que os sistemas aqui considerados são aqueles que possuem grau de suavidade *uniforme* na fronteira de descontinuidade. Os sistemas suaves por partes sem grau de suavidade uniforme em Σ não se enquadram em nenhuma das classes de sistemas consideradas aqui.

2.1 Fluxos contínuos suaves por partes

Inicialmente vamos nos concentrar em sistemas *contínuos* suaves por partes, isto é, sistemas com um único conjunto de descontinuidade Σ e grau de suavidade $m = 2$ sobre Σ .

Nesta seção restringiremos nossa atenção para uma região \mathcal{D} do espaço de fase onde o sistema pode ser descrito em termos de um conjunto local de coordenadas como introduzido no Capítulo 1:

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x, \mu), & \text{se } H(x, \mu) > 0 \\ F_2(x, \mu), & \text{se } H(x, \mu) < 0 \end{cases}, \quad (2.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$, $F_1, F_2 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $H : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves tanto no estado x quanto no parâmetro μ em todo $\overline{\mathcal{D}}$, e $\Sigma = H^{-1}(0)$.

Toda teoria estudada nesta seção tem como base a seguinte propriedade.

Proposição 2.1 *Considere o Sistema (2.1) nas condições acima. Então, devido à hipótese de continuidade, pode-se definir*

$$F_2(x, \mu) = F_1(x, \mu) + J(x, \mu)H(x, \mu) \quad (2.2)$$

para alguma função suave $J : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, de modo que $F_1 = F_2$ quando $H(x, \mu) = 0$.

Demonstração. Faremos a prova para $n = 2$. O caso geral segue imediatamente ajustando as notações. Por simplicidade vamos suprimir a dependência ao parâmetro μ . Como Σ é variedade 1-dimensional, existe um difeomorfismo local $\varphi : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U_0 \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(\Sigma) = \tilde{\Sigma}$ e $H(x_1, x_2) = x_2$.

Observe que estão bem definidos os campos suaves $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2 : U_0 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dados por

$$\tilde{F}_1 = F_1 \circ \varphi^{-1} \quad e \quad \tilde{F}_2 = F_2 \circ \varphi^{-1}.$$

Temos assim um novo sistema suave por partes

$$\dot{x} = \begin{cases} \tilde{F}_1(x), & \text{se } x_2 > 0 \\ \tilde{F}_2(x), & \text{se } x_2 < 0 \end{cases}, \quad x = (x_1, x_2),$$

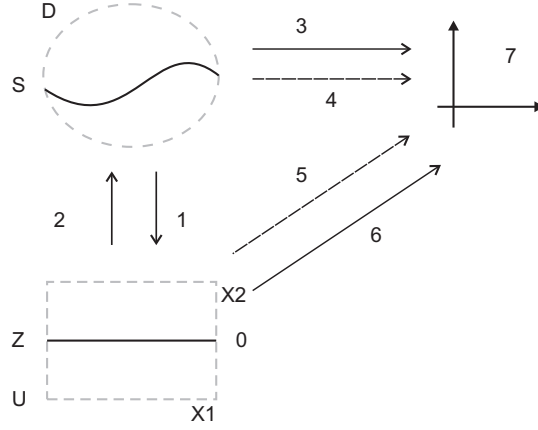


Figura 2.1: Esquema da Demonstração 2.1.

com fronteira de descontinuidade $\tilde{\Sigma} = \{x_2 = 0\}$. Dado $(x_1, 0) \in \tilde{\Sigma}$ temos:

$$\tilde{F}_1(x_1, 0) = F_1 \circ \varphi^{-1}(x_1, 0) = F_2 \circ \varphi^{-1}(x_1, 0) = \tilde{F}_2(x_1, 0),$$

pois $\varphi^{-1}(x_1, 0) \in \Sigma$ e Σ é uniformemente descontínuo com grau $m = 2$.

Assim, $(\tilde{F}_2 - \tilde{F}_1)(x_1, 0) \equiv 0$, para todo $(x_1, 0) \in \tilde{\Sigma}$. Afirmamos que existe uma função suave $\tilde{J} : U_0 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$(\tilde{F}_2 - \tilde{F}_1)(x_1, x_2) = x_2 \cdot \tilde{J}(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in U_0. \quad (2.3)$$

De fato, a função $\tilde{J} = (j_1, j_2)$ será suave se, e somente se, suas funções coordenadas $j_k, k = 1, 2$ o forem. Denote $\tilde{F}_2 - \tilde{F}_1$ por F , onde $F(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$. Observe que F (e portanto as f_k) são suaves e que $F(x_1, 0) = (0, 0)$. Assim, para $k = 1, 2$ defina $j_k : U_0 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$j_k(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{f_k(x_1, x_2)}{x_2}, & \text{se } x_2 \neq 0 \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(x_1, x_2)\big|_{x_2=0}, & \text{se } x_2 = 0 \end{cases}.$$

Então, j_k é suave.

Com efeito, j_k é contínua em U_0 , basta ver que

$$\begin{aligned} \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, 0)} j_k(x_1, x_2) &= \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, 0)} \frac{f_k(x_1, x_2)}{x_2} = \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, 0)} \frac{f_k(x_1, x_2) - f_k(x_1, 0)}{\|(x_1, x_2) - (x_1, 0)\|} = \\ &= \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(x_1, x_2)\big|_{x_2=0} = j_k(x_1, 0). \end{aligned}$$

Além disso, $j_k = f_k/x_2$ é diferenciável para todo $x_2 \neq 0$. Mostremos a diferenciabilidade de j_k

em $(x_1, 0) \in U_0$. Note que $\frac{\partial j_k}{\partial x_1}(x_1, 0) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_2}(x_1, 0) \right)$ e, para cada x_1 fixado arbitrariamente, temos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial j_k}{\partial x_2}(x_1, 0) &= \frac{dj_k}{dx_2}(0) \\
 &= \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, 0)} \frac{j_k(x_1, x_2) - j_k(x_1, 0)}{\|(x_1, x_2) - (x_1, 0)\|} \\
 &= \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, 0)} \frac{f_k(x_1, x_2)/x_2 - \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(x_1, 0)}{x_2} \\
 &= \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, 0)} \frac{f_k(x_1, x_2) - x_2 \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(x_1, 0)}{x_2^2} \\
 &= \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, 0)} \frac{\frac{\partial f_k}{\partial x_2}(x_1, x_2) - \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(x_1, 0)}{2x_2} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_2^2}(x_1, 0).
 \end{aligned}$$

Logo, $\frac{\partial j_k}{\partial x_1}(x_1, 0)$ e $\frac{\partial j_k}{\partial x_2}(x_1, 0)$ existem e são suaves, pois f_k e suas derivadas o são. Analogamente, observa-se que todas as derivadas parciais de j_k são dadas em termos das derivadas parciais de f_k , as quais sempre existem e são suaves. Portanto, as funções $j_k, k = 1, 2$, são suaves. Assim, a função $\tilde{J} = (j_1, j_2) : U_0 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\tilde{J}(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{1}{x_2} \cdot F(x_1, x_2), & \text{se } x_2 \neq 0 \\ \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, 0), \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, 0) \right), & \text{se } x_2 = 0 \end{cases}.$$

é suave e satisfaz (2.3). Agora, tome $J : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como $J = \tilde{J} \circ \varphi$. Então J é suave (pois \tilde{J} e φ o são) e vale que $F_2(p) = F_1(p) + J(p)H(p)$, para todo $p \in \mathcal{D}$. De fato, dado $p \in \mathcal{D}$, temos $p = \varphi^{-1}(x_1, x_2)$, com $(x_1, x_2) \in U_0$; logo,

$$\begin{aligned}
 F_2(p) &= F_2(\varphi^{-1}(x_1, x_2)) \\
 &= \tilde{F}_2(x_1, x_2) \\
 &= \tilde{F}_1(x_1, x_2) + x_2 \cdot \tilde{J}(x_1, x_2) \\
 &= F_1(\varphi^{-1}(x_1, x_2)) + H(\varphi^{-1}(x_1, x_2)) \cdot (J \circ \varphi^{-1}(x_1, x_2)) \\
 &= F_1(p) + H(p) \cdot J(p),
 \end{aligned}$$

como queríamos. ■

Localmente, Σ divide \mathcal{D} em duas regiões S_1 e S_2 , onde o sistema é suave e definido pelos campos de vetores F_1 e F_2 , respectivamente. Explicitamente,

$$S_1 = \{x \in \mathcal{D} : H(x, \mu) > 0\},$$

$$S_2 = \{x \in \mathcal{D} : H(x, \mu) < 0\}.$$

Podemos identificar diferentes tipos de equilíbrios de (2.1).

Definição 2.1 Chamamos um ponto $p \in \mathcal{D}$ um **equilíbrio admissível** de (2.1) se p é tal que

$$F_1(p, \mu) = 0 \quad e \quad H(p, \mu) > 0$$

ou

$$F_2(p, \mu) = 0 \quad e \quad H(p, \mu) < 0.$$

Dizemos que um ponto $q \in \mathcal{D}$ é um **equilíbrio virtual** de (2.1) se

$$F_1(q, \mu) = 0 \quad mas \quad H(q, \mu) < 0$$

ou

$$F_2(q, \mu) = 0 \quad mas \quad H(q, \mu) > 0.$$

Para alguns valores do parâmetro do sistema, é possível existir um equilíbrio no conjunto de descontinuidade Σ .

Definição 2.2 Chamamos um ponto $p \in \mathcal{D}$ um **equilíbrio de fronteira** de (2.1) se

$$F_1(p, \mu) = F_2(p, \mu) = 0 \quad e \quad H(p, \mu) = 0.$$

Podemos então definir uma bifurcação em equilíbrio de fronteira como segue.

Definição 2.3 O sistema suave por partes (2.1) sofre uma **bifurcação em equilíbrio de fronteira** em $\mu = \mu^*$ se existe um ponto x^* tal que, para $i = 1, 2$:

1. $F_i(x^*, \mu^*) = 0$;

2. $H(x^*, \mu^*) = 0$;
3. $F_{i,x}(x^*, \mu^*)$ é inversível (equivalentemente, $\det(F_{i,x}(x^*, \mu^*)) \neq 0$);
4. $H_\mu(x^*, \mu^*) - H_x(x^*, \mu^*)[F_{i,x}^{-1}F_{i,\mu}](x^*, \mu^*) \neq 0$.

Observação 2.1 Os dois primeiros itens da Definição 2.3 dizem apenas que x^* é um equilíbrio de fronteira em $\mu = \mu^*$. O terceiro item é crucial para a teoria que segue, uma vez que podemos analisar apenas a ‘parte linear’ do sistema considerado e então, com o Teorema da Função Implícita, concluir a validade dos resultados obtidos para o sistema não-linear completo. Além disso, a condição 3 é necessária para ocorrer a condição 4. Esta, por sua vez, significa que os ramos de equilíbrios, $x^+(\mu)$ e $x^-(\mu)$, dos campos F_1 e F_2 respectivamente, cruzam Σ transversalmente no ponto de bifurcação em equilíbrio de fronteira (x^*, μ^*) . Com efeito, das condições 1, 2 e 3 temos

$$F_i(x^*, \mu^*) = 0, \quad H(x^*, \mu^*) = 0 \quad e \quad \det(F_{i,x}(x^*, \mu^*)) \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Implícita, existe uma vizinhança \mathcal{V} de (x^*, μ^*) e uma aplicação suave $x = x(\mu)$ tais que $x^* = x(\mu^*)$, $F_i(x(\mu), \mu) = 0$ em \mathcal{V} , e

$$\frac{dx}{d\mu}(\mu^*) = -[F_{i,x}^{-1}F_{i,\mu}](x^*, \mu^*).$$

Assim, o ramo de equilíbrio suave $x(\mu)$ cruza a fronteira $\Sigma = H^{-1}(0)$ transversalmente se, e somente se, $\langle \nabla H(x^*, \mu^*), (x'(\mu^*), 1) \rangle \neq 0$, isto é,

$$\langle (H_x(x^*, \mu^*), H_\mu(x^*, \mu^*)), (-[F_{i,x}^{-1}F_{i,\mu}](x^*, \mu^*), 1) \rangle = H_\mu(x^*, \mu^*) - H_x(x^*, \mu^*)[F_{i,x}^{-1}F_{i,\mu}](x^*, \mu^*) \neq 0.$$

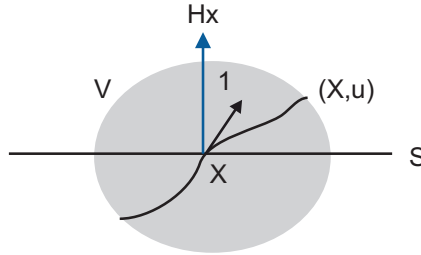


Figura 2.2: Ramo de Equilíbrios de F_i transversal à Σ .

2.1.1 Classificação dos cenários mais simples

Sem perda de generalidade, vamos supor (2.1) em uma região $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^n$ contendo a origem e $x = 0$ um equilíbrio de fronteira de (2.1) para $\mu = 0$, isto é,

$$F_1(0, 0) = F_2(0, 0) = 0 \quad e \quad H(0, 0) = 0.$$

Procuraremos desdobrar os cenários de bifurcação que podem ocorrer quando μ é perturbado numa vizinhança de zero. Especificamente, sobre a variação de μ , temos um dos seguintes cenários:

Persistência: Um equilíbrio admissível na região S_1 torna-se um equilíbrio de fronteira (ponto onde ocorre a bifurcação) e em seguida se transforma em um equilíbrio virtual. Simultaneamente, um equilíbrio virtual na região S_1 torna-se admissível.

Dobra não-suave: Dois ramos de equilíbrio admissível colidem no ponto de bifurcação em equilíbrio de fronteira, e se transformam em dois ramos de equilíbrio virtual.

Apresentamos agora definições mais precisas dos cenários de persistência e dobra não-suave.

Definição 2.4 Dizemos que o sistema suave por partes (2.1) apresenta uma **persistência** para $\mu = 0$ se, quando variamos o parâmetro μ em uma vizinhança de zero, um ramo de equilíbrio admissível e um ramo de equilíbrio virtual se cruzam no ponto de equilíbrio de fronteira $x = 0$. Ao fazê-lo o equilíbrio virtual torna-se admissível e vice-versa. Ou seja, assumimos que existem ramos de equilíbrios suaves $x^+(\mu)$ e $x^-(\mu)$ tais que $x^+(0) = x^-(0)$ e

1. $F_1(x^+, \mu) = 0, H(x^+, \mu) > 0$ e $F_2(x^-, \mu) = 0, H(x^-, \mu) > 0$ para $\mu < 0$;
2. $F_1(x^+, \mu) = 0, H(x^+, \mu) < 0$ e $F_2(x^-, \mu) = 0, H(x^-, \mu) < 0$ para $\mu > 0$

ou vice-versa. Veja Figura 2.3.

Definição 2.5 Dizemos que a bifurcação em equilíbrio de fronteira em $\mu = 0$ é **dobra não-suave**, sobre a variação de μ em uma vizinhança de zero, quando dois ramos de equilíbrios

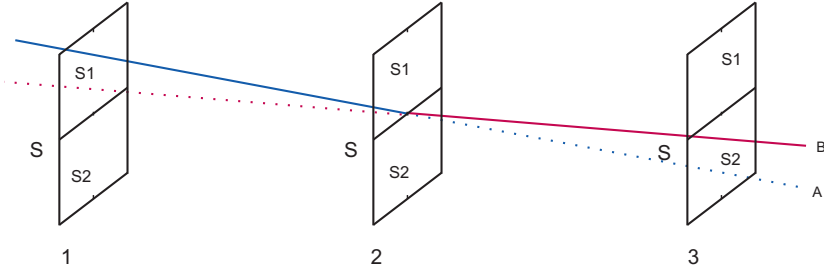


Figura 2.3: Cenário de persistência em um sistema bidimensional linear por partes. A região pontilhada (lisa) dos ramos x^+ e x^- representa os equilíbrios virtuais (admissíveis) do sistema.

admissíveis colidem no ponto de equilíbrio de fronteira $x = 0$ e ambos tornam-se ramos de equilíbrios virtuais após o ponto de bifurcação. Ou seja, existem ramos de equilíbrios suaves $x^+(\mu)$ e $x^-(\mu)$ tais que $x^+(0) = x^-(0)$ e

1. $F_1(x^+, \mu) = 0, H(x^+, \mu) > 0$ e $F_2(x^-, \mu) = 0, H(x^-, \mu) < 0$ para $\mu < 0$;
2. $F_1(x^+, \mu) = 0, H(x^+, \mu) < 0$ e $F_2(x^-, \mu) = 0, H(x^-, \mu) > 0$ para $\mu > 0$.

Veja Figura 2.4.

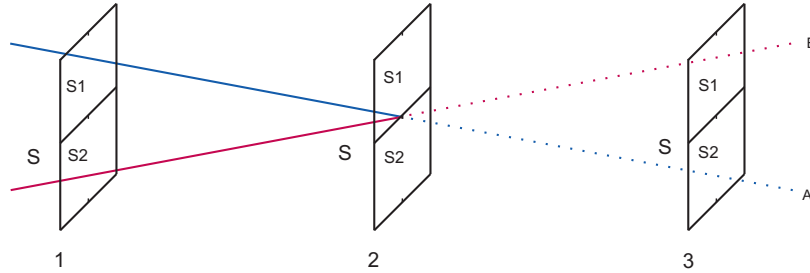


Figura 2.4: Cenário de dobra não-suave em um sistema bidimensional linear por partes. A região pontilhada (lisa) dos ramos x^+ e x^- representa os equilíbrios virtuais (admissíveis) do sistema.

Vamos obter agora condições para distinguir entre estes dois casos fundamentais em sistemas n -dimensionais arbitrários.

Teorema 2.1 *Considere, para uma região $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^n$ contendo a origem, o sistema contínuo suave por partes*

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x, \mu), & \text{se } H(x, \mu) > 0 \\ F_2(x, \mu), & \text{se } H(x, \mu) < 0 \end{cases}, \quad (2.4)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$, $F_1, F_2 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $H : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves em \mathcal{D}_0 , e $\Sigma = H^{-1}(0)$. Suponha que (2.4) sofre uma bifurcação no equilíbrio de fronteira $x^* = 0$ para

$\mu^* = 0$. Então, assumindo que

$$1 + C^T N_1^{-1} E \neq 0,$$

onde $N_1 = F_{1,x}(0,0)$, $C^T = H_x(0,0)$, $E = J$ e $J : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função suave tal que $F_2 = F_1 + JH$, temos

1. Um cenário de persistência em $(0,0)$ se

$$1 + C^T N_1^{-1} E > 0.$$

2. Um cenário de dobra não suave em $(0,0)$ se

$$1 + C^T N_1^{-1} E < 0.$$

Demonstração. Seja $x^+ \in \mathcal{D}_0$ um equilíbrio admissível de (2.4), isto é,

$$F_1(x^+, \mu) = 0 \quad e \quad H(x^+, \mu) := \delta^+ > 0.$$

Analogamente, para $x^- \in \mathcal{D}_0$ ser admissível, devemos ter

$$F_2(x^-, \mu) = F_1(x^-, \mu) + J(x^-, \mu)H(x^-, \mu) = 0 \quad e \quad H(x^-, \mu) := \delta^- < 0.$$

Como (2.4) sofre uma bifurcação no equilíbrio de fronteira $x = 0$ para $\mu = 0$, segue da condição 3 da Definição 2.3 que $F_{1,x}(0,0)$ e $F_{2,x}(0,0)$ são inversíveis. Então, considerando a linearização do sistema sobre o ponto $(x^*, \mu^*) = (0,0)$ temos

$$N_1 x^+ + M_1 \mu = 0 \tag{2.5}$$

$$C^T x^+ + B \mu = \delta^+ \tag{2.6}$$

e

$$N_2 x^- + M_2 \mu = N_1 x^- + M_1 \mu + E \delta^- = 0 \tag{2.7}$$

$$C^T x^- + B \mu = \delta^- \tag{2.8}$$

onde $N_1 = F_{1,x}$, $M_1 = F_{1,\mu}$, $N_2 = F_{2,x}$, $M_2 = F_{2,\mu}$, $C^T = H_x$, $B = H_\mu$ e $E = J$ são calculados em

$(0, 0)$. Como N_1 é inversível, temos de (2.5)

$$x^+ = -N_1^{-1}M_1\mu,$$

e, substituindo em (2.6), obtemos

$$\delta^+ = (B - C^T N_1^{-1} M_1)\mu. \quad (2.9)$$

Analogamente, de (2.7) temos

$$x^- = -N_1^{-1}(M_1\mu + E\delta^-)$$

e, substituindo em (2.8) e usando (2.9) obtemos

$$\delta^- = \frac{(B - C^T N_1^{-1} M_1)\mu}{(1 + C^T N_1^{-1} E)} = \frac{\delta^+}{(1 + C^T N_1^{-1} E)}. \quad (2.10)$$

Agora, a partir de (2.10) concluimos

- $\delta^+ := H(x^+, \mu)$ e $\delta^- := H(x^-, \mu)$ têm o mesmo sinal se a condição $1 + C^T N_1^{-1} E > 0$ é satisfeita. Neste caso temos um cenário de persistência (veja Definição 2.4);
- δ^+ e δ^- têm sinais opostos se a condição $1 + C^T N_1^{-1} E < 0$ é satisfeita. Neste caso temos um cenário de dobra não-suave (veja Definição 2.5).

■

Observação 2.2 *Como o Sistema (2.4) sofre uma bifurcação em $x^* = 0$ para $\mu^* = 0$, temos*

$$F_1(0, 0) = F_2(0, 0) = 0 \quad , \quad H(0, 0) = 0,$$

$$\det(F_{i,x}(0, 0)) \neq 0 \quad e \quad H_\mu(0, 0) - H_x(0, 0)[F_{i,x}^{-1}F_{i,\mu}](0, 0) \neq 0, \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Pelo Teorema da Função Implícita, existem ramos de equilíbrios suaves, $x^+(\mu)$ e $x^-(\mu)$, de F_1 e F_2 respectivamente, e vizinhanças $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ de $(0, 0)$, tais que $x^+(0) = 0 = x^-(0)$, $F_1(x^+(\mu), \mu) = 0$ em \mathcal{V}_1 , e $F_2(x^-(\mu), \mu) = 0$ em \mathcal{V}_2 . Assim, as conclusões acima continuam válidas para o sistema não-linear completo na vizinhança $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ de $(0, 0)$.

Exemplo 2.1 Considere o sistema linear por partes tridimensional

$$\dot{x} = (x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} N_1 x - M\mu, & \text{se } C^T x > 0 \\ N_2 x - M\mu, & \text{se } C^T x < 0 \end{cases}, \quad (2.11)$$

onde

$$N_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 + \varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que $C^T x = x_1$ e a fronteira de descontinuidade é $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0\}$. Denote $F_1(x, \mu) = N_1 x - M\mu$ e $F_2(x, \mu) = N_2 x - M\mu$. Uma vez que

$$F_1((0, x_2, x_3), \mu) = (x_2, x_3, -\mu) = F_2((0, x_2, x_3), \mu),$$

para todo $(0, x_2, x_3) \in \Sigma$, o grau de suavidade uniforme é $m = 2$ e, portanto, (2.11) é um sistema contínuo linear por partes. Neste caso, temos $E = J = (0, 0, \varepsilon)$, isto é, podemos escrever $F_2(x, \mu) = F_1(x, \mu) + x_1 J$. Além disso, como $\det(N_1) = -2$ a matriz N_1 é inversível. Logo, $1 + C^T N_1^{-1} E = 1 - \varepsilon/2$ e então ocorre um cenário de persistência se $\varepsilon < 2$ e um cenário de dobra não-suave se $\varepsilon > 2$. A Figura 2.5 mostra os efeitos de uma bifurcação no equilíbrio de fronteira $(x, \mu) = (0, 0)$ para $\varepsilon = 1$ e $\varepsilon = 6$. Se $\varepsilon = 1$, os ramos de equilíbrios de F_1 e F_2 são, respectivamente, $x^+(\mu) = (-\mu/2, -\mu/2, -3\mu/2)$ e $x^-(\mu) = (-\mu, -\mu, -3\mu)$. Por outro lado, para $\varepsilon = 6$, temos que o ramo de equilíbrio de F_1 permanece enquanto o ramo de F_2 é $x^-(\mu) = (\mu/4, \mu/4, 3\mu/4)$.

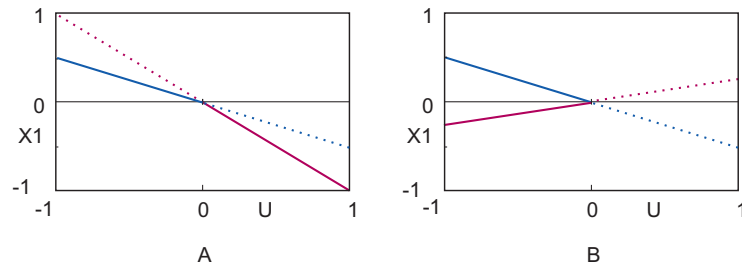


Figura 2.5: Diagramas de bifurcação de (2.11) mostrando (a) um cenário de persistência quando $\varepsilon = 1$ e (b) um cenário de dobra não-suave quando $\varepsilon = 6$.

2.1.2 O circuito de Chua

O circuito de Chua é um sistema eletrônico com grande importância no desenvolvimento da teoria dos sistemas dinâmicos. Introduzido em 1983 pelo professor Leon O. Chua em uma visita a Universidade de Waseda no Japão, como citado em [9], este circuito é conhecido por apresentar um comportamento caótico.

O circuito de Chua é composto por dois capacitores C_1 e C_2 , um indutor L , um resistor R e um elemento (resistor) não-linear N_R com curva característica exibida na Figura 2.6.

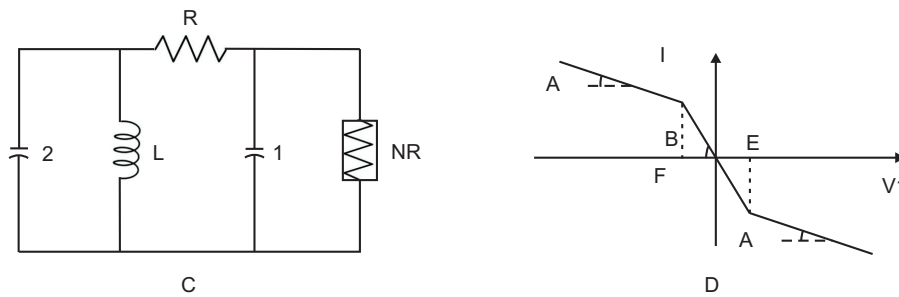


Figura 2.6: (a) Esquema do circuito de Chua, e (b) Curva característica do resistor não-linear N_R .

Neste sistema denotamos:

- V_{C_1}, V_{C_2} : voltagens dos capacitores C_1 e C_2 , respectivamente;
- i_R : corrente elétrica através do resistor R ;
- i_L : corrente elétrica sobre o indutor L ;
- i_{N_R} : corrente elétrica através do resistor não-linear N_R .

A relação entre a voltagem V e a corrente i para os elementos do circuito é dada por:

- Capacitor: $C \frac{dV}{dt} = i$;
- Indutor: $L \frac{di}{dt} = V$;
- Resistor: $V = R \cdot i$.

Aplicando as leis de Kirchhoff para os nós A, B e para os laços C, D, E no circuito da Figura 2.7, obtemos

$$i_L = i_R + C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} \quad (2.12)$$

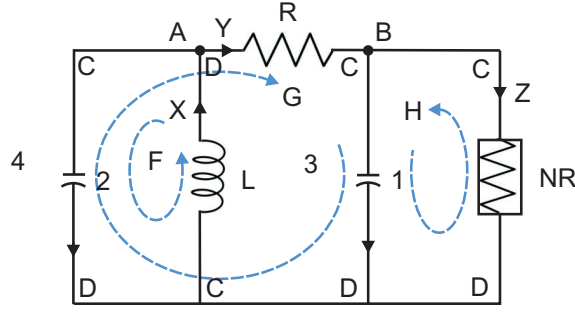


Figura 2.7: Correntes, voltagens, nós A, B e laços C, D e E indicados.

$$i_R = i_{N_R} + C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} \quad (2.13)$$

$$V_{C_2} + L \frac{di_L}{dt} = 0 \quad (2.14)$$

$$V_{C_1} - V_{C_2} + R \cdot i_R = 0 \quad (2.15)$$

$$V_{C_1} - N_R \cdot i_{N_R} = 0 \quad (2.16)$$

Da equação (2.15) temos $i_R = \frac{V_{C_2} - V_{C_1}}{R}$. Substituindo nas equações (2.12) e (2.13) obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais que descreve a dinâmica do Circuito de Chua

$$\begin{cases} C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} = \frac{1}{R}(V_{C_2} - V_{C_1}) - i_{N_R} \\ C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} = \frac{1}{R}(V_{C_1} - V_{C_2}) + i_L \\ L \frac{di_L}{dt} = -V_{C_2} \end{cases}, \quad (2.17)$$

Note que a equação (2.16) estabelece uma dependência entre a corrente i_{N_R} e a voltagem V_{C_1} , que neste caso é dada pela seguinte equação da curva característica

$$i_{N_R} = i_{N_R}(V_{C_1}) = m_1 V_{C_1} + \frac{(m_0 - m_1)}{2} (|V_{C_1} + 1| + |V_{C_1} - 1|).$$

O sistema (2.17) pode ser transformado no seguinte sistema de equações 3-dimensional

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x - h(x)) \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta y \end{cases}, \quad (2.18)$$

onde $h(x) = m_1 x + \frac{(m_0 - m_1)}{2} (|x + 1| + |x - 1|)$ representa a característica do resistor não-linear.

Basta definir:

$$x = V_{C_1}, \quad y = V_{C_2}, \quad z = i_L, \quad \alpha = 1/C_1, \quad \beta = 1/L, \quad C_2 = 1, \quad R = 1.$$

Assim, o circuito de Chua pode ser abordado sob o ponto de vista de sistemas dinâmicos descontínuos. De fato, o sistema (2.18) pode ser reescrito como

$$\dot{x} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \begin{cases} F_1(x, y, z) & \text{se } x < -1 \\ F_2(x, y, z) & \text{se } -1 < x < 1 \\ F_3(x, y, z) & \text{se } x > 1 \end{cases}, \quad (2.19)$$

onde

$$F_1(x, y, z) = (\alpha(y - x - (2m_1 - m_0)x), x - y + z, -\beta y),$$

$$F_2(x, y, z) = (\alpha(y - x - (m_1x + (m_0 - m_1))), x - y + z, -\beta y),$$

$$F_3(x, y, z) = (\alpha(y - x - m_0x), x - y + z, -\beta y).$$

Neste caso, o sistema suave por partes (2.19) tem duas fronteiras de descontinuidade dadas por $\Sigma_1 = H_1^{-1}(0)$ e $\Sigma_2 = H_2^{-1}(0)$, com

$$H_1(x, y, z) = x + 1 \quad e \quad H_2(x, y, z) = x - 1,$$

as quais não se intersectam. Observe que dado $P = (-1, y, z) \in \Sigma_1$ tem-se

$$F_1(P) = (\alpha(y + 1 + 2m_1 - m_0), -1 - y + z, -\beta y) = F_2(P),$$

e, dado $Q = (1, y, z) \in \Sigma_2$ tem-se

$$F_2(P) = (\alpha(y - 1 - m_0), 1 - y + z, -\beta y) = F_3(P).$$

Além disso, como

$$F_{1,x} = \begin{pmatrix} -\alpha(1 + (2m_1 - m_0)) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}, \quad F_{2,x} = \begin{pmatrix} -\alpha(1 + m_1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$F_{3,x} = \begin{pmatrix} -\alpha(1+m_0) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

conclui-se que (2.19) tem grau de suavidade $m = 2$ sobre qualquer uma das fronteiras Σ_1, Σ_2 e, portanto, temos um sistema *contínuo* suave por partes.

Podemos ainda estudar cenários de bifurcação em um circuito de Chua considerando sua dinâmica governada pelo sistema adimensional (2.18), isto é

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x - h(x)) \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta y \end{cases},$$

onde α, β são parâmetros positivos. Para tanto, suponha que a característica do resistor não-linear seja dada por

$$h(x) = -(|2x| + \mu),$$

onde $\mu \in \mathbb{R}$. Assim, temos o sistema suave por partes

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \begin{cases} F_1(x, y, z) = (\alpha(y + x + \mu), x - y + z, -\beta y) & \text{se } x > 0 \\ F_2(x, y, z) = (\alpha(y - 3x + \mu), x - y + z, -\beta y) & \text{se } x < 0 \end{cases}, \quad (2.20)$$

com uma única fronteira de descontinuidade dada por $\Sigma = H^{-1}(0)$, com $H(x, y, z) = x$. Note que dado $(0, y, z) \in \Sigma$ temos $F_1(0, y, z) = (\alpha(y + \mu), -y + z, -\beta y) = F_2(0, y, z)$. Além disso, uma vez que $\alpha \neq 0$,

$$F_{1,x} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -3\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} = F_{2,x},$$

qualquer que seja $x = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Logo, o grau de suavidade é uniforme $m = 2$ e portanto (2.20) é um sistema *contínuo* suave por partes. Considerando a variação do parâmetro μ , os ramos de equilíbrios de F_1 e F_2 são $x^+(\mu) = (-\mu, 0, \mu)$ e $x^-(\mu) = (\mu/3, 0, -\mu/3)$,

respectivamente. Assim, temos

- Para $\mu < 0$;

Como $x^+(\mu) = (-\mu, 0, \mu) \in S_1 = \{H > 0\}$ e $x^-(\mu) = (\mu/3, 0, -\mu/3) \in S_2 = \{H < 0\}$ temos que x^+, x^- são equilíbrios admissíveis de (2.20).

- Para $\mu = 0$;

Neste caso, $(0, 0, 0)$ é um equilíbrio de fronteira de (2.20), uma vez que $F_1((0, 0, 0), \mu) = F_2((0, 0, 0), \mu) = (0, 0, 0)$ e $H((0, 0, 0), \mu) = 0$.

- Para $\mu > 0$;

Agora, $x^+(\mu) = (-\mu, 0, \mu) \in S_2$ e $x^-(\mu) = (\mu/3, 0, -\mu/3) \in S_1$ e, portanto, x^+, x^- são equilíbrios virtuais de (2.20).

Podemos observar então um cenário de dobra não-suave. Veja Figura 2.8-(a).

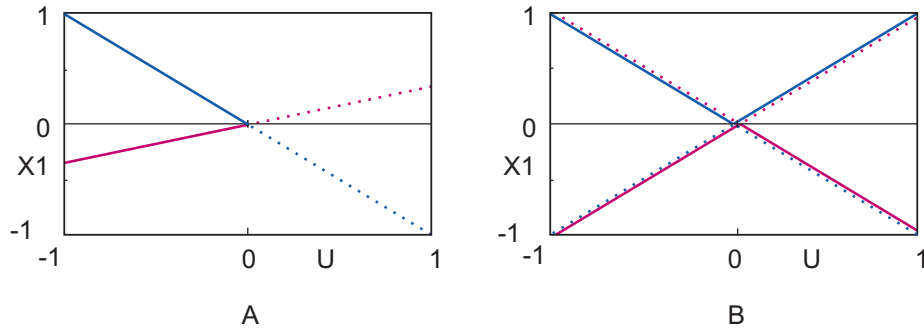


Figura 2.8: Diagramas de bifurcação para o circuito de Chua mostrando (a) um cenário de dobra não suave de (2.20) e (b) cenários de persistência de (2.21).

Suponha agora que a característica do resistor não-linear é dada por

$$h(x) = \begin{cases} -x^3 - x + \mu^2 x, & \text{se } x > 0 \\ x^3 - x - \mu^2 x, & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

com $\mu \in \mathbb{R}$. Assim, temos o seguinte sistema suave por partes

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \begin{cases} F_1(x, y, z) = (\alpha(y + x^3 - \mu^2 x), x - y + z, -\beta y) & \text{se } x > 0 \\ F_2(x, y, z) = (\alpha(y - x^3 + \mu^2 x), x - y + z, -\beta y) & \text{se } x < 0 \end{cases}, \quad (2.21)$$

com uma única fronteira de descontinuidade $\Sigma = \{x = 0\}$. Dado $(0, y, z) \in \Sigma$ temos

$F_1(0, y, z) = (\alpha y, -y + z, -\beta y) = F_2(0, y, z)$ e, como

$$F_{1,x} = \begin{pmatrix} \alpha(3x^2 - \mu^2) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \alpha(-3x^2 + \mu^2) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} = F_{2,x}$$

sobre Σ (i.e., quando $x = 0$), segue que (2.21) tem grau de suavidade uniforme $m = 2$ e, portanto, é um sistema *contínuo* suave por partes. Sob a variação de μ podemos obter ramos de equilíbrios de F_1 e F_2 . Neste caso, cada campo possui dois ramos de equilíbrios, os quais ainda coincidem; precisamente temos $x_a^+(\mu) = x_a^-(\mu) = (\mu, 0, -\mu)$ e $x_b^+(\mu) = x_b^-(\mu) = (-\mu, 0, \mu)$. Segue que

- Para $\mu < 0$;

$x_a^+(\mu) \in S_2 = \{x < 0\}$ é equilíbrio virtual de (2.21),

$x_a^-(\mu) \in S_2 = \{x < 0\}$ é equilíbrio admissível de (2.21),

$x_b^+(\mu) \in S_1 = \{x > 0\}$ é equilíbrio admissível de (2.21),

$x_b^-(\mu) \in S_1 = \{x > 0\}$ é equilíbrio virtual de (2.21).

- Para $\mu = 0$;

Neste caso, $(0, 0, 0)$ é um equilíbrio de fronteira de (2.21), uma vez que $F_1((0, 0, 0), \mu) = F_2((0, 0, 0), \mu) = (0, 0, 0)$ e $H((0, 0, 0), \mu) = 0$.

- Para $\mu > 0$;

$x_a^+(\mu) \in S_1 = \{x > 0\}$ é equilíbrio admissível de (2.21),

$x_a^-(\mu) \in S_1 = \{x > 0\}$ é equilíbrio virtual de (2.21),

$x_b^+(\mu) \in S_2 = \{x < 0\}$ é equilíbrio virtual de (2.21),

$x_b^-(\mu) \in S_2 = \{x < 0\}$ é equilíbrio admissível de (2.21).

Podemos observar então dois cenários de persistência ocorrendo simultaneamente. De fato, os ramos de equilíbrios $x_a^+(\mu)$ e $x_a^-(\mu)$, de F_1 e F_2 respectivamente, colidem no ponto de equilíbrio de fronteira. Ao fazê-lo, o ramo de equilíbrio virtual $x_a^+(\mu)$ torna-se admissível enquanto o ramo de equilíbrio admissível $x_a^-(\mu)$ torna-se virtual. De modo análogo nota-se persistência ao considerar os ramos de equilíbrios $x_b^+(\mu)$ e $x_b^-(\mu)$. Veja Figura 2.8-(b).

2.1.3 Sistemas contínuos suaves por partes no plano

O estudo das bifurcações em equilíbrios de fronteira de sistemas suaves por partes é recente. Diante disso, concentraremos nos sistemas planares, para os quais já existem diversos resultados importantes. No caso planar, os únicos tipos de conjuntos invariantes envolvidos em uma bifurcação em equilíbrio de fronteira são os ciclos limites. O trabalho pioneiro de Andronov *et. al.* [1] já estabelecia o aparecimento de um ciclo para campos de vetores *contínuos* lineares por partes em \mathbb{R}^2 , com uma única fronteira de descontinuidade. Posteriormente, e ainda sob a hipótese de continuidade, Lum and Chua [7] conjecturaram que o número máximo de ciclos limites que podem surgir em tais sistemas é um. Então, em 1998, Freire *et. al.* [4] provaram a veracidade da conjectura de Lum and Chua, e estabeleceram condições para a existência de ciclos limites em uma bifurcação em equilíbrio de fronteira. Os resultados obtidos por Freire *et. al.* podem ser resumidos no seguinte teorema:

Teorema 2.2 ([2]). *Considere um sistema linear por partes no plano da forma*

$$\dot{x} = \begin{cases} N_1x + M\mu, & \text{se } C^T x > 0 \\ N_2x + M\mu, & \text{se } C^T x < 0 \end{cases}, \quad (2.22)$$

com $x \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{R}$ e $N_2 = N_1 + EC^T$. Suponha que $\det(N_1) \neq 0$, $1 + C^T N_1^{-1} E \neq 0$, $\text{tr}(N_1) \neq 0$, $\det(N_1) \neq \text{tr}(N_1)^2/4$ e $\det(N_2) \neq \text{tr}(N_2)^2/4$.

1. Se $\text{tr}(N_1)\text{tr}(N_2) > 0$, então nenhum ciclo limite está envolvido na bifurcação.

2. Se $\text{tr}(N_1)\text{tr}(N_2) < 0$, então:

(a) Se temos uma bifurcação em um ponto de equilíbrio de fronteira com $1 + C^T N_1^{-1} E > 0$ (persistência) e há pelo menos um foco envolvido, então:

i. Se o caso foco-nó é observado, então o ciclo existe e é estável se $\text{tr}(\text{Jac}) < 0$ (o nó é estável) e instável se $\text{tr}(\text{Jac}) > 0$, onde Jac é a matriz jacobiana obtida pela linearização do sistema sobre o nó.

ii. Se em vez disso, observa-se o caso foco-foco, então assumindo que $\alpha_j \pm i\beta_j$, $j = 1, 2$ são os autovalores dos dois focos com $\beta_j > 0$ e $e^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}\pi} e^{\frac{\alpha_2}{\beta_2}\pi} \neq 1$, existe um ciclo que é estável se $e^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}\pi} e^{\frac{\alpha_2}{\beta_2}\pi} < 1$, e instável se $e^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}\pi} e^{\frac{\alpha_2}{\beta_2}\pi} > 1$.

- iii. Se os casos nó-nó ou sela-sela são observados, então não existe ciclo.
- (b) Se temos uma bifurcação em um ponto de equilíbrio de fronteira com $1 + C^T N_1^{-1} E < 0$ (dobra não-suave) então um ciclo limite pode apenas cercar um foco.
- i. Se os equilíbrios são nó-sela então não existe nenhum ciclo limite.
- ii. Se temos uma bifurcação sela-foco, então:
- A. Se o foco é instável e a variedade instável do ponto de sela espirala no interior da variedade estável, então existe um ciclo limite estável.
- B. Se o foco é estável e a variedade estável do ponto de sela espirala no interior da variedade instável, então existe um ciclo limite instável.
- C. Se em vez disso as respectivas variedades espiralam no exterior, então não existe ciclo limite.

A seguir exibimos alguns exemplos que ilustram o Teorema 2.2.

Exemplo 2.2 *Considere*

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2.1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 4 \\ 2.6 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, temos o seguinte sistema bidimensional linear por partes

$$\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{se } x_2 > 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{se } x_2 < 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

onde

$$C^T x = x_2, \quad \Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\} \quad e \quad N_2 = N_1 + EC^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$\det(N_1) = 1 \neq 0, \quad \text{tr}(N_1) = -2.1 \neq 0$$

$$1 = \det(N_1) \neq \text{tr}(N_1)^2/4 = 1.1025$$

$$5 = \det(N_2) \neq \text{tr}(N_2)^2/4 = 0.0625$$

Como N_1 é inversível com inversa $N_1^{-1} = \begin{pmatrix} -2.1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, temos $1 + C^T N_1^{-1} E = 5 > 0$ (persistência). Escrevendo

$$F_1(x, \mu) := N_1 x + M\mu = (x_2 + \mu, -x_1 - 2.1x_2) \quad e$$

$$F_2(x, \mu) := N_2 x + M\mu = (5x_2 + \mu, -x_1 + 0.5x_2)$$

encontramos os ramos de equilíbrios $x^+(\mu) = (2.1\mu, -\mu)$ e $x^-(\mu) = (-0.1\mu, -0.2\mu)$, de F_1 e F_2 respectivamente. Note que o ponto $x^+(0) = (0, 0) = x^-(0)$ é um equilíbrio de fronteira do sistema (2.23). Como o sistema é linear por partes, temos

$$F_{1,x}(x^+(\mu)) = N_1 \quad e \quad F_{2,x}(x^-(\mu)) = N_2, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Além disso, de $\text{tr}(N_1) < 0$, $\det(N_1) > 0$ e $\det(N_1) < \text{tr}(N_1)^2/4$ conclui-se que os equilíbrios de F_1 são nós estáveis para qualquer $\mu \in \mathbb{R}$. Analogamente, de $\text{tr}(N_2) > 0$, $\det(N_2) > 0$ e $\det(N_2) > \text{tr}(N_2)^2/4$ tem-se que os equilíbrios de F_2 são focos instáveis qualquer que seja $\mu \in \mathbb{R}$. Assim, como $\text{tr}(N_1)\text{tr}(N_2) = -1.05 < 0$, $1 + C^T N_1^{-1} E > 0$, com um foco envolvido (N_2) e $\text{tr}(\text{Jac}) = \text{tr}(N_1) = -2.1 < 0$, segue por 2.(a).i do Teorema 2.2 que existe um ciclo limite estável na bifurcação do equilíbrio de fronteira $(0, 0)$. Veja a Figura 2.9.

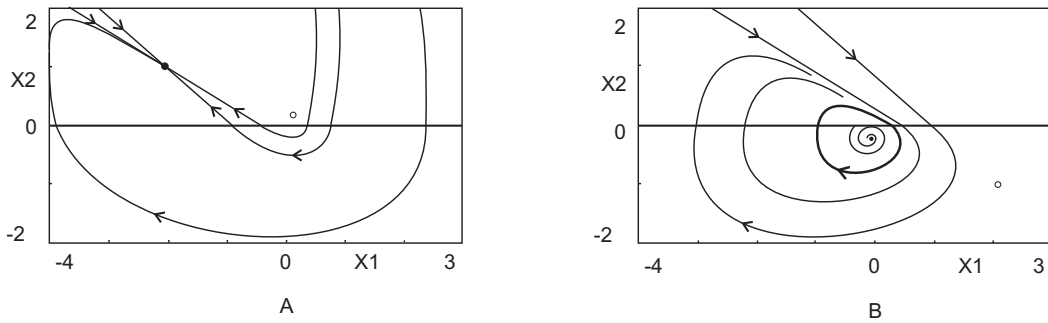


Figura 2.9: Retratos de fase do Exemplo 2.2. (a) Nó estável ($\mu = -1$) (b) Foco Instável com um ciclo limite estável ($\mu = 1$).

Exemplo 2.3 *Suponha que*

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 4 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Novamente temos $N_2 = N_1 + EC^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 0.5 \end{pmatrix}$ (foco instável). Assim,

$$\text{tr}(N_1) = -1 < 0, \quad \text{tr}(N_2) = 0.5 > 0, \quad \det(N_1) = 1 > 0, \quad 1 + C^T N_1^{-1} E = 5 > 0.$$

Neste caso N_1 é foco estável com autovalores $\alpha_1 \pm i\beta_1 = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Além disso, os autovalores de N_2 são $\alpha_2 \pm i\beta_2 = \frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{79}}{4}$. Assim, por 2.(a).ii do Teorema 2.2, existe um ciclo limite estável na bifurcação do equilíbrio de fronteira $(0,0)$, visto que $e^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}\pi} e^{\frac{\alpha_2}{\beta_2}\pi} = e^{\frac{-\pi}{\sqrt{3}}} e^{\frac{\pi}{\sqrt{79}}} \simeq 0.232 < 1$.

Os ramos de equilíbrios de

$$F_1(x, \mu) := N_1 x + M\mu = (x_2 + \mu, -x_1 - x_2) \quad e$$

$$F_2(x, \mu) := N_2 x + M\mu = (5x_2 + \mu, -x_1 + 0.5x_2)$$

são $x^+(\mu) = (\mu, -\mu)$ e $x^-(\mu) = (-0.1\mu, -0.2\mu)$, respectivamente. Na Figura 2.10 temos os retratos de fase para os valores de parâmetro $\mu = \pm 1$.

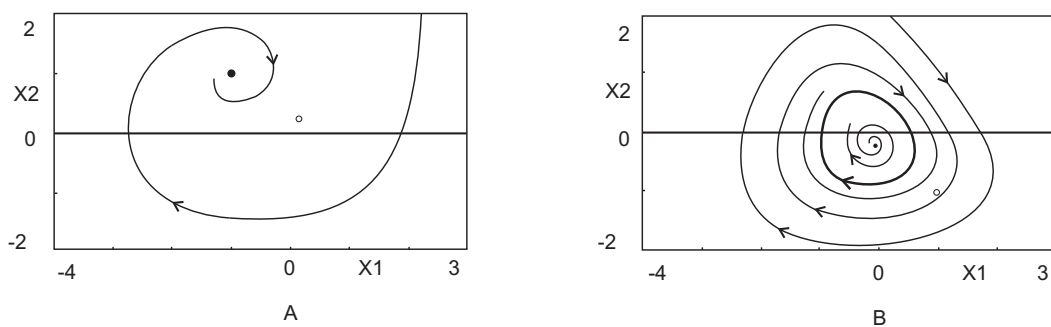


Figura 2.10: Retratos de fase do Exemplo 2.3. (a) Foco estável ($\mu = -1$) (b) Foco Instável com um ciclo limite estável ($\mu = 1$).

Exemplo 2.4 *Considere agora*

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 6 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Temos então N_1 sela e novamente $N_2 = N_1 + EC^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 0.5 \end{pmatrix}$ foco instável. Logo,

$$\text{tr}(N_1) = -1 < 0, \quad \text{tr}(N_2) = 0.5 > 0, \quad 1 + C^T N_1^{-1} E = -5 < 0.$$

Assim, estamos nas condições do Teorema 2.2 com um cenário de dobra não-suave; portanto, existe um ciclo limite estável na bifurcação do equilíbrio de fronteira $(0,0)$. Note que $x^+(\mu) = (-\mu, \mu)$ e $x^-(\mu) = (-0.1\mu, -0.2\mu)$ são os ramos de equilíbrios de

$$F_1(x, \mu) := N_1 x + M\mu = (-x_2 + \mu, -x_1 - x_2) \quad e$$

$$F_2(x, \mu) := N_2 x + M\mu = (5x_2 + \mu, -x_1 + 0.5x_2)$$

respectivamente. Veja Figura 2.11.

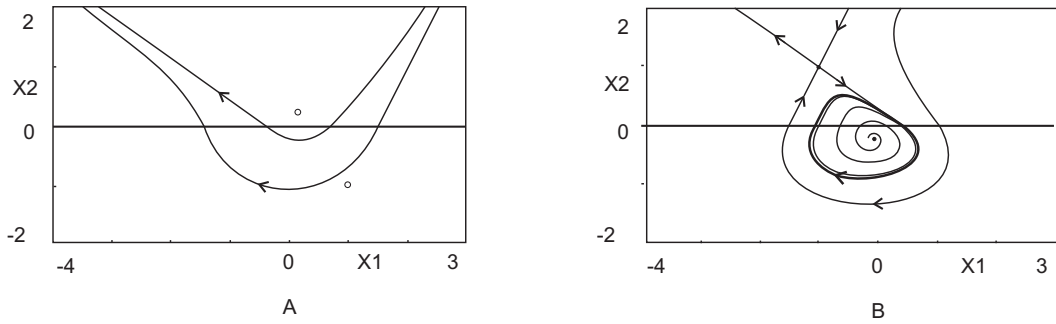


Figura 2.11: Retratos de fase do Exemplo 2.4. (a) Sem conjuntos limite ($\mu = -1$) (b) Foco Instável com um ciclo limite estável e um ponto de sela ($\mu = 1$).

2.2 Fluxos de Filippov

Nosso objetivo agora é estudar bifurcações de equilíbrios em sistemas de Filippov, isto é, sistemas com grau de suavidade $m = 1$ sobre Σ . Assim, como $F_1(x) \neq F_2(x)$ para todo $x \in \Sigma$, não veremos bifurcações de codimensão um onde ambos os campos de vetores se anulam em

um equilíbrio de fronteira como na seção anterior. No entanto, agora há a possibilidade de um “movimento deslizante” na fronteira de descontinuidade (região de deslize), onde a dinâmica do sistema é determinada pelo campo de vetores deslizante F_d . Além disso, também pode existir a presença de equilíbrios do fluxo deslizante (chamados pseudo-equilíbrios); desdobraremos assim um novo tipo de bifurcação em equilíbrio de fronteira. Uma descrição completa da dinâmica em dimensão n ainda não é conhecida. Portanto, vamos tratar do caso de sistemas de Filippov planares, exibindo os resultados obtidos de Kuznetsov *et. al.* [13].

Considere então sistemas de Filippov que localmente para alguma região $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ podem ser escritos sob a forma

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x, \mu), & \text{se } H(x, \mu) > 0 \\ F_2(x, \mu), & \text{se } H(x, \mu) < 0 \end{cases}. \quad (2.24)$$

Assim como no caso dos campos de vetores suaves por partes *contínuos* da Seção 2.1, podemos identificar diferentes tipos de equilíbrios em um sistema de Filippov. Temos as seguintes definições:

Definição 2.6 Dizemos que um ponto $x \in \mathcal{D}$ é um **equilíbrio admissível** de (2.24) se

$$F_1(x, \mu) = 0 \quad e \quad H(x, \mu) > 0$$

ou

$$F_2(x, \mu) = 0 \quad e \quad H(x, \mu) < 0.$$

Definição 2.7 Chamamos um ponto \tilde{x} um **pseudo-equilíbrio** de (2.24) se para algum escalar α temos que \tilde{x} satisfaz

$$F_1(\tilde{x}, \mu) + \alpha(F_2 - F_1)(\tilde{x}, \mu) = 0 \quad e \quad H(\tilde{x}, \mu) = 0.$$

Se $0 < \alpha < 1$, então \tilde{x} é dito um **pseudo-equilíbrio admissível**. Por outro lado, dizemos que \tilde{x} é um **pseudo-equilíbrio virtual** se $\alpha < 0$ ou $\alpha > 1$.

Podemos classificar alguns tipos de pseudo-equilíbrios.

Definição 2.8 Um pseudo-equilíbrio $\tilde{x} \in \Sigma$ é chamado uma **pseudo-sela** se uma das seguintes condições é satisfeita:

1. $\tilde{x} \in \Sigma_e$ (região de deslize repelindo) e \tilde{x} é um ponto de equilíbrio atrator para F_d ; ou
2. $\tilde{x} \in \Sigma_d$ (região de deslize atraindo) e \tilde{x} é um ponto de equilíbrio repulsor para F_d .

Um pseudo-equilíbrio $\tilde{x} \in \Sigma$ é um **pseudo-nó estável** (resp. **pseudo-nó instável**) se $\tilde{x} \in \Sigma_d$ (resp. $\tilde{x} \in \Sigma_e$) e \tilde{x} é um ponto de equilíbrio atrator (resp. repulsor) para F_d . Veja Figura 2.12.

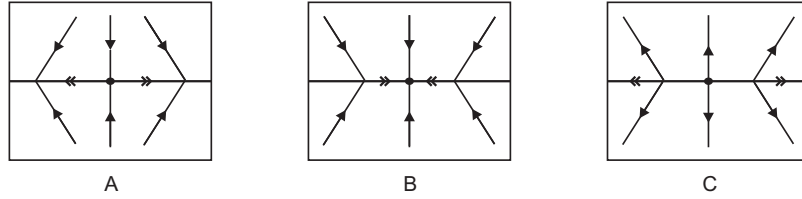


Figura 2.12: Pseudo-equilíbrios: (a) pseudo-sela, (b) pseudo-nó estável e (c) pseudo-nó instável.

Definição 2.9 Um ponto \hat{x} é chamado um **equilíbrio de fronteira** de (2.24) se

$$F_1(\hat{x}, \mu) = 0 \quad \text{ou} \quad F_2(\hat{x}, \mu) = 0,$$

$$\text{e} \quad H(\hat{x}, \mu) = 0.$$

Definimos então uma bifurcação em equilíbrio de fronteira da seguinte maneira.

Definição 2.10 O sistema suave por partes de Filippov (2.24) sofre uma **bifurcação em equilíbrio de fronteira** em $\mu = \mu^*$ em relação ao campo de vetores $F_i, i = 1, 2$, se existir um ponto x^* tal que:

1. $F_i(x^*, \mu^*) = 0$, mas $F_j(x^*, \mu^*) \neq 0$;
2. $H(x^*, \mu^*) = 0$;
3. $F_{i,x}(x^*, \mu^*)$ é inversível (equivalentemente, $\det(F_{i,x}(x^*, \mu^*)) \neq 0$) para $i = 1$ e 2 ;
4. $H_\mu(x^*, \mu^*) - H_x(x^*, \mu^*)[F_{i,x}^{-1}F_{i,\mu}](x^*, \mu^*) \neq 0$.

Antes de iniciarmos o estudo dos cenários de bifurcação em sistemas de Filippov, apresentamos um exemplo aplicado simples.

Exemplo 2.5 *Em Física, no estudo de oscilações e ondas, é comum considerar como primeiros exemplos de modelos mecânicos com movimento oscilatório os chamados sistemas massa-mola. Oscilações mecânicas (e elétricas) ocorrem quando um sistema sofre uma perturbação a partir de uma posição de equilíbrio estável, e equações diferenciais lineares aparecem na descrição de tais fenômenos. O tipo de movimento oscilatório mais comum é o movimento harmônico simples. Considere um corpo sólido (um bloco) com massa m preso a uma mola sobre uma superfície horizontal. Suponha que o atrito entre o bloco e a superfície é desprezível e que o bloco ocupa a posição $u_0 = 0$ quando o sistema está em repouso. Ao deslocar o bloco a uma distância u a partir de sua posição de equilíbrio, a mola exerce sobre ele uma força restauradora $F_u = -ku$ proporcional ao seu deslocamento (lei de Hooke), onde k é uma constante que mede a rigidez da mola. O sinal negativo indica que a força agindo sobre o bloco tem sentido oposto ao seu deslocamento e que a mola não exerce força sobre o corpo quando em sua posição de equilíbrio. Assim, o bloco começa a oscilar sobre a superfície e a equação de movimento é obtida a partir da segunda lei de Newton ($F_{res} = ma$, onde F_{res} é a resultante de todas as forças externas que agem sobre o sistema), ou seja*

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = -ku,$$

sendo $a = \frac{d^2 u}{dt^2}$ a aceleração do bloco. Este tipo de movimento é chamado movimento harmônico simples e é dado por uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem:

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + ku = 0. \quad (2.25)$$

No entanto, em situações mais realistas, deve-se considerar o atrito produzido pela resistência da superfície. Neste caso, a equação do movimento do bloco torna-se

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + \gamma \frac{du}{dt} + ku = 0, \quad (2.26)$$

onde γ é uma constante de amortecimento. A Equação (2.26) também é facilmente estabelecida a partir da segunda lei de Newton. Neste caso, $F_{res} = F_u + f$, onde $f = -\gamma v$ é a força de atrito cinético, a qual é proporcional à velocidade $v = du/dt$ do bloco. O sinal negativo indica que a força de atrito se opõe ao movimento do bloco, tendendo a pará-lo. Neste caso, o sistema é

dito amortecido.

Afim de manter um sistema amortecido oscilando indefinidamente, uma energia mecânica deve ser injetada ao sistema. Isto pode ser feito aplicando uma força externa $E(t)$ à massa m . Dessa forma temos um sistema mecânico forçado. O movimento oscilatório forçado do bloco com força periódica cossenoidal é dada pela equação:

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + \gamma \frac{du}{dt} + ku = b \cos(\omega t), \quad (2.27)$$

onde b e ω são a amplitude e a frequência angular da força de excitação externa $E(t) = b \cos(\omega t)$.

As equações de movimento (2.25), (2.26) e (2.27) dos modelos mecânicos massa-mola acima podem ser reduzidas a sistemas dinâmicos suaves lineares no plano através de uma simples mudança de variáveis. Agora, com base na equação de movimento forçado (2.27), um modelo mecânico com abordagem de sistemas suaves por partes pode ser fornecido. De fato, considere um sistema massa-mola sob ação de duas forças externas distintas em suas respectivas regiões, como na Figura 2.13.

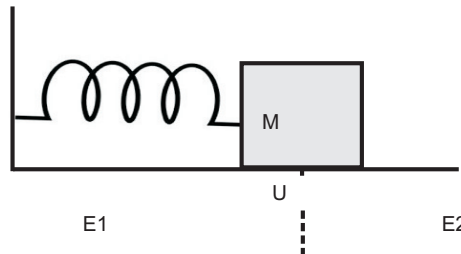


Figura 2.13: Sistema massa-mola sob a ação de duas forças externas distintas.

Suponha que $m = 1$ e $E_i(t) = b_i \cos(\omega t)$, $i = 1, 2$, $b_1 \neq b_2$. Assim, a equação do movimento é dada por

$$\begin{cases} \ddot{u} + \gamma \dot{u} + ku = b_1 \cos(\omega t), & \text{se } u < 0 \\ \ddot{u} + \gamma \dot{u} + ku = b_2 \cos(\omega t), & \text{se } u > 0 \end{cases}.$$

Fazendo a mudança de variáveis $x = u$, $y = \dot{u}$, obtemos:

$$\dot{x} = y \quad \text{e} \quad \dot{y} = -\gamma y - kx + b_i \cos(\omega t), \quad i = 1, 2.$$

Logo, a dinâmica deste modelo mecânico é dada pelo seguinte sistema linear por partes

bidimensional:

$$\dot{x} = (\dot{x}, \dot{y}) = \begin{cases} F_1(x), & \text{se } x < 0 \\ F_2(x), & \text{se } x > 0 \end{cases}, \quad (2.28)$$

onde $\Sigma = \{x = 0\}$ e $F_i(x) = (y, -\gamma y - kx + b_i \cos(\omega t))$. Note que dado $(0, y) \in \Sigma$ temos

$$F_1(0, y) = (y, -\gamma y + b_1 \cos(\omega t)) \neq (y, -\gamma y + b_2 \cos(\omega t)) = F_2(0, y),$$

pois $b_1 \neq b_2$. Portanto, o Sistema (2.28) tem grau de suavidade uniforme igual a um, ou seja, (2.28) é um sistema de Filippov.

2.2.1 Classificação dos casos possíveis

Sem perda de generalidade, vamos tomar (2.24) em uma região $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^n$ contendo a origem e supor que $x = 0$ é um equilíbrio de fronteira com relação a F_1 para $\mu = 0$, isto é,

$$F_1(0, 0) = 0 \quad e \quad H(0, 0) = 0.$$

Buscaremos agora condições que classifiquem o comportamento deste equilíbrio em um desdobramento da bifurcação. Mostraremos que, quando μ é perturbado, cenários semelhantes àqueles apresentados para sistemas *contínuos* suaves por partes são possíveis. Ou seja, podemos observar:

Persistência: quando um ramo de equilíbrio admissível se transforma em um ramo de pseudo-equilíbrio admissível; veja Figura 2.14.

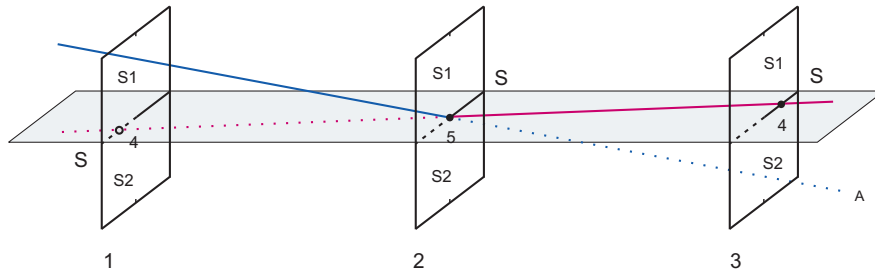


Figura 2.14: Cenário de persistência em um sistema bidimensional linear por partes. A região tracejada (lisa) em Σ representa costura (deslize).

Dobra não-suave: quando um ramo de equilíbrio admissível e um ramo de pseudo-equilíbrio admissível se tornam virtuais após colidirem no equilíbrio de fronteira. Veja Figura 2.15

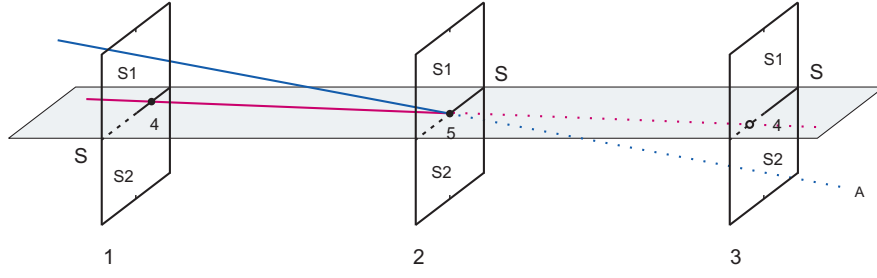


Figura 2.15: Cenário de dobra não-suave em um sistema bidimensional linear por partes. A região tracejada (lisa) em Σ representa costura (deslize).

Teorema 2.3 Considere, para uma região $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^n$ contendo a origem, o sistema de Filippov

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x, \mu), & \text{se } H(x, \mu) > 0 \\ F_2(x, \mu), & \text{se } H(x, \mu) < 0 \end{cases}, \quad (2.29)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$, $F_1, F_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ e $H : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves em \mathcal{D}_0 , e $\Sigma = H^{-1}(0)$. Suponha que (2.29) sofre uma bifurcação no equilíbrio de fronteira $x^* = 0$ para $\mu^* = 0$ em relação ao campo F_1 . Então, assumindo que

$$C^T N_1^{-1} E \neq 0,$$

onde $N_1 = F_{1,x}(0, 0)$, $C^T = H_x(0, 0)$, $E = F_2 - F_1$ temos

1. Um cenário de persistência em $(0, 0)$ se

$$C^T N_1^{-1} E < 0.$$

2. Um cenário de dobra não suave em $(0, 0)$ se

$$C^T N_1^{-1} E > 0.$$

Demonstração. Sejam $x \in \mathcal{D}_0$ um equilíbrio de F_1 e $\tilde{x} \in \mathcal{D}_0$ um pseudo-equilíbrio; isto é

$$F_1(x, \mu) = 0, \quad H(x, \mu) := \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$F_1(\tilde{x}, \mu) + \alpha(F_2 - F_1)(\tilde{x}, \mu) = 0, \quad H(\tilde{x}, \mu) = 0.$$

Como (2.29) sofre uma bifurcação no equilíbrio de fronteira $x = 0$ para $\mu = 0$ em relação ao campo F_1 , temos pelo item 3 da Definição 2.10 que $N_1 = F_{1,x}(0, 0)$ é inversível e, portanto, podemos considerar a linearização do sistema sobre o ponto $(x^*, \mu^*) = (0, 0)$:

$$N_1 x + M_1 \mu = 0, \quad C^T x + B \mu = \lambda \quad (2.30)$$

$$N_1 \tilde{x} + M_1 \mu + E \alpha = 0, \quad C^T \tilde{x} + B \mu = 0, \quad (2.31)$$

onde $N_1 = F_{1,x}(0, 0)$, $M_1 = F_{1,\mu}(0, 0)$, $C^T = H_x(0, 0)$, $B = H_\mu(0, 0)$ e $E = F_2 - F_1$. Assim, de (2.30) temos $x = -N_1^{-1} M_1 \mu$ e

$$\lambda = (B - C^T N_1^{-1} M_1) \mu. \quad (2.32)$$

Além disso, de (2.31), $\tilde{x} = -N_1^{-1} M_1 \mu - N_1^{-1} E \alpha$ e substituindo em $C^T \tilde{x} + B \mu = 0$, obtemos

$$\alpha = \frac{(B - C^T N_1^{-1} M_1) \mu}{C^T N_1^{-1} E} = \frac{\lambda}{C^T N_1^{-1} E}. \quad (2.33)$$

Agora, note que do item 4 da Definição 2.10 temos $B - C^T N_1^{-1} M_1 \neq 0$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $B - C^T N_1^{-1} M_1 < 0$. Assim, de (2.32) concluimos que $\lambda := H(x, \mu)$ e μ têm sinais opostos. Assim, se a condição $C^T N_1^{-1} E < 0$ for satisfeita temos de (2.33):

- Para $\mu < 0$;

Neste caso, $\lambda = H(x, \mu) > 0$ e então x é equilíbrio admissível. Além disso, de $\alpha = \frac{\lambda}{C^T N_1^{-1} E} < 0$, temos \tilde{x} pseudo-equilíbrio virtual.

- Para $\mu = 0$;

De (2.32) e (2.33) notamos $H(x, \mu) = 0$ e $\alpha = 0$. Portanto, $F_1(\tilde{x}, \mu) = 0 = F_1(x, \mu)$. Além disso, o sistema sofre bifurcação no ponto de equilíbrio de fronteira $x^* = 0$. Assim, para $\mu = 0$ temos $x = \tilde{x} = x^* = 0$.

- Para $\mu > 0$;

Aqui, $\lambda = H(x, \mu) < 0$ e $0 < \alpha < 1$ uma vez que $\alpha = \frac{(B - C^T N_1^{-1} M_1) \mu}{C^T N_1^{-1} E}$ e podemos tomar $\mu > 0$ suficientemente pequeno para que $\alpha < 1$. Logo, neste caso, x é equilíbrio virtual e \tilde{x} pseudo-equilíbrio admissível.

Assim, para $C^T N_1^{-1} E < 0$ podemos observar um cenário de persistência, isto é, um ramo de equilíbrio admissível se torna um ramo de pseudo-equilíbrio admissível após a colisão com

o equilíbrio de fronteira (ponto onde ocorre a bifurcação do sistema). Por outro lado, se a condição $C^T N_1^{-1} E > 0$ for satisfeita temos

- Para $\mu < 0$;

Neste caso, x é equilíbrio admissível visto que $\lambda = H(x, \mu) > 0$. Além disso, $0 < \alpha = \frac{\lambda}{C^T N_1^{-1} E} < 1$ e portanto \tilde{x} é pseudo-equilíbrio admissível, para $|\mu| > 0$ suficientemente pequeno.

- Para $\mu = 0$;

Aqui $x = \tilde{x} = x^* = 0$ é equilíbrio de fronteira.

- Para $\mu > 0$;

Agora temos $\lambda = H(x, \mu) < 0$ e $\alpha < 0$. Logo, neste caso, x é um equilíbrio virtual e \tilde{x} um pseudo-equilíbrio virtual.

Portanto, observamos que um ramo de equilíbrio admissível e um ramo de pseudo-equilíbrio admissível se tornam virtuais após colidirem no ponto de equilíbrio de fronteira, onde ocorre a bifurcação. Temos assim um cenário de dobra não-suave para $C^T N_1^{-1} E > 0$.

■

Observação 2.3 Ao considerar $B - C^T N_1^{-1} M_1 > 0$ na demonstração do Teorema 2.3 então, de (2.32), conclui-se que λ e μ têm o mesmo sinal. Logo, os cenários de persistência ($C^T N_1^{-1} E < 0$) e dobra não-suave ($C^T N_1^{-1} E > 0$) aparecem ao perturbar $\nu = -\mu$.

2.2.2 Sistemas de Filippov planares

Apresentamos agora alguns dos resultados de Kuznetsov *et. al* [13] sobre bifurcações locais a um parâmetro em sistemas de Filippov planares, que fornece retratos de fase genéricos topologicamente distintos próximo a uma bifurcação em equilíbrio de fronteira.

Considere um sistema de Filippov planar

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x, \mu), & \text{se } H(x, \mu) > 0 \\ F_2(x, \mu), & \text{se } H(x, \mu) < 0 \end{cases}, \quad (2.34)$$

onde $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{R}$, $F_i, i = 1, 2$, são funções suaves,

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : H(x, \mu) > 0\}, \quad S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : H(x, \mu) < 0\} \quad \text{e} \quad \Sigma = H^{-1}(0)$$

para alguma função suave $H(x, \mu)$ com $H_x(x, \mu) \neq 0$ para todo (x, μ) tal que $H(x, \mu) = 0$.

Definição 2.11 Um ponto $T \in \Sigma$ tal que $H_x(T)F_1(T) = 0$ e $F_1(T) \neq 0$ é dito um **ponto tangente** a Σ . O ponto tangente T é **visível** (respec. **invisível**) se a órbita $\varphi_1(x, \mu, t)$ de $\dot{x} = F_1(x, \mu)$, partindo de T , pertence a S_1 (respec. S_2) para todo $|t| \neq 0$ suficientemente pequeno.

Definições semelhantes de ponto tangente são válidas para o campo de vetores F_2 .

Assuma, sem perda de generalidade, que Σ é dada localmente por $\{x_2 = 0\}$, isto é, $H(x) = x_2$. Suponha que T é um ponto tangente a Σ de acordo com a Definição 2.11. Genericamente, T não é um ponto tangente para F_2 , de modo que $F_2(T)$ é transversal a Σ , bem como todos os vetores $F_2(x)$ com $x \in \Sigma$ próximo de T . Assim, em uma vizinhança de um ponto tangente genérico, as órbitas do sistema são como na Figura 2.16.

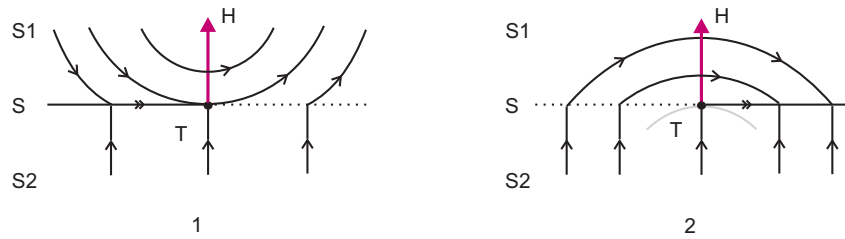


Figura 2.16: Pontos tangentes visível (a) e invisível (b) de um sistema de Filippov planar. A região sólida (pontilhada) da fronteira Σ representa a região de deslize (costura).

Podemos distinguir três casos principais envolvendo a colisão de equilíbrios hiperbólicos com a fronteira.

Foco-Fronteira: Suponha que o foco é instável com rotação no sentido horário (caso o foco seja estável e/ou com rotação no sentido anti-horário basta inverter todas as setas nas figuras e/ou refletir as figuras em relação ao eixo vertical). Existem cinco casos genéricos e em cada um deles existe um ponto tangente visível quando $\mu < 0$ e um ponto tangente invisível quando $\mu > 0$. Os casos são distinguidos pela posição relativa das isóclinas do foco e o comportamento da órbita partindo do ponto tangente visível em S_1 , bem como pela direção do movimento em S_2 . Os desdobramentos destes casos podem ser vistos na Figura 2.17. Nos casos (1), (2) e (5) temos um cenário de dobra não-suave, enquanto em (3) e (4) podemos notar persistência.

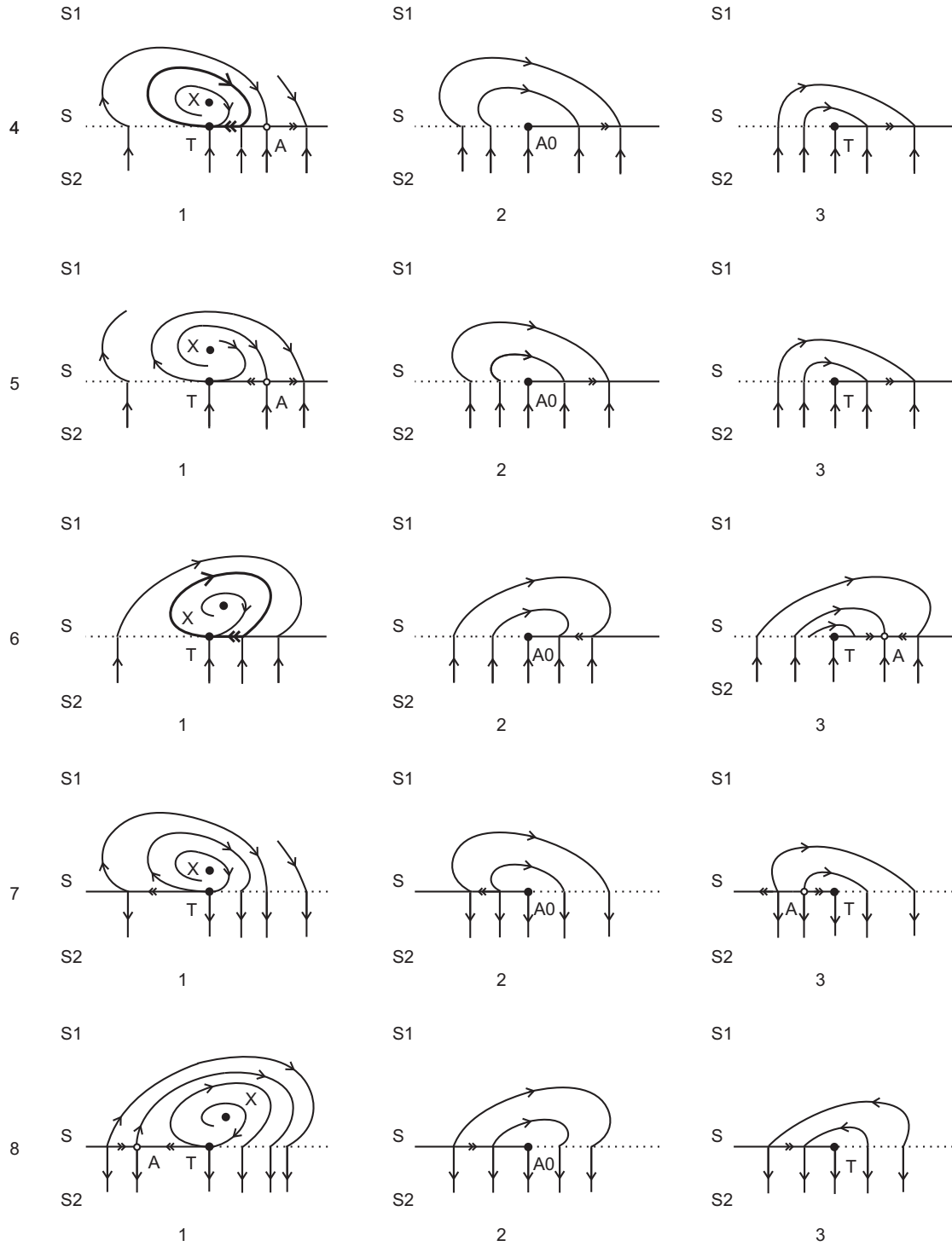


Figura 2.17: Bifurcação foco-fronteira. Os casos (1), (2) e (5) correspondem a dobra não-suave, enquanto (3) e (4) são cenários de persistência.

No caso (1), temos um **ciclo deslizante** (i.e., um ciclo limite com um segmento da região de deslize) estável envolvendo o foco instável x para $\mu < 0$. O segmento deslizante do ciclo termina no ponto tangente visível T e começa em um ponto onde a trajetória do foco encontra

Σ transversalmente, localizado entre T e uma pseudo-sela \tilde{x} . O domínio de atração deste ciclo é limitado pela separatriz estável de \tilde{x} . Quando $\mu \rightarrow 0$ o ciclo estável encolhe enquanto os pontos x , T e \tilde{x} colidem simultaneamente em x^* para $\mu = 0$. Para $\mu > 0$ pequeno, não existem equilíbrios ou ciclos e a região de deslize atraindo começa no ponto tangente invisível T .

No caso (2), a órbita partindo do ponto tangente visível T , para $\mu < 0$ pequeno, retorna a Σ à direita da pseudo-sela \tilde{x} . Os retratos de fase para $\mu = 0$ e $\mu > 0$ são como no caso (1).

No caso (3), um ciclo deslizante estável passando pelo ponto tangente visível T envolve o foco instável x para $\mu < 0$. Ao contrário do caso (1), não há pseudo-equilíbrio nas proximidades. Quando $\mu \rightarrow 0$, o ciclo estável encolhe e o foco x colide com o ponto tangente T . Para $\mu > 0$ não existe nenhum ciclo e todas órbitas próximas tendem a um pseudo-nó estável \tilde{x} que existe próximo ao ponto de tangência invisível T .

No caso (4), a região de deslize repelindo começa no ponto tangente visível T , para $\mu < 0$. Uma vez que o foco é instável e a direção do movimento em S_2 mudou, todas as órbitas deixam uma pequena vizinhança de x^* em $\mu = 0$. O mesmo ocorre para $\mu > 0$ com a única diferença que existe um pseudo-nó instável próximo ao ponto tangente invisível T .

No caso (5) não existe atrator próximo ao ponto de bifurcação x^* , onde ocorre a colisão de uma pseudo-sela \tilde{x} com o ponto tangente visível T e o foco x , quando $\mu \rightarrow 0$. Após a colisão, temos apenas um ponto tangente invisível T .

Nó-Fronteira: Suponha que o nó é estável. Dependendo da direção de movimento em S_2 , existem dois casos genéricos, cujos desdobramentos são apresentados nas Figuras 2.18 e 2.19. Casos com nós instáveis ou nós com isóclinas diferentemente inclinadas podem ser reduzidos aos casos considerados.

Considere o caso ilustrado na Figura 2.18. Neste caso observamos que o nó estável x e o ponto tangente visível T coexistem para $\mu < 0$ e colidem em $\mu = 0$. Para $\mu > 0$ temos um pseudo-nó estável \tilde{x} e um ponto tangente invisível T . Aqui temos um cenário de persistência.

Agora, no caso da Figura 2.19, o nó estável x coexiste com uma pseudo-sela \tilde{x} e um ponto tangente visível T para $\mu < 0$. Após a colisão desses pontos há apenas um ponto de tangência invisível para $\mu > 0$. Observamos assim um cenário de dobra não-suave.

Sela-Fronteira: Temos aqui três casos genéricos distintos, determinados pela inclinação das

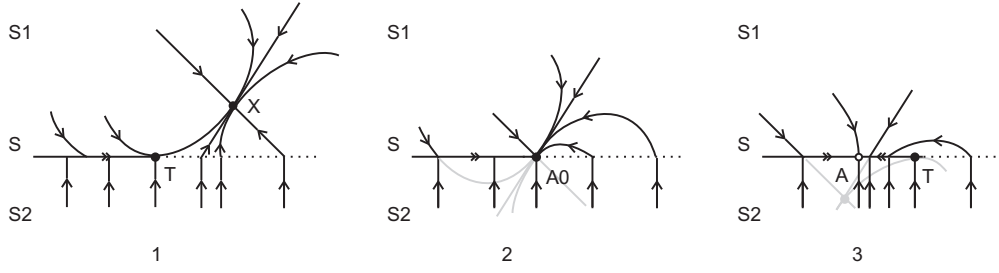


Figura 2.18: Bifurcação nó-fronteira com cenário de persistência.

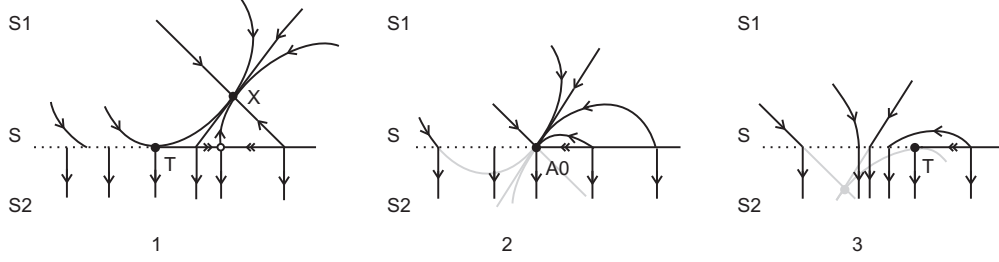


Figura 2.19: Bifurcação nó-fronteira com cenário de dobra não-suave.

isóclinas da sela. Todos os outros casos (isto é, quando a sela está com outra orientação ou o movimento em S_2 é invertido) podem ser reduzidos aos três considerados. Em todos os casos, existe um ponto tangente invisível para $\mu < 0$, e um ponto tangente visível para $\mu > 0$. Os casos (1) e (2) são dobras não-suaves, enquanto (3) corresponde a persistência. Veja Figura 2.20.

No caso (1), a sela x , o ponto tangente invisível T e o pseudo-nó estável \tilde{x} coexistem para $\mu < 0$. Estes três pontos colidem quando $\mu = 0$ e após a colisão há apenas um ponto tangente visível T para $\mu > 0$.

No caso (2) o desdobramento é análogo ao caso (1), com a diferença sutil da posição do pseudo-nó \tilde{x} em relação ao ponto de intersecção da variedade instável da sela x com a fronteira Σ .

No caso (3), para $\mu < 0$ a sela x coexiste com o ponto tangente invisível T , enquanto para $\mu > 0$ existe uma pseudo-sela \tilde{x} e um ponto tangente invisível T .

Teorema 2.4 ([2]). *Considere um sistema de Filippov planar da forma*

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x, \mu) = N_1 x + M\mu, & \text{se } C^T x > 0 \\ F_2(x, \mu) = N_2 x + M\mu, & \text{se } C^T x < 0 \end{cases}, \quad (2.35)$$

com $x \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{R}$. Suponha que $\det(N_1) \neq 0$, $C^T N_1^{-1} E \neq 0$, $\text{tr}(N_1) \neq 0$, $\det(N_1) \neq \text{tr}(N_1)^2/4$

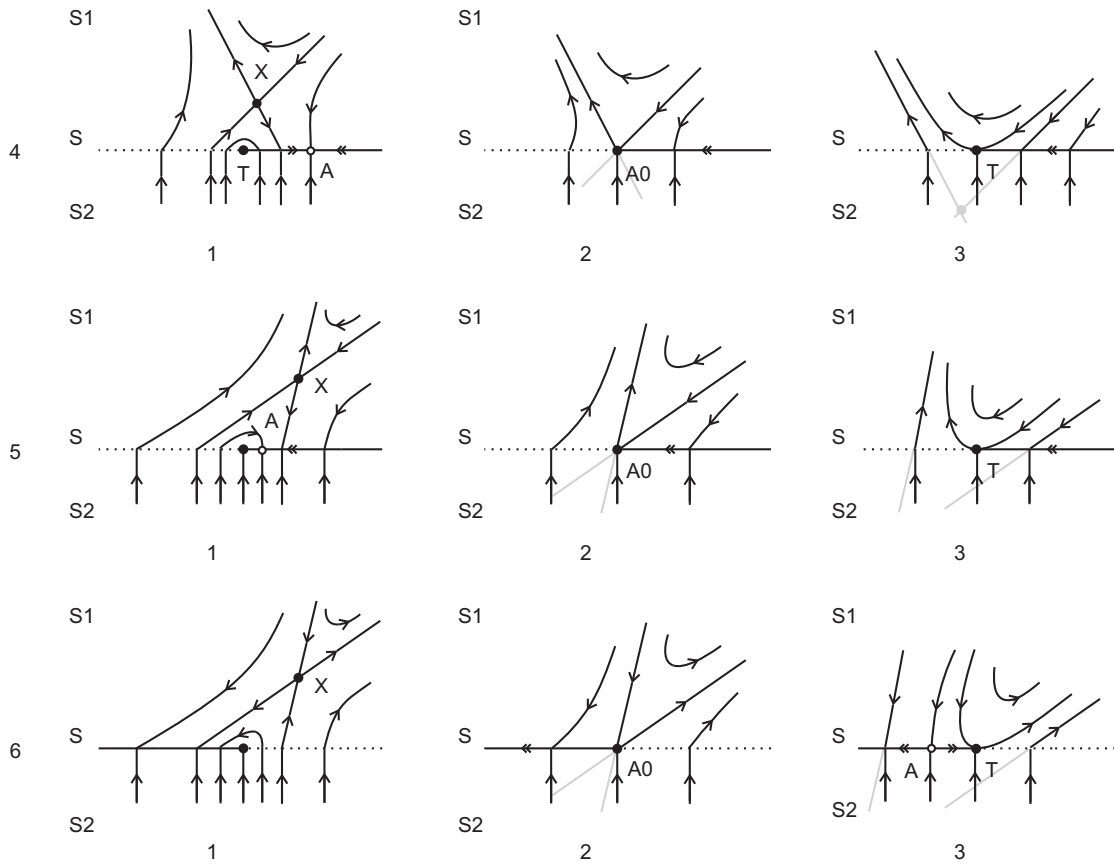


Figura 2.20: Bifurcação sela-fronteira. Nos casos (1) e (2) temos dobra não-suave. O caso (3) apresenta persistência.

e $C^T E \neq 0$, onde $E = F_2 - F_1$.

1. Se $\text{tr}(N_1)C^T E < 0$, então nenhum ciclo limite está envolvido na bifurcação.

2. Se $\text{tr}(N_1)C^T E > 0$, então:

(a) Se temos uma bifurcação em um ponto de equilíbrio de fronteira com $C^T N_1^{-1} E < 0$ (persistência), então um ciclo limite envolverá um foco:

i. Se uma transição de um pseudo-nó para um foco é observada, então o ciclo existe e é estável se $\text{tr}(N_1) > 0$ (o foco é instável) e instável se $\text{tr}(N_1) < 0$.

ii. Se uma transição do tipo pseudo-nó/nó ou pseudo-sela/sela é observada, então não existe ciclo.

(b) Se temos uma bifurcação em um ponto de equilíbrio de fronteira com $C^T N_1^{-1} E > 0$ (dobra não-suave) então um ciclo limite pode apenas cercar um foco.

- i. Se os equilíbrios são pseudo-nó/sela ou pseudo-sela/nó então não existe nenhum ciclo limite.
- ii. Se temos uma bifurcação pseudo-sela/foco, então:
 - A. Se o foco é instável e a variedade instável da pseudo-sela espirala no interior da variedade estável, então existe um ciclo limite estável.
 - B. Se o foco é estável e a variedade estável do ponto de sela espirala no interior da variedade instável, então existe um ciclo limite instável.
 - C. Se em vez disso as respectivas variedades espiralam no exterior, então não existe ciclo limite.

Vamos ilustrar este teorema com os seguintes exemplos.

Exemplo 2.6 *Considere*

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, $x = (x_1, x_2)$, a fronteira de descontinuidade Σ coincide com o eixo- x_1 , e

$$F_1(x, \mu) = Nx + M\mu = (x_2 + \mu, -x_1 + 0.5x_2).$$

O campo de Filippov é dado por $F_d = F_1 + \alpha E = (x_2 + \mu - 3\alpha, -x_1 + 0.5x_2 + 5\alpha)$.

Além disso, como $E = F_2 - F_1$, podemos determinar F_2 :

$$F_2 = F_1 + E = (x_2 + \mu - 3, -x_1 + 0.5x_2 + 5) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 6.5 \\ x_2 - 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Note que o sistema considerado é de Filippov pois dado $(x_1, 0) \in \Sigma$ temos

$$F_1(x_1, 0) = (\mu, -x_1) \neq (\mu - 3, -x_1 + 5) = F_2(x_1, 0).$$

Agora,

$$\text{tr}(N_1) = 0.5 > 0, \quad \det(N_1) = 1 > 0, \quad \text{tr}(N_1)^2/4 < \det(N_1),$$

logo F_1 (e, portanto F_2) tem um foco instável na origem (em $(6.5, 3)$, respectivamente) para

$\mu = 0$. Além disso, $C^T E = 5 > 0$, $C^T N_1^{-1} E = -3 < 0$ (persistência) e $\text{tr}(N_1)C^T E = 2.5 > 0$. Ainda temos:

Ramo de equilíbrios de F_1 : $x^+(\mu) = (-0.5\mu, -\mu)$;

Ramo de pseudo-equilíbrios: $\tilde{x}(\mu) = (5\mu/3, 0)$;

Isóclinas do foco (F_1): a x_1 -isóclina é dada por $\dot{x}_1 = 0$, isto é, pela reta $x_2 = -\mu$; e a x_2 -isóclina é obtida fazendo $\dot{x}_2 = 0$, ou seja, é dada pela equação $x_1 = 0.5x_2$;

Orientação do foco (F_1): Será a mesma para qualquer valor de $\mu \in \mathbb{R}$. Assim, em $\mu = 0$ e fazendo $x_2 = 0$ obtemos $F_1(x_1, 0) = (0, -x_1)$. Este comportamento do campo F_1 sobre o eixo- x_1 fornece a orientação do foco no sentido horário.

Agora, como $(C^T F_1) \cdot (C^T F_2) = x_1(x_1 - 5)$ temos:

Região de deslize: $(C^T F_1) \cdot (C^T F_2) < 0 \Rightarrow \Sigma_d = \{(x_1, x_2) \in \Sigma; 0 < x_1 < 5\}$;

Região de costura: $(C^T F_1) \cdot (C^T F_2) > 0 \Rightarrow \Sigma_c = \{(x_1, x_2) \in \Sigma; x_1 < 0 \text{ ou } x_1 > 5\}$;

Tangências com Σ : são dadas por $(C^T F_1) \cdot (C^T F_2) = 0$. Neste caso, ocorrem nos pontos $(0, 0)$ e $(5, 0)$.

Note que as condições 2.(a).i do Teorema 2.4 estão satisfeitas e, portanto, existe um ciclo limite estável na bifurcação do equilíbrio de fronteira $(0, 0)$. Veja Figura 2.21.

Exemplo 2.7 Suponha agora

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2.6 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

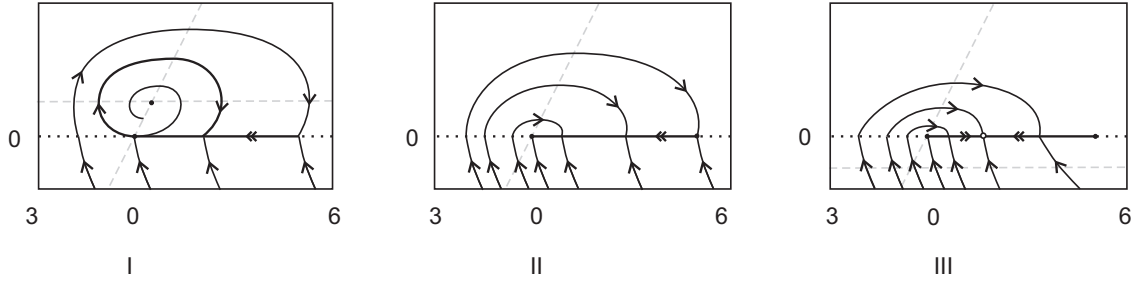


Figura 2.21: Retratos de fase do Exemplo 2.6. Foco instável com um ciclo limite estável ($\mu = -1$), e pseudo-nó estável ($\mu = 1$).

A fronteira de descontinuidade e o campo F_1 são os mesmos do Exemplo 2.6, isto é,

$$\Sigma = \{x_2 = 0\}, \quad F_1(x, \mu) = Nx + M\mu = (x_2 + \mu, -x_1 + 0.5x_2).$$

Neste caso, o campo de Filippov é dado por $F_d = F_1 + \alpha E = (x_2 + \mu + 2.6\alpha, -x_1 + 0.5x_2 + 10\alpha)$ e

$$F_2 = F_1 + E = (x_2 + \mu + 2.6, -x_1 + 0.5x_2 + 10) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 8.7 \\ x_2 + 2.6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

O sistema considerado também é de Filippov uma vez que dado $(x_1, 0) \in \Sigma$ temos

$$F_1(x_1, 0) = (\mu, -x_1) \neq (\mu + 2.6, -x_1 + 10) = F_2(x_1, 0).$$

Novamente o campo F_1 (e, portanto F_2) tem um foco instável na origem (em $(8.7, -2.6)$, respectivamente) quando $\mu = 0$. No entanto, $C^T E = 10 > 0$, $C^T N_1^{-1} = 2.6 > 0$ (dobrança não-suave) e $\text{tr}(N_1)C^T E = 5 > 0$. Além disso:

Ramo de equilíbrios de F_1 : $x^+(\mu) = (-0.5\mu, -\mu)$;

Ramo de pseudo-equilíbrios: $\tilde{x}(\mu) = (-100\mu/26, 0)$;

Isóclinas do foco (F_1): $\begin{cases} x_1 - \text{isóclina} : & x_2 = -\mu \\ x_2 - \text{isóclina} : & x_1 = 0.5x_2 \end{cases}$;

Orientação do foco (F_1): sentido horário.

Região de deslize: $\Sigma_d = \{(x_1, x_2) \in \Sigma; 0 < x_1 < 10\}$;

Região de costura: $\Sigma_c = \{(x_1, x_2) \in \Sigma; x_1 < 0 \text{ ou } x_1 > 10\}$;

Tangências com Σ : ocorrem nos pontos $(0, 0)$ e $(10, 0)$.

Assim, nas condições 2.(b).ii do Teorema 2.4, existe um ciclo limite estável na bifurcação do equilíbrio de fronteira $(0, 0)$. Os retratos de fase do sistema para $\mu = -1, 0$, e 1 são mostrados na Figura 2.22.

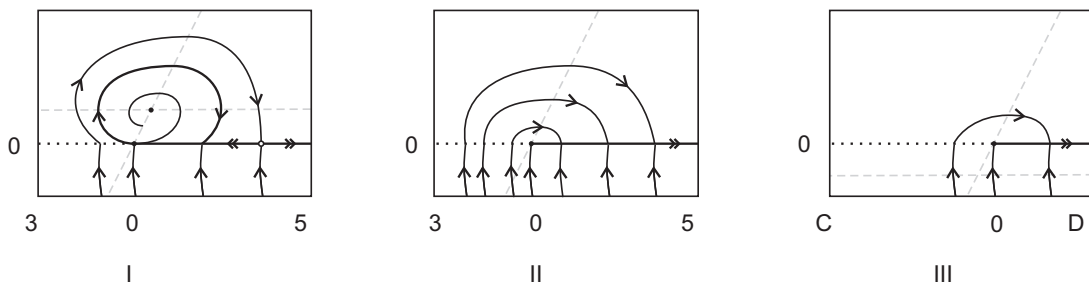


Figura 2.22: Retratos de fase do Exemplo 2.7. Foco instável com um ciclo limite estável e pseudo-sela ($\mu = -1$), e sem conjuntos limite ($\mu = 1$).

Bifurcações grazing-sliding

Em um sistema de Filippov, qualquer bifurcação pode ser classificada como local ou global. Nas seções anteriores estudamos bifurcações locais a um parâmetro real em sistemas planares, as quais surgem em uma vizinhança fixa, porém arbitrariamente pequena, de um ponto no plano. Todas as outras bifurcações que não essas são chamadas bifurcações globais.

Veremos agora uma classe de bifurcações globais em sistemas de Filippov planares. Precisamente, estudamos bifurcações de ciclos em sistemas

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x, \mu), & \text{se } x \in S_1 \\ F_2(x, \mu), & \text{se } x \in S_2 \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

$x \in \mathbb{R}^2$. No entanto, não consideraremos bifurcações que envolvam ciclos contidos em apenas uma das regiões S_1 ou S_2 , pois neste caso o problema se reduz ao estudo de bifurcações de ciclos em sistemas suaves. Estamos interessados em bifurcações a um parâmetro que envolvam deslize na fronteira de descontinuidade.

3.1 Colisão de um ciclo limite com a fronteira

As soluções periódicas do Sistema (3.1) podem estar inteiramente contidas em S_1 ou S_2 . No entanto, podem existir soluções periódicas envolvendo a fronteira de descontinuidade, subdivididas em duas classes:

Soluções periódicas com deslize: as quais têm um segmento de deslize em Σ ;

Soluções periódicas cruzando a fronteira: que possuem apenas pontos isolados em comum com Σ .

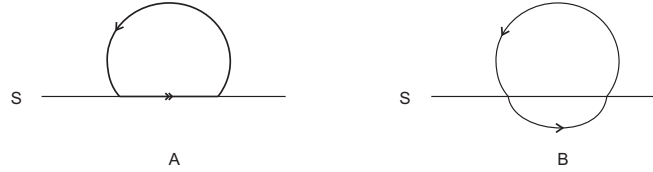


Figura 3.1: Soluções periódicas com (a) deslize , (b) cruzando a fronteira .

As bifurcações de ciclos que estudamos aqui são conhecidas por “*bifurcações grazing-sliding*”. Tratam-se de bifurcações globais a um parâmetro, e o caso mais simples ocorre quando um ciclo limite inteiramente contido em uma região S_i colide com a fronteira de descontinuidade Σ , originando um ciclo com deslize. Nesse processo existe um primeiro ponto de contato do ciclo com Σ (onde o ciclo é tangente à fronteira) para algum valor do parâmetro $\mu \in \mathbb{R}$, o qual supomos ser zero.

Dois casos genéricos são possíveis e dependem da estabilidade do ciclo tangente L_0 em $\mu = 0$. Veja Figura 3.2. No caso (1) o ciclo L_0 é estável e, para $\mu < 0$, existe um ciclo limite estável $L_\mu \subset S_1$. Este ciclo se torna um ciclo deslizante para $\mu > 0$. No caso (2) o ciclo L_0 é instável e, para $\mu < 0$ existem dois ciclos limite: um ciclo instável $L_\mu^u \subset S_1$ e um ciclo deslizante estável L_μ . Neste caso, quando $\mu > 0$ não existe nenhum ciclo.

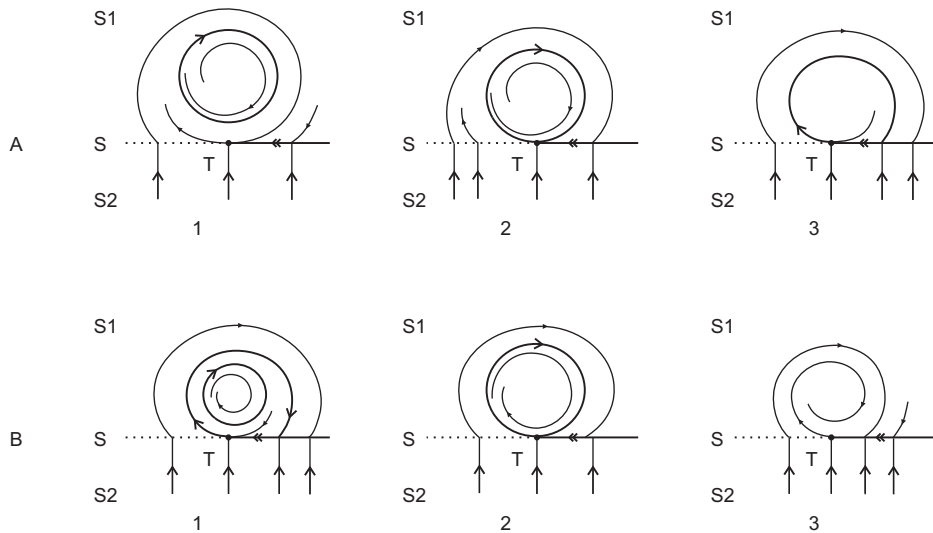


Figura 3.2: Bifurcações grazing-sliding.

O próximo exemplo consiste de um tipo especial de bifurcação em sistemas suaves, chamada bifurcação de Hopf. Através desta fornecemos um exemplo explícito de uma bifurcação grazing-sliding em um sistema de Filippov planar.

Exemplo 3.1 *Considere inicialmente o sistema suave*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + \mu x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}, \quad (3.2)$$

com $\mu \in \mathbb{R}$ e $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Uma mudança para coordenadas polares nos fornece o sistema

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r - r^3 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \quad (3.3)$$

onde $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$, $r > 0$.

É fácil ver que a origem é o único ponto de equilíbrio de (3.2) para qualquer valor de μ . A matriz jacobiana associada a (3.2), calculada em $(0,0)$ é $\begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$, com autovalores $\lambda_\mu = \frac{2\mu \pm \sqrt{4\mu^2 - 4(\mu^2 + 1)}}{2} = \mu \pm i$. Logo, pelo Teorema de Hartman-Grobman, concluímos que:

- Para $\mu < 0$, a origem é um foco atrator;
- Para $\mu > 0$, a origem é um foco repulsor;
- Para $\mu = 0$ não podemos concluir nada através da linearização, pois o equilíbrio deixa de ser hiperbólico.

Para ver o que acontece quando μ passa por zero considere o sistema em coordenadas polares (3.3). Este sistema tem órbitas periódicas, as quais são dadas por $r = \sqrt{\mu}$, $\theta = t$, isto é, quando o raio é constante ($\dot{r} = 0$). Assim, temos:

- Para $\mu < 0$;

O sistema não possui órbitas periódicas pois $r \in \mathbb{R}$. Além disso, como $r > 0$ temos que $\dot{r} = \mu r - r^3 < 0$ e, portanto, todas as soluções tendem à origem (foco atrator hiperbólico) quando $t \rightarrow +\infty$.

- Para $\mu > 0$;

Neste caso, para cada $\mu > 0$ temos uma solução periódica dada pelo círculo $r = \sqrt{\mu}$ de período 2π . Note que para $0 < r < \sqrt{\mu}$ temos $\dot{r} = r(\mu - r^3) > 0$, ou seja, a origem é um foco repulsor hiperbólico. Analogamente, $\dot{r} < 0$ quando $r > \sqrt{\mu}$, isto é, a origem é um foco atrator hiperbólico. Portanto, para cada $\mu > 0$ temos um ciclo limite estável dado por $\gamma_\mu(t) = \sqrt{\mu}(\cos t, \sin t)^T$.

- Para $\mu = 0$;

Aqui, $\dot{r} = -r^3 < 0$, e a origem também é um foco atrator (não-hiperbólico), o qual é originado pela colisão do foco repulsor hiperbólico com o ciclo limite estável quando $\mu > 0$. Neste caso, $\mu = 0$ é o valor do parâmetro onde ocorre a bifurcação.

Neste tipo de bifurcação, chamada bifurcação de Hopf, não surgem novos equilíbrios. Em vez disso, na troca de estabilidade (em $\mu = 0$) ocorre a transição de pontos de equilíbrio para ciclos limite. Veja Figura 3.3.

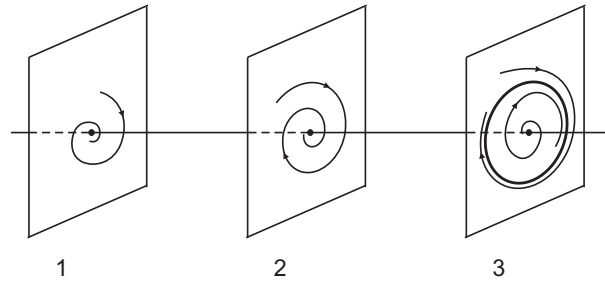


Figura 3.3: Bifurcação de Hopf.

Vamos apresentar agora explicitamente um exemplo em que ocorre uma “bifurcação grazing-sliding”.

Exemplo 3.2 Considere o seguinte sistema suave por partes

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \mu x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ x_1 + \mu x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}, & \text{se } x_2 > -1 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \text{se } x_2 < -1 \end{cases}. \quad (3.4)$$

onde $\mu > 0$. Neste caso, $H(x_1, x_2) = x_2 + 1$ de modo que $\Sigma = H^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^2; x_2 = -1\}$. Observe que dado $(x_1, -1) \in \Sigma$ temos $F_1(x_1, -1) = (\mu x_1 + 1 - x_1(x_1^2 + 1), x_1 - \mu + (x_1^2 + 1))$ e

$F_2(x_1, -1) = (0, 1)$. Supondo $F_1(x_1, -1) = F_2(x_1, -1)$, ou seja,

$$\begin{cases} x_1(\mu - (x_1^2 + 1)) = -1 \\ x_1 - \mu + (x_1^2 + 1) = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1(x_1 - 1) = -1 \Rightarrow x_1^2 - x_1 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

obtemos um absurdo, pois $x_1 \in \mathbb{R}$. Assim, $F_1(x) \neq F_2(x)$ para todo $x \in \Sigma$ e, portanto, o sistema (3.4) é de Filippov. Como vimos no Exemplo 3.1, o campo F_1 pode ser dado em coordenadas polares:

$$\dot{r} = \mu r - r^3, \quad \dot{\theta} = 1.$$

e consiste de uma forma normal da bifurcação de Hopf. Nesta bifurcação, quando $\mu > 0$ surge um ciclo limite estável dado por $r = \sqrt{\mu}$. Neste caso, como estamos supondo (3.4) definido apenas para $\mu > 0$, este ciclo que surge na bifurcação de Hopf é persistente para o sistema (3.4).

Portanto, temos que se $0 < \mu < 1$, o ciclo do campo F_1 também é um ciclo de (3.4). Se $\mu = 1$, temos um ciclo tangente à fronteira de descontinuidade em $(0, -1)$. Agora, para $\mu > 1$, o ciclo adquire um segmento de deslize que começa no ponto $x_a = (x_{1,a}, -1)$, $x_{1,a} > 0$, e termina no ponto $x_b = (x_{1,b}, -1)$, $x_{1,b} = 0$. Veja Figura 3.4.

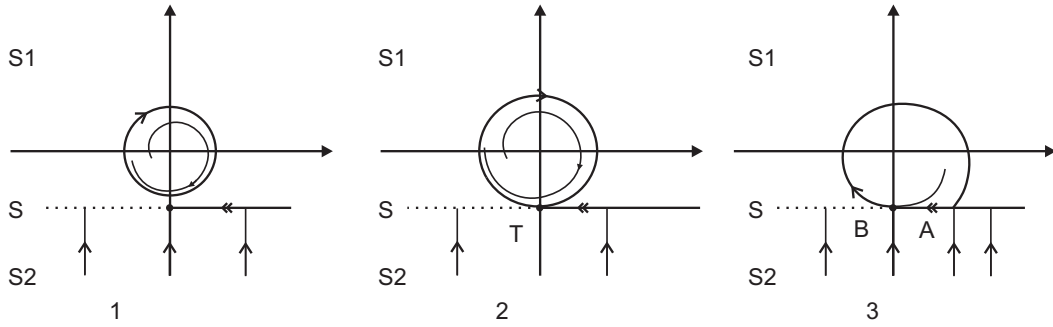


Figura 3.4: Cenário grazing-sliding.

3.1.1 Modelo Presa-Predador

Considere uma comunidade composta de duas espécies, uma das quais consiste de predadores, com população x_2 , e a outra consiste de presas, com população x_1 . Assuma que a espécie de predadores tenha apenas a espécie de presas como alimento. Além disso, suponha que

- Na ausência de predadores, a população de presas cresce a uma taxa proporcional à

população atual, isto é,

$$\dot{x}_1 = ax_1, \quad a > 0, \quad \text{quando } x_2 = 0;$$

- Na presença de predadores, a população de presas decresce a uma taxa proporcional ao número de encontros presa/predador. Um modelo simples é dado por

$$\dot{x}_1 = -bx_1x_2, \quad b > 0, \quad \text{para } x_2 > 0;$$

- Na ausência de presas, a população de predadores decresce a uma taxa proporcional a população atual:

$$\dot{x}_2 = -cx_2, \quad c > 0, \quad \text{quando } x_1 = 0;$$

- Na presença de presas no ambiente, a população de predadores cresce a uma taxa proporcional aos encontros presa/predador:

$$\dot{x}_2 = dx_1x_2, \quad d > 0, \quad \text{para } x_1 > 0.$$

Um modelo abrangendo todas estas situações é dado pelo seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(a - bx_2) \\ \dot{x}_2 = x_2(-c + dx_1) \end{cases}, \quad (3.5)$$

onde a, b, c, d são parâmetros positivos e $x_1, x_2 \geq 0$ uma vez que estamos tratando de populações. O modelo descrito acima é conhecido como modelo predador-presa de Lotka-Volterra. Investigamos seu retrato de fase.

Observe inicialmente que os equilíbrios de (3.5) ocorrem na origem e em $(x_1, x_2) = (c/d, a/b)$. Além disso, a matriz jacobiana associada é $\begin{pmatrix} a - bx_2 & -bx_1 \\ dx_2 & -c + dx_1 \end{pmatrix}$. Assim, na origem temos uma sela com autovalores a e $-c$ (equilíbrio hiperbólico), cujas variedades instável e estável são o eixo- x_1 e eixo- x_2 , respectivamente. O outro ponto de equilíbrio $(c/d, a/b)$ não é hiperbólico pois os autovalores da matriz jacobiana nesse ponto são imaginários puros $\pm i\sqrt{ac}$. Portanto, não podemos afirmar nada sobre a estabilidade deste equilíbrio. Podemos analisar o comportamento

do campo de vetores F associado ao Sistema (3.5) determinando suas isóclinas. Temos:

x_1 -isóclinas: são dadas por $\dot{x}_1 = 0$, ou seja, pelas retas $x_1 = 0$ e $x_2 = a/b$;

x_2 -isóclinas: dadas por $x_2 = 0$ e $x_1 = c/d$.

As isóclinas $x_1 = c/d$ e $x_2 = a/b$ dividem a região $x_1, x_2 > 0$ em quatro regiões, nas quais o campo de vetores tem as direções indicadas na Figura 3.5-(a). Assim, as soluções do sistema giram em torno do ponto de equilíbrio $(c/d, a/b)$ no sentido anti-horário. Para determinar o comportamento preciso das soluções procuramos uma função de Lyapunov. Considere a função $l(x_1, x_2) = dx_1 - c \ln x_1 + bx_2 - a \ln x_2$, definida no primeiro quadrante $W = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 > 0\}$. Definindo $L : W \rightarrow \mathbb{R}$ por $L(x_1, x_2) := l(x_1, x_2) - l(c/d, a/b)$ vemos que L é uma função de Lyapunov em $(c/d, a/b)$. Portanto, $(c/d, a/b)$ é um ponto de equilíbrio estável. Como $\dot{L}(x) = \langle \nabla L(x), F(x) \rangle = 0$ e $\nabla L(x) \neq 0$ para todo $x \in W$, concluímos que L é constante ao longo de toda órbita de F e L não é constante em nenhum conjunto aberto. Assim, toda órbita de (3.5) (exceto o ponto de equilíbrio $(c/d, a/b)$ e os eixos coordenados) é uma órbita fechada (veja [5] para detalhes) e coincide com a projeção das curvas de nível de L no plano- x_1x_2 . Veja Figura 3.5.

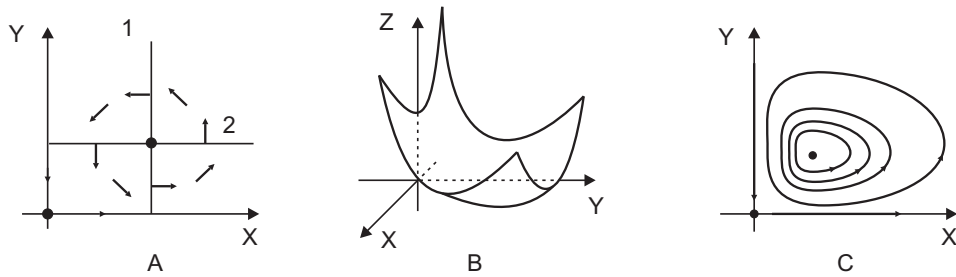


Figura 3.5: Esboço das (a) isóclinas e direções do campo de vetores, (b) do gráfico de $x_3 = L(x_1, x_2)$ e (c) do retrato de fase do sistema predador-presa de Lotka-Volterra.

No entanto, em várias situações de interação entre espécies do tipo predador-presa, este modelo clássico de Lotka-Volterra não é o mais apropriado. Desse modo, modelos mais realísticos na dinâmica de populações foram implementados, entre eles o modelo de Rosenzweig-MacArthur, o qual é uma modificação do modelo de Lotka-Volterra que considera as taxas de natalidade das presas e predadores. Neste modelo a população de presas cresce logisticamente na ausência de predadores e as presas consumidas são convertidas em novos predadores. Precisamente,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= (1 - x_1)x_1 - \frac{kx_1x_2}{\alpha + x_1} \\ \dot{x}_2 &= \frac{kx_1x_2}{\alpha + x_1} - mx_2 \end{cases}, \quad (3.6)$$

onde, na primeira equação

- $(1 - x_1)x_1$ representa o crescimento logístico das presas;
- $-\frac{kx_1x_2}{\alpha + x_1}$ é o consumo de presas com resposta funcional do predador $\psi(x_1) = kx_1/(\alpha + x_1)$;

e na segunda equação

- $\frac{kx_1x_2}{\alpha + x_1}$: conversão de presas consumidas em novos predadores;
- $-mx_2$: taxa de mortalidade dos predadores ($m > 0$).

Observe que um fator de interação nos modelos predador-presa de Lotka-Volterra e Rosenzweig-MacArthur não considerado é o da superlotação de predadores. Afim de evitar a extinção das presas, a população predadora deve ser colhida quando abundante, isto é, quando $x_2 > \mu$, para algum limite estabelecido $\mu > 0$. Assim, acrescentamos uma taxa de mortalidade extra à segunda equação de (3.6). Portanto, se assumirmos que a população de presas é explorada em esforço constante $M > 0$ temos o seguinte sistema para $x_2 > \mu$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= (1 - x_1)x_1 - \frac{kx_1x_2}{\alpha + x_1} \\ \dot{x}_2 &= \frac{kx_1x_2}{\alpha + x_1} - mx_2 - Mx_2 \end{cases}. \quad (3.7)$$

Dessa forma, considerando a modelagem mais realística de Rosenzweig-MacArthur para $x_2 < \mu$, somos conduzidos ao seguinte sistema suave por partes:

$$\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \begin{cases} F_1(x_1, x_2) = \left((1 - x_1)x_1 - \frac{kx_1x_2}{\alpha + x_1}, \frac{kx_1x_2}{\alpha + x_1} - mx_2 \right), & \text{se } x_2 > \mu \\ F_2(x_1, x_2) = \left((1 - x_1)x_1 - \frac{kx_1x_2}{\alpha + x_1}, \frac{kx_1x_2}{\alpha + x_1} - mx_2 - Mx_2 \right), & \text{se } x_2 < \mu \end{cases}. \quad (3.8)$$

Neste caso, $\Sigma = \{x = (x_1, x_2) : x_2 = \mu\}$, $S_1 = \{x : x_2 > \mu\}$ e $S_2 = \{x : x_2 < \mu\}$. Este sistema é de Filippov pois dado $(x_1, \mu) \in \Sigma$ temos $F_1(x, \mu) \neq F_2(x, \mu)$ já que $M > 0$. Podemos determinar as isóclinas:

- de F_1 : $\begin{cases} x_1 - \text{isóclina} : & x_2 = \frac{1}{k}(1 - x_1)(\alpha + x_1) \\ x_2 - \text{isóclina} : & x_1 = \frac{\alpha m}{k - m} \end{cases}$;

$$\bullet \text{ de } F_2: \begin{cases} x_1 - \text{isóclina} : & x_2 = \frac{1}{k}(1 - x_1)(\alpha + x_1) \\ x_2 - \text{isóclina} : & x_1 = \frac{\alpha(m+M)}{k-(m+M)} \end{cases} ;$$

Em contraste com o modelo de Lotka-Volterra, o retrato de fase do modelo de Rosenzweig-MacArthur apresenta um ciclo limite. Em [13] são fornecidos os retratos de fase do Sistema (3.8) para os seguintes valores dos parâmetros: $k = 0.3556$, $\alpha = 0.33$, $m = 0.0444$, $M = 0.2067$. Podemos notar claramente uma bifurcação do tipo grazing-sliding, onde o ciclo limite presa-predador clássico torna-se um ciclo deslizante.

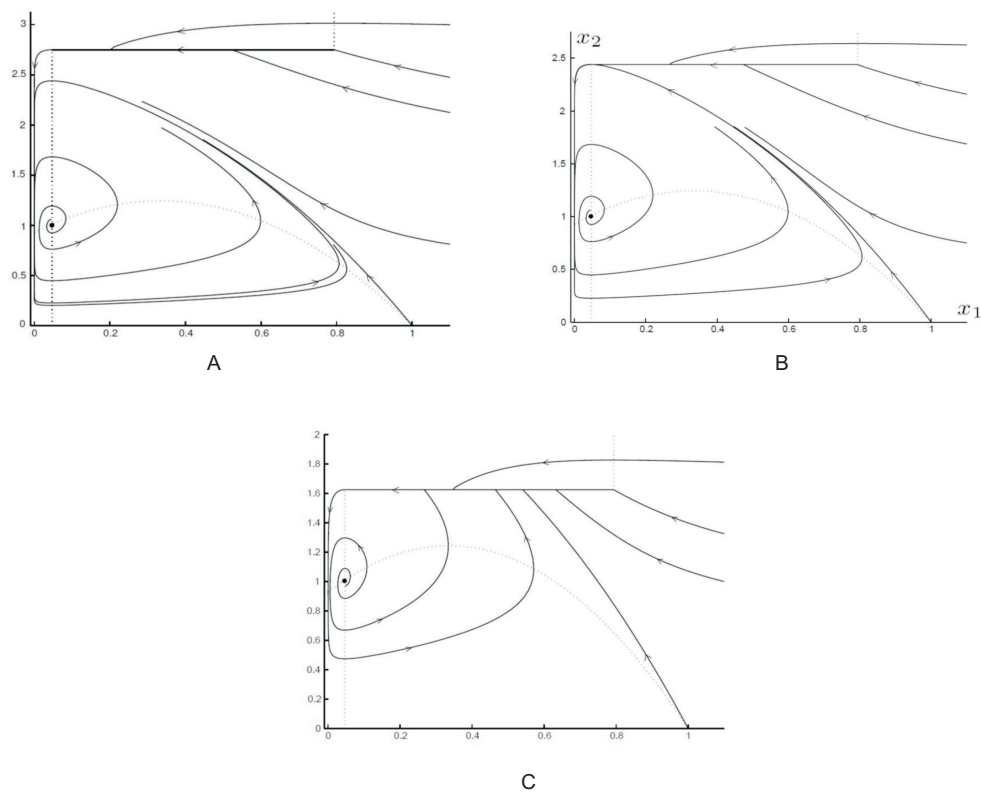


Figura 3.6: Retratos de fase de (3.8): (a) ciclo limite estável em $\mu = 2.75$, (b) ciclo tangente em $\mu = 2.44$ e (c) ciclo deslizante estável em $\mu = 1.625$. Fonte: Kuznetsov [13], pg.2183-2184.

Referências Bibliográficas

- [1] ANDRONOV, A.; VITT, A.; KHAIKIN, S. E. *Theory of Oscillations*. Pergamon Press, Oxford, Chapter 8, pp. 443-582, 1965.
- [2] DI BERNARDO, M.; BUDDI, C. J.; CHAMPNEYS, A.R; KOWALCZYK, P. *Piecewise-smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*. Springer. 2008.
- [3] FILIPPOV, A. F. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Mathematics and its Applications (Soviet Series), Kluwer Academic Publishers, Dortrecht, 1988.
- [4] FREIRE, E.; PONCE, E.; RODRIGO, F. AND TORRES, F. *Bifurcation Sets of Continuous Piecewise Linear Systems with Two Zones*. International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol.8, No.11, 2073-2097, 1998.
- [5] HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. *Differential Equations, Dynamical Systems and An Introduction to Chaos*. 2nd ed. Elsevier. 2004.
- [6] KUSNETSOV, Y. A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. 2nd ed. Springer. 1998.
- [7] LUM, R.; CHUA, L. O. *Global properties of continuous piecewise-linear vector fields. Part I: Simplest case in \mathbf{R}^2* . Memorandum UCB/ERL M90/22, University of California at Berkeley, 1990.
- [8] M. DI BERNARDO; A. NORDMARK; G. OLIVAR. *Discontinuity-induced bifurcations of equilibria in piecewise-smooth and impacting dynamical systems*. Physica D 237 (2008) 119-136.
- [9] MATSUMOTO, T. *A Chaotic Attractor from Chua's Circuit*. IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol.31. No.12, pp 1055-1058, 1984.

- [10] SIEBER, J.; KOWALCZYK, P. *Small-scale instabilities in dynamical systems with sliding*, Physica D. Nonlinear Phenomena. 239, 44-57, 2010.
- [11] SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro. IMPA (Projeto Euclides). 1979.
- [12] UTKIN, V. I. *Sliding Modes in Control Optimization*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [13] Y. A. KUZNETSOV; S. RINALDI AND A. GRAGNANI. *One-parameter Bifurcations in Planar Filippov Systems*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 13, No.8, 2157-2188, 2003.

Índice Remissivo

- órbita, 15
 - fechada, 15
- bifurcação, 19
 - diagrama de, 19
 - em equilíbrio de fronteira, 32, 51
 - em sistemas suaves, 19
 - grazing-sliding, 68
 - Hopf, 70
 - induzida pela descontinuidade, 27
- campo, 25
 - de Filippov, 25
 - deslizante, 25
- ciclo, 15
 - deslizante, 60
 - limite, 15
- circuito de Chua, 39
- conjunto de descontinuidade, 20
 - uniformemente descontínuo, 22
- dobra não-suave, 34, 54
- fluxo, 15
 - contínuo suave por partes, 29
 - de Filippov, 50
 - estruturalmente estável, 27
 - suave por partes, 20
 - topologicamente conjugado, 18
- fronteira de descontinuidade, 20
- função, 16
 - de Lyapunov, 16
 - de Lyapunov estrita, 16
- grau de suavidade, 21
 - uniforme, 22
- isóclina, 15
- operador evolução, 14
- persistência, 34, 54
- ponto de equilíbrio, 15
 - admissível, 32, 50
 - assintoticamente estável, 16
 - de fronteira, 32, 51
 - hiperbólico, 19
 - Lyapunov estável, 16
 - virtual, 32
- ponto tangente, 58
- pseudo-equilíbrio, 50
 - admissível, 50
 - virtual, 50
- pseudo-nó, 50

pseudo-sela, 50

região de costura, 24

região de deslize, 23

região de escape, 24

retrato de fase, 15

sistema

 estruturalmente estável, 18

sistema dinâmico, 14

 suave, 15

 suave por partes, 20

 topologicamente equivalente, 18, 27

Teorema, 19

 Hartman-Grobman, 19