

# Involuciones, trivoluciones y foliaciones Galois

*A. Beltrán*<sup>1</sup>, *M. Falla*<sup>2</sup> y *D. Marín*<sup>3</sup>

Febrero, 2014

## *Resumen*

En el presente trabajo introducimos la noción de foliaciones Galois sobre  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , definidas como aquellas cuya aplicación de Gauss restringida a un abierto Zariski es un recubrimiento Galois. Asimismo, presentamos algunos ejemplos y un criterio para identificar este tipo de foliaciones.

MSC(2010): 53A60.

**Palabras Clave:** Foliaciones, webs.

<sup>1</sup> *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP  
PUCP-DGI-2013-0014.*

<sup>2</sup> *Departamento de Análise-IM, UFF, Brasil.*

<sup>3</sup> *Departament de Matemàtiques, UAB, España.*

## 1. Involuciones

Una transformación racional en el plano proyectivo complejo es una aplicación de la forma

$$f : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \\ [x, y, z] \longmapsto [A_1(x, y, z), A_2(x, y, z), A_3(x, y, z)],$$

donde  $A_i, i = 1, 2, 3$ , son polinomios homogéneos del mismo grado sin factor común. Una transformación birracional  $f : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  es una transformación racional que admite una inversa racional  $g: f \circ g = g \circ f = \text{Id}$ . Denotamos por  $\text{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$  al grupo de transformaciones birracionales del plano, llamado **grupo de Cremona**. Sea  $f = [A_1, A_2, A_3]$  una transformación birracional. Definimos el grado de  $f$  como el grado común de los  $A_i$ , esto es,  $\deg f = \deg A_i$ . Asimismo, el **conjunto de indeterminación**  $\text{Ind}(f)$  y el **conjunto excepcional**  $\text{Exc}(f)$  son definidos respectivamente por

$$\text{Ind}(f) = \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 : A_1(p) = A_2(p) = A_3(p) = 0\}, \\ \text{Exc}(f) = \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 : \det \text{Jac}(f(p)) = 0\}.$$

**Ejemplo 1.1.** El automorfismo  $f : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  dado por

$$f[x, y, z] = [a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z],$$

con  $\det(a_{ij}) \neq 0$ , es una transformación birracional de grado 1. Para ésta se tiene  $\text{Ind}(f) = \text{Exc}(f) = \emptyset$ . Estas transformaciones birracionales son llamadas de **tipo proyectivo**.

**Ejemplo 1.2.** La transformación  $f[x, y, z] = [xy, z^2, yz]$  es birracional y cumple

$$\text{Ind}(f) = \{[1, 0, 0], [0, 1, 0]\}, \\ \text{Exc}(f) = \{y = 0\} \cup \{z = 0\}, \\ f^2 = \text{Id}.$$

**Ejemplo 1.3.** La transformación  $f[x, y, z] = [yz, xz, xy]$  es birracional y cumple

$$\begin{aligned} \text{Ind}(f) &= \{[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]\}, \\ \text{Exc}(f) &= \{x = 0\} \cup \{y = 0\} \cup \{z = 0\}, \\ f^2 &= \text{Id}. \end{aligned}$$

Esta transformación es llamada **de Cremona** y es conjugada por una aplicación birracional a una de Jonquière (ver Teorema 1.5). Notemos que  $f$  preserva las fibraciones racionales  $\frac{y}{x} = c_{yx}$ ,  $\frac{x}{z} = c_{xz}$ ,  $\frac{y}{z} = c_{yz}$ , con  $c_{yx}, c_{xz}, c_{yz}$  constantes.

**Definición 1.4.** Una **involución birracional** es una aplicación birracional  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$  que satisface  $f^2 = \text{Id}$ .

### 1.1. Involuciones de Geiser

Sean  $p_1, \dots, p_7 \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  siete puntos en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  en posición general, y denotemos por  $L$  el sistema lineal de curvas cúbicas que pasan por los puntos  $p_i$ , en símbolos ponemos

$$L = \{C \text{ cúbica} : p_i \in C\} \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2,$$

donde una cúbica está dada por polinomios homogéneos de grado 3 en tres variables. Sea  $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  un punto genérico. Entonces el conjunto

$$L_p = \{C \in L : p \in C\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$$

es un **lápiz de cúbicas**. Por el teorema de Bezout  $L_p$  tiene 9 puntos base:  $p, p_1, \dots, p_7, I_G(p)$ . De esta manera queda definida

$$\begin{aligned} I_G : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 &\dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \\ p &\longmapsto I_G(p), \end{aligned}$$

donde  $I_G(p)$  es el noveno punto base del lápiz  $L_p$ . Una técnica estandar muestra que  $I_G$  es una involución birracional, llamada **involución de Geiser** (cf. [4]).

Existen otras construcciones geométricas que dan lugar a nuevas involuciones birracionales, por ejemplo las llamadas de Bertini y de Jonquières, que no discutiremos en este trabajo. Para mayores detalles referimos al lector a [4, 1].

**Teorema 1.5** ([1]). *Una involución birracional de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  es conjugada a una de las siguientes involuciones: proyectiva, de Jonquières, de Bertini, de Geiser.*  $\square$

## 2. Foliaciones de grado 2

Sea  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa sobre  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  de grado  $d$ , con conjunto singular  $\Sigma_{\mathcal{F}}$ , y sea  $\ell$  una recta genérica. El **grado de  $\mathcal{F}$**  es por definición el número de puntos de tangencia entre  $\mathcal{F}$  y  $\ell$ , contando multiplicidades. Consideremos una foliación  $\mathcal{F}$  de grado 2 en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , y  $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , un punto genérico. Por definición  $\mathcal{F}$  y  $T_p\mathcal{F}$  tienen dos puntos de contacto, uno de ellos es  $p$  y al otro lo denotaremos por  $I_{\mathcal{F}}(p)$ . Para precisar esta definición supongamos que  $\mathcal{F}$  es definida por un campo de la forma  $X(x, y) = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$  en la carta afín  $(x, y)$  de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ . Entonces  $q = I_{\mathcal{F}}(p)$  es el punto  $p + t(A, B)$ , donde  $t$  es el único parámetro no nulo donde  $X(p)$  es colineal con  $X(p + t(A, B))$ . Es claro que  $I_{\mathcal{F}}$  es una involución birracional, llamada **involución asociada a  $\mathcal{F}$**  (cf. [4]).

**Teorema 2.1** (Cerveau-Deserti [4]). *Sean  $p_1, \dots, p_7$  puntos de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  en posición general. Sea  $\mathcal{F}$  una foliación de grado 2 sobre  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  cuyo conjunto singular  $\Sigma_{\mathcal{F}}$  está formado por los 7 puntos dados. Entonces  $I_{\mathcal{F}} = I_G$ . En particular, la involución asociada a una foliación genérica de grado 2 es una involución de Geiser.*  $\square$

Tradicionalmente las involuciones de Geiser son definidas a partir de lápices de cúbicas. Sin embargo, es un problema de interés la construcción explícita de tales involuciones. Es de ahí de donde salta la importancia del teorema anterior.

**Ejemplo 2.2.** Sea  $\mathcal{F}$  la foliación dada por el campo  $X = (x^3 - y^2) \frac{\partial}{\partial x} + (x^2y - 1) \frac{\partial}{\partial y}$ , en coordenadas afines. Teniendo en mente la construcción anterior deducimos que la involución asociada a  $\mathcal{F}$  es  $I_{\mathcal{F}}[x, y, z] = [A_1, A_2, A_3]$ , donde

$$\begin{aligned} A_1 &= xy^7 + 3x^5y^2z - x^8 - 5x^2y^4z^2 + 2y^3z^5 + x^3yz^4 - xz^7, \\ A_2 &= 3xy^5z^2 + 2x^5z^3 - x^7y - 5x^2y^2z^4 + x^4y^3z + yz^7 - y^8, \\ A_3 &= xy^4z^3 - 5x^4y^2z^2 - y^7z + 2x^3y^5 + 3x^2yz^5 - z^8 + x^7z. \end{aligned}$$

Además, el conjunto de indeterminación está dado por

$$\text{Ind}(I_{\mathcal{F}}) = \{[\xi^j, \xi^{-2j}, 1] : j = 0, \dots, 6, \text{ donde } \xi^7 = 1\} = \Sigma_{\mathcal{F}}.$$

Estos puntos se encuentran en posición general, y por lo tanto estamos ante una involución de Geiser.

### 3. Foliaciones Galois de grado $d \geq 3$

Sea  $\mathcal{F}$  una foliación de grado 3. Esto significa que una recta genérica es tangente a  $\mathcal{F}$  en tres puntos. Ahora el juego trata de averiguar si es posible construir una transformación birracional que permute dichos puntos. La respuesta suele ser negativa puesto que una transformación que intercambie estos puntos será genéricamente multivaluada. Sin embargo, Cerveau y Deserti en [4] proporcionan un criterio para asegurar cuándo dicha transformación es birracional, y en [3] este criterio se generaliza para foliaciones sobre  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  de grado  $d$ .

**Definición 3.1.** Una aplicación  $\tau \in \text{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$  es llamada **trivolución** si satisface  $\tau^3 = Id$ .

Es claro que de existir una aplicación birracional  $\tau$  que intercambia cíclicamente las tangencias de una foliación de grado 3, esta aplicación será una trivolución.

La **aplicación de Gauss asociada** a  $\mathcal{F}$  es la aplicación racional

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mathcal{F}} : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 &\dashrightarrow \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \\ p &\longmapsto T_p\mathcal{F}, \end{aligned}$$

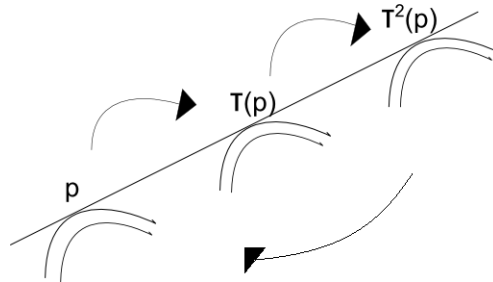


Figura 1: Trivolución asociada a una foliación

donde  $T_p\mathcal{F}$  denota la recta tangente a  $\mathcal{F}$  en un punto regular  $p$  de  $\mathcal{F}$ .

Si la foliación  $\mathcal{F}$  es dada por la forma  $\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ , entonces la aplicación de Gauss queda materializada por

$$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(p) = [P(p), Q(p), R(p)].$$

Notemos que la propiedad de  $\tau$  de intercambiar las tangencias equivale a que se cumpla  $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} \circ \tau = \mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ .

Sea  $\rho : X \rightarrow B$  un recubrimiento de grado  $d$  entre espacios conexos. Fijamos un punto  $b \in B$  y su fibra  $F = \rho^{-1}(b) = \{p_1, \dots, p_d\}$ . También, consideremos el grupo  $D = \{\tau : X \rightarrow X : \rho \circ \tau = \rho\}$  de automorfismos de recubrimiento, que actúa a la izquierda sobre  $F$ . La representación de monodromía  $\mu : \pi_1(B, x) \rightarrow \text{Aut}(F)$  actúa a la derecha sobre  $F$ , y a su imagen la denotaremos por  $M$ . Se cumple que  $D$  actúa libremente sobre  $F$ , mientras  $M$  lo hace transitivamente sobre  $F$ . Un simple conteo conduce a  $|D| \leq d$  y  $|M| \geq d$ . Al identificar  $F \simeq \{1, \dots, d\}$ , podemos considerar  $D$  y  $M$  como subgrupos del grupo simétrico  $S_d$ . El siguiente resultado conocido brinda una relación especial entre los grupos  $D$  y  $M$ ; ver por ejemplo [6] y [8].

**Teorema 3.2.** *Si  $\rho : X \rightarrow B$  es un recubrimiento de grado  $d$ , las siguientes afirmaciones*

- $\rho_*(\pi_1(X, x)) = \ker \mu$ ;
- $\rho_*(\pi_1(X, x))$  es un subgrupo normal de  $\pi_1(B, b)$ ;
- $D$  actúa transitivamente sobre la fibra  $F$ ;
- $|D| = d$ ;
- $M$  actúa libremente sobre  $F$ ;
- $|M| = d$ ;
- $D \cong M$

son equivalentes. □

**Definición 3.3.** Decimos que  $\rho$  es **Galois** si se cumple cualquiera de las afirmaciones enumeradas en el teorema 3.2.

**Definición 3.4.** Un  $k$ -**web**  $\mathcal{W}$  de **codimensión uno** sobre una variedad compleja  $S$  está dado por una cobertura abierta  $\{U_i\}$  junto con  $k$ -formas simétricas  $\omega_i \in \text{Sym}_S^k(U_i)$  que verifican las siguientes condiciones:

- i)* para cada intersección no vacía  $U_i \cap U_j$  existe una función no nula  $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$  tal que  $\omega_i = g_{ij}\omega_j$ ;
- ii)* el conjunto de ceros  $\text{Sing}(\omega_i)$  de  $\omega_i$  tiene codimensión al menos dos;
- iii)* el germen de  $\omega_i$  en cada punto genérico de  $U_i$  es un producto de  $k$ -gérmenes de 1-formas integrables que no son colineales dos a dos.

El subconjunto de  $S$  donde la condición (*iii*) falla es llamado **discriminante del web** y se denota por  $\Delta(\mathcal{W})$ . El **conjunto singular**  $\Sigma_{\mathcal{W}}$  de  $\mathcal{W}$  es definido por  $\Sigma_{\mathcal{W}} \cap U_i = \text{Sing}(\omega_i)$  y se encuentra contenido en  $\Delta(\mathcal{W})$ . Existe una representación de monodromía  $\mu : \pi_1(S \setminus \Delta(\mathcal{W})) \rightarrow \mathfrak{S}_k$  de  $\mathcal{W}$  que determina los subwebs irreducibles de  $\mathcal{W}$  y cuya trivialidad es equivalente a la descomponibilidad del web  $\mathcal{W}$  (ver también definición 3.11).

Sea  $\mathcal{F}$  una foliación sobre  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  y  $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \dashrightarrow \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$  la aplicación de Gauss asociada, representada por el morfismo  $\mathcal{G}_{\mathcal{F}, U} : U \rightarrow \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$  definido sobre un subconjunto abierto maximal denso Zariski de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ . Si  $\mathcal{W}$  es un

$k$ -web sobre  $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$  dado por el par de colecciones  $\{V_i, \eta_i\}$  que verifican la definición 3.4, entonces podemos definir un web  $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^*(\mathcal{W})$  sobre  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  por la colección  $\{U_i = \mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{-1}(V_i), \omega_i\}$ , donde  $\omega_i = \mathcal{G}_{\mathcal{F}, U}^* \eta_i$ . El web  $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^* \mathcal{W}$  es llamado **pull-back** o **imagen inversa** de  $\mathcal{W}$  por  $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ .

El **grado de un  $k$ -web**  $\mathcal{W}$  sobre  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  está dado por la suma de la cantidad de puntos de tangencia que tiene una recta genérica no invariante con las foliaciones que componen el web.

Denotamos por  $\mathbb{W}(k, d)$  al conjunto de  $k$ -webs de grado  $d$  sobre  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ . Definimos la aplicación

$$\text{Leg} : \mathbb{W}(k, d) \longrightarrow \mathbb{W}(d, k),$$

llamada **transformado de Legendre o web dual** de  $\mathcal{W}$ , de la siguiente manera. Sea  $\mathcal{W} \in \mathbb{W}(k, d)$  fijo y  $\ell \in \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$ , visto como una recta en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ . Si  $\ell$  es genérica entonces se tienen  $d$  puntos de tangencia distintos  $p_1, \dots, p_d$  con las hojas de  $\mathcal{W}$ . Por supuesto, podemos pensar estos puntos como rectas sobre  $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$  que pasan por  $\ell$ . Variando el punto  $\ell$  obtenemos  $d$  direcciones diferentes sobre  $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$  que definen un  $d$ -web  $\text{Leg } \mathcal{W}$ . De manera rutinaria se verifica que el grado de  $\text{Leg } \mathcal{W}$  es  $k$ . Las hojas de  $\text{Leg } \mathcal{W}$  son las curvas duales de las hojas de  $\mathcal{W}$  puesto que ellas son tangentes a las direcciones que definen  $\text{Leg } \mathcal{W}$ . En particular, si  $\mathcal{F}$  es una foliación de grado  $d$  sobre  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , entonces  $\text{Leg } \mathcal{F}$  es un  $d$ -web de grado 1.

Con la notación  $\check{\Lambda}_{\mathcal{F}} = \mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\mathcal{I}_{\mathcal{F}}) \subset \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$ ,  $\Lambda_{\mathcal{F}} = \mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{-1}(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\mathcal{I}_{\mathcal{F}}))$  y  $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda} = \mathcal{G}_{\mathcal{F}} \Big|_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Lambda_{\mathcal{F}}}$  tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.5.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación de grado  $d$  sobre  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ . Entonces la restricción de la aplicación de Gauss a  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Lambda_{\mathcal{F}}$ , pongamos  $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda} : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Lambda_{\mathcal{F}} \longrightarrow \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{\Lambda}_{\mathcal{F}}$ , es un recubrimiento de grado  $d$ . Más aún, el grupo de aplicaciones de recubrimiento  $D_{\mathcal{G}_{\mathcal{F}}}$  es obtenido por restricción a  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Lambda_{\mathcal{F}}$  del grupo  $D_{\mathcal{F}} = \{\tau \in \text{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2) : \mathcal{G}_{\mathcal{F}} \circ \tau = \mathcal{G}_{\mathcal{F}}\}$ . Además, si  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}} = \text{Leg } \mathcal{F}$  es el transformado de Legendre de  $\mathcal{F}$ , con discriminante  $\check{\Delta}_{\mathcal{F}}$ , entonces la monodromía de  $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda}$  está dada por la composición*

$$\pi_1(\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{\Lambda}_{\mathcal{F}}) \longrightarrow \pi_1(\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{\Delta}_{\mathcal{F}}) \longrightarrow \mathfrak{S}_d,$$



donde el primera aplicación es inducida por la inclusión natural.

*Prueba.* Ver [3, Teorema 3.11]. □

**Definición 3.6.** Decimos que una foliación  $\mathcal{F}$  sobre  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  es **Galois** si la restricción  $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda}$  de la aplicación de Gauss es Galois.

El criterio descrito en [4] para determinar cuándo una foliación es Galois puede reformularse de la siguiente manera.

**Proposición 3.7.** Una foliación sobre  $\mathbb{P}^2$  definida por el campo vectorial polinomial  $A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y}$  es Galois si y solo si el polinomio

$$P(x, y, t) = \det \begin{pmatrix} A(x, y) & A(x + tA(x, y), y + tB(x, y)) \\ B(x, y) & B(x + tA(x, y), y + tB(x, y)) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}[x, y, t]$$

se descompone totalmente sobre el cuerpo  $\mathbb{C}(x, y)$ . En tal caso, cada una de sus raíces  $t = t(x, y) \in \mathbb{C}[x, y, t]$  determina una transformación de recubrimiento birracional

$$\tau : (x, y) \mapsto (x + tA(x, y), y + tB(x, y))$$

de  $\mathcal{G}_G$ . □

**Ejemplo 3.8.** Toda foliación  $\mathcal{F}$  de grado 2 sobre  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  es Galois.

**Ejemplo 3.9.** Sean  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$  tales que  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ , y  $u, v \in \mathbb{C}[x, y]$  polinomios linealmente independientes de grado menor o igual a 1. Entonces la foliación  $\mathcal{F}$  de grado  $d$  definida por

$$Y = (\alpha u^d + \beta v^d) \frac{\partial}{\partial x} + (\gamma u^d + \delta v^d) \frac{\partial}{\partial y}$$

es Galois y tiene grupo de monodromía cíclico. En efecto, la pendiente del campo vectorial  $Y$  tiene la forma  $p(x, y) = h(f(x, y))^d$ , donde  $f(x, y) = \frac{u(x, y)}{v(x, y)}$  y  $h(z) = \frac{\gamma z + \delta}{\alpha z + \beta} \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ . De este modo las raíces del polinomio

$$P(x, y, t) = \det(X(x, y), X(x + t, y + tp(x, y))) \quad (1)$$

son las soluciones de la ecuación  $h \circ f^d(x + t, y + tp(x, y)) = h \circ f^d(x, y)$ , pues teniendo en cuenta la propiedad  $h \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ , de la última relación se obtiene

$$\left( \frac{f(x + t, y + tp(x, y))}{f(x, y)} \right)^d = 1.$$

Si escribimos  $\xi = e^{\frac{2i\pi}{d}}$ , las raíces de (1) son las soluciones  $t = t(x, y)$  de las  $d$  ecuaciones lineales en la variable  $t$  dadas por

$$f(x + t, y + tp(x, y)) = \xi^k f(x, y), \quad \text{para } k = 1, \dots, d.$$

Cada solución  $t = t_k(x, y)$  determina una aplicación de recubrimiento

$$\tau_k : (x, y) \mapsto (x + t_k(x, y), y + t_k(x, y)p(x, y))$$

que verifica  $f \circ \tau_k(x, y) = \xi^k f(x, y)$ . Luego, con la notación  $\tau_k \circ \tau_\ell = \tau_{m(k, \ell)}$ , se tiene

$$\xi^{k+\ell} = f \circ \tau_k \circ \tau_\ell(x, y) = f \circ \tau_{m(k, \ell)} = \xi^{m(k, \ell)} f(x, y),$$

es decir,  $m(k, \ell) = (k + \ell) \pmod{d}$ . De esta manera concluimos la igualdad  $D_{\mathcal{F}} = \{\tau_1, \dots, \tau_d\} = \langle \tau_1 \rangle$ . Esto implica las relaciones  $M_{\mathcal{F}} \simeq D_{\mathcal{F}} = \mathbb{Z}_d$ , pues  $|D_{\mathcal{F}}| = d$ .

**Proposición 3.10.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación de grado  $d$  sobre  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ . Entonces el web  $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^* \text{Leg } \mathcal{F}$  contiene a la foliación  $\tau^* \mathcal{F}$ , para cada  $\tau \in D_{\mathcal{F}}$ .*

*Prueba.* Sea  $\tau \in D_{\mathcal{F}}$  arbitrario y  $L$  una hoja de la foliación  $\mathcal{F}$ . Entonces  $\tau^{-1}(L)$  es una hoja de  $\tau^* \mathcal{F}$ . Del teorema 3.5 se sigue que  $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\tau^{-1}(L)) = \mathcal{G}_{\mathcal{F}}(L)$  es una hoja de  $(\mathcal{G}_{\mathcal{F}})_*(\mathcal{F}) = \text{Leg } \mathcal{F}$ , y por tanto  $\tau^{-1}(L)$  resulta una hoja de  $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^* \text{Leg } \mathcal{F}$ .  $\square$

**Definición 3.11.** Un  $k$ -web  $W$  sobre una superficie  $S$  es llamado **totalmente descomponible** si sobre  $S$  el web  $W$  es la superposición de  $k$ -foliaciones globales. En tal caso, lo denotamos por

$$W = \mathcal{G}_1 \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{G}_k,$$

donde  $\mathcal{G}_i$  es una foliación sobre  $S$ .

Ahora pasemos a enunciar y probar nuestro resultado central.

**Teorema 3.12.** *Una foliación  $\mathcal{F}$  de grado  $d$  es Galois si y solo si  $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^* \text{Leg } \mathcal{F}$  es completamente descomponible.*

*Prueba.* De la proposición 3.10 se sigue que  $\boxtimes_{\tau \in D_{\mathcal{F}}} \tau^* \mathcal{F}$  es un subweb de  $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^* \text{Leg } \mathcal{F}$ , en particular se tiene  $|D_{\mathcal{F}}| \leq d$ . Y como  $\mathcal{F}$  es Galois, el teorema 3.5 implica  $|D_{\mathcal{F}}| = d$ , y por lo tanto el web  $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^* \text{Leg } \mathcal{F}$  es completamente descomponible.

Recíprocamente, del teorema 3.2 se desprende que  $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Delta}$  es Galois si y solo si se cumple  $(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Delta})_*(\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Lambda_{\mathcal{F}})) \subset \ker \mu_{\mathcal{F}}$ , donde  $\mu_{\mathcal{F}}$  es la representación de monodromía de  $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Delta}$ . Asimismo, del teorema 3.5 se sigue que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Lambda_{\mathcal{F}}) & \xrightarrow{(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Delta})_*} & \pi_1(\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{\Lambda}_{\mathcal{F}}) & \xrightarrow{\mu_{\mathcal{F}}} & \mathfrak{S}_d \\ \downarrow \iota_* & & \downarrow \check{\iota}_* & & \downarrow Id \\ \pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Delta_{\mathcal{F}}) & \xrightarrow{(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Delta})_*} & \pi_1(\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{\Delta}_{\mathcal{F}}) & \xrightarrow{\check{\mu}_{\mathcal{F}}} & \mathfrak{S}_d \end{array} ,$$

es conmutativo, donde  $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Delta}$  denota la restricción de  $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$  a  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Delta_{\mathcal{F}}$ , e  $\iota : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Lambda_{\mathcal{F}} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Delta_{\mathcal{F}}$ ,  $\check{\iota} : \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{\Lambda}_{\mathcal{F}} \hookrightarrow \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{\Delta}_{\mathcal{F}}$  son las inclusiones naturales. Por otro lado, por un teorema tipo Lefschetz [5], el morfismo  $\iota_*$  es sobreyectivo. De la conmutatividad del diagrama anterior se sigue  $\text{Im}(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Delta})_* \subset \check{\iota}_*^{-1}(\text{Im}(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Delta})_*)$ , y del hecho de que  $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^* \text{Leg } \mathcal{F}$  sea completamente descomponible resulta  $\check{\iota}_*^{-1}(\text{Im}(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Delta})_*) \subset \check{\iota}_*^{-1}(\ker(\check{\mu}_{\mathcal{F}}))$ . Las dos últimas propiedades permiten concluir la inclusión  $\text{Im}(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Delta})_* \subset \ker(\mu_{\mathcal{F}})$ .  $\square$

## Referencias

- [1] E. Bertini; *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano*. Annali di Mat., **8**: 244-286, 1877.

- [2] A. Beltrán, M. Falla, D. Marín; *Flat 3-webs of degree one on the projective plane*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Vol. XXIII, n°4, 2014 pp. 779-796.
- [3] A. Beltrán, M. Falla, D. Marín, M. Nicolau; *Foliations and rational maps inducing Galois coverings*, Preprint (2014).
- [4] D. Cerveau and J. Deserti; *Feuilletages et transformations périodiques*, Experiments. Math. **19** (2010), 447-464.
- [5] H. Hamm and L. Dung Trang; *Un théorème de Zariski du type Lefschetz*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **6** (1973), 317-366.
- [6] S.L. Krushkal', B.N Apanasov and Gusevskii; *Kleinian Groups and Uniformization in Examples and Problems*, Translations of Mathematical Monographs **62**, AMS (1986).
- [7] D. Marín and J.V. Pereira; *Rigid flat webs on the projective plane*, Asian Journal of Mathematics, **17** (2013), no. 1, 163-192.
- [8] B. Maskit; *Kleinian groups*, Springer-Verlag (1988).
- [9] M. Namba; *Branched coverings and algebraic functions*, Pitman Research Notes in Mathematics Series **161** (1987).
- [10] J. V. Pereira; *Vector fields, invariant varieties and linear systems*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **51** (2001), no. 5, 1385–1405.

### Abstract

In this work we introduce the notion of Galois foliations on  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , defined as those foliations whose Gauss applications restricted to a Zariski open subset is a Galois covering. We also present some examples and a criterium for identifying such foliations.

**Keywords:** Foliations, webs.

Andrés Beltrán  
Sección Matemáticas  
Departamento de Ciencias  
Pontificia Universidad Católica del Perú  
Av. Universitaria 1801, Lima, Perú  
abeltra@pucp.edu.pe

Maycol Falla  
Departamento de Análise-IM  
Universidade Federal Fluminense  
Mário Santos Braga S/N- Niterói, 24.020-140 RJ, Brasil  
maycolfl@gmail.com

David Marín  
Departament de Matemàtiques  
Universitat Autònoma de Barcelona  
E-08193 Bellaterra, Barcelona, España  
davidmp@mat.uab.es