

Fórmules i filatèlia

ARMENGOL GASULL

Departament de Matemàtiques, Edifici C, Universitat Autònoma de Barcelona, 08193 Bellaterra (Barcelona) Spain. gasull@mat.uab.cat

El colleccionisme és un entreteniment que no tothom comparteix. Es deu portar als gens. De fet, jo encara recordo quan amb uns deu o dotze anys convencí al meu pare per a que em portés a passejar els diumenges al matí per la Plaça Reial per a veure les paradetes de segells. Aquest entreteniment es va anar apagant amb l'adolescència fins que a l'any 2000, amb l'ocasió de l'Any Mundial de les Matemàtiques, van començar a aparèixer segells dedicats al tema en qüestió, vegeu uns quants a la figura 1.



Figure 1. Sis segells commemorant l'Any Mundial de les Matemàtiques

A l'entorn d'aquest període també va sortir publicat el llibre de R. J. Wilson, *Stamping through Mathematics*, dedicat a la filatèlia matemàtica amb una selecció preciosa de segells amb aquesta temàtica, vegeu [3]. Llegint el seu pròleg em vaig assabentar que aquest llibre és un recull dels articles força entretinguts, del mateix autor que apareixen regularment, i des de 1984, a la secció *Stamp Corner* de la coneguda revista *The Mathematical Intelligencer*. Un llibre anterior sobre el tema, publicat en castellà i anglès, és *Las Matemáticas en los sellos de correos* editat amb ocasió del VIII Congrés Internacional d'Educació Matemàtica, [2]. També és interessant consultar la publicació molt posterior [1], editada per “el Instituto Nacional de Estadística”, que conté imatges de diversos segells sobre temes relacionats amb l'Estadística.

Potser va ser per a tornar-me a sentir com quan era un nen, però en veure els segells dedicats a l'Any Mundial i algun dels dels llibres esmentats em vaig animar de nou a ser colleccionista. Em vaig decidir per a colleccionar segells, monedes i bitllets amb temàtica científica, fent especial èmfasi en les matemàtiques i la física.

En Xavi, l'editor actual del *Notícies*, coneixent la meva afició, m'ha convidat a preparar un petit escrit il·lustrat sobre el tema, que he acceptat sense dubtar. El que més m'ha costat és decidir cap a on enfocar-lo. Ràpidament, diverses opcions m'han vingut al cap: fer una selecció de segells dedicats als matemàtics més famosos i influents; fer una selecció on surtin imatges i figures relacionades amb matemàtiques; buscar segells que incloguin fórmules matemàtiques; o potser una selecció mixta, on aparegui una mica de cada cosa. Finalment, tal i com el títol d'aquest escrit mostra, m'he decidit per una selecció de segells amb fórmules o expressions matemàtiques. La raó és molt senzilla, són els que més m'agraden.

Començarem amb quatre segells que contenen fórmules “elementals”, vegeu la figura 2. Hi podem veure productes, l'àrea i el perímetre d'un quadrat, el teorema de Pitàgores o la definició de la tangent d'un angle.



Figure 2. Fórmules senzilles

També tenim un segell, bé de fet dos, per una de les fórmules més omnipresent, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,



Figure 3. El quadrat d'una suma

Complicant una miqueta més la cosa, però encara dins del Batxillerat, al menys en els meus temps, ens apareix el binomi de Newton o el triangle de Pascal, que dit sigui de pas, sembla ser que ja era conegut de ben abans del temps de Pascal a Xina (des de 1303). De fet, en el triangle els números estan escrits en xinès, vegeu la figura 4.



Figure 4. Binomi de Newton i triangle de Pascal

Seguint en el Batxillerat, exposem a la figura 5 un segell sobre la funció exponencial i el logaritme (dins de la bonica serie “las 10 fórmulas matemáticas que cambiaron la faz de la Tierra”) i un altre on es mostra un gravat d’Euler, un políedre i la fórmula de la característica d’Euler d’un políedre sense forats: $e - k + f = 2$. En aquesta fórmula e, k i f denoten el seu número de vèrtexs, arestes i cares, respectivament. Així pel políedre de la figura, $e = 12, k = 30$ i $f = 20$, i per tant $12 - 30 + 20 = 2$.



Figure 5. Exponencial i logaritme, i característica d’Euler

Per si us ha entrat la curiositat, les deu fórmules triades a la sèrie de segells nicaragüencs són: $1 + 1 = 2$, el Teorema de Pitàgores, la llei de la palanca d’Arquimedes, la definició d’exponencial i logaritme de la figura anterior, la llei de la gravitació de Newton, la llei de Maxwell de l’electromagnetisme, la famosíssima fórmula d’Einstein $E = mc^2$, la llei d’ones de Broglie, la llei de l’entropia de Boltzmann i la llei de Tsiolkovskii sobre el moviment dels coets. Qualsevol d’aquests segells seria també adequat per a ser inclòs en aquesta sel.lecció.

També són interessants els segells de la figura 6 dedicats als nombres complexos. Per exemple al primer d’ells hi apareix la fórmula $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$.



Figure 6. Exponencial complexa i representació de nombres complexos

En aquest punt voldríem destacar uns quants segells dedicats a certs números concrets. Així per exemple a la figura 7 mostrem els dedicats al nombre d’or (o raó àuria) $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ i al nombre primer $2^{13466917} - 1$. Recordeu que els nombres primers de la forma $2^n - 1$ es coneixen com primers de Mersenne.



Figure 7. Nombre d’or i el 39è primer de Mersenne

La tipografia d’aquest segell de Liechtenstein no és prou cuidada, ja que

$$(1 + \sqrt{5})/2 = 1.6180339887498948482045 \\ 8683436563811772030917980576 \dots$$

Per tant a la última fila del segell hi ha dos errors: en particular, falta un 6 després de la seqüència 365 i l’últim 1 ha de ser un 7.

Pel que l'autor sap, en al moment d'escriure aquest escrit es coneixen 48 nombre primers de Mersenne, essent el més gran $2^{57885161} - 1$. El que apareix al segell de la dreta de la figura és el que fa 39 de la llista, va ser trobat l'any 2001 i té 4053946 dígitos.

En aquest recull no pot faltar el número π . El segell de l'esquerra de la Figura 8 té com a fons alguns dels dígitos d'aquest número. Com a curiositat direm per exemple que els números que apareixen a la primera fila del segell corresponen als que hi ha en la tercera i quarta fila de l'expressió decimal:

$$\begin{aligned}\pi = & 3.141592653589793238462643383 \\ & 2795028841971693993751058209 \\ & 7494459230781640628620899862 \\ & 8034825342117067982 \dots\end{aligned}$$

Al segon segell de la figura 8 apareixen com a fons diverses vegades el primers decimals de π , aquest cop començant amb $3.14\dots$. També és interessant comentar que el rectangle de la figura representa la partició del rectangle amb base 177 i alçada 176 en quadrats de costats enters. Els dos que toquen al costat superior de costats 99 i 78. Els quatre que toquen a la base amb costats 77, 34, 25 i 41. El que toquen al costat dret amb mides 78, 57 i 41 i els tres interiors de més a l'esquerra (de dalt a baix) amb costats 21, 43, 9. El quadrat interior que queda amb costat 16.

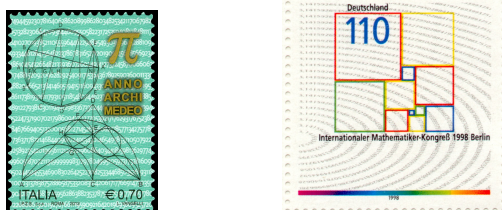


Figure 8. Alguns decimals de π

Dels dos segells de la figura 9, el primer ens dona una aproximació força bona de π . De fet, al segle V, el matemàtic xinès Tsu Ch'ung-Chih va provar que $3.1415926 < \pi < 3.1415927$. Al segell hi apareix un gravat seu i l'aproximació donada per la mitjana d'aquests valors, 3.14159265 . Ell també va demostrar que la fracció $355/113$ (molt fàcil de recordar $(113/355)^{-1}$) aproxima π amb error menor que una milionèsima. Aquesta aproximació va trobar-se molt més tard a occident. En el segon apareix la gràfica del logaritme neperià, el número e i una aproximació de $\ln 2 = 0,69314718\dots$



Figure 9. Aproximacions de π i $\ln 2$

Entrem a continuació en una matemàtica més avançada amb segells dedicats a resultats fonamentals d'aquesta ciència i comencem amb un parell de segells on hi trobem notacions matemàtiques: un sumatori, una unió i una integral de línia, vegeu la figura 10.



Figure 10. Sumatori, unió i integral de línia

Als resultats de la figura 11 tenim “enunciades” la Llei dels grans nombres (J. Bernoulli) i la fórmula integral de Cauchy.



Figure 11. Llei dels grans nombres i fórmula de Cauchy

De manera similar, a la figura 12 tenim un altre segell emès amb motiu de l’any de les Matemàtiques a on hi veiem el nombre π , la funció zeta de Riemman, el Teorema de Stokes i l’equació diofàntica associada al Teorema de Fermat. Al segell del costat veiem les propietats que ens defineixen el quaternions de Hamilton.



Figure 12. Fórmules diverses i propietats dels quaternions

En el següent segell doble de la figura 13, dedicat als matemàtics grecs Caratheodory i Tales, ens apareix per exemple un problema variacional.



Figure 13. Un problema variacional

Els següents dos segells de la figura 14 mostren a Liapunov amb una integral primera, presumiblement per a ser usada com a funció de Liapunov, i la factorització única d’un ideal com a producte de potències d’ideals primers, juntament amb la imatge d’en Dedekind.



Figure 14. Integral primera i factorització d'ideals

Podem veure en la figura 15 la famosa llei de Newton

$$\text{Força} = \text{massa} \times \text{acceleració},$$

escrita com $\Delta(mv) = F\Delta t$, així com un segell dedicat a Ramanujan on hi apareix un trosset d'una de les moltes increïbles igualtats que va demostrar.



Figure 15. Llei de Newton i un tros de fórmula de Ramanujan

També dedicat a Newton, tenim a la figura 16 un segell triangular on apareix la llei de la gravitació universal,

$$G = F \frac{M_1 M_2}{R^2}.$$

Com no, hi ha gent interessada en col·leccionar segells amb formes variades. Per exemple, també hi ha segells (no dedicats a les matemàtiques) circulars, hexagonals, pentagonals, trapezoïdals, romboïdals, ...



Figure 16. Llei de la gravitació universal

A les imatges de la figura 17 hi apareix a l'esquerra Helmholtz, famós entre d'altres coses per l'estudi de certes equacions integrals, i a la pissarra de darrera seu unes derivades parcials, i a l'altre segell, una equació diferencial de tercer ordre associada a un problema mecànic.



Figure 17. Derivades parcials i equació diferencial

En els dos segells russos dedicats a científics del segle XX de la figura 18, al primer d'ells hi podem veure l'operador

$$f_h(x) = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x+t) dt,$$

i al segon una sèrie convergent.



Figure 18. Operador i sèrie convergent

En el segell txecoslovac de la figura 19 apareixen tres matemàtic i físics del país i de fons unes desigualtats, que semblen ser part d'un resultat de teoria de nombres.



Figure 19. Desigualtats

Acabem aquesta selecció d'imatges amb dos segells xinesos on es mostren els èxits recents dels seus investigadors, vegeu la Figura 20. En el segell de l'esquerra es presenta un dels resultats recents més potents sobre la Conjectura de Goldbach. Recordem que aquesta va ser presentada per Goldbach a Euler en un peu de pàgina d'una carta, l'any 1742, i assegura que tot nombre parell (més gran que dos) es pot escriure com la suma de dos nombres primers. La conjectura no està encara resolta, però un resultat de Chen Jing-Run de 1966, implica que tot número parell suficientment gran es pot escriure com la suma d'un número primer i un altre número que és producte de com a molt dos primers. De fet la notació $(1, 2)$ que apareix al segell fa referència a la descomposició "1 primer més un producte de com a molt 2 primers". Al segell de la dreta, dedicat a Xiong Qinglai, especialista en funcions enteres i meromorfe, apareix escrit: "Étant donnée une fonction meromorphe, il existe au moins une direction $D \dots$ converge pour tous les $\alpha \dots$ diverge sauf pour \dots ". Potser és el segell més proper a incloure un enunciat matemàtic complet.



Figure 20. Conjectura de Goldbach i teoria de funcions meromorfe

A part dels segells també hi ha altres objectes filatèlics que es poden col·leccionar i que són força interessants. Tenim per exemple les fulles i els sobres de primer dia. Com a exemple del primer cas veiem a la figura 21 una fulla on hi ha arguments matemàtics. En particular el del mig és una "demostració":

$$\left(x_1 = \sqrt[m]{a}, \quad x_{n+1} = \sqrt[m]{a + x_n}, \quad x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \Rightarrow (x^m = a + x)$$

De fet, essencialment l'únic que falta argumentar en la fulla filatèlica és l'existència del límit.

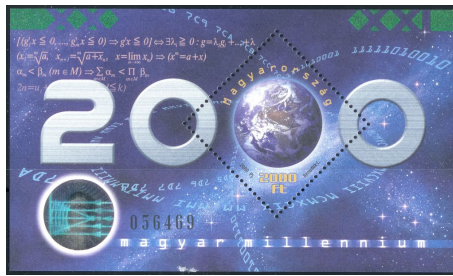


Figure 21. Algunes demostracions

En els sobres de primer dia (sobres emesos i timbrats el dia en que surt a circulació el segell), apart del segell hi ha més informació relacionada amb ell. El mata-segells també pots ser especialment interessant, com en el cas de la figura 22, on tenim un segell dedicat a Gauss, i a on hi podem veure l'àrea

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

corresponent a una densitat de tipus gaussià.



Figure 22. Sobre de primer dia amb mata-segell matemàtic

Encara que m'alegra poder dir que tinc la major part dels segells que apareixen en aquest escrit i els podria haver escanejat per a il·lustrar-lo, les imatges han estat obtingudes de la meravellosa plana web de Jeff Miller (<http://jeff560.tripod.com/stamps.html>), on regularment es penegen aquestes imatges amb molt bona qualitat. La informació d'algun dels segells ha estat obtinguda dels articles corresponents del *Stamp Corner* de *The Mathematical Intelligencer*. A la plana web de Hung Manh Bui,

<http://www.maths.bris.ac.uk/hb0262/miscellany.htm>

hi ha una gran selecció de segells i sobres de primer dia matemàtics escanejats.

També m'agradaria comentar que, fins i tot hi ha una revista de filatèlia matemàtica, *Philamath*, que es pot obtenir per subscripció i de la que per exemple el volum XXXIII, No. 2, d'octubre de 2011 es pot veure a <http://mathstamps.org/October%202011.pdf>.

Voldria acabar reflexionant sobre alguns dels avantatges que penso que m'ha aportat aquest afició. En primer lloc, crec que m'ha ajudat a conèixer una mica més la història i cronologia de les matemàtiques. També m'ha fet pensar en la importància que han donat diferents països a la ciència. No és descabellat considerar que hi ha una certa correlació entre ciència de qualitat i quantitat de filatèlia científica. Així, ens ambdues llistes apareixen en els primers llocs Alemanya (DDR i BDR), EEUU, França, Polònia, Rússia (URSS), UK,...

A un nivell més personal, m'ha fet gaudir d'un turisme una mica diferent. Recordo, per exemple, passejar pels carrerons de Praga buscant aquella petita filatèlia que tot col·leccionista desitja trobar. I, un cop trobada, la cerca de segells especials, xerrant sense pressa amb el dependent, començar parlant d'ells i acabant amb qualsevol altre tema, ..., vaja disfrutant de la vida. Finalment, i molt important, l'alegria que m'han proporcionat molts amics, que durant

els seus viatges arreu i coneixent la meua “petita mania”, s’han recordat de mi i, somrient, m’han portat un petit tresor.

L’autor esta recolzat pels projectes MINECO/FEDER MTM2013-40998-P i per la Generalitat de Catalunya, projecte 2014SGR568.

REFERENCES

- [1] *La Estadística en la Filatelia mundial del siglo XX*. Instituto Nacional de Estadística, Madrid 2009.
- [2] GUTIÉRREZ, S. I TARANCÓN, M., *Las Matemáticas en los sellos de correos*. SMPM Emma Castelnuovo, 1996.
- [3] WILSON, R. J., *Stamping through Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2001.