Preprint de "Les aportacions de John F. Nash a l'economica: equilibri I negociació", Jordi Massó.
Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques del Institut d'Estudis Catalans 32, 73-94 (2017).
Lliurat al IEC el març de 2017

Les aportacions de John F. Nash a l'economia: equilibri i negociació

Jordi Massó*†

Universitat Autònoma de Barcelona i Barcelona GSE

Març, 2017

Resum: John F. Nash va rebre el Premi Nobel d'Economia l'any 1994, juntament amb John C. Harsanyi i Reinhard Selten, "per les seves anàlisis de l'equilibri en la teoria dels jocs no cooperatius", i el Premi Abel de Matemàtiques l'any 2015, juntament amb Louis Nirenberg, "per les seves contribucions notables i fonamentals a la teoria d'equacions en derivades parcials no lineals i les seves aplicacions a l'anàlisi geomètrica". El 23 de maig de 2015 Nash mor en un accident de trànsit a Nova Jersey. Amb l'objecte de fer conèixer als seus associats les aportacions científiques de Nash, les Societats Catalanes d'Economia i de Matemàtiques, filials de l'Institut d'Estudis Catalans, van organitzar el 9 de novembre de 2015 una conferència conjunta en la que el professor Xavier Cabré (UPC) va presentar les contribucions de Nash a les matemàtiques i qui signa aquest article les contribucions de Nash a l'economia. Aquest article, basat en aquella conferència, presenta les dues contribucions més importants de Nash a l'economia: l'equilibri de Nash d'un joc no cooperatiu i la solució de Nash al problema de la negociació.

Paraules clau: Joc no cooperatiu, equilibri de Nash, problema de la negociació, solució de Nash al problema de la negociació.

Classificació MSC2010: 9102, 91A05, 91A06, 91A10 i 91A12.

*Departament d'Economia i d'Història Econòmica, Facultat d'Economia i Empresa, Edifici B, Universitat Autònoma de Barcelona. 08193 Bellaterra (Cerdanyola del Vallès). Correu electrònic: jordi.masso@uab.es

†L'autor agraeix els suggeriments fets per un avaluador i el suport de la Generalitat de Catalunya, a través del projecte SGR2014-515, i del Ministerio de Economía y Competitividad, a través del programa Severo Ochoa (SEV-2015-0563) i el projecte ECO2014-53051-P.

John F. Nash's Contributions to Economics: Equilibrium and Bargaining

Jordi Massó*†

Universitat Autònoma de Barcelona and Barcelona GSE

March, 2017

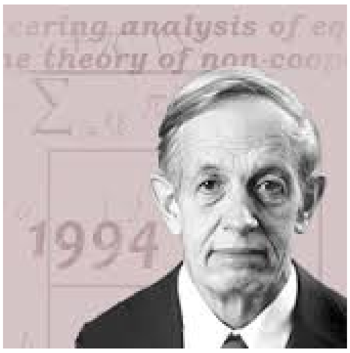
Abstract: John F. Nash received the Nobel Prize in Economics in 1994, together with John C. Harsanyi and Reinhard Selten, "for their pioneering analysis of equilibria in the theory of non-cooperative games," and the Abel Prize in Mathematics in 2015, together with Louis Nirenberg, "for their striking and seminal contributions to the theory of nonlinear partial differential equations and its applications to geometric analysis." On May 23, 2015, Nash died in a traffic accident in New Jersey. On November 9, 2015, the Catalan Societies of Economics and Mathematics, subsidiaries of the Institute of Catalan Studies, jointly organized a conference to let their members know the scientific contributions of Nash, in which professor Xavier Cabré (UPC) presented Nash's contributions to Mathematics and who signs this paper Nash's contributions to Economics. This paper, based on that conference presents the two most important Nash's contributions to Economics: the Nash equilibrium of a non-cooperative game and the Nash bargaining solution.

Keywords: Non-cooperative game, Nash equilibrium, bargaining problem, Nash's bargaining solution.

MSC2010 Classification: 9102, 91A05, 91A06, 91A10 and 91A12.

*Departament d'Economia i d'Història Econòmica, Facultat d'Economia i Empresa, Edifici B, Universitat Autònoma de Barcelona. 08193 Bellaterra (Cerdanyola del Vallès). E-mail: jordi.masso@uab.es

†The author is thankful to a referee for very useful comments and suggestions and acknowledges the support of the Generalitat de Catalunya, through the project SGR2014-515, and the Ministerio de Economía y Competitividad, through the program Severo Ochoa (SEV-2015-0563) and the project ECO2014-53051-P.



1 John F. Nash (1928-2015)

John F. Nash neix a Bluefield, Virginia de l'Oest, el 13 de juny de 1928. El juny de 1945 inicia estudis d'enginyeria química al Carnegie Tech de Pittsburgh, Pennsylvania, i es gradua, amb un BA i un MA en matemàtiques, l'any 1948. El setembre de 1948 inicia el seus estudis de doctorat a la Princeton University i el maig de 1950 defensa la seva tesis doctoral (de 28 pàgines) titulada *Non-cooperative Games*. Durant el període 1951-1959 és professor de matemàtiques al MIT de Cambridge, Massachusetts. A partir de l'any 1959 comença un llarg tractament de la seva enfermetat mental, passant varis períodes en hospitals psiquiàtrics, i no és fins a la meitat dels anys 1980 que reprèn parcialment la seva activitat científica.[1]

Nash reb el 1994 el premi del Banc de Suècia en Ciències Econòmiques en memòria d'Alfred Nobel, popularment conegut com a Premi Nobel d'Economia, juntament amb John C. Harsanyi i Reinhard Selten, "per les seves anàlisis de l'equilibri en la teoria dels jocs no cooperatius", i el 2015 reb, juntament amb Louis Nirenberg, el premi Abel de matemàtiques que atorga anualment des de 2003 l'Acadèmia Noruega de Ciències i Lletres "per les sevescontribucions notables i fonamentals a la teoria d'equacions en derivades parcials no lineals i les seves aplicacions a l'anàlisi geomètrica". El 23 de maig de 2015, Nash mor en un accident de trànsit tornant de l'aeroport després de recollir el premi Abel a Oslo.

L'objectiu d'aquest article és presentar les dues contribucions més importants de Nash a l'economia: l'equilibri de Nash d'un joc no cooperatiu (secció 2) i la solució de Nash al problema de la negociació (secció 3).

2 Equilibri de Nash

La teoria dels jocs és un conjunt de models matemàtics que permeten estudiar situacions en les que dos o més agents han de prendre decisions interrelacionades. Molt sovint, el resultat de la decisió d'un agent no només depèn de la pròpia decisió sinó també de les

[1] El llibre *A Beautiful Mind* de Sylvia Nasar (1998), conté una excel·lent biografia (no autoritzada) de Nash.

decisions preses pels altres agents. La licitació en una subhasta o la determinació del preu i de la quantitat venuda d'un bé en un mercat són exemples de jocs no cooperatius. La majoria dels problemes econòmics no poden ser entesos sense tenir en compte els aspectes estratègics en les interaccions dels agents econòmics (licitadors en una subhasta o empreses en un mercat). Un joc no cooperatiu és un model abstracte que descriu aquestes situacions d'interacció estratègica entre dos o més agents. L'equilibri de Nash és la predicció sobre el comportament dels agents (racionals) participants en un joc no cooperatiu; per això, Nash (i la seva noció d'equilibri) té un paper destacat en l'anàlisi econòmica moderna. Per definir l'equilibri de Nash hem de definir primer un joc no cooperatiu en forma normal (o estratègica), format pels següents elements.

El conjunt $N = \{1, \ldots, n\}$ dels n agents que han de prendre decisions, i que anomenem *jugadors*.

Cada jugador $i \in N$ ha de triar una *estratègia* s_i en el seu conjunt d'estratègies S_i. Un *perfil d'estratègies*

$$s = (s_1, \ldots, s_n) \in S = S_1 \times \cdots \times S_n$$

descriu l'estratègia triada per cadascun dels jugadors. Si la interacció estratègica és dinàmica, la descripció d'una estratègia haurà d'incorporar la seqüencialitat de les decisions i l'informació, total o parcial, que reben els jugadors sobre les mateixes. En una subhasta, el conjunt N de jugadors són els licitadors (inscrits) en la mateixa i, per a tot $i \in N$, S_i és el conjunt de números enters positius (suposant que els licitadors només poden oferir quantitats enteres d'euros).

Sigui Z el conjunt de resultats possibles del joc i sigui $g : S \to Z$ la funció que indica, per a cada perfil d'estratègies $s \in S$, el resultat del joc $g(s) \in Z$. En una subhasta g ha d'especificar, per a cada vector d'ofertes (perfil d'estratègies), qui reb l'objecte subhastat i quin preu en paga. Suposarem que els jugadors només estan interessats en el resultat del joc, i no en com aquest es produeix. Els jugadors poden tenir preferències (potencialment diferents) sobre els resultats del joc i per tant, a través de la funció g, sobre el conjunt de perfils d'estratègies. Suposarem que les preferències del jugador i venen representades per una *funció d'utilitat* $u_i : Z \to \mathbb{R}$, entenent que per a tot parell $z, z' \in Z$, $u_i(z) > u_i(z')$ si i només si i estrictament prefereix el resultat z al z'. La *funció de pagaments* $h_i : S \to \mathbb{R}$ *del jugador* i, que ordena el conjunt de perfils d'estratègies d'acord amb la funció d'utilitat $u_i : Z \to \mathbb{R}$, assigna, per a cada $s \in S$, la utilitat del resultat generat per a s; és a dir, $h_i(s) = u_i(g(s))$. Finalment, la *funció de pagaments* $h : S \to \mathbb{R}^n$ ens indica, per a cada perfil d'estratègies $s \in S$, el vector de pagaments $(h_1(s), \ldots, h_n(s))$ que obtenen els jugadors si cada un d'ells tria el corresponent component del perfil d'estratègies $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$.

Per tant, un joc no cooperatiu en forma *normal* (o *estratègica*) és un triplet

$$G = (N, S, h),$$

on N és el conjunt de jugadors, S és el conjunt de perfils d'estratègies i h és la funció de pagaments.

Els següents exemples il·lustren la definició de joc no cooperatiu en forma normal. Més endavant serviran per il·lustrar la definició d'equilibri de Nash, així com algunes de les seves propietats.

Exemple 1 (*Matching pennies*). Dos jugadors, $N = \{1, 2\}$, han de triar simultàniament un dels dos costats d'una moneda d'un euro, $S_1 = S_2 = \{C, +\}$, on C i $+$ representen respectivament la cara i la creu de la moneda. Si els dos jugadors trien el mateix costat de la moneda, el jugador 2 ha de donar la seva moneda al jugador 1 i si trien costats diferents, el jugador 1 ha de donar la seva moneda al jugador 2; és a dir, $h_1(C, C) = h_1(+, +) = h_2(C, +) = h_2(+, C) = 1$ i $h_1(C, +) = h_1(+, C) = h_2(C, C) = h_2(+, +) = -1$. La següent matriu representa el joc de *matching pennies* en forma normal.

1\2	C	$+$
C	1,-1	-1, 1
$+$	-1, 1	1,-1

Exemple 2 (La batalla dels sexes). Dos membres d'una parella ($N = \{h, d\}$, h per home i d per dona) han acordat trobar-se al vespre, però no recorden si és per anar al futbol (F) o al ballet (B), i no es poden comunicar; és a dir, $S_h = S_d = \{F, B\}$. L'home prefereix anar al futbol i la dona al ballet, però tots dos prefereixen anar junts al mateix lloc que anar a llocs diferents; en particular, les funcions de pagaments dels dos jugadors són $h_h(F, F) = h_d(B, B) = 3$, $h_h(B, B) = h_d(F, F) = 1$ i $h_h(F, B) = h_d(F, B) = h_h(B, F) = h_d(B, F) = 0$. La següent matriu representa el joc de la batalla dels sexes en forma normal.

h/d	F	B
F	3, 1	0, 0
B	0, 0	1, 3

En el llibre *The Theory of Games and Economic Behavior* de von Neumann i Morgenstern (1944), considerat el naixement de la teoria dels jocs, els autors es pregunten com determinar l'estratègia òptima d'un jugador en un joc en forma normal i donen una resposta per a tots els jocs de dos jugadors i suma zero (el que guanya un jugador ho perd l'altre); és a dir, per a tot joc en forma normal $G = (N, S, h)$, on $n = 2$ i, per a tot $s \in S$, $h_1(s) + h_2(s) = 0$.[2] Observem però que en general la noció d'optimalitat és ambigua ja que donat qualsevol joc en forma normal $G = (N, S, h)$ pot no existir l'estratègia òptima s_i^* pel jugador $i \in N$ en el joc G, atès que aquesta pot dependre del perfil d'estratègies dels altres jugadors (que denotem per $s_{-i} = (s_j)_{j \in N \setminus \{i\}}$); és a dir, la solució al problema

$$\max_{s_i \in S_i} h_i(s_i, s_{-i})$$

[2] El Teorema del minimax, que presentarem més endavant, conté aquesta resposta.

depèn de s_{-i}. Per exemple, en el joc de *matching pennies* l'estratègia C és òptima contra $+$, però $+$ és òptima contra C, o en el joc de la batalla dels sexes, F és òptima contra F, però B és òptima contra B.

La contribució fonamental de Nash a la teoria dels jocs és la de formular la solució d'un joc no cooperatiu en forma normal com un equilibri. Un perfil d'estratègies s^* és un equilibri de Nash si per cada jugador i, l'estratègia s_i^* és la millor, atès que els altres jugadors trien l'estratègia s_{-i}^*. Formalment,

Definició 1. Sigui $G = (N, S, h)$ un joc en forma normal. Un perfil d'estratègies $s^* \in S$ és un *equilibri de Nash* de G si per a tot $i \in N$,

$$h_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq h_i(s_i, s_{-i}^*) \text{ per a tot } s_i \in S_i.$$

Un equilibri de Nash s^* és un acord previ *estable* entre els jugadors. Per veure-ho, suposem que $\hat{s}$ no és un equilibri de Nash de G; això és, existeixen $i \in N$ i $s_i' \in S_i$ tals que $h_i(s_i', \hat{s}_{-i}) > h_i(\hat{s}_i, \hat{s}_{-i})$. Per tant, o bé i esperava $\hat{s}_{-i}$ però no és racional (no tria la millor estratègia, donat $\hat{s}_{-i}$) o bé i esperava que els altres jugadors triessin unes altres estratègies; és a dir, existeix $s_{-i}^e \neq \hat{s}_{-i}$ tal que $h_i(\hat{s}_i, s_{-i}^e) \geq h_i(s_i, s_{-i}^e)$ per a tot $s_i \in S_i$. Per tant, si el joc i la racionalitat dels jugadors són comunment coneguts i els jugadors fan prediccions consistents han de jugar un equilibri de Nash.[3]

Sigui S^* el conjunt d'equilibris de Nash de G. Els dos exemples anteriors són suficients per il·lustrar dues dificultats de la noció d'equilibri de Nash: existència i multiplicitat. Primer, el joc de *matching pennies* no té cap equilibri de Nash; (C, C) no ho és ja que el jugador 2 voldria triar $+$, $(C, +)$ no ho és ja que el jugador 1 voldria triar $+$, $(+, +)$ no ho és ja que el jugador 2 voldria triar C i finalment $(+, C)$ no ho és ja que el jugador 1 voldria triar C. Segon, el joc de la batalla dels sexes té dos equilibris de Nash, (F, F) i (B, B).

L'estudi del problema de la multiplicitat dels equilibris de Nash ha donat lloc a una extensa literatura, anomenada dels refinaments del conjunt d'equilibris de Nash. Tot i que durant molts anys ha estat una de les àrees més actives en la teoria dels jocs, Nash no hi ha fet contribucions fonamentals i per tant, no la presentarem en aquest article.

Per resoldre el problema de l'existència de l'equilibri, Nash considera la possibilitat que els jugadors en comptes de triar una estratègia triin una distribució de probabilitat sobre els seus respectius conjunts d'estratègies; per exemple, en el joc de *matching pennies*, seria jugar C amb probabilitat 1/2 i jugar $+$ amb probabilitat 1/2 (és a dir, tirar la moneda a l'aire, i triar l'estratègia de la cara mostrada per la moneda després de caure).

Sigui $G = (N, S, h)$ un joc finit en forma normal.[4] L'*extensió mixta* de G és un triplet

$$G^* = (N, \Sigma, H),$$

[3] El coneixement comú d'un fet requereix que els jugadors el sàpiguen, que cadascun d'ells sàpiga que els altres el saben, que sàpiguen que els altres saben que els altres el saben, etc.

[4] Un joc en forma normal és finit si N i S són conjunts finits.

on per a cada i, Σ_i és el conjunt de totes les distribucions de probabilitat sobre S_i (anomenades estratègies mixtes); és a dir,

$$\Sigma_i = \{\sigma_i : S_i \to [0,1] \mid \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1\},$$

on $\sigma_i(s_i)$ és la probabilitat amb la que i jugarà s_i si tria l'estratègia mixta σ_i. Observem que el conjunt Σ_i es pot escriure com

$$\Sigma_i = \{x \in \mathbb{R}^{\#S_i} \mid x_j \geq 0 \text{ per a tot } j = 1, \ldots, \#S_i \text{ i } \sum_{j=1}^{\#S_i} x_j = 1\},$$

el simplex de l'espai euclidià $\#S_i$-dimensional, on $\#S_i$ denota la cardinalitat del conjunt S_i. Definim $\Sigma = \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n$ i denotem un perfil d'estratègies mixtes per $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \Sigma$, una per a cada jugador. Finalment, per a cada i, definim $H_i : \Sigma \to \mathbb{R}$ com la funció de pagaments esperats del jugador i; és a dir, per a tot $\sigma \in \Sigma$,

$$H_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \left[\left(\prod_{j \in N} \sigma_j(s_j) \right) \cdot h_i(s) \right].$$

Observem primer que en la definició de $H_i(\sigma)$ estem suposant que i avalua la distribució de probabilitat σ sobre S segons el pagament esperat de l'estrategia σ, que és la suma dels pagaments de cada un dels perfils d'estrategies, ponderats per la probabilitat que σ els assigna. Segon, les estratègies dels jugadors són independents: la probabilitat de que els jugadors triin el perfil d'estratègies pures $s = (s_1, \ldots, s_n)$ és igual a $\prod_{j \in N} \sigma_j(s_j)$, el producte de les probabilitats de cadascun dels components d's.[5]

Donat un joc en forma normal $G = (N, S, h)$, construim la seva extensió mixta $G^* = (N, \Sigma, H)$. Observem que G^* és també un joc en forma normal, al qual podem aplicar el concepte d'equilibri de Nash. És a dir, el conjunt d'equilibris de Nash de l'extensió mixta G^* d'un joc finit en forma normal G és el conjunt

$$\Sigma^* = \{\sigma^* \in \Sigma \mid \text{per a tot } i \in N,\ H_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq H_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) \text{ per a tot } \sigma_i \in \Sigma_i\}.$$

Nash demostra que qualsevol joc finit en forma normal té un equilibri de Nash en estratègies mixtes.

Teorema 1 (Nash, 1950a i 1951). *Sigui G un joc finit en forma normal. Llavors, $\Sigma^* \neq \varnothing$.*

Demostració. Sigui $G = (N, S, h)$ un joc finit en forma normal. Com que G és finit, Σ és un subconjunt no buit, compacte i convex d'un espai euclidià multidimensional (finit), ja que és el producte cartesià de n simplex. Per a cada $i \in N$, definim la *correspondència de*

[5] Aumann (1974) defineix (i estudia) l'equilibri correlacionat dels jocs en forma normal com l'extensió de l'equilibri de Nash quan els jugadors poden triar les seves estratègies de forma correlacionada. Robert J. Aumann reb el premi Nobel d'Economia l'any 2006, juntament amb Thomas C. Schelling, "per haver millorat la nostra comprensió del conflicte i la cooperació mitjançant l'anàlisi de la teoria dels jocs".

la millor resposta d'i, $B_i : \Sigma \twoheadrightarrow \Sigma_i$, assignant a cada $\sigma \in \Sigma$ el conjunt d'estratègies mixtes del jugador i que maximitzen el seu pagament, donat σ_{-i}; és a dir,

$$B_i(\sigma) = \{\sigma_i' \in \Sigma_i \mid H_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) \geq H_i(\bar{\sigma}_i, \sigma_{-i}) \text{ per a tot } \bar{\sigma}_i \in \Sigma_i\},$$

i definim la *correspondència de la millor resposta* $B : \Sigma \twoheadrightarrow \Sigma$ establint que, per a cada $\sigma \in \Sigma$,

$$B(\sigma) = (B_1(\sigma), \ldots, B_n(\sigma)).$$

Per a tot $\sigma \in \Sigma$, $B(\sigma)$ és un conjunt no buit ja que per a cada $i \in N$, $B_i(\sigma)$ és no buit pel Teorema de Weierstrass, atès que la funció H_i és contínua en el domini compacte Σ. És fàcil comprovar que per a cada $\sigma \in \Sigma$, $B(\sigma)$ és convex (la combinació convexa de dues millors respostes és també una millor resposta). El gràfic de $B : \Sigma \twoheadrightarrow \Sigma$ és el conjunt tancat

$$Graf(B) = \{(\sigma, \sigma') \in \Sigma \times \Sigma \mid \sigma' \in B(\sigma)\};$$

és a dir, la correspondència $B : \Sigma \twoheadrightarrow \Sigma$ és semicontínua superiorment. És immediat adonar-se que el conjunt d'equilibris de Nash de G^* és el conjunt de punts fixos de B; és a dir,

$$\sigma^* \in \Sigma^* \text{ si i només si } \sigma^* \in B(\sigma^*).$$

Pel Teorema de Kakutani (1941),[6] la correspondència de la millor resposta B de l'extensió mixta G^* de G té un conjunt no buit de punts fixos, i per tant $\Sigma^* \neq \varnothing$. ■

La següent observació ens diu que si un jugador i tria en equilibri una estratègia mixta σ_i^* no degenerada ($\#\{s_i \in S_i \mid \sigma_i^*(s_i) > 0\} \geq 2$) és perquè totes les estratègies pures del seu suport ($\{s_i \in S_i \mid \sigma_i^*(s_i) > 0\}$) li donen el mateix pagament i, per tant, qualsevol distribució de probabilitat amb el mateix suport també li dóna el mateix pagament. En equilibri, un jugador racional només deixa a l'atzar l'elecció de la seva decisió quan és indiferent entre el subconjunt d'estratègies pures en el suport de la seva estratègia mixta d'equilibri.

Observació 1. *Suposem que $\sigma^* \in \Sigma^*$. Siguin $i \in N$ i $\bar{s}_i, \hat{s}_i \in S_i$ tals que $\sigma_i^*(\bar{s}_i), \sigma_i^*(\hat{s}_i) > 0$. Llavors,*

$$H_i(\bar{s}_i, \sigma_{-i}^*) = H_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*),$$

on, abusant de la notació, $\bar{s}_i$ i $\hat{s}_i$ denoten també les estratègies mixtes degenerades $\sigma_i(\bar{s}_i) = 1$ i $\sigma_i'(\hat{s}_i) = 1$, respectivament.

Aquest fet és important; en equilibri el jugador i assigna probabilitat positiva només a estratègies pures que maximitzen el seu pagament esperat (donades les estratègies mixtes d'equilibri dels altres jugadors) i per tant, i és indiferent entre totes elles. Això fa que el

[6] **Teorema** (Kakutani, 1941). *Sigui $K \subseteq R^m$ un subconjunt no buit, compacte i convex i sigui $f : K \twoheadrightarrow K$ una correspondència semicontínua superiorment tal que per a tot $x \in K$, el conjunt $f(x)$ és no buit i convex. Llavors, f té almenys un punt fix; és a dir, existeix $x^* \in K$ tal que $x^* \in f(x^*)$.*

jugador està disposat a que la natura trii per ell. L'Observació 1 ens pot ajudar a calcular equilibris de Nash en estratègies mixtes d'un joc finit en forma normal. Tornem a l'exemple de la batalla dels sexes, i busquem-ne el seu conjunt d'equilibris de Nash Σ^*.

Exemple 2 (Batalla dels sexes; continuació). Donat un perfil d'estratègies mixtes $\sigma = (\sigma_h, \sigma_d) \in \Sigma$, definim el parell $(p, q) \in [0,1]^2$ com $p = \sigma_h(F)$ i $q = \sigma_d(F)$. La següent taula ens ajuda a representar la forma normal del joc amb estratègies mixtes,

		q	$1-q$
	$h\backslash d$	F	B
p	F	$3,1$	$0,0$
$1-p$	B	$0,0$	$1,3$

i l'Observació 1 a trobar el conjunt de tots els equilibris de Nash del joc. Primer, és immediat comprovar que (F,F) i (B,B) són els dos equilibris de Nash en estratègies pures. Per tant, $(1,1),(0,0) \in \Sigma^*$. Suposem que $(p,q) \in \Sigma^*$. Abusant una altra vegada de la notació al denotar per F i B les estratègies mixtes $\sigma_h(F) = 1$ i $\sigma_h(B) = 1$, respectivament, obtenim que $H_h(F,q) = 3q$ i $H_h(B,q) = 1-q$. Per l'Observació 1, si $p \in (0,1)$ llavors $3q = 1-q$. Per tant, $q^* = \frac{1}{4}$. La indiferència de l'home entre F i B determina l'estratègia mixta d'equilibri de la dona! Similarment, $H_d(p,F) = p$ i $H_d(p,B) = 3(1-p)$. Per l'Observació 1, si $q \in (0,1)$ llavors $p = 3(1-p)$. Per tant, $p^* = \frac{3}{4}$. La indiferència de la dona entre F i B determina l'estratègia mixta d'equilibri de l'home! La Figura 1 representa geomètricament aquests dos fets.

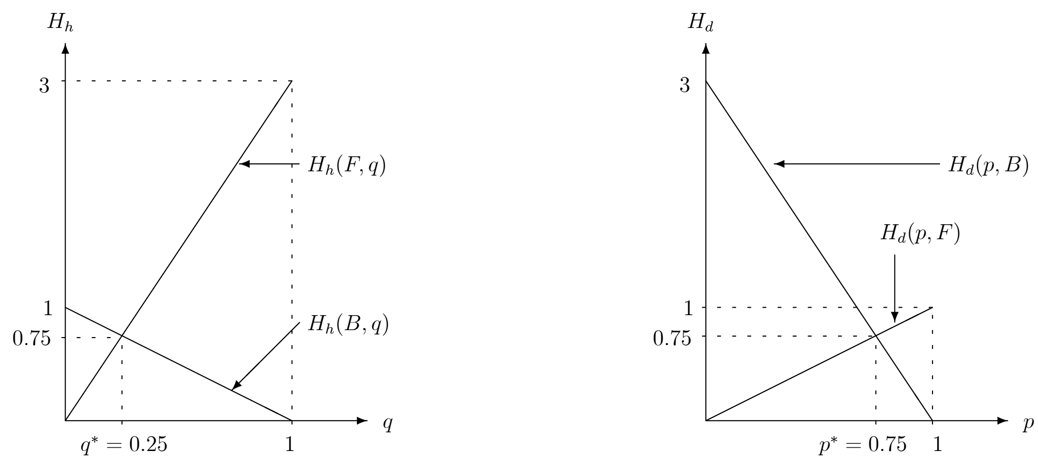


Figura 1

A partir de la Figura 1 és fàcil construir les correspondències de la millor resposta. Per a tot $(p,q) \in \Sigma$,

$$B_h(p,q) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } 0 \leq q < 0.25 \\ [0,1] & \text{si } q = 0.25 \\ \{1\} & \text{si } 0.25 < q \leq 1 \end{cases}$$

i

$$B_d(p,q) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } 0 \leq p < 0.75 \\ [0,1] & \text{si } p = 0.75 \\ \{1\} & \text{si } 0.75 < p \leq 1. \end{cases}$$

La Figura 2 representa, a través dels punts fixos de la correspondència de la millor resposta, el conjunt d'equilibris de Nash $\Sigma^* = \{(0,0),(1,1),(0.75,0.25)\}$ del joc.

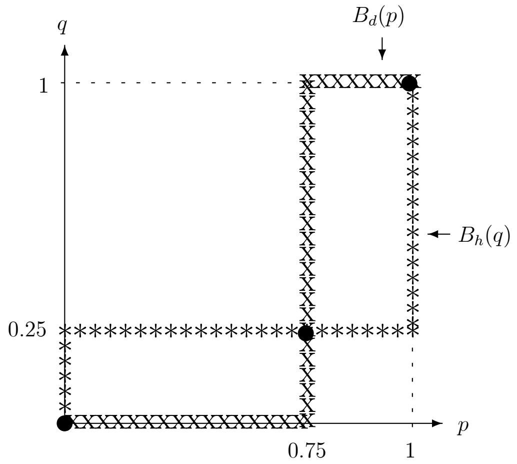


Figura 2

La noció d'equilibri de Nash té molts antecedents. Segurament Cournot (1838) és el primer a aplicar-lo (més de 100 anys abans de la definició general de Nash) per estudiar la competència entre dues empreses en un mercat d'un bé quan aquestes trien simultàniament les quantitats a vendre, i el preu es determina a partir de la funció inversa de demanda del bé. Bertrand (1883) modifica el model de Cournot al considerar que les empreses trien simultàniament el preu del bé, i la quantitat total venuda es determina a través de la funció agregada de demanda. Zermelo (1913) demostra que en el joc dels escacs o bé el jugador amb blanques té una estratègia guanyadora, o bé el jugador amb negres té una estratègia guanyadora, o bé ambdós jugadors tenen una estratègia que els assegura l'empat (els escacs és un joc finit ja que quan una mateixa posició es repeteix quatre vegades el joc acaba en taules). Hotelling (1929) l'utilitza a l'estudiar la competència entre dos venedors de gelats en una platja quan aquests trien simultàniament la seva localització en la platja, els banyistes estan uniformement distribuits a la platja, i els preus dels gelats estan fixats exògenament. Finalment, Stackelberg (1934) modifica el model de Cournot al suposar que una de les dues empreses és la líder en el mercat, tria primer la quantitat a vendre i, coneixent aquesta quantitat, l'altra empresa, la seguidora, tria la seva quantitat; Stackelberg anticipa així la noció de perfecció en els subjocs de Selten (1965).

Com ja hem dit, von Neumann i Morgenstern (1944) es troben en dificultats per definir la solució d'un joc (el llibre mostra els diferents intents per superar-les) però la donen (en el Teorema del minimax) pels jocs no cooperatius en forma normal finits amb dos jugadors i suma zero; és a dir, quan $G = (N, S, h)$ té la propietat que $n = 2$, $\#S < \infty$ i per a tot $s \in S$, $h_1(s) + h_2(s) = 0$ (el que guanya un jugador ho perd l'altre).

Teorema del minimax (von Neumann i Morgenstern, 1944). *Sigui $G = (N, S, h)$ un joc finit en forma normal amb dos jugadors i suma zero. Llavors, existeixen $v \in \mathbb{R}$ (el* valor *de G), $\sigma_1^* \in \Sigma_1$ i $\sigma_2^* \in \Sigma_2$ (*estratègies òptimes*) tals que per a tot $\sigma_1 \in \Sigma_1$ i $\sigma_2 \in \Sigma_2$:*

(i) $H_1(\sigma_1^*, \sigma_2) \geq v$.

(ii) $H_2(\sigma_1, \sigma_2^*) \geq -v$ ($\Leftrightarrow H_1(\sigma_1, \sigma_2^*) \leq v$).

(iii) $\min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} H_1(\sigma_1, \sigma_2) = \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} H_1(\sigma_1, \sigma_2) = v$.

La condició (i) diu que amb l'estratègia òptima σ_1^* el jugador 1 s'assegura un pagament esperat d'almenys v, independentment de l'estratègia del jugador 2. La condició (ii) diu que amb l'estratègia òptima σ_2^* el jugador 2 s'assegura un pagament esperat d'almenys $-v$ (és a dir, no perdre més de v en termes esperats), independentment de l'estrategia del jugador 1. La condició (iii) diu tres coses simultàniament. Primer, el punt de vista optimista del jugador 1, quan pensa que pot predir correctament l'estratègia del jugador 2, dona un pagament esperat ($\min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} H_1(\sigma_1, \sigma_2)$) més gran o igual que el punt de vista pessimista, quan 1 pensa que 2 pot predir correctament la seva estratègia ($\max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} H_1(\sigma_1, \sigma_2)$); aquesta desigualtat, i la simètrica pel jugador 2, és certa per qualsevol joc en forma normal amb dos jugadors. Segon, (iii) diu que si el joc és de suma zero, llavors el punt de vista pessimista dona un pagament esperat més gran o igual que el punt de vista optimista, i que per tant, els pagaments esperats dels dos punts de vista són iguals. Tercer, aquests pagaments esperats són v pel jugador 1, $-v$ pel jugador 2, i $H_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = v = -H_2(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$. La demostració del Teorema del minimax de von Neumann i Morgenstern es basa en un resultat anterior de von Neumann (1928). Fent servir el resultat d'existència de Nash (Teorema 1), és relativament senzilla i el lector la pot trobar a l'apèndix al final d'aquest article.[7]

A partir dels articles de Nash (1950, 1951a) la teoria dels jocs no cooperatius s'ha desenvolupat incorporant en els seus models els aspectes dinàmics de les interaccions estratègiques i les asimetries sobre la informació que els jugadors tenen en el moment de prendre les seves decisions sobre aspectes rellevants del joc, entre d'altres. En tots aquests desenvolupaments

[7] És fàcil comprovar que en el joc de *matching pennies* $v = 0$ i $\sigma_1^* = \sigma_2^* = 0.5$, però en el dels escacs no sabem el seu valor v (quí guanya) ni les estratègies òptimes σ_1^* i σ_2^*.

la noció d'equilibri de Nash ha continuat sent la peça central d'aquestes teories, permetent la seva aplicació a l'economia, la politica i la biologia.[8]

3 El problema de la negociació, i la seva solució

Nash presenta el problema de la negociació, i la seva solució, a l'article Nash (1950b). Segons el mateix Nash, la idea la va tenir quan seguia un curs d'Economia Internacional al Carnegie Tech de Pittsburgh, abans de graduar-se en matemàtiques.

Un problema de negociació és una situació on un conjunt d'agents (els negociadors) poden cooperar (possiblement, de moltes maneres) per llur benefici mutu. Però per ferho, han d'arribar a un acord *unànime*. Si no hi arriben, es manté l'*status quo* (o punt de desacord).

Hi ha molts exemples d'aquesta situació. Un venedor i un comprador d'un objecte han de posar-se d'acord sobre el preu de l'objecte; una empresa i un sindicat han d'acordar l'increment salarial i les condicions de treball; una parella ha d'acordar la resolució del seu divorci; diferents països i institucions supranacionals tenen converses de pau per arribar a un acord per resoldre un conflicte; etc.

El problema de la negociació fou amplament estudiat en economia, però fins a Nash (1950b) es considerava que la seva solució era indeterminada i que depenia de la capacitat i habilitat negociadora dels implicats.[9]

Un problema de negociació consta de dos elements bàsics: el conjunt $N = \{1, \ldots, n\}$ d'*agents* (jugadors o negociadors), on $n \geq 2$, i el conjunt Z de possibles acords (que tant pot ser un conjunt finit com infinit). Cada agent $i \in N$ té unes preferències $\succsim_i$ sobre el conjunt Z. Per $z, z' \in Z$ escrivim $z \succsim_i z'$ per indicar que l'acord z és almenys tant preferit per i com l'acord z', i escrivim $z \succ_i z'$ si z és estrictament preferit per i a l'acord z'. Diem que una funció d'utilitat $u_i : Z \to \mathbb{R}$ representa les preferències $\succsim_i$ si per a tot $z, z' \in Z$, $z \succsim_i z'$ si i només si $u_i(z) \geq u_i(z')$.[10]

Permetem que com a solució del problema de la negociació els agents acordin triar una distribució de probabilitat sobre Z. Per això, suposarem que cada $i \in N$ té preferències $\widehat{\succsim}_i$ sobre el conjunt de probabilitats sobre Z, representades per la funció $h_i : \mathcal{L}(Z) \to \mathbb{R}$, on $\mathcal{L}(Z)$ és el conjunt de distribucions de probabilitat sobre Z i que h_i satisfà la propietat de la utilitat esperada; és a dir, per a tot parell $p, p' \in \mathcal{L}(Z)$: (i) $p \widehat{\succsim}_i p'$ si i només si $h_i(p) \geq h_i(p')$

[8] El lector interessat pot trobar en el llibre de Machler, Solan i Zamir (2013) una excel·lent i detallada presentació de l'estat actual de la teoria dels jocs.

[9] La corba de contracte d'una economia d'intercanvi d'Edgeworth (1925) és un clar exponent d'aquesta situació.

[10] Sota condicions molt generals (veure Debreu (1959)) les preferències poden ser representades per una funció d'utilitat (integrable), que és única excepte per transformacions monòtones positives.

i (ii) $h_i(p) = \int_{z \in Z} p(z) u_i(z) dz$.[11]

Sigui $S \subset \mathbb{R}^n$ el conjunt de *resultats possibles* de la negociació en termes d'utilitats esperades: $x \in S$ si i només si existeix $p \in \mathcal{L}(Z)$ tal que per a tot $i \in N$, $h_i(p) = x_i$.

El model de Nash té un supòsit implícit i quatre explícits (formulats directament sobre el conjunt S). L'implícit és que per a determinar la solució al problema de la negociació només són relevants les utilitats dels agents, i no els acords que les generen. Els explícits són que S és un conjunt convex (conseqüència d'admetre acords probabilístics), compacte (per exemple, si Z és finit), existeix un *punt de desacord* (*status quo*) $d \in S$, i existeix un acord tal que tots els agents estrictament prefereixen al punt de desacord, és a dir, existeix $x \in S$ tal que $x_i > d_i$ per a tot $i \in N$.

Sigui $\mathcal{B}$ el conjunt de parells (S, d) amb les propietats anteriors; això és,

$$\mathcal{B} = \{(S, d) \mid S \subset \mathbb{R}^n \text{ és convex i compacte, } d \in S \text{ i } \exists x \in S \text{ tal que } \forall i \in N,\ x_i > d_i\}$$

és el conjunt de tots els problemes de negociació. La Figura 3 representa un problema de negociació quan $n = 2$.

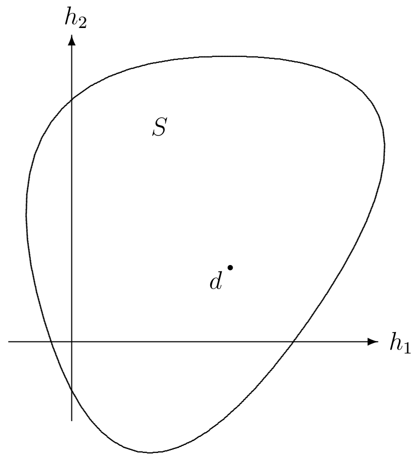


Figura 3

Una solució al problema de la negociació és una regla que assigna a cada problema de negociació un vector factible d'utilitats.

Definició 2. Una *solució* al problema de la negociació és una funció $f : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^n$ tal que per a tot $(S, d) \in \mathcal{B}$, $f(S, d) \in S$.

Una solució pot ser interpretada com un arbitratge que respon a un conjunt determinat de principis (o axiomes) sobre com resoldre el problema de la negociació.[12] Nash considera que una solució al problema de la negociació hauria de satisfer quatre axiomes.

[11] En aquest cas, la funció h_i és única excepte per a tranformacions afins positives; és a dir, si h_i representa les preferències sobre $\widehat{\succsim}_i$, llavors per a tot $b \in \mathbb{R}$ i tot $a > 0$, $b + a \cdot h_i$ també representa $\widehat{\succsim}_i$.

[12] Roth (1979) recull les primeres contribucions axiomàtiques al problema de la negociació generades per Nash (1950b).

Axioma 1: Invariància d'escala

Per a tot $(S, d) \in \mathcal{B}$, tot $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ i tot $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $a_i > 0$ per a tot $i \in N$, definim un nou problema de negociació $(S', d') \in \mathcal{B}$ on, per a tot $i \in N$, $d'_i = b_i + a_i d_i$ i

$$S' = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \text{existeix } x \in S \text{ tal que per a tot } i \in N,\ y_i = b_i + a_i x_i\},$$

i diem que (S', d') és una transformació afí positiva (b, a) de (S, d).

Definició 3. Una solució $f : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^n$ satisfà *invariància d'escala* si per a tot $(S, d) \in \mathcal{B}$, tota $(S', d') \in \mathcal{B}$ transformació afí positiva (b, a) de (S, d) i tot $i \in N$,

$$f_i(S', d') = b_i + a_i f_i(S, d).$$

Invariància d'escala requereix que la solució no depengui de la representació numèrica de les preferències dels agents sobre les distribucions de probabilitat sobre els possibles resultats de la negociació. Els problemes (S, d) i (S', d') són equivalents en termes de les preferències dels agents sobre les distribucions de probabilitat sobre els posibles acords, per tant la solució proposa utilitats equivalents.

Axioma 2: Simetria

Un problema de negociació $(S, d) \in \mathcal{B}$ és *simètric* si $d_1 = \cdots = d_n$ i, per a tota permutació $\pi : N \to N$, si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in S$ llavors $y = (y_1, \ldots, y_n) \in S$ on $y_i = x_{\pi(i)}$ per a tot $i \in N$. Això és, els papers dels jugadors en la descripció del problema (S, d) són intercanviables.

Definició 4. Una solució $f : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^n$ satisfà *simetria* si per a tot problema de negociació simètric $(S, d) \in \mathcal{B}$,

$$f_1(S, d) = \cdots = f_n(S, d).$$

Si (S, d) és simètric no hi ha cap diferència entre els agents. Per tant, la solució no hauria de distingir-los.

Axioma 3: Independència d'alternatives irrellevants

Definició 5. Una solució $f : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^n$ satisfà *independència d'alternatives irrellevants* si per a tot parell $(S, d), (T, d) \in \mathcal{B}$ tals que $S \subset T$ i $f(T, d) \in S$, llavors $f(S, d) = f(T, d)$.

Si la solució al problema (T, d) és $f(T, d)$, i $f(T, d)$ és també un acord possible en el problema reduït (S, d), independència d'alternatives irrellevants exigeix que la solució en el problema reduït $f(S, d)$ ha de coincidir amb $f(T, d)$. És a dir, les alternatives en el conjunt $T \backslash S$ que no foren escollides quan eren factibles, són irrellevants per determinar la solució en (S, d). La Figura 4 representa aquest axioma gràficament quan $n = 2$.

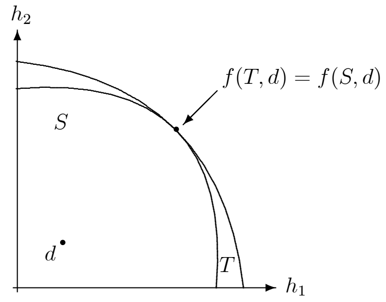


Figura 4

Axioma 4: Eficiència

Definició 6. Una solució $f : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^n$ satisfà *eficiència* si per a tot $(S,d) \in \mathcal{B}$ i tot parell $x, y \in S$ tals que $x_i > y_i$ per a tot $i \in N$, $f(S,d) \neq y$.

Una solució eficient exhaureix tots els possibles guanys de la negociació.

Nash (1950b) proposa i caracteritza axiomàticament una única solució al problema de la negociació. Aquesta solució s'anomena la solució de Nash.

Definició 7. La solució de *Nash al problema de la negociació* $F : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^n$ és la que per a tot $(S,d) \in \mathcal{B}$, $F(S,d) = x$ on $x \in S$ és tal que $x \geq d$ i

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i - d_i) > \prod_{i=1}^{n}(y_i - d_i)$$

per a tot $y \in S \backslash \{x\}$ tal que $y \geq d$.

L'expressió $\prod_{i=1}^{n}(x_i - d_i)$ es coneix com el producte de Nash. La Figura 5 il·lustra geomètricament la solució de Nash al problema de la negociació quan $n = 2$

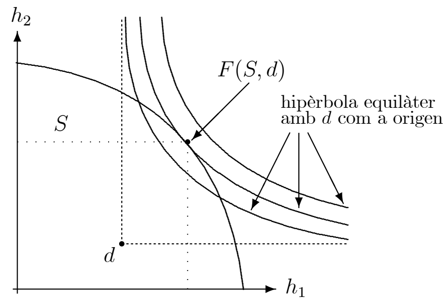


Figura 5

Teorema 2 (Nash, 1950b). *Una solució $f : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^n$ satisfà invariància d'escala, simetria, independència d'alternatives irrelevants i eficiència si i només si és la solució de Nash al problema de la negociació; és a dir, $f = F$.*

Demostració. És fàcil demostrar que la solució de Nash F al problema de la negociació satisfà els quatre axiomes.

La demostració que qualsevol solució al problema de la negociació $f : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^n$ que satisfà els quatre axiomes és de fet la solució de Nash F segueix tres passos. Primer, la invariància d'escala permet tractar qualsevol problema de negociació com a simètric. Segon, per simetria i eficiència f i F han de coincidir en qualsevol problema de negociació simètric ja que només hi ha un acord eficient amb totes les coordenades iguals. Tercer, per independència d'alternatives irrellevants f i F coincideixen en el problema original. A continuació presentem els detalls d'aquests tres passos.

Sigui f una solució que satisfà els quatre axiomes. Considerem qualsevol problema de negociació $(S, d) \in \mathcal{B}$ i denotem per x el vector d'utilitats esperades seleccionat per a la solució de Nash F en el problema (S, d); és a dir, $F(S, d) = x$. Per hipòtesi i eficiència de F, $x_i > d_i$ per a tot $i \in N$. Definim un nou problema de negociació $(S', d') \in \mathcal{B}$ a partir de la següent transformació afí positiva (b, a) de (S, d): per a tot $i \in N$ i tot $y \in S$,

$$\lambda_i(y_i) = \frac{-d_i}{x_i - d_i} + \frac{1}{x_i - d_i} y_i.$$

És a dir,

$$b = \left(\frac{-d_1}{x_1 - d_1}, \ldots, \frac{-d_n}{x_n - d_n} \right)$$

i

$$a = \left(\frac{1}{x_1 - d_1}, \ldots, \frac{1}{x_n - d_n} \right).$$

Observem que $\lambda_i(x_i) = 1$ i $\lambda_i(d_i) = 0$. Per invariància d'escala de F, $F(S', d') = (1, \ldots, 1)$. La Figura 6 il·lustra aquest fet quan $n = 2$.

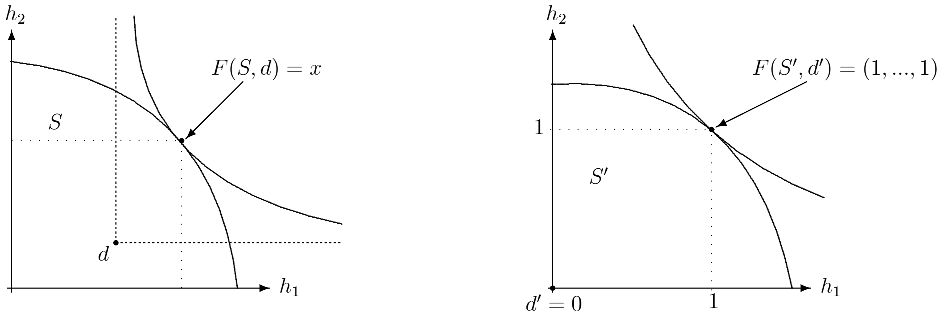


Figura 6

El vector $(1, \ldots, 1)$ és el maximitzador del producte de Nash en el conjunt S'. Per tant, $x' = (1, \ldots, 1)$ és l'*únic* vector en la intersecció de S' i el conjunt convex

$$H = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \prod_{i=1}^{n} y_i \geq 1\}.$$

Com que la frontera del conjunt H, $\{y \in \mathbb{R}^n \mid \prod_{i=1}^{n} y_i = 1\}$ és diferenciable, l'hiperplà

$$T = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} y_i = n\}$$

és l'únic hiperplà que és tangent a H i passa per $x' = (1, \ldots, 1)$. La Figura 7 il·lustra geomètricament aquests arguments quan $n = 2$.

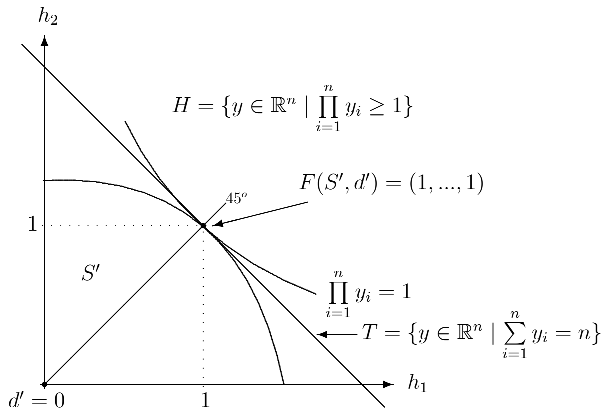


Figura 7

Com que H i S' són conjunts convexos, pel Teorema de l'hiperplà separador,

$$S' \subseteq \{y \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} y_i \leq n\}.$$

Per tant, i com que S' és compacte, existeix un conjunt simètric, convex i compacte R tal que $S' \subseteq R$ i $Ef(R) \subseteq T$, on $Ef(R)$ és el conjunt d'acords eficients d'R; és a dir,

$$Ef(R) = \{y \in R \mid \nexists x \in R \text{ tal que } x_i > y_i \text{ per a tot } i \in N\}.$$

La Figura 8 il·lustra aquests fets quan $n = 2$.

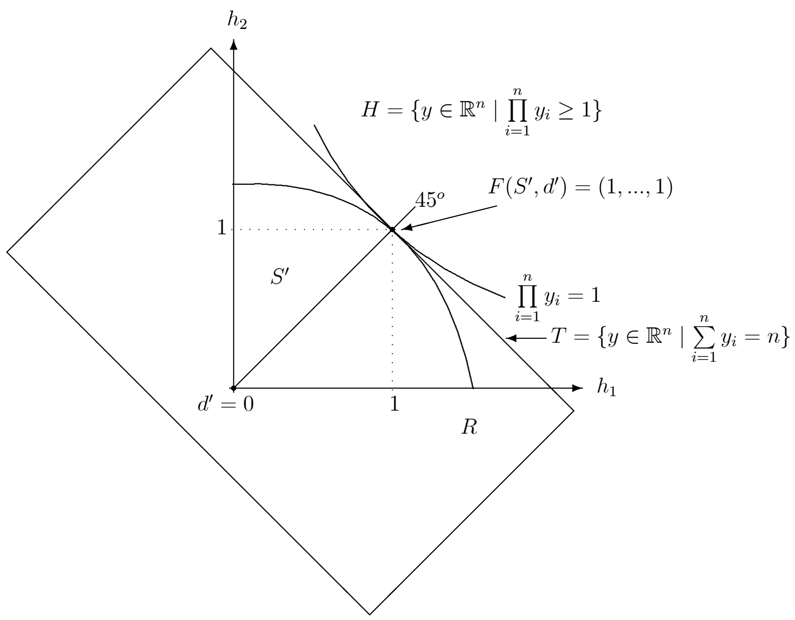


Figura 8

Per tant, per simetria i eficiència, $f(R, d') = (1, \ldots, 1)$. Per independència d'alternatives irrellevants, $f(S', d') = (1, \ldots, 1)$. I finalment, per invariància d'escala, $f(S, d) = x = F(S, d)$. Com que $(S, d) \in \mathcal{B}$ era un problema de negociació arbitrari, f és la solució de Nash del problema de la negociació. ■

El mateix Nash (a l'article Nash (1953)) argumenta sobre la conveniència de justificar la solució axiomàtica obtenint-la com les utilitats d'un equilibri de Nash d'un joc no cooperatiu, on les estratègies dels jugadors corresponen a les seves decisions preses en un procés de negociació. Aquesta recerca es coneix com el programa de Nash. Rubinstein (1982) desperta novament, després de més de 30 anys, l'interès dels economistes pel programa de Nash generant una extensa literatura sobre l'anàlisi estratègica de la negociació.

Referències

[1] Robert Aumann. "Subjectivity and correlation in randomized strategies", *Journal of Mathematical Economics* 1, 67–96 (1974).

[2] Joseph Bertrand. "Théorie mathématique de la richesse sociale", *Journal des Savants* 67, 499–508 (1883).

[3] Augustin Cournot. *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*. Paris: L. Hachette (1838).

[4] Gerard Debreu. *The Theory of Value*. New Haven: Cowles Foundation (1959).

[5] Francis Ysidro Edgeworth. *Papers Relating to Political Economy* (3 volums). London: Royal Economic Society (1925).

[6] Harold Hotelling. "Stability in competition", *Economic Journal* 39, 41–57 (1929).

[7] Shizuo Kakutani. "A generalization of Brouwer's fixed point theorem", *Duke Mathematical Journal* 8, 457–459 (1941).

[8] Michael Maschler, Eilon Solan i Shmuel Zamir. *Game Theory*. New York: Cambridge University Press (2013).

[9] Sylvia Nasar. *A Beautiful Mind: The Life of Mathematical Genius and Nobel Laureate John Nash*. New York: Simon & Schuster (1998).

[10] John Nash. "Equilibrium points in n-person games", *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36, 48–49 (1950a).

[11] John Nash. "The bargaining problem", *Econometrica* 18, 155–162 (1950b).

[12] John Nash. "Non-cooperative games", *Annals of Mathematics* 54, 286–295 (1951).

[13] John Nash. "Two-person cooperative games", *Econometrica* 21, 128–140 (1953).

[14] John von Neumann. "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele", *Mathematische Annalen* 100, 295–300 (1928).

[15] John von Neumann i Oskar Morgenstern. *The Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press (1944).

[16] Alvin Roth. *Axiomatic Models of Bargaining*. Berlin: Springer-Verlag (1979).

[17] Ariel Rubinstein. "Perfect equilibrium in a bargaining model", *Econometrica* 50, 97–109 (1982).

[18] Reinhard Selten. "Spieltheoretische Benhandlung eines Oligopolmodels mit Nachfragetrgheit", *Zeitschrift für die gesamte Saatswissenschaft* 121, 667–689 (1965).

[19] Heinrich von Stackelberg. *Markform und Gleichgewicht*. Vienna: Julius Springer (1934).

[20] Ernst Zermelo. "Über eine Anwendungen der Mengenlehre auf die Theorie der Schachspiels". *Proceedings of the International Fifth Congress of Mathematicians*. Cambridge: Cambridge University Press (1913).

Apèndix. Demostració del Teorema del minimax fent servir el Teorema 1

Sigui $G = (\{1,2\}, S, h)$ un joc finit en forma normal amb dos jugadors i suma zero. Observem primer que la seva extensió mixta $G^* = (\{1,2\}, \Sigma, H)$ també és de suma zero ja que per a tot $(\sigma_1, \sigma_2) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$,

$$\begin{aligned} H_1(\sigma_1,\sigma_2) \quad &= \textstyle\sum_{s\in S} \sigma_1(s_1)\sigma_2(s_2)h_1(s) \\ &= \textstyle\sum_{s\in S} \sigma_1(s_1)\sigma_2(s_2)(-h_2(s)) \\ &= -\textstyle\sum_{s\in S} \sigma_1(s_1)\sigma_2(s_2)h_2(s) \\ &= -H_2(\sigma_1,\sigma_2). \end{aligned}$$

Pel Teorema 1, $\Sigma^* \neq \varnothing$. Sigui $(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \in \Sigma^*$ arbitrari. Definim $v = H_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$. Com que (σ_1^*, σ_2^*) és un equilibri de Nash de G^*,

$$v = H_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \geq H_1(\sigma_1, \sigma_2^*)$$

per a tot $\sigma_1 \in \Sigma_1$. Però aquesta és la condició (ii) del Teorema del minimax. Al mateix temps, i com que $v = H_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ és equivalent a $-v = -H_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = H_2(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$,

$$-v = H_2(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \geq H_2(\sigma_1^*, \sigma_2)$$

per a tot $\sigma_2 \in \Sigma_2$. Per tant,

$$v \leq -H_2(\sigma_1^*, \sigma_2) = H_1(\sigma_1^*, \sigma_2)$$

per a tot $\sigma_2 \in \Sigma_2$. Però aquesta és la condició (i) del Teorema del minimax.

Obtindrem la condició (iii) del Teorema,

$$\min_{\sigma_2\in\Sigma_2} \max_{\sigma_1\in\Sigma_1} H_1(\sigma_1,\sigma_2) = \max_{\sigma_1\in\Sigma_1} \min_{\sigma_2\in\Sigma_2} H_1(\sigma_1,\sigma_2) = v,$$

demostrant que

$$\min_{\sigma_2\in\Sigma_2} \max_{\sigma_1\in\Sigma_1} H_1(\sigma_1,\sigma_2) \geq \max_{\sigma_1\in\Sigma_1} \min_{\sigma_2\in\Sigma_2} H_1(\sigma_1,\sigma_2)$$

i que

$$\min_{\sigma_2\in\Sigma_2} \max_{\sigma_1\in\Sigma_1} H_1(\sigma_1,\sigma_2) \leq v \leq \max_{\sigma_1\in\Sigma_1} \min_{\sigma_2\in\Sigma_2} H_1(\sigma_1,\sigma_2).$$

Primer, siguem absolutament extrems en les expectatives del jugador 1 sobre l'estratègia del jugador 2 i suposem que el jugador 1 és absolutament *pessimista*: pensa que el jugador 2 encertarà correctament la seva estratègia (o equivalentment, que el jugador 1 tria primer la seva estratègia i coneixent-la, el jugador 2 triarà la seva millor estratègia). Llavors, fent servir un argument d'inducció cap endarrera i tenint en compte que, donada $\sigma_1 \in \Sigma_1$, $\max_{\sigma_2 \in \Sigma_2} H_2(\sigma_1, \sigma_2)$ és equivalent a $\min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} H_1(\sigma_1, \sigma_2)$, el pagament pessimista (més gran) del jugador 1 és

$$\max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} H_1(\sigma_1, \sigma_2). \tag{P.1}$$

Similarment, suposem que el jugador 2 és absolutament *pessimista*: pensa que el jugador 1 encertarà correctament la seva estratègia (o equivalentment, que el jugador 2 tria primer la seva estratègia i coneixent-la, el jugador 1 triarà la seva millor estratègia). Llavors, fent servir un argument d'inducció cap endarrera, i tenint en compte que, donada $\sigma_2 \in \Sigma_2$, $\max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} H_1(\sigma_1, \sigma_2)$ és equivalent a $\min_{\sigma_1 \in \Sigma_1} H_2(\sigma_1, \sigma_2)$, el pagament pessimista (més gran) del jugador 2 és

$$\max_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \min_{\sigma_1 \in \Sigma_1} H_2(\sigma_1, \sigma_2). \tag{P.2}$$

No obstant, el jugador 1 podria ser absolutament *optimista*: pensa que ell pot encertar correctament l'estratègia del jugador 2 (o equivalentment, que el jugador 2 tria primer la seva estratègia i coneixent-la, el jugador 1 triarà la seva millor estratègia). Llavors, fent servir un argument d'inducció cap endarrera, donada $\sigma_2 \in \Sigma_2$,

$$\max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} H_1(\sigma_1, \sigma_2),$$

i llavors, el jugador 2 es preocuparà pel seu propi interès (recordem que $\min H_1 \equiv \max H_2$); per tant, el pagament optimista (més petit) del jugador 1 és

$$\min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} H_1(\sigma_1, \sigma_2). \tag{O.1}$$

Similarment, suposem que el jugador 2 és absolutament *optimista*: pensa que ell pot encertar correctament l'estratègia del jugador 1 (o equivalentment, que el jugador 1 tria primer la seva estratègia i coneixent-la, el jugador 2 triarà la seva millor estratègia). Llavors, fent servir un argument d'inducció cap endarrera, donada $\sigma_1 \in \Sigma_1$,

$$\max_{\sigma_2 \in \Sigma_2} H_2(\sigma_1, \sigma_2),$$

i llavors, el jugador 1 és preocuparà pel seu propi interès (recordem que $\max H_1 \equiv \min H_2$); per tant, el pagament optimista (més petit) del jugador 2 és

$$\min_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \max_{\sigma_2 \in \Sigma_2} H_2(\sigma_1, \sigma_2). \tag{O.2}$$

Fet (cert per qualsevol G amb dos jugadors). *El pagament des del punt de vista optimista és més gran o igual que el pagament des del punt de vista pessimista; és a dir,*

$$\text{(O.1)} \quad \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} H_1(\sigma_1, \sigma_2) \geq \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} H_1(\sigma_1, \sigma_2) \quad \text{(P.1)}$$

$$\text{(O.2)} \quad \min_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \max_{\sigma_2 \in \Sigma_2} H_2(\sigma_1, \sigma_2) \geq \max_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \min_{\sigma_1 \in \Sigma_1} H_2(\sigma_1, \sigma_2) \quad \text{(P.2)}.$$

Demostració del Fet. Demostrarem que $\min\limits_{\sigma_2\in\Sigma_2}\max\limits_{\sigma_1\in\Sigma_1} H_1(\sigma_1,\sigma_2) \geq \max\limits_{\sigma_1\in\Sigma_1}\min\limits_{\sigma_2\in\Sigma_2} H_1(\sigma_1,\sigma_2)$. La desigualtat des dels dos punts de vista del jugador 2 és similar. Sigui $\bar\sigma_2 \in \Sigma_2$ arbitrària. Llavors, per a tot $\sigma_1 \in \Sigma_1$,

$$\underbrace{H_1(\sigma_1,\bar\sigma_2)}_{\text{funció de } \sigma_1} \geq \underbrace{\min_{\sigma_2\in\Sigma_2} H_1(\sigma_1,\sigma_2)}_{\text{funció de } \sigma_1}.$$

Per tant,

$$\underbrace{\max_{\sigma_1\in\Sigma_1} H_1(\sigma_1,\bar\sigma_2)}_{\text{funció de } \bar\sigma_2} \geq \underbrace{\max_{\sigma_1\in\Sigma_1}\min_{q_2\in\Sigma_2} H_1(\sigma_1,\sigma_2)}_{\text{un número}}.$$

Però aquesta desigualtat és certa per a tot $\bar\sigma_2 \in \Sigma_2$. Per tant,

$$\min_{\sigma_2\in\Sigma_2}\max_{\sigma_1\in\Sigma_1} H_1(\sigma_1,\sigma_2) \geq \max_{\sigma_1\in\Sigma_1}\min_{\sigma_2\in\Sigma_2} H_1(\sigma_1,\sigma_2).$$

□

Pel fet anterior, ja sabem que

$$\text{(O.1)} \quad \min_{\sigma_2\in\Sigma_2}\max_{\sigma_1\in\Sigma_1} H_1(\sigma_1,\sigma_2) \geq \max_{\sigma_1\in\Sigma_1}\min_{\sigma_2\in\Sigma_2} H_1(\sigma_1,\sigma_2) \quad \text{(P.1)}.$$

Ara hem de demostrar que la desigualtat

$$\text{(O.1)} \quad \min_{\sigma_2\in\Sigma_2}\max_{\sigma_1\in\Sigma_1} H_1(\sigma_1,\sigma_2) \leq \max_{\sigma_1\in\Sigma_1}\min_{\sigma_2\in\Sigma_2} H_1(\sigma_1,\sigma_2) \quad \text{(P.1)}$$

també és certa, i que per tant la condició (iii) del Teorema del minimax

$$\min_{\sigma_2\in\Sigma_2}\max_{\sigma_1\in\Sigma_1} H_1(\sigma_1,\sigma_2) = \max_{\sigma_1\in\Sigma_1}\min_{\sigma_2\in\Sigma_2} H_1(\sigma_1,\sigma_2) = v$$

és certa.

Des del punt de vista pessimista, i fent servir la condició (i) del Teorema del minimax,

$$\max_{\sigma_1\in\Sigma_1}\underbrace{\min_{\sigma_2\in\Sigma_2} H_1(\sigma_1,\sigma_2)}_{\text{funció de } \sigma_1} \geq \underbrace{\min_{\sigma_2\in\Sigma_2} H_1(\sigma_1^*,\sigma_2)}_{\text{en un particular } \sigma_1=\sigma_1^*} \underset{\text{per (i)}}{\geq} v.$$

Des del punt de vista optimista, i fent servir la condició (ii) del Teorema del minimax,

$$\min_{\sigma_2\in\Sigma_2}\underbrace{\max_{\sigma_1\in\Sigma_1} H_1(\sigma_1,\sigma_2)}_{\text{funció de } \sigma_2} \leq \underbrace{\max_{\sigma_1\in\Sigma_1} H_1(\sigma_1,\sigma_2^*)}_{\text{en un particular } \sigma_2=\sigma_2^*} \underset{\text{per (ii)}}{\leq} v.$$

Per tant,

$$\max_{\sigma_1\in\Sigma_1}\min_{\sigma_2\in\Sigma_2} H_1(\sigma_1,\sigma_2) \geq v \geq \min_{\sigma_2\in\Sigma_2}\max_{\sigma_1\in\Sigma_1} H_1(\sigma_1,\sigma_2),$$

i pel Fet,

$$\max_{\sigma_1\in\Sigma_1}\min_{\sigma_2\in\Sigma_2} H_1(\sigma_1,\sigma_2) = \min_{\sigma_2\in\Sigma_2}\max_{\sigma_1\in\Sigma_1} H_1(\sigma_1,\sigma_2) = v.$$

■