Las medallas Fields

Sección a cargo de

Leovigildo Alonso Tarrío y Ana Jeremías López

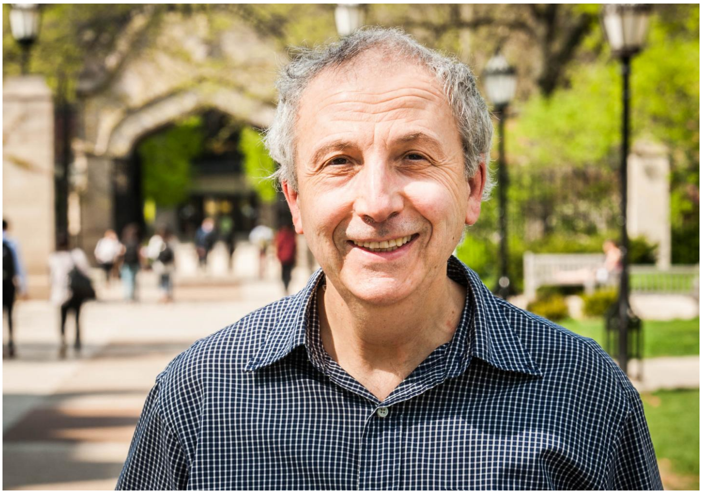
Vladimir Gershonovich Drinfeld

por

Francesc Bars

1. Una pequeña biografía

Vladimir Gershonovich Drinfeld nació el 5 de febrero de 1954 en la ciudad de Jarkov, en la Unión Soviética, en la actual Ucrania. Su padre, Gershon Ikhelevich Drinfeld (1908–2000), era un respetado matemático en la Universidad de Jarkov, especialista en geometría diferencial, que dirigió el Departamento de Matemáticas de su universidad entre 1944 y 1962.



Vladimir Drinfeld en la Universidad de Chicago en 2016 (foto de Jean Lachat).

Vladimir Drinfeld demostró su genialidad para las matemáticas desde muy pequeño. En 1969, a la edad de quince años, representó a la Unión Soviética en la Olimpiada Internacional de Matemáticas celebrada en Bucarest (Rumanía), y fue galardonado con una medalla de oro después de obtener las máximas puntuaciones. Ese mismo año entró como estudiante en la Universidad Estatal M. V. Lomonosov de Moscú donde se graduó en 1974. Permaneció en la Universidad Estatal de Moscú para realizar su tesis doctoral bajo la supervisión de Yuri Ivanovich Manin. Manin influyó en gran medida en la matemática de Drinfeld, en particular a través del denominado seminario de Manin, un seminario de geometría algebraica que funcionó con regularidad en la Universidad Estatal de Moscú durante varias décadas (aunque fue bautizado como «seminario de Manin», algunos opinan que debería haberse llamado «seminario de Gelfand»).

Drinfeld completó sus estudios de postgrado en 1977 y defendió su tesis doctoral en 1978 en la Universidad Estatal de Moscú. Sin embargo, aun habiendo demostrado un extraordinario talento (para entonces ya había introducido un salto cualitativo en la investigación del famoso programa de Langlands de teoría de números), era difícil que Drinfeld obtuviera un puesto como profesor en la Universidad Estatal. Moscú no figuraba en la dirección del pasaporte de Drinfeld, y oficialmente a un ciudadano de la Unión Soviética solo se le permitía trabajar en una región cercana a la ciudad que figuraba en la dirección de su pasaporte (extraoficialmente, otras fuentes señalan que fueron sus orígenes judíos los que afectaron a sus posibilidades de conseguir un empleo en Moscú). Drinfeld se trasladó a Ufa (en los Urales), donde obtuvo una plaza para enseñar matemáticas en la Universidad de Bashkir, una de las universidades de la ciudad. En 1981 se trasladó a Jarkov, donde trabajó en el Instituto Verkin de Ingeniería Física de Bajas Temperaturas de la Academia Nacional de Ciencias de Ucrania.

Drinfeld había aportado grandes avances en el programa de Langlands para GL_2, con ideas brillantes, cuando se fascinó con otro tema con cierta interrelación con la física, los grupos cuánticos, que pasó de ser un tema secundario a ser un tema puntero de investigación. En el año 1986, en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Berkeley, dio una conferencia plenaria titulada *Quantum groups* [9] que atrajo la atención mundial sobre este campo; en la conferencia expuso contribuciones suyas y de M. Jimbo.

Finalmente, en 1988, Drinfeld defiende su tesis de habilitación (correspondiente al título de doctor en los estudios de la Unión Soviética) en el Instituto Steklov de Moscú. Recordemos que la tesis de habilitación es una tesis donde el candidato tiene que demostrar el impacto mundial y el progreso en cierto tema de investigación, y debe mostrar soltura en la presentación de resultados e investigaciones de campos que no le sean propios (es parecido a la tesis de habilitación alemana presencial y más exigente que una simple evaluación curricular).

El 21 de agosto de 1990, en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Kyoto (Japón), Drinfeld recibe una Medalla Fields principalmente por sus logros en la demostración de la conjetura de Langlands para el grupo lineal de matrices de tamaño dos sobre el cuerpo de funciones racionales de una curva sobre un cuerpo finito y por sus trabajos en teoría de grupos cuánticos.

En 1992, Drinfeld fue elegido miembro de la Academia de Ciencias de Ucrania. Siguió viviendo en Jarkov hasta que en 1998, después de la caída de la Unión Soviética, emigró a los Estados Unidos, donde en diciembre de 1998 obtuvo una plaza de profesor en la Universidad de Chicago. En esta misma universidad americana, y también en 1998, consiguió una plaza como profesor Alexander Beilinson, otro gran matemático especialista en geometría algebraica y teoría de números de la extinta Unión Soviética, otro extraordinario alumno de Manin (es bien conocida la conjetura de Beilinson que generaliza gran parte de la conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer al contexto de motivos en geometría aritmética). Entre los dos pusieron en marcha el seminario de Langlands Geométrico en Chicago, posiblemente inspirados en el seminario Manin (o Gelfand) de geometría algebraica de Moscú. Drinfeld y Beilinson ya habían colaborado con anterioridad a 1998, y su encuentro en Chicago fructificó en dos grandes trabajos conjuntos, que suponen un avance de proporciones mayúsculas en dos áreas: por un lado, en el programa de Langlands (aún por publicar) y, por otro, en el contexto de las álgebras quirales que tiene interrelación con la teoría de los campos cuánticos de la física.

Durante toda su carrera científica, Drinfeld trabaja tanto con grandes matemáticos como en solitario, aportando brillantes y grandes ideas, obteniendo una visión profunda en diferentes campos tanto de la matemática pura como de la física matemática, y creando nuevas áreas de estudio. También dirige tesis doctorales —en el *Genealogy Project* se le asignan al menos diez estudiantes—; algunos de sus estudiantes más destacados son D. Arinkin, D. Boyarchenko, M. Kamgarpour y J. Teruji Thomas.

El 1 de marzo de 2001 fue nombrado Profesor de Servicios Distinguidos Harry Pratt Judson de la Universidad de Chicago. En 2008, fue elegido miembro de la Academia Americana de las Artes y de las Ciencias.

Es razonable suponer que las comisiones del Premio Abel tendrán su nombre encima de la mesa entre los candidatos al premio.

2. Una breve reseña parcial del trabajo matemático de V. G. Drinfeld

Drinfeld ha aportado resultados al menos en las siguientes áreas: análisis armónico abstracto, geometría algebraica, topología algebraica, anillos asociativos y álgebras, teoría de categorías, álgebra homológica, teoría de cuerpos, análisis funcional, análisis global, análisis de variedades, teoría de grupos, teoría de la medida e integración, anillos no asociativos y álgebras, teoría de números, ecuaciones en derivadas parciales, teoría cuántica, funciones reales, grupos topológicos y grupos de Lie. Sus aportaciones se agrupan en torno a dos grandes ejes, uno relativo a la geometría algebraica, teoría de números y teoría de representaciones, y el otro relativo a la teoría físico-matemática de ciertas álgebras. En el primero se incluiría el programa de Langlands y en el segundo los grupos cuánticos.

Los trabajos de Drinfeld estan repletos de ideas y conceptos geniales, y no solo eso, sus comentarios (sin ningún artículo publicado) llegan a crear teorías de gran importancia. Lamentablemente, es imposible en un escrito como este pretender describir todos los conceptos, ideas y resultados de este genial matemático. En esta sección tan solo comentaremos ciertos elementos de algunos de sus trabajos, y en la sección 3 expondremos, con más detalle matemático, un comentario no publicado que Drinfeld hizo a T. Springer y que ayudó a P. Deligne (también medalla Fields) y a G. Lusztig a crear las variedades de Deligne-Lusztig, de gran importancia en cierta área de la geometría aritmética. En las secciones posteriores detallaremos algunas de las ideas y de los resultados que hicieron merecedor a Drinfeld de la Medalla Fields en 1990. La sección 4 recoge ciertos comentarios de Manin sobre la aportación de Drinfeld a los grupos cuánticos. Finalmente, la sección 5 se dedicará a la exposición de ciertas ideas y conceptos que introdujo Drinfeld para demostrar la conjetura de Langlands para el grupo lineal de las matrices de tamaño 2. Mis sinceras disculpas al lector y a V. Drinfeld por omitir tantas otras brillantes e interesantes ideas y resultados.

UNA BREVE RESEÑA

Drinfeld escribió su primer trabajo de matemáticas cuando aún no era graduado en Matemáticas (fue publicado en 1971), exponiendo un resultado al estilo del clásico tratado de análisis *Inequalities* [18], y resolviendo preguntas que interesaban al reconocidísimo matemático, especialista en teoría analítica de números, Robert Rankin.

El seminario de geometría algebraica de Moscú, organizado por Manin aproximadamente entre los años 1971 y 1980, influyó enormemente en las líneas de trabajo de Drinfeld y en su interés por la interrelación entre la geometría algebraica y la física.

Durante esos años Drinfeld demuestra gran parte de la conjetura de Langlands para el grupo lineal de matrices de tamaño 2 de un cuerpo de funciones racionales de una curva sobre un cuerpo finito, introduciendo el concepto de módulo elíptico (hoy llamado módulo de Drinfeld), que en la actualidad es una rama de trabajo e investigación como podría ser la que estudia curvas algebraicas. De esta época son también muchos de sus resultados sobre curvas modulares clásicas y de geometría rígida sobre uniformizaciones p-ádicas (en este contexto se utiliza, por ejemplo, la noción de semiplano superior de Drinfeld).

Las interacciones entre las matemáticas y la física matemática estudiadas por M. Atiyah condujeron a la introducción de soluciones mediante instantones, es decir, mediante cierto sistema no lineal de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Son las ecuaciones autoduales de Yang-Mills, que fueron introducidas por estos físicos en el contexto de la teoría cuántica de campos. En 1978, Drinfeld y Manin publicaron sus trabajos sobre la construcción de instantones usando ideas de geometría algebraica. En años posteriores, y en colaboración con Atiyah, N. Hitchin y Manin, Drinfeld propone el gran resultado de clasificación de instantones.

Los trabajos de Drinfeld sobre las conjeturas de Langlands sobre los grupos cuánticos o sobre los instantones ilustran un gran dominio de las poderosas técnicas involucradas. Pero en otros resultados no menos impactantes de Drinfeld se hace uso de técnicas elementales. Por ejemplo, en colaboración con G. Vlăduţ, obtiene un límite asintótico superior para el número de puntos de una curva definida sobre un cuerpo finito de orden p^{2n} utilizando tan solo el álgebra de los primeros cursos del grado en Matemáticas. También en su demostración de que cualquier medida aditiva invariante por rotación en la esfera de 2 o 3 dimensiones es proporcional a la medida de Lebesgue, Drinfeld usa una combinación inteligente de resultados conocidos (los casos de dimensión 1 y de dimensión superior o igual a 4 habían sido demostrados por S. Banach, G. Margulis y D. Sullivan).

Otro resultado que deberíamos mencionar, también influenciado por la física matemática, es el estudio por Drinfeld y V. V. Sokolov de las ecuaciones de tipo Korteweg-de Vries y su interrelación con las álgebras de Lie. De este estudio surge la ecuación conocida actualmente en análisis de ondas como ecuación de Drinfeld-Sokolov-Wilson, que consiste en el siguiente sistema no lineal de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 3v\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^3 v}{\partial^3 x} + \dfrac{\partial u}{\partial x}v + 2u\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Todos los resultados citados hasta el momento son anteriores a 1990, año en el que Drinfeld recibió su medalla Fields. Desde 1990 y hasta la actualidad, su contribución continúa siendo enorme y extraordinaria. Compartiendo las palabras de V. Ginzburg en [15], un estudio atento de sus trabajos más recientes aportará nuevos campos para investigar y profundizar. Tan solo listaremos aquí dos de ellos.

Uno de los trabajos recientes de Drinfeld es el titulado *Infinite-dimensional vector bundles in algebraic geometry: an introduction* [11]. En esta publicación, el mismo Drinfeld describe su trabajo con estas palabras:

> «*The goal of this work is to show that there is a reasonable algebro-geometric notion of vector bundle with infinite-dimensional locally linearly compact fibers and that these objects appear "in nature". Our approach is based on some results and ideas discovered in algebra during the period 1958–1972 by H. Bass, L. Gruson, I. Kaplansky, M. Karoubi, and M. Raynaud.*»[1]

Otro trabajo reciente es [1], un libro sobre álgebras quirales escrito en colaboración con Beilinson. F. J. Plaza como recensor del libro lo describe de la forma siguiente:

> «*This book presents a comprehensive approach to the theory of chiral algebras from the point of view of algebraic geometry. Without a doubt, it will become a standard reference on the subject. [...] Chiral algebras arose in mathematical physics in the study of conformal field theory. On the*

[1] «El objetivo de este trabajo es demostrar que existe una noción algebro-geométrica razonable de fibrado vectorial con fibras compactas localmente lineales de dimensión infinita y que estos objetos aparecen "en la naturaleza". Nuestro enfoque se basa en algunos resultados e ideas descubiertas en álgebra durante el período 1958–1972 por H. Bass, L. Gruson, I. Kaplansky, M. Karoubi y M. Raynaud.»

mathematical side, the local theory of chiral algebras overlaps the theory of vertex algebras, which are normally studied with representation theory techniques. In these two approaches the 'operator product expansion' formalism plays an essential role. As the authors say, their motivation for studying chiral algebras was the understanding of geometric automorphic forms in the D-module setting as well as the description of a spectral decomposition of the category of representations of an affine Kac-Moody algebra.»[2]

Para finalizar esta breve reseña, reproducimos un par de anécdotas personales referidas al trabajo de Drinfeld que relata en [15, pp. xiii–xv] el professor Ginzburg, colega actualmente de Drinfeld en la Universidad de Chicago, y que enmarcaremos dentro de su manera de vivir y escribir matemáticas.

La primera se refiere a cuando Ginzburg preparaba un curso de teoría de representaciones, y Drinfeld le comentó que tenía unas notas antiguas con ejercicios que había preparado en los años ochenta para sus estudiantes en Jarkov. Dentro del curso había una parte, dedicada a *q-analogías*, que contenía resultados sobre importantes construcciones geométricas en el contexto de los grupos cuánticos, resultados que fueron descubiertos por Beilinson, Lusztig y MacPherson diez años después de la fecha que figuraba en las notas de Drinfeld.

Las ideas que Drinfeld compartía (sin publicar nada) han aportado grandes resultados. Un ejemplo es una carta de Drinfeld a Schechtman donde explicitó su visión de la teoría de deformación que le sirvió a M. Kontsevitch (entre otros) para obtener resultados clave de esa teoría.

En cuanto a la segunda anécdota, P. Etingof y Ginzburg introdujeron en 2002 el concepto de álgebra de reflexiones simplécticas.[3] En enero de 2005, después de trabajar varios años en el tema, Etingof y Ginzburg descubrieron que su definición estaba contenida en dos líneas del artículo [8] de Drinfeld, artículo que había sido publicado en 1986. Aunque el trabajo de Drinfeld era conocido, nadie había prestado atención a esas dos líneas.

Un ejemplo entre las publicaciones de Drinfeld a las que sí se prestó atención línea por línea son los trabajos [6] y [7] dedicados al estudio de los módulos elípticos, ahora conocidos como módulos de Drinfeld. Los módulos elípticos son la base inicial para la demostración del programa de Langlands para los grupos lineales GL_n sobre

[2] «Este libro presenta un enfoque global de la teoría de las álgebras quirales desde el punto de vista de la geometría algebraica. Sin duda, será una referencia clave del campo. [...] Las álgebras quirales surgieron en la física matemática en el estudio de la teoría conforme de campos. En el lado matemático, la teoría local de álgebras quirales se superpone a la teoría de álgebras de vértices, que normalmente se estudian con técnicas de teoría de representación. En estos dos enfoques el formalismo de "expansiones como producto de operadores" desempeña un papel esencial. Como dicen los autores, su motivación para estudiar las álgebras quirales fue la comprensión de las formas geométricas automorfas en el contexto de D-módulos, así como la descripción de una descomposición espectral de la categoría de representaciones de un álgebra Kac-Moody afín.»

[3] En inglés, *symplectic reflection algebras.*

cuerpos globales de característica positiva,[4] y tienen su propia identidad como teoría clave para el estudio aritmético sobre dichos cuerpos.

Ginzburg, por su experiencia personal leyendo los trabajos de Drinfeld, llega a escribir en [15, p. xiv]:

> «*I believe that many of Drinfeld's insights are still awaiting "discovery".*»[5]

3. Una idea de Drinfeld: la curva de Drinfeld

En una comunicación privada con T. Springer, Drinfeld hizo una observación explicitando una construcción geométrica de representaciones del grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ (el grupo de las matrices de tamaño 2 con determinante uno con entradas en un cuerpo finito $\mathbb{F}_q$ de q elementos). Esta construcción es la base de las variedades de Deligne-Lusztig, introducidas en [5], publicado en 1976.

Detallemos un poco en qué consistió la comunicación privada entre Drinfeld y Springer que no mereció aparecer escrita en forma de artículo (y que es un ejemplo más de la profundidad de las aportaciones de Drinfeld). En particular explicitaremos la curva que ideó Drinfeld para su construcción.[6] Para simplificar, en nuestra exposición consideraremos solo el cuerpo finito $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ con p primo.

Dado G un grupo, una representación de G es un homomorfismo de grupos $\rho : G \to \mathrm{GL(V)}$, donde L es un cuerpo, V es un L-espacio vectorial y $\mathrm{GL(V)}$ es el grupo lineal de V. Construir de forma geométrica una representación del grupo G consiste en construir una representación de G en la que V es un L-espacio vectorial de dimensión finita, que corresponde a cierta pieza de homología o cohomología con coeficientes en L asociada a una variedad. Si la variedad está definida sobre los números complejos, se utiliza la cohomología singular con coeficientes complejos. En el campo de la geometría aritmética (las variedades son variedades algebraicas que podemos pensar que vienen definidas como las soluciones de ciertos polinomios en diferentes variables), se intenta hacer la construcción para cohomologías de Grothendieck, en particular para la cohomología ℓ-ádica con ℓ un natural primo diferente de la característica de la variedad algebraica.[7]

El cuerpo de los números racionales tiene muchos valores absolutos no equivalentes, además del valor absoluto clásico, uno por cada número primo. Respecto al valor absoluto clásico $|\ |\colon \mathbb{Q} \to [0, \infty)$, $|x| := \text{máx}\{-x, x\}$, la compleción de $\mathbb{Q}$ es el cuerpo de los números reales, $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$. Para un primo ℓ su valor absoluto asociado

---

[4] Un cuerpo global es, o bien una extensión finita de $\mathbb{Q}$ (un cuerpo de números), o bien una extensión finita de $\mathbb{F}_p(T)$, el cuerpo de fracciones del anillo de polinomios $\mathbb{F}_p[T]$ sobre el cuerpo finito $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (es decir, el cuerpo de funciones de una curva sobre un cuerpo finito).

[5] «Creo que muchas de las perspicaces ideas de Drinfeld continúan a la espera de ser descubiertas».

[6] Para ampliar los detalles matemáticos del ejemplo el lector puede consultar el libro de C. Bonnafé [3, I, II] publicado en 2009. En [3, III] el lector encontrará una exposición puesta al día de la teoría de representaciones de grupos finitos aplicadas al ejemplo de Drinfeld y a sus ideas (como es la inducción de Deligne-Lusztig en la construcción de representaciones de grupo).

[7] La característica de una variedad algebraica definida sobre un cuerpo L (las ecuaciones que la definen son polinomios con coeficientes en L) es la característica del cuerpo L.

$|\ |_\ell\colon \mathbb{Q} \to [0,\infty)$ está determinado por la expresión $|\ell^k \frac{a}{b}|_\ell := \ell^{-k}$, siendo a y b enteros coprimos entre sí y coprimos con ℓ, y k un número entero. Con las sucesiones de números racionales que son de Cauchy respecto al valor absoluto $|\ |_\ell$ se construye el cuerpo ℓ-ádico $\mathbb{Q}_\ell$, la compleción de $\mathbb{Q}$ respecto a $|\ |_\ell$, que viene acompañado del subanillo de enteros ℓ-ádicos $\mathbb{Z}_\ell = \{\, x \in \mathbb{Q}_\ell \mid |x|_\ell \leq 1 \,\}$.[8]

La cohomología ℓ-ádica es una cierta cohomología de Grothendieck con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{Q}_\ell$.

El primer paso de Drinfeld consistió en construir una variedad algebraica y calcular su cohomología ℓ-ádica asociada. Drinfeld, sin haber cumplido los 20 años, estudia la curva C definida, sobre un cuerpo finito $\mathbb{F}_p$, mediante la ecuación

$$XY^p - YX^p = 1. \tag{1}$$

Esta curva C, que en la actualidad se conoce como *curva de Drinfeld*, es una curva irreducible y no singular definida sobre un cuerpo de característica positiva ($p > 0$). Dado un cuerpo L, extensión de $\mathbb{F}_p$, denotaremos por $C(L)$ los puntos $(x, y) \in L^2$ que satisfacen la ecuación (1), son los llamados L-puntos de C. Sea $L = \overline{\mathbb{F}_p}$ la clausura algebraica de $\mathbb{F}_p$; entonces L contiene todas las raíces de la unidad (correspondientes a la descomposición en factores lineales mónicos de los polinomios $X^{p^n} - X \in \mathbb{F}_p[X]$, con n natural). Sea μ_{p+1} el grupo de las raíces $(p+1)$-ésimas de la unidad. El grupo μ_{p+1} actúa sobre $C(\overline{\mathbb{F}_p})$:

$$\text{para } \xi \in \mu_{p+1},\ \ (x,y) \in C(\overline{\mathbb{F}_p}), \qquad \xi \cdot (x,y) := (\xi x, \xi y) \in C(\overline{\mathbb{F}_p}).$$

También actúa sobre $C(\overline{\mathbb{F}_p})$ el grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ mediante la acción

$$M \cdot (x,y) := (ax + by, cx + dy),$$

siendo $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ y $(x,y) \in C(\overline{\mathbb{F}_p})$.[9]

OBSERVACIÓN. El grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ actúa libremente sobre $C(\overline{\mathbb{F}_p})$.[10]

Consideremos el morfismo de variedades $\pi : C(\overline{\mathbb{F}_p}) \to \mathbb{A}^1(\overline{\mathbb{F}_p}) = \overline{\mathbb{F}_p}$ definido mediante la expresión

$$(x,y) \mapsto xy^{p^2} - yx^{p^2}.$$

El morfismo π es constante en las $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$-órbitas e induce un isomorfismo $\mathbb{A}^1 \cong C/\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$. Por tanto C es un recubrimiento no ramificado de Galois de la recta afín $\mathbb{A}^1$ con grupo de Galois $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$. La curva de Drinfeld muestra un caso explícito de la *conjetura de Abhyankar* (enunciada en 1957 y demostrada en 1990, su enunciado

[8] Para el estudio de estos valores absolutos, recomendamos [19] al lector interesado en el análisis, y para un estudio más profundo el libro [23].

[9] Obsérvese que la característica es $p > 0$ y que $ad - cb = 1$; por tanto, si $(x,y) \in C(\overline{\mathbb{F}_p})$, entonces $(ax + by, cx + dy) \in C(\overline{\mathbb{F}_p})$ por la igualdad

$$\begin{pmatrix} ax+by & (ax+by)^p \\ cx+dy & (cx+dy)^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x^p \\ y & y^p \end{pmatrix}.$$

[10] Con la notación establecida: si $(x,y) \in C(\overline{\mathbb{F}_p})$, entonces $(x,y) \neq (0,0)$; si $M \cdot (x,y) = (x,y)$, entonces el 1 es un valor propio de M; como $\det(M) = 1$, necesariamente M es la identidad.

es actualmente conocido como *teorema de Raynaud*), que dice que cualquier grupo finito G es el grupo de Galois de un recubrimiento no ramificado de Galois de la recta afín sobre la clausura algebraica de un cuerpo finito si, y solo si, G está generado por sus p-subgrupos de Sylow. Drinfeld construyó explícitamente este recubrimiento para $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$, que predecía la conjetura de Abhyankar, ya que era conocido que los p-subgrupos de Sylow del grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ lo generan.

Compactificando $C(\overline{\mathbb{F}_p})$ obtenemos la curva proyectiva no singular

$$\overline{C}(\overline{\mathbb{F}_p}) : XY^p - YX^p = Z^{p+1},$$

sobre la que actúan de forma natural los grupos $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ y μ_{p+1}.[11]

Sea $j : C(\overline{\mathbb{F}_p}) \to \overline{C}(\overline{\mathbb{F}_p})$ la inmersión abierta $(x, y) \mapsto [x : y : 1]$. El morfismo

$$\pi_2 : \overline{C}(\overline{\mathbb{F}_p}) \to \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}_p}), \quad [x : y : z] \mapsto [x : y],$$

es ramificado, con índice $p + 1$, en los puntos $u \in \overline{C} \setminus C(\overline{\mathbb{F}_p})$ correspondientes a $[x : y : 0]$ con $x, y \in \mathbb{F}_p$. Utilizando la fórmula de Hurwitz (el morfismo tiene grado $p+1$ y es coprimo con la característica p de las variedades involucradas) se concluye que la compactificación de la curva de Drinfeld tiene género $g(\overline{C}) = p(p-1)/2$.[12]

Observación. Para simplificar, sea F un cuerpo algebraicamente cerrado y $\overline{X}$ una variedad algebraica, no-singular y proyectiva sobre F. Para cualquier cuerpo L extensión de $\mathbb{Q}_\ell$ se define el grupo de cohomología de Grothendieck étale ℓ-ádica de $\overline{X}$ sobre L como $H^i_{\mathrm{et}}(\overline{X}, L) := H^i_{\mathrm{et}}(\overline{X}; \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} L$, donde $H^i_{\mathrm{et}}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell)$ corresponde al límite inverso del sistema $\{H^i(\overline{X}, \mathbb{Z}/\ell^n)\}_{n>0}$, y para las buenas propiedades de la cohomología étale supondremos que ℓ es un primo distinto de la característica de F.

Si $\overline{X}$ es una curva, se le asocia una variedad $\mathrm{Jac}(\overline{X})$, la denominada variedad jacobiana de $\overline{X}$. El conjunto $\mathrm{Jac}(\overline{X})(F)$ de los F-puntos de la variedad jacobiana de $\overline{X}$ es un grupo abeliano. También, podemos identificar $\mathrm{Jac}(\overline{X})$ con la variedad de Picard que corresponde al grupo de clases de isomorfismos de haces invertibles de grado cero en $\overline{X}$ con la operación de grupo dada por el producto tensorial. Los grupos de cohomología étale $H^i_{\mathrm{et}}(\overline{X}, L) = H^i_{\mathrm{et}}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} L$ son no nulos para $i \in \{0, 1, 2\}$; además, se tiene

$$H^1_{\mathrm{et}}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell, \mathrm{Jac}(\overline{X})(F))(-1),$$

[11] Dados $\xi \in \mu_{p+1}$ y $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$,

$$\xi \cdot [x : y : z] = [\xi x : \xi y : z] \;\text{ y }\; M \cdot [x : y : z] = [ax + by : cx + dy : z].$$

[12] Una curva proyectiva no singular $\overline{X}$ sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero y de género $g \geq 2$ cumple la cota de Hurwitz, es decir, el orden del grupo de automorfismos de la curva $\overline{X}$ es como mucho $84(g-1)$.

El grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ es un grupo de orden grande, $|\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)| = p(p+1)(p-1)$, que actúa sobre $\overline{C}$ proporcionando automorfismos de la curva $\overline{C}$. El orden de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ crece mucho mas rápido que el género de $\overline{C}$, $g = p(p-1)/2$. Por tanto, para p suficientemente grande, las curvas $\overline{C}$ son ejemplos de curvas en característica positiva para las que la cota de Hurwitz no se cumple (realmente para $p \geq 7$ ya no se cumple). Observamos de nuevo que el universo en característica positiva es diferente al universo en característica cero.

donde (-1) es el *twist* de Tate dado por una acción natural de un grupo de Galois que no detallaremos.

Volvamos a fijar nuestra atención en la compleción proyectiva de la curva de Drinfeld.[13] El grupo $H^1_{\mathrm{et}}(\overline{C}, \mathbb{Q}_\ell)$ es un $\mathbb{Q}_\ell$-espacio vectorial de dimensión $2 \cdot g(\overline{C})$, sobre el que actúan los grupos $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$, μ_{p+1} y $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)$ (grupo generado topológicamente por el morfismo de Frobenius $a \mapsto a^p$). Estas acciones determinan sobre el grupo $H^1_{\mathrm{et}}(\overline{C}, \mathbb{Q}_\ell)$ una estructura de módulo para el álgebra de grupo $\mathbb{Q}_\ell[\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)]$ y otra para el álgebra de grupo $\mathbb{Q}_\ell[\mu_{p+1} \rtimes \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)]$.

Recordemos que si el cuerpo L contiene todas las raíces n-ésimas de la unidad, donde n recorre el conjunto de los órdenes de los diferentes elementos de G, entonces el conjunto de caracteres irreducibles de un grupo finito G sobre L se identifica con los generadores del grupo de Grothendieck $K_0(L[G])$.[14]

Como primera aproximación para extender un haz $\mathcal{F}$ definido sobre C a un haz definido sobre $\overline{C}$ podemos considerar su extensión por cero $j_!\mathcal{F}$ mediante la inmersión canónica $j : C \to \overline{C}$. Entonces, vía $H^1_{\mathrm{et}}(\overline{C}, j_!\mathbb{Z}_\ell)$ se define $H^1_{\mathrm{c,et}}(C, \mathbb{Z}_\ell)$, la cohomología con soporte compacto para la curva afín C, que es también un $\mathbb{Z}_\ell$-módulo finitamente generado. Drinfeld obtiene las representaciones irreducibles (cuspidales[15]) del grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ en $K_0(\overline{\mathbb{Q}_\ell}[\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)])$ asociadas a módulos dados por piezas de $H^1_{\mathrm{c,et}}(C, \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \overline{\mathbb{Q}_\ell}$, la cohomología asociada a C, donde $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ es la clausura algebraica de $\mathbb{Q}_\ell$.

Consideremos la acción de Frobenius sobre el grupo $G = \mathrm{SL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$ que consiste en elevar a p cada una de las entradas de una matriz. Obsérvese que el grupo $G^{\mathrm{Frob}} = \{\, M \in G \mid \mathrm{Frob}(M) = M \,\}$ es $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$. El grupo G posee una descomposición de Bruhat con subgrupo de Borel el subgrupo B de la matrices triangulares superiores, un toro maximal T formado por las matrices diagonales, y un subgrupo U formado por las matrices unipotentes trianguladas superiormente (los tres son estables por la acción del morfismo de Frobenius). La descomposición de Bruhat de G es

$$G = B \cup B \cdot S \cdot B, \quad \text{con } S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particular, $W = N_G(T)/\,\mathrm{C}(T)$, el grupo de Weyl correspondiente al normalizador del toro maximal módulo su centralizador, es $W = \{1, [S]\}$. Dado un elemento w del grupo de Weyl se define $w\mathrm{Frob}\colon T \to T$, como el morfismo $t \mapsto \tilde{w}\mathrm{Frob}(t)\tilde{w}^{-1}$, siendo $\tilde{w} \in N_G(T)$ cualquier representante de w, y se define como sigue la variedad de Deligne-Lusztig para G:

$$\mathcal{Y}(\tilde{w}) := \left\{ MU \in G/U \;\middle|\; M^{-1}\mathrm{Frob}(M) \in U\tilde{w}U \right\}.$$

[13] C y $\overline{C}$ estan definidas sobre $\mathbb{F}_p$, por tanto, también estan definidas sobre $\overline{\mathbb{F}_p}$, junto con la acción del grupo de Galois de $\overline{\mathbb{F}_p}$ sobre $\mathbb{F}_p$.

[14] El grupo $K_0(L[G])$ es el cociente del grupo abeliano libre construido sobre el conjunto de las clases de isomorfía de los $L[G]$-módulos proyectivos finitamente generados mediante las identificaciones $[M_2] = [M_1] + [M_3]$ para cada sucesión exacta corta de $L[G]$-módulos $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$.

[15] Habitualmente se estudian por separado las representaciones no cuspidales obtenidas por métodos algebraicos, que provienen del toro maximal del grupo G (que para $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ corresponde a las matrices diagonales).

La cohomología ℓ-ádica étale compacta $H^i_{\mathrm{c,et}}(\mathcal{Y}(\tilde{w}), \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ tiene estructura de $\overline{\mathbb{Q}_\ell}[G^{\mathrm{Frob}}]$-módulo y de $\overline{\mathbb{Q}_\ell}[T^{w\mathrm{Frob}}]$-módulo, lo cual nos permite obtener representaciones del grupo G^{Frob} a partir de representaciones de $T^{w\mathrm{Frob}}$.

Se demuestra que $\mathcal{Y}(S)$ es justamente la curva de Drinfeld (y $T^{[S]\mathrm{Frob}} = \mu_{p+1}$), obteniendo así las representaciones cuspidales de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$, y además $\mathcal{Y}(1)$ corresponde a $G^{\mathrm{Frob}}/U^{\mathrm{Frob}}$ y su cohomología ℓ-ádica permite obtener las representaciones no-cuspidales de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$.

Deligne y Lusztig definen, para G un grupo reductivo sobre $\overline{\mathbb{F}_p}$, variedades $\mathcal{Y}(\tilde{w})$ asociadas a elementos w del grupo de Weyl de G (lo que incluye el caso anterior), cuya cohomología ℓ-ádica con soporte compacto permite el estudio de representaciones del grupo reductivo fijadas por el morfismo de Frobenius. Véase [5] para más detalles.

4. Una gran contribución de Drinfeld: grupos cuánticos

Como ya hemos mencionado, el interés por la interrelación entre física y matemáticas es una constante en la carrera de Drinfeld. La lectura de [9, *Quantum Groups*], correspondiente a su charla plenaria en el ICM del año 1986, nos permite constatar en mayúsculas que Drinfeld tiene una mente excepcional capaz de trasladar conceptos e ideas entre diferentes campos. Es un gran matemático que, en lugar de mantener en privado preguntas cuyas respuestas supondrían nuevas publicaciones, las comparte públicamente en *On some unsolved problems in quantum group theory* [10], trabajo que propulsó la investigación en el campo, capaz de interesar e involucrar a muchos matemáticos e investigadores.

Los grupos cuánticos constituyen cierta subclase de álgebras de Hopf. Los primeros ejemplos fueron descubiertos por físicos matemáticos de la escuela de Faddeev en Leningrado, donde el trabajo de Drinfeld y Jimbo contribuyó a la cristalización de lo que sería una nueva área de estudio, los grupos cuánticos.

Describimos brevemente algunas de las grandes contribuciones de Drinfeld anteriores a 1990, reproduciendo palabras de Manin en [21]:

1. Los grupos de Lie y las álgebras de Lie simples fueron clasificados utilizando diagramas de Dynkin, que son objetos de naturaleza discreta que no varían en una familia continua, parecen objetos rígidos. Drinfeld y Jimbo observaron que, si se permiten deformaciones en la clase de álgebras de Hopf no conmutativas y coconmutativas, esta rigidez desaparece; más concretamente, para cualquier álgebra de Lie simple $\mathfrak{g}$ existe una deformación uniparamétrica $U_q(\mathfrak{g})$ del álgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g})$ con comultiplicación y antípodo.
2. Las propiedades de grupos cuánticos están estrechamente relacionadas con ecuaciones algebraicas no lineales a través de los operadores de Yang-Baxter. La relación $R_{12}R_{23}R_{12} = R_{23}R_{12}R_{23}$ entre operadores de $V \otimes V \otimes V$, para un espacio vectorial V, es la ecuación de Yang-Baxter más simple, y corresponde a una condición de relación trenzada sobre un operador lineal $R \in \mathrm{End}(V \otimes V)$. Muchas soluciones de las ecuaciones de Yang-Baxter fueron descubiertas en el contexto de la física estadística de dimensión dos por su relación con el modelo de Ising.

Drinfeld introduce la noción de un operador de Yang-Baxter universal que es un elemento invertible del segundo producto tensorial de cierta álgebra de Hopf. Demuestra su existencia en $U_q(\mathfrak{g})^{\otimes 2}$ y aporta una construcción que permite generar los operadores de Yang-Baxter.

3. Drinfeld formula y demuestra un teorema de clasificación en la teoría de grupos cuánticos. Su resultado es comparable a los primeros teoremas de S. Lie en los que estableció las relaciones entre álgebras de Lie y grupos de Lie locales. En particular, introduce nuevas nociones de álgebras cuasi-Hopf, relacionándolas con la ecuación diferencial de Knizhnik-Zamolodchikov.
4. Drinfeld introdujo las nociones de grupo de Poisson-Lie y de acción de Poisson-Lie, que son estructuras básicas de la geometría diferencial conectadas con la mecánica hamiltoniana.

Los resultados de Drinfeld posteriores a 1990 continúan mostrando su gran capacidad como investigador: cada uno de sus trabajos es una referencia mundial y marca un antes y un después para la investigación en el campo. A modo de ejemplo, las álgebras quirales en física están relacionadas con los operadores quirales en teoría cuántica de campos. En [1] Beilinson y Drinfeld introducen la definición de álgebra quiral, una noción matemática específica para la noción física de álgebra de operadores vértice, inventando una teoría comforme de campos sobre curvas algebraicas (un álgebra quiral viene acompañada de una estructura de $*$-álgebra de Lie, y este funtor entre álgebras quirales y $*$-álgebras de Lie posee adjunto por la izquierda, la envolvente quiral).

5. Drinfeld en el programa de Langlands

El programa de Langlands nace como una búsqueda de interrelaciones entre la teoría de números, la geometría algebraica y la teoría de formas automorfas (funciones de grupos topológicos a espacios vectoriales complejos). El lector interesado puede consultar algunas referencias en [12]. En la actualidad, muchos trabajos de física teórica que contienen resultados que solo se conocían para espacios del análisis complejo o real, están siendo trasladados a espacios de funciones p-ádicas (véase, por ejemplo, [24]).

Según Manin, la física es adélica [25]. Para una primera aproximación al anillo $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ de los adeles sobre $\mathbb{Q}$, podemos decir que es un anillo que tiene en cuenta todos los completados de los cuerpos respecto de los diferentes valores absolutos definidos sobre el cuerpo de los números racionales.[16] Si prescindimos del valor absoluto usual, estaremos considerando la parte finita de los adeles $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\text{fin}}$; formalmente $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\text{fin}}$ se puede definir como $\widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \subset \prod_{p \text{ primo}} \mathbb{Q}_p$, siendo $\widehat{\mathbb{Z}}$ el límite inverso de los anillos $\mathbb{Z}/I$, donde I recorre el conjunto de ideales de $\mathbb{Z}$.

[16] Recordemos (de la sección 3) que $\mathbb{Q}$ posee infinitos valores absolutos no equivalentes: el valor absoluto usual y un valor absoluto $|\ |_p$ para cada natural primo p, cuyo cuerpo completado se denota por $\mathbb{Q}_p$.

La correspondencia clásica de Langlands, para el grupo lineal $\mathrm{GL}_n(K)$ de las matrices de tamaño n de elementos de un cuerpo global K, trata de encontrar una biyección entre las representaciones en espacios vectoriales de dimensión n para el grupo de Galois absoluto $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, donde $\overline{K}$ denota la clausura separable del cuerpo K (es decir, la clausura algebraica si K es un cuerpo de números), y las representaciones del grupo $\mathrm{GL}(\mathbb{A}_K)$ que cumplen ciertas propiedades. Existe una analogía muy interesante entre la aritmética sobre $\mathbb{Q}$ y sobre $\mathbb{F}_p(T)$ que requiere en muchos casos de grandes y brillantes ideas. Uno de los resultados de Drinfeld más brillantes es la demostración de la correspondencia de Langlands para el grupo $\mathrm{GL}_2(K)$ siendo K una extensión finita de $\mathbb{F}_p(T)$, creando un análogo de las curvas elípticas en característica positiva, los llamados actualmente *módulos de Drinfeld.*

5.1. El análogo de un retículo en característica positiva: de curvas elípticas a módulos de Drinfeld

Sea A un dominio de Dedekind[17] cuyo cuerpo de fracciones denotaremos por K (K un cuerpo global). Supongamos que K posee un valor absoluto $|\ |_K$,[18] y que $K_{|\ |_K}$ es un cuerpo completado de K respecto al valor absoluto $|\ |_K$.[19] Entonces existe un cuerpo $\mathbb{C}_{|\ |_K}$, extensión de $K_{|\ |_K}$, donde todas las sucesiones de Cauchy para dicho valor absoluto tienen límite y que satisface el teorema fundamental del Álgebra (es decir, todo polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}_{|\ |_K}$ tiene una raíz en $\mathbb{C}_{|\ |_K}$). En el ejemplo más conocido $(A, K, |\ |_K, K_{|\ |_K}) = (\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, |\ |, \mathbb{R})$ el cuerpo $\mathbb{C}_{|\ |_K}$ es $\mathbb{C}$.

Un retículo Λ' de $\mathbb{C}_{|\ |_K}$ es un A-submódulo finitamente generado de $\mathbb{C}_{|\ |_K}$, discreto para la topología de $\mathbb{C}_{|\ |_K}$. Como A es un dominio de Dedekind, todo A-módulo finitamente generado libre de torsión es isomorfo a un módulo de la forma $A^{n-1} \oplus I$, donde I es un ideal de A. Por tanto $\Lambda' \otimes_A K_{|\ |_K}$ es un $K_{|\ |_K}$-subespacio vectorial de $\mathbb{C}_{|\ |_K}$ de dimensión n, y n es el rango del retículo. Para el caso clásico con $\mathbb{C}_{|\ |} = \mathbb{C}$, solo tenemos retículos de rangos 0, 1 y 2.

Una curva elíptica (que abreviaremos de ahora en adelante por c.e.) sobre los complejos viene expresada por $\mathbb{C}/\Lambda$, donde Λ es un retículo de rango 2 que se puede escribir de la forma $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\varpi$ para cierto $\varpi \in \mathbb{H} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0 \,\}$. Observemos que $\mathbb{C}/\Lambda$ es una curva con una operación suma en sus $\mathbb{C}$-puntos. Es habitual que en el estudio de determinado tipo de objetos matemáticos nos interese su clasificación módulo isomorfismos. Existe un biyección entre las clases de isomorfía de curvas elípticas sobre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, vía $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\varpi \mapsto \varpi$, donde el cociente $\mathbb{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ es el determinado por la acción de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sobre $\mathbb{H}$ definida por

$$M\varpi := \frac{a\varpi + b}{c\varpi + d}, \text{ para cada } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \text{ y } \varpi \in \mathbb{H}.$$

[17] Para esta exposición podemos restringimos al caso particular de un dominio de ideales principales A (tomemos $A = \mathbb{Z}$ como primera aproximación).

[18] En muchos casos $|\ |_K = |\ |_\mathfrak{p}$ es un valor absoluto asociado a un ideal primo $\mathfrak{p}$ de un dominio de Dedekind contenido en K.

[19] Recordemos que, para $\mathbb{Q}$ con el valor absoluto usual, $K_{|\ |} = \mathbb{R}$.

El espacio $\mathbb{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ es un espacio de *moduli* que clasifica las clases de isomorfía de las curvas elípticas sobre $\mathbb{C}$. Esta superficie de Riemann (superficie desde el punto de vista real) tiene una compactificación natural que consiste en añadir un punto, llamémosle cúspide. Dicha superficie de Riemann compacta se puede ver como una curva algebraica donde sus puntos complejos $X(1)(\mathbb{C})$ coinciden con $\mathbb{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ junto con su cúspide.

Dejemos escrito también que una curva elíptica viene determinada por una ecuación del tipo $Y^2 = X^3 + a_1X + a_0$, donde a_1 y a_0 son números complejos. Si L es un cuerpo entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{C}$ y a_1, $a_0 \in L$, diremos que la c.e. está definida en L. Fijado un cuerpo L donde la c.e. está definida, sus L-puntos tienen estructura de grupo abeliano, pero surge el fenómeno de que dos curvas elípticas no isomorfas sobre L sean isomorfas sobre $\mathbb{C}$. Por tanto, la curva algebraica $X(1)$ no representa el problema de *moduli* sobre el cuerpo L; para resolver este problema se introduce la torsión. Por ejemplo, aparece el estudio de las clases de isomorfía de pares (E, P), donde E una c.e. y P un punto de E de N-torsión, es decir, tal que $NP = P + \overset{(N)}{\cdots} + P$ es el cero de la curva elíptica. Los espacios de *moduli* de curvas elípticas son un tema muy clásico y aún muy interesante.

Sea $\Gamma_N := \ker(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$ y $\Gamma \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ un subgrupo (aritmético) tal que $\Gamma_N \leq \Gamma$. Entonces $\mathbb{H}/\Gamma$ corresponde a los $\mathbb{C}$-puntos del problema de *moduli* que clasifica módulo isomorfismos los pares formados por una c.e. con ciertos elementos de N-torsión de la curva (fijémonos que en $\mathbb{C}/\Lambda$, para $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\varpi$, hay puntos de N-torsión, por ejemplo $1/N$). Se demuestra que $\mathbb{H}/\Gamma$ tiene una compactificación, que denotamos por $X(\Gamma)$, y que se obtiene añadiendo cúspides que corresponden a curvas singulares. En particular, $X(\Gamma)(\mathbb{C})$, el conjunto de los $\mathbb{C}$-puntos de $X(\Gamma)$, corresponde a la unión de $\mathbb{H}/\Gamma$ y las cúspides. Aquí hemos elegido un Γ, y su correspondiente problema de *moduli*, tal que $X(\Gamma)$ está definida sobre $\mathbb{Q}$ y que también representa cierto problema de *moduli* sobre $\mathbb{Q}$. Este tipo de escenario es común en la mayoría de situaciones de interés en geometría aritmética.

Un problema muy importante en geometría aritmética es conocer los puntos racionales de $X(\Gamma)$, es decir $X(\Gamma)(\mathbb{Q})$.[20] Uno de dichos puntos racionales corresponde usualmente a cierta cúspide de $X(\Gamma)$, y es natural estudiar el morfismo de $X(\Gamma)$ a su jacobiana[21] y la torsión de dicha jacobiana. Un resultado clave es el conocido teorema, demostrado independientemente por Manin y Drinfeld en 1973, que afirma:

> *Si $\alpha, \beta \in X(\Gamma)$ son dos cúspides, entonces el divisor $(\alpha) - (\beta)$ tiene orden finito en la jacobiana de $X(\Gamma)$.*

Hemos mencionado que existe una analogía entre los cuerpos de números y los cuerpos K que son extensiones finitas y separables de $\mathbb{F}_p(T)$. Uno podría pensar en estudiar curvas elípticas definidas sobre K, pero Drinfeld propuso otros nuevos objetos de estudio que denominó *módulos elípticos*, conocidos ahora como *módulos*

[20] Si K es un cuerpo de números y el género de $X(\Gamma)$ es mayor o igual que 2, $X(\Gamma)(K)$ es un conjunto finito, resultado demostrado por el también medallista Fields G. Faltings en el año 1990.

[21] La jacobiana, introducida en la sección 3, es una variedad donde, como en el caso de las c.e., hay una suma definida en sus puntos.

de Drinfeld. Para simplificar, sea $K = \mathbb{F}_p(T)$, que veremos como el cuerpo de las funciones racionales de la recta proyectiva sobre el cuerpo finito $\mathbb{F}_p$. Cada punto de la recta proyectiva tiene asociado un valor absoluto; en particular, el valor absoluto asociado al punto $\infty \equiv \frac{1}{T}$ es el definido por $|u/v|_\infty = p^{-(\deg_T(u)-\deg_T(v))}$, para u y $v \neq 0$ polinomios en $\mathbb{F}_p[T]$. Las funciones regulares de $\mathbb{F}_p(T)$ fuera de ∞ corresponden al dominio de ideales principales $A = \mathbb{F}_p[T]$. (Recordemos que el análogo de $\mathbb{C}$ en esta situación es $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C}_{|\ |_\infty}$, y el de $\mathbb{R}$ es $K_\infty := K_{|\ |_\infty}$.)

Obsérvese que hay A-retículos en $\mathbb{C}_\infty$ de cualquier rango (ya que la extensión $\mathbb{C}_\infty : K_\infty$ no es de grado finito). Consideremos Λ un A-retículo en $\mathbb{C}_\infty$ de rango d. Drinfeld define la función $\exp_\Lambda : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ mediante la expresión dada por el producto de Euler convergente

$$\exp_\Lambda(x) := x \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right).$$

La función $\exp_\Lambda$ es sobreyectiva y su núcleo es Λ (para más detalles consúltese [16, Cap. 2]), y Drinfeld observó que para cada $0 \neq a \in A$ se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}_\infty/\Lambda \arrow[r, two heads, "\exp_\Lambda"] \arrow[d, "a\cdot"'] & \mathbb{C}_\infty \arrow[d, "\Phi_a"] \\ \mathbb{C}_\infty/\Lambda \arrow[r, two heads, "\exp_\Lambda"] & \mathbb{C}_\infty \end{tikzcd}$$

donde $\Phi_a(X)$ es un polinomio de $A[X]$. En particular, $\mathbb{C}_\infty$ tiene estructura de A-módulo con la operación definida para $a \in A$ y $c \in \mathbb{C}_\infty$ por $a * c := \Phi_a(c)$.

Hacemos notar que los polinomios de $A[X]$ no son cualesquiera, son polinomios aditivos, es decir, para ellos se cumple la identidad $P(X+Y) = P(X) + P(Y)$; por ejemplo, $P(X) = aX + X^p$ es un polinomio aditivo.[22] La suma de dos polinomios aditivos es un polinomio aditivo, pero no lo es su producto. No obstante, los polinomios aditivos tienen un producto no conmutativo dado por la composición $Q(X) \circ P(X) = Q(P(X))$, para el cual el polinomio X es el elemento unidad. Es conocido que el anillo no conmutativo de los polinomios aditivos sobre $\mathbb{C}_\infty$ se identifica con $\mathbb{C}_\infty\{\tau\}$, el anillo de polinomios *torcido*[23] por el operador τ que cumple $\tau \cdot k = k^p \tau$ con $k \in \mathbb{C}_\infty$, de manera que la identificación con los polinomios aditivos hace corresponder $\tau \leftrightarrow X^p$, $\mathrm{Id} = \tau^0 \leftrightarrow X$.

Un *A-módulo de Drinfeld* sobre $\mathbb{C}_\infty$ es un morfismo de anillos $\Phi : A \to \mathbb{C}_\infty\{\tau\}$ tal que, para cada $a \in A$, $\Phi_a(\tau) = a\tau^0 +$ *términos de mayor grado en* τ, y tal que existe $a_0 \in A$ para el cual $\Phi_{a_0}(\tau) \neq a_0\tau^0$. Para el caso simple $A = \mathbb{F}_p[T]$ es suficiente conocer Φ_T, ya que Φ es $\mathbb{F}_p$-lineal y $\Phi_{T^2} = \Phi_T \circ \Phi_T$. En este caso, el rango de Φ corresponde al grado de τ en Φ_T. Por ejemplo, si $\Phi_T(\tau) = T\tau^0 + \tau$, $\Phi_{T^2}(\tau) = (T\tau^0 + \tau)(T\tau^0 + \tau) = T^2\tau^0 + T\tau + \tau T\tau^0 + \tau^2 = T^2\tau^0 + (T + T^p)\tau + \tau^2$.

[22] Estamos en característica $p > 0$, y por tanto $P(X+Y) = a(X+Y) + (X+Y)^p = aX + aY + X^p + Y^p = P(X) + P(Y)$.

[23] Utilizamos «torcido» como traducción del término inglés *skew*.

Este módulo de Drinfeld de rango 1 es conocido como *módulo de Carlitz*. La noción de módulo de Drinfeld generaliza la noción introducida por Carlitz en 1935 [4].

Drinfeld demostró que existe una correspondencia biyectiva entre A-retículos en $\mathbb{C}_\infty$ de rango d y A-módulos de Drindeld sobre $\mathbb{C}_\infty$ de rango d, dada por la expresión $\exp_\Lambda(ax) = \Phi_a(\exp_\Lambda(x))$.

Al lector interesado en ampliar detalles en lo concerniente a los módulos de Drinfeld le recomendamos el texto [16] de D. Goss. Los A-módulos de Drinfeld proporcionan un análogo de los retículos en característica positiva, y supusieron el primer paso de Drinfeld en el ambicioso proyecto de atacar el programa Langlands.

OBSERVACIÓN. La curva elíptica $\mathbb{C}/\Lambda$ tiene una suma, y se generaliza a variedades abelianas de dimensión h vía $\mathbb{C}^h/\Omega$ para retículos $\Omega \subset \mathbb{C}^h$ (cumpliendo ciertas propiedades). También, gracias a Drinfeld, se tiene una generalización para $\mathbb{C}_\infty/\Lambda$ que corresponde a t-motivos;[24] con G. Anderson como principal propulsor, actualmente es un tema de gran repercusión (sobre todo las funciones L asociadas a t-motivos y sus valores especiales), con artículos en las principales revistas de investigación de autores como L. Taelman, F. Pellarin y B. Anglès.

Una vez construidos los módulos elípticos, Drinfeld estudia el problema de *moduli* relacionado. Existe una noción de morfismo e isomorfismo entre módulos elípticos o módulos de Drinfeld que el lector interesado puede consultar en [16]. Busquemos un análogo del espacio de *moduli* de c.e. sobre $\mathbb{C}$ y su superficie de Riemann, y veamos qué sucede con valores absolutos no arquimedianos (es decir, con valores absolutos que satisfacen $|x+y| \leq \text{máx}\{|x|, |y|\} \leq |x| + |y|$), y en particular para $\mathbb{C}_\infty$.

Un retículo de rango 2 sobre $\mathbb{C}_\infty$ es de la forma $A \oplus A\alpha$ con $\alpha \notin K_\infty$, y hay una biyección, vía $A \oplus A\alpha \mapsto \alpha$, entre las clases de isomorfía de estos retículos y el conjunto $\mathbb{C}_\infty \setminus K_\infty$ módulo la siguiente relación de equivalencia:

$$\alpha \sim \beta \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(A) \text{ tal que } M(\alpha) := \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} = \beta.$$

El espacio $\mathbb{H}_\infty := \mathbb{C}_\infty \setminus K_\infty = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_\infty) \setminus \mathbb{P}^1(K_\infty)$, que se conoce como semiplano superior no-arquimediano o también como *semiplano superior de Drinfeld*, tiene una estructura geométrica en el contexto de la geometría analítica rígida (para más detalles véase [14] o [13, Lectures 7, 8, 9]). También $\mathbb{H}_\infty/\mathrm{GL}_2(A)$ es un espacio analítico rígido isomorfo a la recta afín sobre $\mathbb{C}_\infty$ y, por tanto, tenemos isomorfismos sobre $\mathbb{C}_\infty$,

$$j\colon \frac{\{A\text{-módulos de Drinfeld de rango 2 sobre } \mathbb{C}_\infty\}}{\text{isomorfismo}} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}_\infty})^{\mathrm{an}} \cong \mathbb{C}_\infty.$$

Como en el caso anterior, una idea general será asociar a un espacio rígido analítico de este estilo una curva algebraica (si fuera posible) cuya analitificación sea $\mathbb{H}_\infty/\Gamma$

[24] Deligne estuvo trabajando en el producto tensor del módulo de Carlitz, que es un caso concreto de t-motivo.

para cierto $\Gamma \leq \mathrm{GL}_2(A)$.[25] Un ejemplo de ello serán las llamadas curvas modulares de Drinfeld, para las cuales los $\mathbb{Q}_\ell$-puntos de sus jacobianas, con ℓ diferente de p, o el primer grupo de cohomología ℓ-ádica con coeficientes en $\mathbb{Q}_\ell$ (véase la sección 3), tendrían acciones del grupo de Galois absoluto sobre un cuerpo de definición de la curva y del conúcleo de $\Gamma \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(A)$.

5.2. La conjetura de Langlands para $\mathrm{GL}_2(K)$

La idea comentada anteriormente sobre la conjetura de Langlands para el grupo lineal GL_n consiste en encontrar cierta biyección entre n-representaciones del grupo de Galois absoluto de K (extensión finita de $\mathbb{Q}$ o de $\mathbb{F}_p(T)$), que provienen de la geometría aritmética, y ciertas representaciones de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)$ de los *adeles* de K.

Para el caso $\mathrm{GL}_1(K)$, las representaciones 1-dimensionales del grupo de Galois corresponden a extensiones abelianas del cuerpo K, para las que existe un teoría bien conocida llamada teoría de cuerpos de clases [22] y, por tanto, diríamos que la conjetura de Langlands está resuelta en este caso.

Para atacar la conjetura en el caso $\mathrm{GL}_n(K)$, con $n \geq 2$, la idea inicial (pensemos en nuestra exposición que $K = \mathbb{F}_p(T)$) consistió (véase [12, § 3.3]) en construir la biyección utilizando una representación de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K) \times \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ en un $\mathbb{Q}_\ell$-espacio vectorial (con ℓ un primo distinto de p) que admitiera, sobre $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$, una descomposición de la forma $\oplus_\pi(\pi \otimes \sigma_\pi)$, donde π recorre las representaciones ℓ-ádicas consideradas y σ_π es una representación irreducible n-dimensional de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, el grupo absoluto de Galois de K. Esta descomposición permitiría definir una aplicación $\pi \mapsto \sigma_\pi$, que sería suficiente para demostrar la conjetura de Langlands para $\mathrm{GL}_n(K)$ si se conoce la conjetura para $\mathrm{GL}_j(K)$ con $1 \leq j \leq n-1$ (por un resultado de recurrencia de Deligne). Pero la idea inicial no funciona porque no existe tal representación de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K) \times \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. La propuesta de Drinfeld consiste en construir una representación de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K) \times \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \times \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ que admita una descomposición de la forma $\oplus_\pi(\pi \otimes \sigma_\pi \otimes \sigma_\pi^\vee)$. Drinfeld, para $n = 2$, y L. Lafforgue, para $n > 2$, construyen dicha representación de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K) \times \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \times \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ en un $\mathbb{Q}_\ell$-espacio vectorial de ciertos espacios que provienen de espacios de *moduli* (que parametrizan unas estructuras denominadas *shtukas*).[26]

5.3. Las variedades modulares de Drinfeld

Para simplificar, a partir de este momento consideremos $A = \mathbb{F}_q[T]$, y subgrupos $\Gamma \subset \mathrm{GL}_2(A)$ tales que $(\mathrm{GL}_2(A) : \Gamma) < \infty$, a los que llamaremos subgrupos aritméticos. Se le puede dar a $\mathbb{H}_\infty/\Gamma$ una estructura geométrica heredada (de la geometría

[25] Para $\mathbb{H}_\mathfrak{p}/\Gamma$, donde $\mathfrak{p}$ se refiere al primo p en $\mathbb{Q}_{p^2}$ (una extensión no ramificada de grado 2 de $\mathbb{Q}_p$), esta idea general corresponde a espacios analíticos rígidos para las curvas de Mumford y a los grupos de Schotky para ciertos Γ. Drinfeld, que era un gran conocedor del tema, demostró el teorema conocido como *teorema de Čerednik-Drinfeld* que afirma, en particular, que las curvas de Shimura son curvas de Mumford sobre $\mathbb{Q}_{p^2}$, y también cocientes torcidos de curvas de Mumford sobre $\mathbb{Q}_p$.

[26] La palabra rusa *shtuka* podríamos traducirla coloquialmente por «cosa» o «trozo de algo».

en $\mathbb{H}_\infty$), y existe una curva algebraica proyectiva (*curva de Drinfeld*) $X_{\mathrm{Drinf}}(\Gamma)$ cuya analitización corresponde a $\mathbb{H}_\infty/\Gamma$ completado con ciertas cúspides.

De forma similar al caso de curvas elípticas, quisiéramos que $X_{\mathrm{Drinf}}(\Gamma)$ represente un problema de *moduli*; por ejemplo, $X_{\mathrm{Drinf}}(\mathrm{GL}_2(A))$ sobre $\mathbb{C}_\infty$ clasifica A-módulos de Drinfeld de rango 2 en $\mathbb{C}_\infty$ módulo isomorfismos, pero como en el caso de c.e. existe una definición aritmética de A-módulo de Drinfeld de rango n sobre un cuerpo L con $\mathbb{F}_q(T) \subseteq L \subseteq \mathbb{C}_\infty$.

Fijemos $I = (i)$ un ideal no trivial de A, siendo i un polinomio mónico, y Φ un A-módulo de Drinfeld sobre L, una extensión finita separable de $\mathbb{F}_p(T)$ (es decir, donde $\Phi_T(X) \in L[X]$ como polinomio aditivo). El conjunto de las raíces del polinomio aditivo $\Phi_i(X) = \Phi_I(X)$ (que es siempre un polinomio separable) es un $\mathbb{F}_p$-espacio vectorial que define la I-torsión del módulo de Drinfeld Φ.[27]

Considérense las parejas formadas por un A-módulo de Drinfeld de rango d sobre $\mathbb{F}_p(T)$ o sobre una extensión finita y separable L, y por una estructura de nivel I (asociada a las raíces de Φ_I). Drinfeld demuestra que existe una variedad afín $\mathfrak{M}_I^d$ de dimensión $d-1$ sobre $\mathbb{F}_p(T)$, que representa el espacio de *moduli* respecto a módulos de Drinfeld y torsión bajo ciertas condiciones sobre I.

En particular, en relación con el programa de Langlands para GL_1, $\mathfrak{M}_I^1$ es la extensión abeliana de $\mathbb{F}_q(T)$ no ramificada fuera de I y de ∞ (con una descripción explícita de la ramificación en ∞ y en I). Para $d = 2$, la variedad $\mathfrak{M}_I^2$ es una curva algebraica afín no singular sobre $\mathbb{F}_q(T)$ que clasifica los A-módulos de Drinfeld de rango 2 sobre extensiones finitas y separables de $\mathbb{F}_q(T)$ con una estructura de nivel I módulo isomorfismos, que corresponde a las llamadas curvas modulares de Drinfeld. Subgrupos Γ que corresponden al nivel I serían, por ejemplo, los grupos aritméticos tales que $\Gamma(I) \leq \Gamma \leq \Gamma_0(I)$, donde $\Gamma(I) := \ker(\mathrm{GL}_2(A) \to \mathrm{GL}_2(A/I))$, y $\Gamma_0(I) := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(A) \mid c \in I \right\}$.

Dejemos escrito que $\mathfrak{M}_I^d$ posee una acción natural del grupo $\mathrm{GL}_d(A/I)$.

5.4. El primer resultado de la conjetura de Langlands para $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p(T))$

Denotamos por $\mathfrak{M}^d(I)$ la variedad afín no singular de Drinfeld con estructura de nivel I correspondiente al espacio de *moduli* de las parejas (Φ, Φ_I) formadas por un A-módulo de Drinfeld Φ de rango d y Φ_I, todas las raíces del polinomio aditivo, módulo isomorfismos. Sobre $\mathfrak{M}^d(I)$ actúa el grupo $\mathrm{GL}_d(A/I)$ y existe un morfismo natural $\mathfrak{M}^d(I) \to \mathfrak{M}^d(J)$ cuando $I \subset J$. Sobre el colímite

$$\mathfrak{M}^d := \varprojlim_I \mathfrak{M}^d(I)$$

actúan el grupo de Galois absoluto de $\mathbb{F}_q(T)$ y el grupo

$$\mathrm{GL}_d(\mathbb{A}^{\mathrm{fin}}_{\mathbb{F}_p(T)}) = \mathrm{GL}_d(\varprojlim_I A/I) = \varprojlim_I \mathrm{GL}_d(A/I)$$

[27] Dado $x \in \mathbb{C}_\infty$, $i * x = \Phi_i(x)$; por tanto, las raíces de $\Phi_I(X)$ son los elementos de I-torsión.

(que se puede extender a una acción de $\mathrm{GL}_d\left(\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q(T)}\right)$ respecto a la compleción $\mathbb{F}_p(T)_\infty = \mathbb{F}_p((1/T)))$.[28] Ya tenemos un candidato inicial para intentar demostrar la conjetura de Langlands para GL_d.

Es necesario compactificar $\mathfrak{M}^d(I)$ para que su cohomología tenga buenas propiedades. Drinfeld afirmó que esta compactificación tan solo se puede conseguir para $d = 2$ (véase [20] para más detalles) y, por tanto, el candidato anterior resulta interesante para resolver la conjetura de Langlands para GL_2.

Drinfeld demuestra inicialmente que el límite directo de la cohomología étale ℓ-ádica asociada a la compactificación de $\mathfrak{M}^2(I)$ permite probar la conjetura de Langlands para $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p(T))$, pero las representaciones de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_K)$ tienen cierto comportamiento específico que depende del valor absoluto del ∞ que se ha elegido en la construcción.

5.5. Idea de Drinfeld para completar la demostración de la conjetura de Langlands para $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p(T))$: Shtukas

Para finalizar la conjetura general de Langlands para $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p(T))$, y no llevar cuenta de un comportamiento específico en ∞, Drinfeld construye los *shtukas* (o F-haces) de rango d, y el candidato para demostrar dicha conjetura vía una representación dentro de cierta cohomología ℓ-ádica en el espacio de *moduli de shtukas* de rango d.

En nuestra exposición solo vamos a presentar la noción de *shtukas* para cierto caso concreto que generaliza el concepto de módulo de Drinfeld.[29] Un problema importante es la imposibilidad de compactificar los espacios relacionados con el espacio de *moduli* de *shtukas*. Drinfeld pudo fijar la compactificación solo para $d = 2$. Con muchas otras ideas perspicaces en este espacio de *moduli* de *shtukas*, Lafforgue consiguió demostrar finalmente la conjetura de Langlands para $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_p(T))$ con $d > 2$, resultado que le hizo merecedor de una Medalla Fields.

Sea L una extensión no finita de $\mathbb{F}_p$ y σ el Frobenius correspondiente a elevar a p; supongamos que σ es un automorfismo de L de orden no finito; en particular, los elementos fijos de L por el automorfismo σ corresponden al cuerpo $\mathbb{F}_p$.

Un *shtuka*, para dicha elección de L con el automorfismo de Frobenius, es un subanillo conmutativo $R \subset L\{\tau\}$ del anillo de polinomios torcidos, que cumple que $\mathbb{F}_p$ está estrictamente contenido en R como $\mathbb{F}_p\tau^0$ y que $R \cap L = \mathbb{F}_p\tau^0$. Dos anillos conmutativos, R_1 y R_2, del tipo descrito son equivalentes si existe un elemento $\alpha \in L^*$ tal que $R_1 = \alpha R_2 \alpha^{-1}$ (nótese que un A-módulo de Drinfeld $\Phi : A \to \mathbb{C}_\infty\{\tau\}$ sobre $\mathbb{C}_\infty\{\tau\}$ define un subanillo conmutativo $\Phi(A) \subset \mathbb{C}_\infty\{\tau\}$).

[28] Obsérvese que $\mathfrak{M}^1$ corresponde al cuerpo extensión abeliana maximal de $\mathbb{F}_p(T)$ que es totalmente escindido (*split*) en el ∞, construyendo así el cuerpo de clases cuya existencia estaba garantizada por la teoría de cuerpos de clases [22]. No obstante, esta construcción no es tan explícita en general. D. Hayes, alumno de Carlitz, aporta una construcción más explícita para la teoría de clases sobre un cuerpo global K extensión de $\mathbb{F}_p(T)$ (el caso $K = \mathbb{F}_p(T)$ corresponde a Carlitz).

[29] Krichever, en su estudio de la ecuación de Korteweg-de Vries, encontró un diccionario notable entre ciertos haces sobre curvas y subálgebras de $\mathbb{C}[[t]][\frac{d}{dt}]$, y la analogía entre τ y $\frac{d}{dt}$ inspiró a Drinfeld a buscar una construcción similar en módulos de Drinfeld.

Drinfeld observa que existe una biyección entre *shtukas* y fibrados vectoriales sobre curvas (véase [16, § 6.2] y [12, § 3.4], o consúltese [17] para una definición exacta del objeto relacionado con la geometría algebraica). Por ejemplo, con la notación del párrafo anterior, a un *shtuka* R le corresponde X_R, una curva proyectiva sobre $\mathbb{F}_p$, y cierto fibrado vectorial $\mathcal{E}$ sobre $X_R \otimes_{\mathbb{F}_p} L$ junto con un diagrama

$$\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}^\sigma,$$

donde $\mathcal{E}^\sigma$ viene definido por la acción del morfismo de Frobenius que proviene de extender la curva X_R de $\mathbb{F}_p$ a L. Para más detalles referimos al lector a los textos citados, y tan solo queremos señalar que a un módulo de Drinfeld de rango d se le asocia un *shtuka* con un fibrado vectorial de rango d.

5.6. Otra gran contribución de Drinfeld al programa de Langlands

Drinfeld no solo ha aportado grandes ideas para el programa de Langlands en el caso de $\mathrm{GL}_n(K)$ con K una extensión finita de $\mathbb{F}_p(T)$ (principalmente entre los años 1975–1990), sino que también son extensas sus contribuciones al programa de Langlands generalizado, en particular, a la conjetura geométrica de Langlands formulada para curvas sobre cuerpos arbitrarios. Por citar una, en [2], de forma conjunta, Beilinson y Drinfeld finalizan gran parte la demostración de la conjetura geométrica de Langlands sobre $\mathbb{C}$ para grupos reductivos (un ejemplo de grupo reductivo es el grupo lineal GL_n) utilizando ideas novedosas que interrelacionan diferentes campos incluyendo, por ejemplo, la cuantificación de sistemas integrables de Hitchin.

Agradecimientos

El autor quiere mostrar su agradecimiento al *referee* por aportar importantes comentarios y sugerencias, y también a los editores de la sección Ana y Leo por todo su interés y sus comentarios.

Referencias

[1] A. Beilinson y V. G. Drinfeld, *Chiral algebras*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. **51**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[2] A. Beilinson y V. G. Drinfeld, *Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigensheaves*; manuscrito disponible en `http://www.math.uchicago.edu/~mitya/langlands/hitchin/BD-hitchin.pdf`.

[3] C. Bonnafé, *Representations of* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$, Algebra and Applications, vol. **13**, Springer-Verlag, London, 2011.

[4] L. Carlitz, On certain functions connected with polynomials in a Galois field, *Duke Math. J.* **1** (1935), no. 2, 137–168.

[5] P. Deligne y G. Lusztig, Representations of reductive groups over finite fields, *Ann. of Math.* **103** (1976), 103–161.

[6] V. G. Drinfeld, Elliptic modules, *Mat. Sb. (N.S.)* **94**(136) (1974), 594–627, 656.

[7] V. G. Drinfeld, Elliptic modules II, *Mat. Sb. (N.S.)* **102**(144) (1977), no. 2, 182–194, 325.

[8] V. G. Drinfeld, Degenerate affine Hecke algebras and Yangians, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **20** (1986), no. 1, 69–70.

[9] V. G. Drinfeld, Quantum Groups, *Proceedings of the 1986 International Congress of Mathematicians (Berkeley, Calif.)*, vol. 1, 2, 798–820, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[10] V. G. Drinfeld, On some unsolved problems in quantum group theory, *Quantum groups (Leningrad, 1990)* (Petr P. Kulish, ed.), Lecture Notes in Mathematics **1510**, 1–8, Springer, Berlin, 1992.

[11] V. G. Drinfeld, Infinite-dimensional vector bundles in algebraic geometry: an introduction, *The unity of mathematics* (P. Etingof, V. Retakh y I. M. Singer, eds.), 263–304, Progress in Mathematics **244**, Birkhäuser, Boston, 2006.

[12] E. Frenkel, Recent advances in the Langlands program, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* vol. **41** (2004), no. 2, 151–184.

[13] E.-U. Gekeler, M. van der Put, M. Reversat y J. Van Geel (eds.), *Drinfeld modules, modular schemes and applications*, Proceedings of the workshop held in Alden-Biesen, September 9–14, 1996, World Scientific, River Edge, NJ, 1997.

[14] L. Gerritzen y M. van der Put, *Schottky groups and Mumford curves*, Lecture Notes in Mathematics **817**, Springer, Berlin, 1980.

[15] V. Ginzburg, A glimpse into the life and work of V. Drinfeld, *Algebraic Geometry and Number Theory: In Honor of Vladimir Drinfeld's 50th Birthday* (V. Ginzburg, ed.), xiii–xv, Progress in Mathematics, vol. **253**, Birkhäuser, Boston, 2006.

[16] D. Goss, *Basic structures of function field arithmetic*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. **35**, Springer, Berlin, 1996.

[17] D. Goss, What is … a shtuka?, *Notices Amer. Math. Soc.* **50** (2003), 36–37.

[18] G. H. Hardy, J. E. Littlewood y G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1934.

[19] N. Koblitz, *p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions*, second edition, Graduate Texts in Mathematics, vol. **58**, Springer-Verlag, New York, 1984.

[20] T. Lehmkuhl, Compactification of the Drinfeld modular surfaces, *Mem. Amer. Math. Soc.* **197** (2009), no. 921.

[21] Y. Manin, On the mathematical work of Vladimir Drinfel'd, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, vol. I, II (Kyoto, 1990), 3–7, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1991.

[22] J. Neukirch, *Class Field Theory*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. **280**, Springer, Berlin, 1986.

[23] P. SCHNEIDER, *Nonarchimedean functional analysis*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, 2002.

[24] J. T. VIRTANEN, *Structure of elementary particles in non-archimedean space-time*, PhD thesis, UCLA (2009); disponible en `http://www.math.ucla.edu/~virtanen/website_files/thesis.pdf`.

[25] W. ZÚÑIGA, Formas cuadráticas, funciones zeta locales y la ecuación del calor sobre los p-ádicos, conferencia, *II Encuentro Conjunto RSME-SMM*, 17 al 20 de enero de 2012, Torremolinos, Málaga.

FRANCESC BARS CORTINA, DEPT. DE MATEMÀTIQUES, UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
Correo electrónico: `francesc@mat.uab.cat`
Página web: `http://mat.uab.cat/~francesc`