

# Càlcul d’integrals usant sistemes dinàmics discrets

Armengol Gasull, Mireia Llorens

12 de setembre de 2016

Des del segle XVII, en que Leibnitz i Newton van introduir el càlcul diferencial i integral, aquesta eina ha estat una de las bases de la ciència i la tecnologia. Ara bé, així com el càlcul de derivades és una tasca rutinària, el càlcul d’integrals, ja siguin definides o indefinides és un “art”. Tots recordem els enginyosos canvis de variable per a calcular certes primitives, o el plaer de que el mètode d’integració per parts quadri després d’aplicar-lo un cert número de vegades. A part d’aquestes tècniques ben establertes, i que serveixen tant per a calcular primitives com per a calcular integrals definides, hi ha d’altres que serveixen només per a resoldre aquesta segona qüestió..

Sense ànim de ser exhaustius, en aquest segon bloc podem considerar el mètode de derivació d’integrals respecte a paràmetres, que canvia el problema pel de resoldre certes equacions diferencials, o l’ús del Teorema de Cauchy per funcions meromorfe, que redueixen el càlcul a una suma d’uns certs residus, vegeu [10]. L’exemple paradigmàtic d’integral definida per la qual el càlcul de primitives no funciona<sup>1</sup>, però calculable, és la relacionada amb l’àrea sota la campana de Gauss,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Podeu consular [12] per diverses demostracions, totes maquíssimes, d’aquest fet.

L’objectiu d’aquest treball és donar a conèixer un mètode no tan popular que serveix per al mateix objectiu. Concretament mostrarem diferents exemples d’aplicació de les anomenades *transformacions de Landen* al càlcul d’algunes integrals definides. Com veurem, aquestes transformacions associen a una certa família d’integrals que depenen de paràmetres un sistema dinàmic discret (SDD), de manera que les integrals buscades son *integrals primeres o invariants* del SDD. Usant aquesta propietat, sovint les integrals es poden calcular o aproximar estudiant els comportaments límit del SDD.

---

<sup>1</sup>La teoria diferencial de Galois demostra que cap primitiva de la funció  $e^{-x^2}$  és expressable amb un número finit d’operacions bàsiques i funcions elementals.

En lloc de donar totes les definicions en general, preferim fer-ho en l'exemple paradigmàtic del mètode, que com veurem és el que li ha donat nom.

Considerem, per  $a > 0$ ,  $b > 0$ , la integral el·líptica

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}}. \quad (1)$$

Com veurem a la Secció 1, es compleix que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cos^2 \theta + ab \sin^2 \theta}}. \quad (2)$$

En altres paraules, si considerem l'aplicació

$$F(a, b) = \left( \frac{a+b}{2}, \sqrt{ab} \right), \quad (3)$$

aleshores tenim que  $I(a, b) = I(F(a, b))$ . Aquesta és precisament la definició de que  $I$  és una *integral primera*, o un *invariant*, del SDD generat per l'aplicació<sup>2</sup>  $F$ . Això ens diu que tots els punts d'una òrbita de  $F$ ,  $\mathcal{O}_{(a_0, b_0)} := \{F^n(a_0, b_0) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$  estan dins de la mateixa corba de nivell d' $I$ ,  $I(a, b) = I(a_0, b_0)$  i també hi són els seus punts d'acumulació. Aquests punts formen el que s'anomena conjunt  $\omega$ -límit de l'òrbita. Aquí  $F^n = (F_1^n, F_2^n)$  denota la composició de  $F = (F_1, F_2)$  amb si mateixa  $n$  cops, on  $F^0 = \text{Id}$ .

Gauss va provar l'any 1799 la igualtat (2), però un resultat més general que aquest ja havia estat demostrat per Landen, l'any 1775, vegeu [2, 13, 16, 19]. John Landen (1719-1790) va ser un matemàtic anglès aficionat que va treballar com a topògraf i com a agent immobiliari, vegeu més detalls de la seva obra a [2, 28].

De fet, les relacions entre funcions el·líptiques trobades per Landen són conegudes com a *transformacions de Landen*. Sense entrar en cap formalisme i parlant en general, avui en dia una transformació de Landen és una relació entre dues integrals definides de funcions del “mateix tipus” i que depenen de paràmetres. En les integrals, tant els paràmetres, com els límits d'integració, no tenen per que ser els mateixos, però aquests valors satisfan relacions funcionals entre ells (vegeu de nou [2, 28] per a més detalls). En el cas estudiat per Gauss, els límits d'integració són els mateixos, els paràmetres venen relacionats via  $F$ , les integrals són clarament del mateix tipus i la relació entre elles és que són exactament iguals. En aquest treball veurem diversos exemples de transformacions de Landen.

Anem a veure com usar (2) per a calcular (aproximar)  $I(a, b)$ . Com veurem, no és difícil demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a, b) = (\text{MAG}(a, b), \text{MAG}(a, b))$$

---

<sup>2</sup>Si la  $F$  no és invertible, hauríem de parlar més pròpiament de semi-sistemes dinàmics discrets, però com es fa sovint, ometrem el prefixe “semi”.

on  $\text{MAG}(a, b)$  és un número entre  $a$  i  $b$ . De fet aquest número s'anomena *mitjana aritmètico-geomètrica* d' $a$  i  $b$ . Sovint també es denota aquest valor com  $\text{AGM}(a, b)$  degut al seu nom en anglès. A continuació provem que

$$I(a, b) = \frac{1}{\text{MAG}(a, b)} \frac{\pi}{2}. \quad (4)$$

En efecte, com que  $I(a, b)$  és invariant a l'aplicar  $F$ , obtenim per a tot  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{(F_1^n(a, b))^2 \cos^2 \theta + (F_2^n(a, b))^2 \sin^2 \theta}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{(F_1^n(a, b))^2 \cos^2 \theta + (F_2^n(a, b))^2 \sin^2 \theta}} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\text{MAG}^2(a, b) \cos^2 \theta + \text{MAG}^2(a, b) \sin^2 \theta}} \\ &= \frac{1}{\text{MAG}(a, b)} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} = \frac{1}{\text{MAG}(a, b)} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Per tant el càlcul d' $I(a, b)$  es pot fer a partir del càlcul de  $\text{MAG}(a, b)$ . Tot i que la fórmula explícita per aquesta mitjana és la integral, que és el que volíem calcular, el resultat obtingut proporciona un procés iteratiu fàcilment programable, que consisteix en calcular la successió  $F^n(a, b)$ , que permet aproximar quadràticament  $I(a, b)$ . Recordem que es diu que la convergència és quadràtica, si l'error absolut de l'iterat  $n + 1$  és, aproximadament, una constant multiplicada pel quadrat de l'error absolut de l'iterat  $n$ . De fet, és amb el procés descrit com es calculen els valors aproximats de les integrals el·liptiques. És més, la mitjana aritmètico-geomètrica pot ser usada per a calcular amb precisió moltes funcions elementals com  $\log(x)$ ,  $e^x$ , ..., vegeu [4, 7].

Com veurem més endavant, per a d'altres integrals definides les transformacions de Landen associades sí que permeten calcular exactament els seus valors.

Seguint [4, 13] i com a aplicació del resultat anterior, es pot relacionar la longitud  $\mathcal{L}$  de la lemniscata que en coordenades polars s'escriu com  $r^2 = \cos(2\theta)$ , amb la integral definida

$$\varpi = 2 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}},$$

i amb una mitjana aritmètico-geomètrica. De fet, aquesta integral ja apareix l'any 1691 en documents de Jacob Bernoulli i era força coneguda al segle XVIII. Va ser Gauss qui la va denotar per  $\varpi$ . Com veurem a la Secció 1.2, fent dos canvis de variable diferents per a calcular  $\mathcal{L}$  arribem a que  $\mathcal{L} = 2\varpi = 4I(\sqrt{2}, 1)$ . Com que ja hem vist que  $2I(\sqrt{2}, 1) = \pi/\text{MAG}(\sqrt{2}, 1)$ , obtenim que,

$$\text{MAG}(\sqrt{2}, 1) = \frac{\pi}{\varpi}.$$

Gauss va conjecturar aquesta relació abans de provar-la, basant-se en càlculs numèrics, tal i com va afirmar en la nota 98 (30 de maig de 1799) en el seu diari [17], on hi va escriure: “He demostrat fins a l'onzena xifra decimal, que el límit de la mitjana aritmètico-geomètrica entre els nombres  $\sqrt{2}$  i 1 és igual a  $\pi/\varpi$ ; aquesta demostració obrirà segurament una àrea totalment nova en l'anàlisi”. Com no podia ser d'altra manera, Gauss la va encertar. Es referia a la Teoria de les funcions el·líptiques.

Com a segona aplicació distingida d'aquesta transformació de Landen, deduirem a la Secció 1.4 l'algoritme de Brent-Salamin (veure [3, 4, 14]), que serveix per a calcular  $\pi$ . Aquest algoritme es basa en la construcció d'una successió  $\{z_n\}_n$  que convergeix quadràticament cap a  $\pi$ , definida com

$$z_n = \frac{(a_n + b_n)^2}{1 - \sum_{j=1}^n 2^{j+1}(a_j^2 - b_j^2)},$$

on  $a_j$  i  $b_j$  venen definits per la transformació (3), es a dir  $(a_{j+1}, b_{j+1}) = F(a_j, b_j) = ((a_j + b_j)/2, \sqrt{a_j b_j})$ , amb  $a_0 = 1$  i  $b_0 = 1/\sqrt{2}$ . Vegem els primers iterats de l'algoritme,

$n$	$a_n$	$b_n$
0	1	0.707106781186547524400...
1	0.85355339059327376220...	0.84089641525371454303...
2	0.84722490292349415261...	0.84720126674689146040...
3	0.84721308483519280650...	0.84721308475276536670...
4	0.84721308479397908660...	0.84721308479397908660...

i també,

$n$	$z_n$	$ z_n - \pi $
1	3.1405792505221682483113312689758233117734402375122...	$2 \times 10^{-3}$
2	3.1415926462135422821493444319826957743144372233448...	$8 \times 10^{-9}$
3	3.1415926535897932382795127748018639743812255048349...	$2 \times 10^{-19}$
4	3.1415926535897932384626433832795028841971146782804...	$6 \times 10^{-41}$

En aquesta darrera taula es pot apreciar clarament la convergència quadràtica del mètode.

Per acabar aquesta primera part centrada en integrals el·líptiques, considerarem altres integrals que donen lloc a funcions especials i dedicarem la Secció 2.2 a les relacions entre altres SDD del pla donats per aplicacions de Landen similars a  $F$  i les seves respectives integrals primeres. En particular veurem com calcular la mitjana harmònico-geomètrica.

Canviant una mica el tipus de funcions que volem integrar, a la Secció 3, seguint [6, 11, 21, 24], estudiarem diverses transformacions de Landen que ens permetran calcular certes integrals definides impròpies donades per quocients de polinomis. Com a exemple senzill, i

que també pot ser calculat sense massa dificultat usant els mètodes tradicionals, en aquesta introducció donem en primer lloc el resultat que permet calcular per aquest procediment la integral

$$I(a, b, c) = \int_0^\infty \frac{bx^2 + c}{x^4 + ax^2 + 1} dx, \quad a > -2.$$

Considerem

$$F(a, b, c) = \left( 2, \frac{b+c}{\sqrt{a+2}}, \frac{b+c}{\sqrt{a+2}} \right).$$

A la Secció 3.1 provem que

$$I(a, b, c) = I(F(a, b, c)). \quad (5)$$

Per tant,

$$\begin{aligned} I(a, b, c) &= I(F(a, b, c)) = \frac{b+c}{\sqrt{a+2}} \int_0^\infty \frac{x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} dx \\ &= \frac{b+c}{\sqrt{a+2}} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{(b+c)\pi}{2\sqrt{a+2}}. \end{aligned}$$

Observi's que en aquest cas no ha calgut anar al límit per a fer el càlcul, ja tot els punts  $(a, b, c)$  son pre-fixos (la seva imatge és un punt fix) pel SDD generat per  $F$ . Un altre exemple racional senzill s'estudia a [23].

Quan considerem la integral més complicada

$$I(a, b, c, d, e) = \int_0^\infty \frac{cx^4 + dx^2 + e}{x^6 + ax^4 + bx^2 + 1} dx,$$

també es pot construir una transformació de Landen associada, vegeu la Secció 3.2. Si prenem l'aplicació amb estructura triangular,  $F(a, b, c, d, e) = (G(a, b), H(a, b, c, d, e))$ , on

$$G(a, b) = \left( \frac{5a + 5b + ab + 9}{\sqrt[3]{(a+b+2)^4}}, \frac{a+b+6}{\sqrt[3]{(a+b+2)^2}} \right), \quad (6)$$

$$H(a, b, c, d, e) = \left( \frac{c+d+e}{\sqrt[3]{(a+b+2)^2}}, \frac{(b+3)c + (a+3)e + 2d}{a+b+2}, \frac{c+e}{\sqrt[3]{a+b+2}} \right), \quad (7)$$

aleshores  $I(a, b, c, d, e) = I(F(a, b, c, d, e))$ .

Com es demostra a [11, 20] per als valors  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tals que  $I(a, b, c, d, e)$  és finita, es compleix que  $\lim_{n \rightarrow \infty} G^n(a, b) = (3, 3)$ . Per acabar aquest treball, a la Secció 4 mostrarem la complexitat de la transformació  $G$  quan se la considera definida a tot el pla real. Aquest fet és conegut i ja es descriu a [20] i al llibre [22, Cap. 15].

# 1 Transformacions de Landen per a integrals el·líptiques

## 1.1 Dues proves de la igualtat de Gauss

Començarem aquesta secció amb dues demostracions de la igualtat (2). La primera és la que va fer Gauss i la segona, deguda a Newman, és la més curta coneguda.

*Prova de Gauss.* L'any 1816, Gauss va provar la igualtat que ens ocupa usant únicament el canvi de variables següent (vegeu també [27])

$$\sin \theta = \frac{2a \sin \varphi}{a + b + (a - b) \sin^2 \varphi},$$

on  $\theta \in (0, \pi/2)$ , per tant  $0 < \sin \theta < 1$  i, també  $\varphi \in (0, \pi/2)$ . Notem que aquest és un bon canvi ja que la funció  $f(x) = \frac{2ax}{(a+b)+(a-b)x^2}$  és creixent a  $[0, 1]$ ,  $f(0) = 0$  i  $f(1) = 1$ . Usant-lo, obtenim,

$$\cos \theta \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{2a(a + b - (a - b) \sin^2 \varphi) \cos \varphi}{(a + b + (a - b) \sin^2 \varphi)^2}.$$

Per altra banda

$$\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} = \frac{a(a + b - (a - b) \sin^2 \varphi)}{a + b + (a - b) \sin^2 \varphi}.$$

Per tant

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int_0^{\pi/2} \frac{a + b + (a - b) \sin^2 \varphi}{a(a + b - (a - b) \sin^2 \varphi)} \cdot \frac{2a(a + b - (a - b) \sin^2 \varphi) \cos \varphi}{(a + b + (a - b) \sin^2 \varphi)^2 \cos \theta} d\varphi \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(a + b + (a - b) \sin^2 \varphi) \cos \theta}. \end{aligned}$$

Observem també que

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{(a + b + (a - b) \sin^2 \varphi)^2 - 4a^2 \sin^2 \varphi}}{a + b + (a - b) \sin^2 \varphi}.$$

Així doncs,

$$\begin{aligned} I(a, b) &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{(a + b + (a - b) \sin^2 \varphi)^2 - 4a^2 \sin^2 \varphi}} \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi ((b - a)^2 \cos^2 \varphi + 4ab)}} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{(b - a)^2 \cos^2 \varphi + 4ab}}. \end{aligned}$$

Ara bé, usant que  $(b - a)^2 = (a + b)^2 - 4ab$  tenim que

$$(b - a)^2 \cos^2 \varphi + 4ab = 4 \left( \left( \frac{a + b}{2} \right)^2 \cos^2 \varphi + (\sqrt{ab})^2 \sin^2 \varphi \right),$$

i substituint aquesta igualtat al denominador de l'expressió anterior obtenim

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cos^2 \varphi + (\sqrt{ab})^2 \sin^2 \varphi}} = I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right).$$

□

*Prova de Newman ([26]).* Usant el canvi de variables  $u = \tan(\theta)$  obtenim

$$I(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(a^2 + u^2)(b^2 + u^2)}}.$$

A continuació, apliquem el segon canvi de variables,  $v = \frac{u}{2} - \frac{ab}{2u}$ . És fàcil comprovar que és bijectiu i que transforma la integral anterior en

$$I(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + v^2}(ab + v^2)}.$$

Finalment usem el tercer canvi  $v = \sqrt{ab} \tan \theta$ , amb el qual arribem de nou a

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cos^2 \theta + ab \sin^2 \theta}} = I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right).$$

□

La prova de Newman ens mostra que l'ús dels canvis de variable és tot un art.

## 1.2 La longitud de la lemniscata

En aquesta secció demostrarem, seguint [13] i usant la igualtat (2), que si  $\mathcal{L}$  és la longitud de la lemniscata, amb equació polar  $r^2 = \cos(2\theta)$  i cartesiana  $(x^2 + y^2)^2 + y^2 - x^2 = 0$ , es compleix que

$$\mathcal{L} = 2\varpi = 4I(\sqrt{2}, 1) = \frac{2\pi}{\text{MAG}(\sqrt{2}, 1)}. \quad (8)$$

*Prova de (8).* És ben conegut que la longitud d'una corba  $\rho = R(\theta)$ ,  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , en coordenades polars ve donada per

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{R^2(\theta) + (R'(\theta))^2} d\theta.$$

En el nostre cas, usant la doble simetria de la lemniscata, tenim

$$\mathcal{L} = 4 \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos(2\theta) + \frac{\sin^2(2\theta)}{\cos(2\theta)}} d\theta = 4 \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(2\theta)}}.$$

Usant el canvi de variable  $\cos(2\theta) = \cos^2 \phi$ , l'anterior integral es transforma en

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \phi}{\sin(2\theta)} d\phi = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \phi d\phi}{\sqrt{1 - \cos^4 \phi}} = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 + \cos^2 \phi}} \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{2 \cos^2 \phi + \sin^2 \phi}} = 4I(\sqrt{2}, 1) = \frac{2\pi}{\text{MAG}(\sqrt{2}, 1)}.\end{aligned}$$

Observem que en el darrer pas s'ha usat la igualtat (4).

Per a provar la darrera igualtat de (8) que ens falta aplicarem el canvi de variable  $z = \cos \phi$  en la penúltima expressió integral de  $\mathcal{L}$ ,

$$\mathcal{L} = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 + \cos^2 \phi}} = 4 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2} \sqrt{1 - z^2}} = 4 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^4}},$$

tal i com volíem veure. □

### 1.3 Mitjana aritmètico-geomètrica i un exemple de càlcul

Com ja hem comentat, la mitjana aritmètico-geomètrica de  $a > 0$  i  $b > 0$ ,  $\text{MAG}(a, b)$ , és el límit comú de les successions  $\{a_n\}_n$  i  $\{b_n\}_n$  determinades per l'algoritme següent

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},$$

prenent  $a_0 = a$  i  $b_0 = b$ . Sembla ser, que aquest algoritme va aparèixer primer en un document de Lagrange (1784-1785), però va ser Gauss qui el va estudiar amb més profunditat. De fet, ell va redescobrir la mitjana aritmètico-geomètrica l'any 1771, quan tenia 14 anys. Després amb 22-23 anys (1799-1800) va escriure un llarg treball ([16]) explicant els seus descobriments, però que no va ser publicat fins bastant més tard, vegeu [2, Sec. 2].

Veiem en primer lloc que ambdós límits existeixen i són iguals, degut a que les dues successions són monòtones i fitades. No és restrictiu suposar que  $a \geq b$ , i així ho farem d'ara en endavant. La desigualtat següent entre ambdues mitjanes és de tots prou coneguda  $(a + b)/2 \geq \sqrt{ab}$ , i implica que  $a_n \geq b_n$  per a tot  $n \geq 0$ . Així,

$$a_n \geq \frac{a_n + b_n}{2} = a_{n+1} \geq b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq b_n.$$

Disposem doncs, d'una successió  $\{a_n\}_n$  decreixent i fitada inferiorment per  $b$  i, d'una successió  $\{b_n\}_n$  creixent i fitada superiorment per  $a$ ,

$$a = a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq b_n \geq \dots \geq b_1 \geq b_0 = b.$$

Per tant, ambdues tenen límit. Siguin  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  i  $B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . Prenent límits per exemple a  $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ , tenim que  $A = (A + B)/2$  i per tant  $A = B := \text{MAG}(a, b)$ , tal i com volíem veure.



Anem a estudiar la velocitat de convergència de les dues successions. Per a fer-ho, observem en primer lloc que

$$0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \frac{a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n}}{2}$$

$$= \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{2} = \frac{((\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}))^2}{2(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2} = \frac{1}{2} \frac{(a_n - b_n)^2}{(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2}.$$

Per tant, si introduïm la successió auxiliar  $\ell_n = (a_n - b_n)/2$ , obtenim

$$2\ell_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{(a_n - b_n)^2}{(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2} = \frac{1}{2} \frac{4\ell_n^2}{(a_n + b_n + 2\sqrt{a_n b_n})} = \frac{\ell_n^2}{a_{n+1} + b_{n+1}} \leq \frac{\ell_n^2}{2b}.$$

Per tant  $\ell_{n+1} \leq \ell_n^2/(4b)$ . Aquesta desigualtat implica la longitud de l'interval on hi ha el límit,  $\text{MAG}(a, b)$ , decreix quadràticament.

Notem a continuació algunes de les propietats que compleix aquesta mitjana i, que són ben fàcils de demostrar

- $\text{MAG}(a, b) = \text{MAG}(a_1, b_1) = \text{MAG}(a_2, b_2) = \dots = \text{MAG}(a_n, b_n) = \dots$ ,
- $\text{MAG}(ca, cb) = c \text{MAG}(a, b)$  per tot  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c > 0$ ,
- $\text{MAG}(a, a) = a$ ,  $\text{MAG}(a, b) = \text{MAG}(b, a)$ ,
- si  $b < a$ ,  $b < \text{MAG}(a, b) < a$ .

De fet, quan un operador  $\mathcal{M} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  compleix les tres últimes propietats es diu que és una “mitjana”. Veurem exemples d'altres mitjanes a les Seccions 2.1 i 2.2.

Com a il·lustració de la seva convergència quadràtica i per a obtenir aproximacions de la longitud de la lemniscata de la secció anterior i d'una integral el·líptica, anem a calcular les primeres xifres significatives de  $\text{MAG}(\sqrt{2}, 1)$ . Obtenim:

$n$	$a_n$	$b_n$
0	1.414213562373095048802	1
1	1.207106781186547524401	1.189207115002721066718
2	1.198156948094634295560	1.198123521493120122607
3	1.198140234793877209084	1.198140234677307205799
4	1.198140234735592207442	1.198140234735592207440
5	1.198140234735592207441	1.198140234735592207441

Per tant  $\text{MAG}(\sqrt{2}, 1) \approx 1.1981402347$ . A partir d'aquest resultat tenim

$$I(\sqrt{2}, 1) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\text{MAG}(\sqrt{2}, 1)} \approx 1.31102878 \quad \text{i} \quad \mathcal{L} = \frac{2\pi}{\text{MAG}(\sqrt{2}, 1)} \approx 5.2441151.$$

## 1.4 L'algoritme de Brent-Salamin

El 1973 i de manera independent, Eugène Salamin i Richard Brent van trobar un mètode per a aproximar  $\pi$  amb gran velocitat (veure [3, 14]). La demostració de la convergència està basada en la teoria de les integrals el·líptiques. Per a entendre d'on surt aquest mètode necessitarem doncs uns quants resultats previs sobre aquest tema.

### 1.4.1 Algunes propietats de les funcions el·líptiques

Començarem fent una breu introducció del tema, recordant les notacions i propietats que necessitarem per a deduir l'algoritme de Brent-Salamin. Podeu trobar tota aquesta informació i molt més a [1, 4, 8, 25].

En general, s'anomena *integral el·líptica* a una integral de la forma  $\int R(x, \sqrt{P(x)}) dx$ , on  $R(x, y)$  és una funció racional en  $x$  i en  $y$  i,  $P(x)$  és un polinomi de grau 3 o 4 sense arrels múltiples. En el cas particular que hi hagi límits d'integració, aleshores parlarem d'una *integral el·líptica completa*.

Tot i que primerament varen ser considerades per Fragnano, Euler, Lagrange i Landen, aquestes van ser tractades sistemàticament per Legendre, el qual va demostrar que qualsevol integral el·líptica pot relacionar-se amb tres integrals fonamentals. Aquestes tres integrals s'anomenen *integrals el·líptiques canòniques de Legendre* de primera, segona i tercera espècie. Les formes normals de Legendre no són les úniques possibles, però s'han mostrat molt útils i són les més comunament utilitzades.

Nosaltres usarem només les integrals el·líptiques completes de primera i segona espècie  $K(k)$  i  $E(k)$ , respectivament. Aquestes són,

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$
$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - k^2 t^2} dt}{\sqrt{1 - t^2}},$$

on  $0 < k < 1$ . Per exemple, la segona integral apareix en el càlcul de la longitud  $\mathcal{L}$  d'una el·lipse amb semieixos  $a$  i  $b$ . De fet

$$\mathcal{L} = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta = 4aE\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right)$$

i d'aquí el nom d'aquestes integrals. També apareixen en l'expressió del període d'un pèndol en funció de l'energia, vegeu aquest exemple i d'altres a [25].

Les *integrals complementàries*<sup>3</sup>  $E'$  i  $K'$  són les integrals  $E$  i  $K$  avaluades en la variable complementària  $k' = \sqrt{1 - k^2}$ . De fet,  $k$  s'anomena *mòdul* i  $k'$  s'anomena *mòdul comple-*

---

<sup>3</sup>No confondre amb les derivades respecte a  $k$  d' $E$  i  $K$ .

mentari. És a dir

$$K'(k) = K(\sqrt{1-k^2}) = K(k') \quad \text{i} \quad E'(k) = E(\sqrt{1-k^2}) = E(k') \quad (9)$$

i es compleix la bonica *relació de Legendre*<sup>4</sup>, veure per exemple [4, pàg.24],

$$E(k)K'(k) + E'(k)K(k) - K(k)K'(k) = \pi/2. \quad (10)$$

Les funcions  $E$  i  $K$  estan també molt lligades amb la integral que apareix a (2) i amb una variació d'aquesta que tindrà també un paper important en el que segueix. No és difícil veure que per  $a > b > 0$ ,

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} = \frac{1}{a} K\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right) = \frac{1}{a} K'\left(\frac{b}{a}\right), \quad (11)$$

$$J(a, b) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta = aE\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right) = aE'\left(\frac{b}{a}\right). \quad (12)$$

Abans de continuar provarem dos lemes tècnics. En una primera lectura del treball, potser és aconsellable saltar les seves proves. El primer d'ells estén la igualtat (2) a la funció  $J(a, b)$ . Recordem que  $(a_{n+1}, b_{n+1}) = F(a_n, b_n)$  són les successions que defineixen la  $\text{MAG}(a, b)$ .

**Lema 1.** ([4, pàg.13]) *Les integrals  $I(a, b)$  i  $J(a, b)$  compleixen*

$$(i) \quad I(a_n, b_n) = I(a_{n+1}, b_{n+1}),$$

$$(ii) \quad 2J(a_{n+1}, b_{n+1}) - J(a_n, b_n) = a_n b_n I(a_n, b_n).$$

*Demostració.* (i) La primera part és equivalent a (2).

(ii) Considerem  $k_n := c_n/b_n$  on  $c_n^2 = a_n^2 - b_n^2$ . Aleshores  $k'_n = \sqrt{1 - k_n^2} = b_n/a_n$ . Per tant, fent ús de les relacions obtingudes en (9),(11) i (12), obtenim

$$2J(a_{n+1}, b_{n+1}) = 2a_{n+1}E\left(\sqrt{1 - \frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}^2}}\right) = 2a_{n+1}E\left(\frac{c_{n+1}}{a_{n+1}}\right) = 2a_{n+1}E(k_{n+1}),$$

$$J(a_n, b_n) = a_n E\left(\sqrt{1 - \frac{b_n^2}{a_n^2}}\right) = a_n E\left(\frac{c_n}{a_n}\right) = a_n E(k_n), \quad (13)$$

$$a_n b_n I(a_n, b_n) = b_n K\left(\sqrt{1 - \frac{b_n^2}{a_n^2}}\right) = b_n K\left(\frac{c_n}{a_n}\right) = b_n K(k_n). \quad (14)$$

Per tant la igualtat que volem demostrar és equivalent a

$$2a_{n+1}E(k_{n+1}) - a_n E(k_n) = b_n K_n. \quad (15)$$

---

<sup>4</sup>Com veurem, l'aparició de  $\pi$  en la igualtat de Legendre és el fet clau que permetrà construir l'algoritme.

Usant la igualtat [4, Teo. 1.2(d)]

$$E(k_n) = E\left(\frac{1-k'_n}{1+k'_n}\right)(1+k'_n) - k'_n K(k_n)$$

i, tenint en compte que

$$k_{n+1} = \frac{c_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2}}{\frac{a_n + b_n}{2}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{a_n b_n}\right)^2}}{\frac{a_n + b_n}{2}} = \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n} = \frac{1 - k'_n}{1 + k'_n},$$

obtenim

$$E(k_{n+1}) = \frac{E(k_n) + k'_n K(k_n)}{1 + k'_n} = \frac{a_n E(k_n) + b_n K(k_n)}{a_n + b_n} = \frac{a_n E(k_n) + b_n K(k_n)}{2a_{n+1}},$$

que és precisament (15). □

**Lema 2.** ([4, pàg.15]) Considerem  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = k' \in (0, 1]$ ,  $c_0 = k$  i  $\{(a_n, b_n)\}_n$ , la successió generada per a calcular la  $\text{MAG}(1, k')$ . Aleshores

$$(i) \quad K(k) = \frac{\pi}{2 \text{MAG}(1, k')}.$$

$$(ii) \quad E(k) = (1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2) K(k).$$

*Demostració.* (i) Usant (4) i (11) tenim

$$\frac{1}{a} K\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right) = I(a, b) = \frac{1}{\text{MAG}(a, b)} \frac{\pi}{2}.$$

Prenent  $b = k' = \sqrt{1 - k^2}$  i  $a = 1$  obtenim el resultat desitjat.

(ii) Si introduïm la notació  $J_{n+1} = J(a_{n+1}, b_{n+1})$ ,  $I_n = I(a_n, b_n)$ , sabem pel Lema 1 que

$$2J_{n+1} - J_n = a_n b_n I_n = a_n b_n I_0.$$

Com que  $4a_{n+1}^2 - 2a_n^2 - 2a_n b_n = b_n^2 - a_n^2 = -c_n^2$ , l'expressió anterior és pot escriure com

$$4J_{n+1} - 2J_n = 2a_n b_n I_0 = (4a_{n+1}^2 - 2a_n^2 + c_n^2) I_0.$$

Si multipliquem l'expressió obtinguda per  $2^{n-1}$ , obtenim  $2^{n+1} J_{n+1} - 2^n J_n = 2^{n+1} a_{n+1}^2 I_0 - 2^n a_n^2 I_0 + 2^{n-1} c_n^2 I_0$ , o equivalentment,

$$2^{n+1}(J_{n+1} - a_{n+1}^2 I_0) - 2^n(J_n - a_n^2 I_0) = 2^{n-1} c_n^2 I_0.$$

Considerant ara la successió auxiliar  $w_n = 2^n(J_n - a_n^2 I_0)$ , l'expressió obtinguda es pot escriure com  $w_{n+1} - w_n = 2^{n-1} c_n^2 I_0$ , i sumant a ambdós costats,

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2 I_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (w_{n+1} - w_n) = -w_0 + \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n. \quad (16)$$

En aquest punt, afirmem que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ . Veiem que suposant certa aquesta afirmació, ja hem acabat la prova. Efectivament, ja que aleshores  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2 I_0 = -w_0 = -J_0 + a_0^2 I_0 = -J_0 + I_0$  i per tant

$$J_0 = \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2\right) I_0,$$

d'on obtenim la igualtat que volíem provar, ja que usant (13), (14) i que  $a_0 = 1$ , i  $k_0 = k$ , sabem que  $J_0 = E(k)$  i  $I_0 = K(k)$ .

Anem doncs a provar l'afirmació anterior. Tenim que

$$\begin{aligned} w_n &= 2^n (J_n - a_n^2 I_0) = 2^n (J_n - a_n^2 I_n) \\ &= 2^n \left( \int_0^{\pi/2} \sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta} \, d\theta - a_n^2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} \right) \\ &= 2^n \int_0^{\pi/2} \frac{-c_n^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} \, d\theta. \end{aligned}$$

Així doncs

$$|w_n| = 2^n \int_0^{\pi/2} \frac{c_n^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} \, d\theta = 2^n c_n^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} \, d\theta.$$

D'on tenim

$$0 \leq |w_n| \leq 2^n c_n^2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} = 2^n c_n^2 I_n = 2^n c_n^2 I_0. \quad (17)$$

Ara bé com

$$4a_n c_n = 4 \left( \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \right) \left( \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2} \right) = a_{n-1}^2 - b_{n-1}^2 = c_{n-1}^2,$$

veiem finalment que per  $n$  prou gran

$$c_n = \frac{c_{n-1}^2}{4a_n} = \frac{c_{n-1}}{2} \frac{c_{n-1}}{2a_n} \leq \frac{c_{n-1}}{2}. \quad (18)$$

Per això és suficient demostrar, que per  $n$  prou gran,  $c_{n-1}/(2a_n) \leq 1$ , o equivalentment, usant de nou que  $c_{n-1} = (a_{n-1} - b_{n-1})/2$ , que  $a_{n-1} - b_{n-1} \leq 4a_n$ . Ara bé, aquesta desigualtat és clarament certa, ja que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \text{MAG}(a_0, b_0) \neq 0$ . Per tant, usant (17) i (18) arribem a

$$0 \leq |w_n| \leq 2^n c_n^2 I_0 \leq \frac{c_0^2 I_0}{2^n},$$

i així  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$ , tal i com volíem demostrar. Observem que (18) dóna una nova prova de la convergència quadràtica del càlcul de la mitjana aritmètico-geomètrica.  $\square$

**Teorema 3. (Algoritme de Brent-Salamin)** ([4, pàg.48])

Considerem la successió  $\{(a_n, b_n)\}_n$  definida per a calcular  $\text{MAG}(a_0, b_0)$  amb  $a_0 = 1$  i  $b_0 = 1/\sqrt{2}$ . Aleshores

$$\pi = \frac{4 \text{MAG}^2(1, 1/\sqrt{2})}{1 - \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j+1}(a_j^2 - b_j^2)}.$$

A més, si definim la successió

$$z_n = \frac{(a_n + b_n)^2}{1 - \sum_{j=1}^n 2^{j+1}(a_j^2 - b_j^2)},$$

es compleix<sup>5</sup> que  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \pi$ .

*Demostració.* Observem que quan  $k = 1/\sqrt{2}$ ,  $k' = k$ . Aleshores  $K'(1/\sqrt{2}) = K(1/\sqrt{2})$ ,  $E'(1/\sqrt{2}) = E(1/\sqrt{2})$  i la igualtat de Legendre (10) ens diu que

$$2E(1/\sqrt{2})K(1/\sqrt{2}) - K^2(1/\sqrt{2}) = \frac{\pi}{2}. \quad (19)$$

Altrament, per l'apartat (ii) del Lema 2, i recordant que  $c_j^2 = a_j^2 - b_j^2$ , tenim

$$E(1/\sqrt{2}) = \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} 2^j (a_j^2 - b_j^2)\right) K(1/\sqrt{2}).$$

Per tant, substituint aquest resultat a l'expressió (19) :

$$K^2(1/\sqrt{2}) \left(2 - \sum_{j=0}^{\infty} 2^j (a_j^2 - b_j^2) - 1\right) = K^2(1/\sqrt{2}) \left(1 - \sum_{j=0}^{\infty} 2^j (a_j^2 - b_j^2)\right) = \frac{\pi}{2}. \quad (20)$$

Usant l'apartat (i) del Lema 2, tenim

$$\left(\frac{\pi}{2 \text{MAG}(1, 1/\sqrt{2})}\right)^2 \left(1 - \sum_{j=0}^{\infty} 2^j (a_j^2 - b_j^2)\right) = \frac{\pi}{2},$$

i per tant,

$$\left(1 - \sum_{j=0}^{\infty} 2^j (a_j^2 - b_j^2)\right) \frac{\pi}{2 \text{MAG}^2(1, 1/\sqrt{2})} = 1.$$

Operant, i usant que  $a_0^2 - b_0^2 = 1/2$ , arribem a a l'expressió de  $\pi$  desitjada.

$$\pi = \frac{2 \text{MAG}^2(1, 1/\sqrt{2})}{1 - \sum_{j=0}^{\infty} 2^j (a_j^2 - b_j^2)} = \frac{4 \text{MAG}^2(1, 1/\sqrt{2})}{1 - \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j+1} (a_j^2 - b_j^2)}.$$

---

<sup>5</sup>Com ja hem comentat es pot veure que la convergència és quadràtica.

Per tal d'acabar la prova, observem en primer lloc que com  $\text{MAG}(1, 1/\sqrt{2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , la següent successió

$$u_n = \frac{4a_n^2}{1 - \sum_{j=1}^n 2^{j+1}(a_j^2 - b_j^2)},$$

té com a límit  $\pi$ . Ara bé, com que al pas  $n$ -èssim ja coneixem  $a_n$  i  $b_n$ , i  $a_{n+1}$  és més a prop del límit que  $a_n$ , és ben natural considerar la successió

$$z_n = \frac{4a_{n+1}^2}{1 - \sum_{j=1}^n 2^{j+1}(a_j^2 - b_j^2)} = \frac{(a_n + b_n)^2}{1 - \sum_{j=1}^n 2^{j+1}(a_j^2 - b_j^2)},$$

que també convergeix a  $\pi$  i és la donada per l'algoritme.  $\square$

## 2 Altres transformacions de Landen donades per mitjanes generalitzades

En aquesta secció recollirem altres transformacions de Landen que ens serviran per calcular diferents funcions transcendents. En particular estudiarem com calcular la mitjana geomètrica-harmònica i els resultats de Carlson ([9]) que estudien unificadament diversos casos.

### 2.1 La mitjana harmònico-geomètrica

És fàcil veure que si  $I$  és una integral primera del SDD donat per  $F$ , és a dir si  $I \circ F = I$ , aleshores donada qualsevol aplicació bijectiva  $\varphi$  es compleix que  $L = I \circ \varphi$  és una integral primera del SDD donat per  $G = \varphi^{-1} \circ F \circ \varphi$ . En efecte,

$$L \circ G = I \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ F \circ \varphi = I \circ F \circ \varphi = I \circ \varphi = L.$$

En llenguatge de sistemes dinàmics diríem que si  $F$  dóna lloc a un SDD integrable, el mateix passa per a qualsevol SDD conjugat a  $F$ .

Si prenem  $I$  i  $F$  com a (1) i (2), i  $\varphi(a, b) = (1/a, 1/b)$ , obtenim que

$$L(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{ab \, d\theta}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} = abI(b, a) = abI(a, b), \quad (21)$$

és una integral primera de

$$G(a, b) = \left( \frac{2ab}{a+b}, \sqrt{ab} \right).$$

Observi's que la primera component de  $G$  és precisament la mitjana harmònica d' $a$  i  $b$ . El límit  $(\ell, \ell)$  de la iteració  $(a_{n+1}, b_{n+1}) = G^n(a_n, b_n)$  és el que s'anomena mitjana harmònico-geomètrica dels dos números,  $\ell = \text{MHG}(a, b)$ . Argumentant com a la prova de (4) obtenim que  $L(a, b) = \text{MHG}(a, b) \frac{\pi}{2}$ . Per tant, usant (4) i (21) obtenim

$$\text{MAG}(a, b) \cdot \text{MHG}(a, b) = ab.$$

## 2.2 Els resultats de Carlson

En el treball [9], Carlson estén la igualtat (2) a altres tipus de mitjanes. Donats  $a$  i  $b$  positius, considerem per a cada parell  $(i, j)$  on  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , les següents successions:

$$\begin{aligned} a_0 &:= a, & b_0 &:= b, \\ a_{n+1} &:= f_i(a_n, b_n), & b_{n+1} &:= f_j(a_n, b_n), \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned} f_1(a, b) &:= \frac{a+b}{2}, & f_2(a, b) &:= \sqrt{ab}, \\ f_3(a, b) &:= \sqrt{a \frac{a+b}{2}}, & f_4(a, b) &:= \sqrt{\frac{a+b}{2} b}. \end{aligned}$$

De manera anàloga al què hem vist quan estudiàvem la mitjana aritmètico-geomètrica, es pot veure que, un cop fixats  $i$  i  $j$ , les successions  $\{a_n\}_n$  i  $\{b_n\}_n$  definides anteriorment, convergeixen i ho fan al mateix límit, al qual el denotarem com segueix

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n := \ell_{i,j}(a_0, b_0).$$

Recordem també que la funció Beta es defineix com

$$B(m, n) = \int_0^{\infty} t^{m-1} (1+t)^{-(m+n)} dt,$$

per a  $m$  i  $n$  positius. Incloem a continuació el resultat de Carlson i la seva prova.

**Teorema 4.** ([9]) *Considerem la funció*

$$R(r; s, s'; a^2, b^2) := \frac{1}{B(r, r')} \int_0^{\infty} t^{r'-1} (t+a^2)^{-s} (t+b^2)^{-s'} dt, \quad (22)$$

on  $r' = s + s' - r$ . Si prenem els respectius paràmetres  $(r, s, s')$  d'acord amb la taula:

$(i, j)$	$F_{i,j}(a, b)$	$(r, s, s')$
$(1, 2)$	$\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$(1, 3)$	$\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{a \frac{a+b}{2}}\right)$	$\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$
$(1, 4)$	$\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{\frac{a+b}{2} b}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$
$(2, 3)$	$\left(\sqrt{ab}, \sqrt{a \frac{a+b}{2}}\right)$	$\left(1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$
$(2, 4)$	$\left(\sqrt{ab}, \sqrt{\frac{a+b}{2} b}\right)$	$\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$
$(3, 4)$	$\left(\sqrt{a \frac{a+b}{2}}, \sqrt{\frac{a+b}{2} b}\right)$	$(1, 1, 1)$



s'obté que  $R(r; s, s'; a^2, b^2)$  és una integral primera de la funció  $F_{i,j}(a, b) := (f_i(a, b), f_j(a, b))$ ,  $j > i$ . Es a dir, pels  $(r, s, s')$  corresponents als  $i < j$  considerats,

$$R(r; s, s'; a^2, b^2) = R(r; s, s'; f_i^2(a, b), f_j^2(a, b)). \quad (23)$$

A més, es compleix que

$$\ell_{i,j}(a, b) = \left( R(r; s, s'; a^2, b^2) \right)^{-\frac{1}{2r}}. \quad (24)$$

*Demostració.* Fixats  $a$  i  $b$ , considerem el canvi de variable  $t = (s(s + f_2^2))/(s + f_1^2)$ , on per simplicitat, denotem  $f_k(a, b)$  per  $f_k$ . Aleshores,

$$\frac{dt}{ds} = \frac{(s + f_3^2)(s + f_4^2)}{(s + f_1^2)^2}, \quad t + a^2 = \frac{(s + f_3^2)^2}{s + f_1^2}, \quad t + b^2 = \frac{(s + f_4^2)^2}{s + f_1^2}.$$

Substituint les tres igualtats a l'expressió (22) tenim

$$R(r; s, s'; a^2, b^2) = \frac{1}{B(r, r')} \int_0^\infty s^{r'-1} (s + f_1^2)^{r-1} (s + f_2^2)^{r'-1} (s + f_3^2)^{1-2s} (s + f_4^2)^{1-2s'} ds. \quad (25)$$

Donada que la nostra intenció és provar que (22) és integral primera de  $F_{i,j}$ , s'haurà de complir que coincideixin els integrands de (22) i (25). Per exemple, considerem el cas  $i = 1$  i  $j = 2$ , que correspon al cas de la mitjana aritmètico-geomètrica anteriorment estudiat. Aleshores les expressions que contenen  $f_3$  i  $f_4$  no haurien d'aparèixer en (25), i per tant:

$$1 - 2s = 0, \quad 1 - 2s' = 0, \quad r - 1 = -s, \quad r' - 1 = -s'.$$

Així doncs, obtenim que  $s = s' = r = r' = 1/2$ , que són precisament el valors que apareixen a la taula. De la mateixa manera, provaríem el reste de casos.

Per a calcular  $\ell_{i,j}(a, b)$ , denotem per  $R_S(a^2, b^2)$  la funció corresponent  $R(r; s, s'; a^2, b^2)$  obtinguda, un cop fixats el valors de  $(r; s, s')$ . Com que acabem de veure que independentment del valor de  $n \in \mathbb{N}$  es compleix que:

$$R_S(a^2, b^2) = R_S((f_i^n(a, b))^2, (f_j^n(a, b))^2),$$

prenent límits a ambdós costats obtenim

$$\begin{aligned} R_S(a^2, b^2) &= R_S(\ell_{i,j}^2(a, b), \ell_{i,j}^2(a, b)) = \frac{1}{B(r, r')} \int_0^\infty t^{r'-1} (t + \ell_{i,j}^2)^{-s} (t + \ell_{i,j}^2)^{-s'} dt \\ &= \frac{1}{B(r, r')} \ell_{i,j}^{2r'-2s-2s'}(a, b) \int_0^\infty u^{r'-1} (u + 1)^{-s} (u + 1)^{-s'} du \\ &= \ell_{i,j}^{-2r}(a, b) \frac{B(r', r)}{B(r, r')} = \ell_{i,j}^{-2r}(a, b), \end{aligned}$$

on, en el darrer pas, hem usat que  $B(r, r') = B(r', r)$ , veure per exemple [1]. Per tant es compleix (24).  $\square$

Quan  $(i, j) = (1, 2)$ , la integral primera

$$R\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; a^2, b^2\right) = \frac{1}{B(1/2, 1/2)} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t(t+a^2)(t+b^2)}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t(t+a^2)(t+b^2)}},$$

coincideix, mòdul una constant, amb la donada per la igualtat (2) ja que es pot veure que si  $a^2 > b^2 > 0$ ,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t(t+a^2)(t+b^2)}} = \frac{2}{a\pi} K\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right) = \frac{2}{\pi} I(a, b).$$

Altres exemples similars als del Teorema 4 estan desenvolupats a [5].

### 3 Transformades de Landen per integrals racionals

En aquesta secció buscarem transformades de Landen per a certes integrals definides de tipus racional. Recollirem alguns dels resultats de [21, 23, 24].

Intuïtivament podríem dir que el procés de construcció de transformacions de Landen consisteix en fer una sèrie de canvis trigonomètrics que a continuació es desfan, però el procés complert no és tautològic degut a que en un punt intermedi alguns sumands de la integral desapareixen degut a certes simetries. Per aquesta raó començarem aquesta secció amb la següent observació que ens mostra algunes integrals que valen zero.

**Lema 5.** Donat  $k \in \mathbb{N}$  imparell i  $P$  un polinomi parell que no s'anul·la a l'interval  $[-1, 1]$ ,

$$\int_0^\pi \frac{\cos^k t}{P(\cos t)} dt = 0.$$

*Demostració.* Aplicant el canvi de variables  $t = \pi - s$ , tenim

$$\int_0^\pi \frac{\cos^k t}{P(\cos t)} dt = \int_0^\pi \frac{\cos^k(\pi - s)}{P(\cos(\pi - s))} ds = \int_0^\pi \frac{(-\cos s)^k}{P(-\cos s)} ds = - \int_0^\pi \frac{\cos^k s}{P(\cos s)} ds,$$

i per tant la integral s'anul·la, tal i com volíem demostrar.  $\square$

#### 3.1 Funcions racionals simètriques amb denominador de grau 4

Dedicarem aquesta secció a provar (5). Per  $a > -2$ , si

$$I(a, b, c) = \int_0^\infty \frac{bx^2 + c}{x^4 + ax^2 + 1} dx,$$

el que volem veure és que  $I(F(a, b, c)) = I(a, b, c)$ , on  $F(a, b, c) = \left(2, \frac{b+c}{\sqrt{a+2}}, \frac{b+c}{\sqrt{a+2}}\right)$ . Si anomenem  $P(x) = bx^2 + c$  i  $Q(x) = x^4 + ax^2 + 1$ , tenim

$$I(a, b, c) = \int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int_0^\infty \frac{P(x)x^4 Q(1/x)}{Q(x)x^4 Q(1/x)} dx.$$

Si fem ara primer el canvi de variables  $x = \tan \theta$  i a continuació  $t = 2\theta$ , arribem a

$$\begin{aligned} I(a, b, c) &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{A \cos^3(2\theta) + B \cos^2(2\theta) + C \cos(2\theta) + D}{E \cos^4(2\theta) + F \cos^2(2\theta) + H} d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{A \cos^3 t + B \cos^2 t + C \cos t + D}{E \cos^4 t + F \cos^2 t + H} dt = \int_0^\pi \frac{B \cos^2 t + D}{E \cos^4 t + F \cos^2 t + H} dt, \end{aligned}$$

on a l'última igualtat hem usat el Lema 5. Els valors dels paràmetres són  $A = (2-a)(c-b)$ ,  $B = (2-a)(c+b)$ ,  $C = (2+a)(c-b)$ ,  $D = (2+a)(c+b)$ ,  $E = (a-2)^2$ ,  $F = 8 - 2a^2$  i  $H = (a+2)^2$ .

Usant que  $\cos^2 t = (1 + \cos(2t))/2$  i fent el nou canvi  $s = 2t$ ,

$$I(a, b, c) = 2(b+c) \int_0^\pi \frac{(2-a) \cos s + a + 6}{(2-a)^2 \cos^2(s) + 2(2-a)(a+6) \cos s + (a+6)^2} ds.$$

Introduint a continuació  $y$ , tal que  $y = \tan(s/2)$ , obtenim ja el resultat buscat

$$I(a, b, c) = (b+c) \int_0^\infty \frac{2(a+2)y^2 + 8}{(a+2)^2 y^4 + 8(a+2)y^2 + 16} dy = I(F(a, b, c)),$$

on a la darrera igualtat hem fet el reescalat  $z = \sqrt{a+2}y/2$ .

### 3.2 Funcions racionals simètriques amb denominador de grau 6

Seguint passos similars als de la secció anterior anem a demostrar que agafant  $F(a, b, c, d, e) = (G(a, b), H(a, b, c, d, e))$ , amb  $G$  i  $H$  com a (6) i (7), es verifica que

$$I(a, b, c, d, e) = \int_0^\infty \frac{cx^4 + dx^2 + e}{x^6 + ax^4 + bx^2 + 1} dx,$$

és una integral primera de  $F$ .

Si definim  $P(x) = cx^4 + dx^2 + e$  i  $Q(x) = x^6 + ax^4 + bx^2 + 1$ , aleshores

$$I = I(a, b, c, d, e) = \int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int_0^\infty \frac{P(x) x^6 Q(1/x)}{Q(x) x^6 Q(1/x)} dx.$$

Observem que el nou denominador és un polinomi recíproc. Si considerem primer el canvi de variables  $x = \tan \theta$ , i després fem  $t = 2\theta$  obtenim

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{A \cos^5(2\theta) + B \cos^4(2\theta) + C \cos^3(2\theta) + D \cos^2(2\theta) + E \cos(2\theta) + F}{G \cos^6(2\theta) + H \cos^4(2\theta) + J \cos^2(2\theta) + K} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{A \cos^5 t + B \cos^4 t + C \cos^3 t + D \cos^2 t + E \cos t + F}{G \cos^6 t + H \cos^4 t + J \cos^2 t + K} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{B \cos^4 t + D \cos^2 t + F}{G \cos^6 t + H \cos^4 t + J \cos^2 t + K} dt, \end{aligned}$$

on, a l'última igualtat hem usat de nou el Lema 5, i on els paràmetres venen donats per

$$\begin{aligned}
A &= -(c + e - d)(a - b), \\
B &= -3(ea + cb) + db + eb + da + ca + 6(-d + c + e), \\
C &= 12(e - c) + 2(-ea - eb - da + db + ca + cb), \\
D &= 8(c + e) + 4d + 2(-ca - db - eb + ea - da + cb), \\
E &= 4(e - c) - ca + da - db + eb + 3(-cb + ea), \\
F &= (c + d + e)(a + 2 + b), \\
G &= -(a - b)^2, \\
H &= -12(a + b) - 2ba + 36 + 3(b^2 + a^2), \\
J &= -3(a^2 + b^2) - 2ba + 24 + 8(b + a), \\
K &= (a + 2 + b)^2.
\end{aligned}$$

Expressant ara l'integrand en funció de  $\cos(2t)$  i, considerant  $s = 2t$ . Arribem a

$$I = 2 \int_0^\pi \frac{A_2 \cos^2 s + B_2 \cos s + C_2}{D_2 \cos^3(s) + E_2 \cos^2 s + F_2 \cos s + G_2} ds,$$

on,

$$\begin{aligned}
A_2 &= 6(c + e - d) - 3(ea + cb) + ca + db + da + eb, \\
B_2 &= 28(c + e) - 4d - 2(e + c + d)(a + b), \\
C_2 &= 5(2d + 6c + 6e + cb + ea) + db + ca + eb + da, \\
D_2 &= -(a - b)^2, \\
E_2 &= -24(a + b - 3) + 3(a^2 + b^2) + 2ba, \\
F_2 &= -16(a + b) - 3(a^2 + b^2) - 10(ba - 24), \\
G_2 &= 40(a + b + 5) + a^2 + b^2 + 6ba.
\end{aligned}$$

Si ara prenem  $y = \tan(s/2)$ , obtenim ja una integral similar a l'inicial, concretament,

$$I(a, b, c, d, e) = \int_0^\infty \frac{A_3 y^4 + B_3 y^2 + C_3}{D_3 y^6 + E_3 y^4 + F_3 y^2 + G_3} dy,$$

amb,

$$\begin{aligned}
A_3 &= 2(c + d + e)(a + b + 2), & B_3 &= 8((b + 3)c + (a + 3)e + 2d), & C_3 &= 32(c + e), \\
D_3 &= (a + b + 2)^2, & E_3 &= 4(5a + 5b + ab + 9), & F_3 &= 16(a + b + 6) \quad \text{i} \quad G_3 = 64.
\end{aligned}$$

Per a acabar de veure que  $I(a, b, c, d, e) = I(F(a, b, c, d, e))$ , l'únic que cal fer és el rescalat  $z = r \sqrt[6]{D_3/G_3} = \sqrt[3]{a + b + 2}y/2$ .

### 3.2.1 Un exemple d'aplicació

Anem a aproximar la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{3x^4 - x^2 + 24}{x^6 + 10x^4 + 8x^2 + 1} dx$$

usant la transformació de Landen donada a la secció anterior. Usant les iteracions donades per la funció  $F$  donada per (6) i (7) obtenim,

$n$	$a_n$	$b_n$	$c_n$	$d_n$	$e_n$
0	10	8	3	-1	24
1	3.297208191	3.257301140	3.528742902	17.15000000	9.946885046
2	3.001485673	3.001486131	7.321863016	13.91289768	6.588966668
3	3.000000046	3.000000045	6.954209737	13.90876371	6.954553797
4	2.999999999	3.000000000	6.954381760	13.90876349	6.954381739
5	3.000000000	3.000000000	6.954381748	13.90876350	6.954381750
6	3.000000000	3.000000000	6.954381750	13.90876350	6.954381750
7	3.000000000	3.000000000	6.954381750	13.90876350	6.954381750

Com que  $a_6 \approx b_6 \approx 3$ ,  $c_6 \approx e_6 \approx 6.954381750$  i  $d_6 \approx 2c_6$ , amb aquests iterats ja en tenim prou per a fer un càlcul aproximat de la integral. Per tant,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{3x^4 - x^2 + 24}{x^6 + 10x^4 + 8x^2 + 1} dx &\approx \int_0^{\infty} \frac{c_6x^4 + 2c_6x^2 + c_6}{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1} dx \\ &= c_6 \int_0^{\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{(x^2 + 1)^3} dx = c_6 \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{c_6\pi}{2} \approx 10.92391731. \end{aligned}$$

*Nota 6.* A [6] es demostra una extensió del casos considerats en aquesta secció per denominadors parells de graus arbitraris.

## 4 Un sistema dinàmic ben complicat

Per acabar aquest treball, i seguint [11, 20, 22], mostrarem en aquesta secció com de complicat és el SDD generat per l'aplicació  $G$ , introduïda a (6),

$$G(a, b) = \left( \frac{5a + 5b + ab + 9}{\sqrt[3]{(a + b + 2)^4}}, \frac{a + b + 6}{\sqrt[3]{(a + b + 2)^2}} \right).$$

Recordem que  $G$  ve donada per les dues primeres components de la transformació de Landen associada a

$$\int_0^{\infty} \frac{cx^4 + dx^2 + e}{x^6 + ax^4 + bx^2 + 1} dx. \quad (26)$$

És fàcil veure que  $G$  té tres punts fixos a  $\mathbb{R}^2$ . D'aquests, un és  $(3, 3)$  i els altres dos els denotarem per  $\mathbf{p} \approx (-4.2056, 3.9577)$  i  $\mathbf{q} \approx (-5.3091, 0.8312)$ . Fent un estudi local d'aquests punts no és difícil veure que el  $(3, 3)$  és un punt atractor (de fet super-atractor ja que els dos valors propis de la diferencial de  $G$  al punt són 0); el punt  $\mathbf{p}$  és un punt de tipus sella i  $\mathbf{q}$  és un punt repulsor. Consulteu per exemple [15] per a veure les definicions d'aquests conceptes.

Els punts  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tals que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G^n(a, b) = (3, 3),$$

formen el que s'anomena *conca d'atracció* del punt fix  $(3, 3)$ . Un primer resultat, difícil i interessant és,

**Teorema 7.** ([11, 21, 20]) *La conca d'atracció del punt fix  $(3, 3)$  pel SDD generat per  $G$ , coincideix amb la regió  $\mathcal{W}$  del pla  $(a, b)$  on la integral (26) convergeix.*

Per tant, des del punt de vista dinàmic, si  $(a, b) \in \mathcal{W}$  la dinàmica és trivial, ja que les trajectòries del SDD tendeixen a  $(3, 3)$ . Des del nostre punt de vista, això vol dir que la transformació de Landen és sempre útil per a calcular qualsevol integral, ja que és finita. Com a exemple ja hem vist el càlcul de la secció 3.2.1.

Vegem ara com algebritzar la condició de que la integral (26) convergeix. Analíticament, és molt senzill, hem d'imposar que el polinomi  $Q(x) = x^6 + ax^4 + bx^2 + 1$  no tingui arrels positives. Calculant el discriminant de  $Q(x)$ , veure per exemple [18], obtenim que  $\text{Dis}(Q(x), x) = -64R^2(a, b)$ , on

$$R(a, b) := -27 + 18ab - 4a^3 - 4b^3 + a^2b^2. \quad (27)$$

Recordem que aquest polinomi s'anul·la si i només si  $Q$  té alguna arrel múltiple. Definim  $\mathcal{L} := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : R(a, b) = 0\}$ . A la Figura 1 veiem que  $\mathcal{L}$  té dues components connexes. Anomenarem  $\mathcal{L}_1$  la que no toca al primer quadrant. No és difícil veure que  $\mathcal{W}$  és precisament la regió que està sobre de  $\mathcal{L}_1$ . Així, com a corollari del teorema anterior tenim que  $\mathcal{L}_1$  és la frontera de la conca d'atracció del punt  $(3, 3)$ .

Una igualtat ben senzilla, però molt útil, que ja es dona a [11], és

$$R(G(a, b)) = \frac{(a - b)^2 R(a, b)}{(a + b + 2)^4}.$$

Observem, que aquesta implica que les regions  $R(a, b) = 0$ ,  $R(a, b) > 0$  i  $R(a, b) < 0$  són invariants per  $G$ . En particular, com que es pot veure que  $\mathbf{p} \in \mathcal{L}_1$ , no és difícil comprovar que  $\mathcal{L}_1$  està inclosa a la varietat atractora del punt de tipus sella.

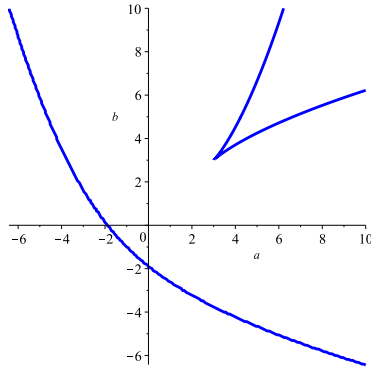


Figura 1: Corba  $\mathcal{L} = \{R(a, b) = 0\}$ . La component connexa de sota es  $\mathcal{L}_1$ .

Ara bé, què passa quan prenem un punt  $(a, b)$  que està per sota de  $\mathcal{L}_1$ ? Per a tenir una primera idea podem agafar un punt a l'atzar i veure què succeeix. Si prenem com a condició inicial  $(-7, 1)$ , després de 20 000 iterats, obtenim la Figura 2. Aquesta figura mostra el comportament impredecible del SDD. És un problema d'interès actual trobar explicacions satisfactòries del que s'observa, veure [20, 22]. Genèricament, l'aspecte dels punts de qualsevol òrbita sembla ser essencialment el mateix. De fet, una figura semblant a la de la Figura 2 ja va ser la portada del Notices de l'AMS al març de 2002.

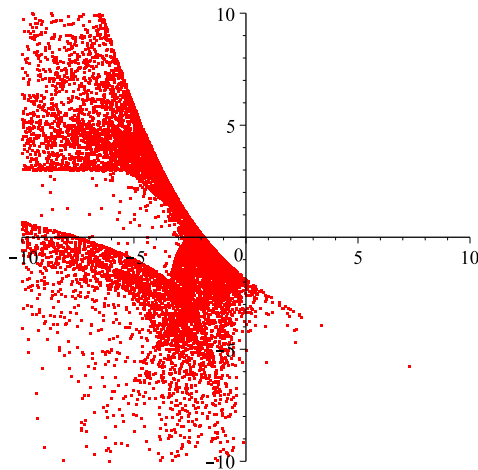


Figura 2: 20 000 punts d'una sola òrbita amb condició inicial sota de  $\mathcal{L}_1$ .

**Agraïments.** El primer autor està recolzat pels projectes MINECO MTM2013-40998-P i per la Generalitat de Catalunya, projecte 2014SGR568.

## Referències

- [1] M. ABRAMOWITZ, I. A. STEGUN, Handbook of mathematical functions, with formulas, graphs, and mathematical tables, Dover Publications (1965).
- [2] G. ALMKVIST, B. GERT, *Gauss, Landen, Ramanujan, the arithmetic-geometric mean, ellipses,  $p$ , and the Ladies diary*. Amer. Math. Monthly 95 (1988) 585–608.
- [3] J. ARNDT, C. HAENEL, *À la poursuite de  $Pi$* , Vuibert (2006).
- [4] J. M. BORWEIN, P. B. BORWEIN, *Pi and the AGM. A study in Analytic Number Theory and Computational Complexity*, A Wiley-Interscience Publication (1987).
- [5] J. M. BORWEIN, P. B. BORWEIN, *A cubic counterpart of Jacobi's identity and the AGM*. Trans. Amer. Math. Soc. 323 (1991) 691–701.
- [6] G. BOROS, V. H. MOLL, *Landen transformations and the integration of rational functions*, Mathematics of Computation 71 (2001) 649–668.
- [7] R. P. BRENT, *Fast multiple-precision evaluation of elementary functions*. J. Assoc. Comput. Mach. 23 (1976) 242–251.
- [8] P. F. BYRD, M. D. FRIEDMAN, *Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists*, Springer-Verlag (1954).
- [9] B. C. CARLSON, *Algorithms involving arithmetic and geometric means*, Amer. Math. Monthly 78 (1971) 496–505.
- [10] H. CARTAN, *Teoria elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas*, Selecciones científicas, Madrid (1968).
- [11] M. CHAMBERLAND, V. H. MOLL, *Dynamics of the degree six Landen transformation*, Discrete and Dynamical Systems 15 (2006) 905–919.
- [12] K. CONRAD *The Gaussian integral* <http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/analysis/gaussianintegral.pdf>
- [13] D. A. COX, *The Arithmetic-Geometric mean of Gauss*, L'Enseignement Mathématique 30 (1984) 275–330.
- [14] P. EYMARD, J. P. LAFON, *The number  $Pi$* , AMS (2004).
- [15] C. FERNANDEZ PEREZ et al, *Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Sistemas dinámicos*, Thomsom (2003).



- [16] C. F. GAUSS, *Arithmetisch geometrisches Mittel*, Werke, Bd. 3 Königlichen Gesell. Wiss., Göttingen 1876, pp. 361–403.
- [17] C. F. GAUSS, *Le journal mathématique de Gauss*, translated and annotated by P. Eymard and J. P. Lafon, Rev. Histoire Sci. 9 (1956) 21–51.
- [18] A. G. KUROSH, *Curso de álgebra superior*, Editorial Mir (1997).
- [19] J. LANDEN, *An investigation of a general theorem for finding the length of any arc of any conic hyperbola, by means of two elliptic arcs, with some other new and useful theorems deduced therefrom*. Philos. Trans. Royal Soc. London 65 (1775) 283–289.
- [20] V. H. MOLL, *The evaluation of integrals: A personal history*. Notices of the AMS 49 (2002) 311–317.
- [21] V. H. MOLL, *Curso sobre “Integrales definidas. Análisis, números y experimentos”*, organizado por la Universidad Católica de Valparaíso, Chile, Octubre 2006, 46 páginas.
- [22] V. H. MOLL, *Numbers and functions. From a classical-experimental mathematician’s point of view*. Student Mathematical Library, 65. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.
- [23] D. MANNA, V. H. MOLL, *A simple example of a new class of Landen transformations*. Amer. Math. Monthly 114 (2007) 232–241.
- [24] D. MANNA, V. H. MOLL, *Landen survey. Probability, geometry and integrable systems*, 287–319, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 55, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.
- [25] H. McKEAN, V. H. MOLL, *Elliptic Curves. Function Theory, Geometry, Arithmetic*, Cambridge University Press (1997).
- [26] D. J. NEWMAN, *A simplified version of the Fast Algorithms of Brent and Salamin*, Mathematics of Computation 44 (1985) 207–210.
- [27] J. PLA, *Una història breu de la matemàtica*, Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques 18 (2003) 47–129.
- [28] B. RUBIO SEGOVIA, J. RUBIO SEGOVIA, *Medias y su relación con integrales elípticas*. Gac. R. Soc. Mat. Esp. 4 (2001), 76–93.
- [29] M. R. SPIEGEL, J. LIU, L. ABELLANAS, *Fórmulas y tablas de matemática aplicada*, McGraw-Hill (2005).