This is a preprint of: “Algoritmos sencillos para calcular π”, Armengol Gasull, *Gac. RSME*, vol. 22(1), 131–143, 2019.

ALGORITMOS SENCILLOS PARA CALCULAR π

ARMENGOL GASULL

Resumen. Hay ciertas integrales definidas de funciones racionales que permiten demostrar con muy poco esfuerzo por ejemplo que $3 < \pi < 19/6$. En este trabajo veremos como, a partir de estas integrales y otras relacionadas, no es difícil encontrar varios algoritmos sencillos y rápidos para calcular el número π con la precisión deseada.

El punto de partida de este trabajo son estas dos bonitas igualdades

$$\int_0^1 \frac{2x(1-x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi - 3 \qquad \text{y} \qquad \int_0^1 \frac{2x^3(1-x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{19}{6} - \pi. \tag{1}$$

Como los dos integrandos son positivos, una primera consecuencia es que $3 < \pi < \frac{19}{6} = 3{,}1\widehat{6}$. La segunda igualdad nos permite también aproximar un poco mejor π. Veamos cómo: para $x \in [0,1]$,

$$x^3(1-x)^2 \le \frac{2x^3(1-x)^2}{1+x^2} \le 2x^3(1-x)^2.$$

Calculando, obtenemos que $\int_0^1 x^3(1-x)^2\,\mathrm{d}x = 1/60$. Por lo tanto,

$$3{,}1\widehat{3} = \frac{188}{60} = \frac{19}{6} - \frac{1}{30} < \pi < \frac{19}{6} - \frac{1}{60} = \frac{189}{60} = 3{,}15.$$

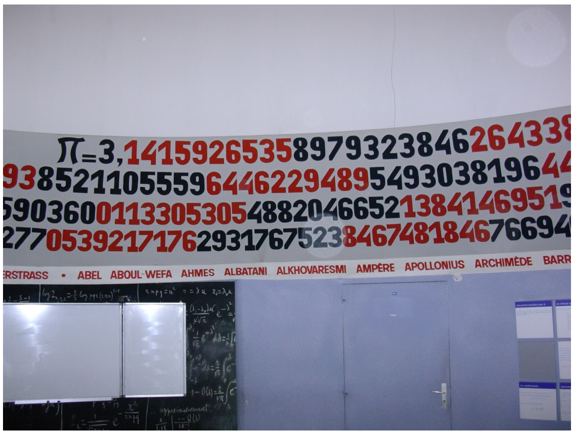

Figura 1. Número π en la cúpula del *Palais de la Découverte (1937)* de París.

En [10], Dalzell desarrolla un método para aproximar π con el número de cifras decimales que se deseen basado en una fórmula similar,

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{22}{7} - \pi.$$

Siguiendo sus ideas (ver también [18]), en este trabajo demostraremos que cualquier fórmula "parecida" a las tres presentadas da lugar a un algoritmo válido para calcular π. Ilustraremos nuestro resultado basándonos en estas tres igualdades, en algunas de las fórmulas que aparecen en los artículos [11, 17, 18], y también en otras nuevas que se presentan en este trabajo.

Llegado este punto y antes de continuar, nos gustaría explicar qué motivaciones hay y ha habido detrás del cálculo de las cifras decimales de π. Citando a [8, 21] podemos decir que al principio el interés se centraba en buscar una cierta regularidad en éstas, como ocurre por ejemplo con los números racionales. Ahora bien, una vez probada la irracionalidad de π por Lambert y Legendre, en siglo XVIII, y su trascendencia en 1882 por Lindemann, este primer motivo desapareció. Sin embargo, hoy en día todavía nos queda el reto de saber si π es *normal.* Recordemos que un número real se llama normal si, en sus cifras decimales, cualquier bloque de k dígitos aparece con frecuencia relativa 10^{-k}. Los números normales son, de alguna manera, los más "aleatorios". Así, si π fuera normal, en particular la proporción de cualquiera de los diez dígitos en sus cifras decimales sería $\frac{1}{10}$. Las comprobaciones que se han hecho en este sentido a partir de millones de sus cifras decimales parecen apoyar una respuesta afirmativa. Por ejemplo, según los cálculos de Kanada de 1995 (ver [12, Cap. 10]), las primeras 6×10^9 cifras decimales muestran las frecuencias siguientes:

"**0**" :	599 963 005,	"**5**" :	600 017 176,
"**1**" :	600 033 260,	"**6**" :	600 016 588,
"**2**" :	599 999 169,	"**7**" :	600 009 044,
"**3**" :	600 000 243,	"**8**" :	599 987 038,
"**4**" :	599 957 439,	"**9**" :	600 017 038.

Actualmente ya se conocen más de 22×10^{12} cifras decimales de π y los especialistas siguen intentando demostrar que π es un número normal. En cualquier caso, por muy lejos que se llegue en el cálculo de sus cifras decimales, la prueba de la normalidad de π, si es que éste es el caso, deberá ser teórica.

Quizás aún más importante, el cálculo de los dígitos de π permite explotar la extraordinaria capacidad de los ordenadores actuales y en el camino descubrir posibles errores de software o hardware. Además, por ejemplo, para programar lo más óptimamente posible los algoritmos que se van descubriendo, se han desarrollado nuevas técnicas para implementar la transformada rápida de Fourier (FFT), muy utilizada en la ciencia y la ingeniería actuales.

Como veremos, las herramientas matemáticas involucradas en los algoritmos que presentaremos en este trabajo no son complicadas: suma de series geométricas e integración de funciones polinomiales y racionales. Por lo tanto pensamos que los resultados desarrollados pueden ser usados como material para motivar a los estudiantes a buscar sus propios algoritmos para calcular las cifras decimales de π.

Hoy en día hay muchos tipos diferentes de algoritmos para calcular π. Además, éstos han sido obtenidos de maneras muy variadas e ingeniosas. Algunos de ellos, aunque más complicados de obtener que los que presentamos aquí, son más rápidos, ver por ejemplo [4, 6, 8, 9, 14, 16]. Hay varios libros dedicados exclusivamente a este fascinante número y cuya lectura aconsejamos, ver [1, 3, 12, 13, 19, 23]. En particular, el interesante libro [3] contiene la republicación de 25 artículos recientes sobre el número π, entre los que se encuentran las referencias [5, 6, 7, 18].

1. Algoritmos para calcular π.

El principal resultado de este trabajo es el siguiente teorema, que nos permite generar una infinidad de algoritmos para calcular π y al mismo tiempo tener una idea de su velocidad de convergencia.

Teorema *Sea $p(x)$ un polinomio de grado mayor que 2, con coeficientes reales y tal que $p(\pm \mathrm{i}) = -4$. Entonces:*

(i) Se cumple que $p(x) = (1+x^2)q(x) - 4$, para un cierto polinomio $q(x)$. Además

$$\int_0^1 \frac{p(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = c - \pi,$$

donde $c = \int_0^1 q(x)\,\mathrm{d}x$. En particular, si el polinomio tiene coeficientes racionales entonces $c \in \mathbb{Q}$.

(ii) Si $p(x)$ restringido al intervalo $[0,1]$ es positivo o cero (resp. negativo o cero) entonces $\pi < c$ (resp. $\pi > c$).

Supongamos también que $\max_{\{x\in[0,1]\}} |p(x)/4| \le M < 1$. Entonces:

(iii)

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} I_k, \quad \textit{donde} \quad I_k := \int_0^1 q(x)\left(-\frac{p(x)}{4}\right)^k \mathrm{d}x.$$

(iv) Si además $\max_{\{x\in[0,1]\}} |q(x)| \le L$, $|I_k| \le L\cdot M^k$.

(v) Si $p(x)$ y $q(x)$ son tales que la sucesión $\{I_k\}_k$ es alternada y con valor absoluto decreciente, entonces se cumple que

$$\left|\pi - \sum_{k=0}^{n-1} I_k\right| \le \left|I_n\right| \le L\cdot M^n.$$

Demostración. (i) En general, $p(x) = (1+x^2)q(x) + a + bx$, $a, b \in \mathbb{R}$. Substituyendo en $x = \mathrm{i}$ obtenemos que $-4 = a + b\mathrm{i}$ y por tanto $a = -4$ y $b = 0$, como queríamos demostrar. Integrando

$$\int_0^1 \frac{p(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 q(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = c - \pi.$$

La prueba de (ii) es directa.

(iii) La igualdad demostrada en el apartado (i) se puede reescribir como

$$\frac{4+p(x)}{1+x^2} = q(x),$$

o, equivalentemente,

$$\frac{4}{1+x^2} = \frac{q(x)}{1+\frac{p(x)}{4}} = \sum_{k=0}^{\infty} q(x)\left(-\frac{p(x)}{4}\right)^k,$$

donde hemos utilizado que para $|u| < 1$, $1/(1+u) = \sum_{k\geq 0}(-u)^k$. Integrando entre $x = 0$ y $x = 1$, y usando que cuando $|u| \leq M < 1$ la convergencia es uniforme y por lo tanto el sumatorio y la integral se pueden intercambiar, obtenemos

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} q(x)\left(-\frac{p(x)}{4}\right)^k \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^1 q(x)\left(-\frac{p(x)}{4}\right)^k \mathrm{d}x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k.$$

(iv) Acotando las funciones involucradas en I_k tenemos

$$|I_k| = \left|\int_0^1 q(x)\left(-\frac{p(x)}{4}\right)^k \mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 |q(x)|\left|\frac{p(x)}{4}\right|^k \mathrm{d}x \leq L\cdot M^k.$$

(v) Es una propiedad general de las series alternadas con termino general con valor absoluto decreciente hacia cero. $\square$

Para cada polinomio $p(x)$ adecuado, el teorema demostrado nos proporciona un algoritmo para calcular π. Éste consiste en el cálculo de la sucesión de valores

$$c_m := \sum_{k=0}^{m} I_k \quad \text{donde} \quad I_k = \int_0^1 q(x)\left(-\frac{p(x)}{4}\right)^k \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{4+p(x)}{1+x^2}\left(-\frac{p(x)}{4}\right)^k \mathrm{d}x,$$

ya que $\lim_{m\to\infty} c_m = \pi$. Como $c_0 = I_0 = c$ es la primera aproximación, el algoritmo sera mejor como más cerca de π esté este valor. Por lo tanto usaremos polinomios $p(x)$ que proporcionen buenas aproximaciones iniciales de π. También es claro que cuanto menor sea M más rápido será el algoritmo.

Es bien sabido que una manera de obtener buenas aproximaciones racionales de un número (en el sentido de que son las que tienen el error más pequeño entre las que tienen un tamaño de denominador dado) es tomar las proporcionadas por la teoría de fracciones continuas, ver por ejemplo [15, 22].

Así, los primeros convergentes de π son:

$$3,\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102},\ \frac{104348}{33215},\ldots$$

y son varios de éstos los que consideraremos como c's en este trabajo.

Entre ellos se encuentran algunas de las aproximaciones racionales simples encontradas por la humanidad. Así tenemos el $\frac{22}{7} = \underline{3{,}14}28\ldots$ de Arquímedes, el $\frac{355}{113} = \underline{3{,}141592}9\ldots$ de Zu Chongzhi ($\simeq 480$) o el $\frac{103993}{33102} = \underline{3{,}141592653}0\ldots$ debido a Euler (1707-1783). En cada número subrayamos las cifras correctas.

Ahora bien, no todas las buenas aproximaciones nos la proporciona esta teoría. Así por ejemplo tenemos también $\frac{311}{99} = \underline{3{,}141}4\ldots$ o $\frac{377}{120} = \underline{3{,}141}6\ldots$.

1.1. Algoritmo 1. En la fórmula de la izquierda de (1),

$$\int_0^1 \frac{-2x(1-x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 3-\pi.$$

tenemos que $p(x) = -2x(1-x)^2$. Por lo tanto, como

$$-2x(1-x)^2 = (4-2x)(1+x^2) - 4,$$

$q(x) = 4-2x$. Además,

$$M = \max_{\{x\in[0,1]\}}\left|\frac{p(x)}{4}\right| = \max_{\{x\in[0,1]\}} \frac{x(1-x)^2}{2} = \left.\frac{x(1-x)^2}{2}\right|_{x=1/3} = \frac{2}{27} \lesssim 0{,}08,$$

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494
4592307816406286208998628034825342117067982148086513282306647
0938446095505822317253594081284811174502841027019385211055596
4462294895493038196442881097566593344612847564823378678316527
1201909145648566923460348610454326648213393607260249141273724
5870066063155881748815209209628292540917153643678925903600113
3053054882046652138414695194151160943305727036575959195309218
6117381932611793105118548074462379962749567351885752724891227
9381830119491298336733624406566430860213949463952247371907021
7986094370277053921717629317675238467481846766940513200056812
7145263560827785771342757789609173637178721468440901224953430
1465495853710507922796892589235420199561121290219608640344181
5981362977477130996051870721134999999837297804995105973173281
6096318595024459455346908302642522308253344685035261931188171
0100031378387528865875332083814206171776691473035982534904287
5546873115956286388235378759375195778185778053217122680661300
19278766111959092164201989...

Figura 2. Mil cifras decimales de π.

y usando nuestro teorema

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} I_k, \quad \text{donde} \quad I_k := \int_0^1 (4-2x)\left(\frac{x(1-x)^2}{2}\right)^k \mathrm{d}x.$$

De donde, calculando,

$$\pi = 3 + \frac{2}{15} + \frac{13}{1680} + \frac{3}{6160} + \frac{23}{720720} + \frac{1}{466752} + \cdots,$$

con $c_0 = 3$, $c_1 = \frac{47}{15} = \underline{3{,}13}\ldots$, $c_2 = \frac{1759}{560} = \underline{3{,}1410}\ldots$, $c_3 = \underline{3{,}14155}\ldots$, $\ldots$, $c_{10} = \underline{3{,}141592535895}\ldots$, $|\pi - c_{20}| < 10^{-24}$. Como $M = \frac{2}{27} \lesssim 0{,}08$, tal y como comprobamos en los cálculos, en cada paso tenemos poco más que una cifra decimal correcta nueva.

Veamos para acabar una fórmula cerrada para I_k en la que no sea necesario hacer las integrales a cada paso. Para eso utilizaremos la conocida relación

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n \,\mathrm{d}x = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}, \tag{2}$$

cierta para todo $n, m \in \mathbb{N}$ y que puede demostrarse por ejemplo usando inducción. Así,

$$\begin{aligned} I_k = \int_0^1 (4-2x)\left(\frac{x(1-x)^2}{2}\right)^k \mathrm{d}x& \\ &= \frac{(2k)!}{2^k}\left(4\frac{k!}{(3k+1)!} - 2\frac{(k+1)!}{(3k+2)!}\right) = \frac{k!(2k)!}{2^{k-1}(3k+2)!}(5k+3), \end{aligned}$$

y en consecuencia,

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!(2k)!}{2^{k-1}(3k+2)!}(5k+3).$$

1.2. Algoritmo 2. Tomando la fórmula de la derecha de (1),

$$\int_0^1 \frac{2x^3(1-x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{19}{6} - \pi,$$

tenemos que $p(x) = 2x^3(1-x)^2$. Como

$$p(x) = (4 - 4x^2 + 2x^3)(1+x^2) - 4,$$

$q(x) = 4 - 4x^2 + 2x^3$. En este caso

$$M = \max_{\{x\in[0,1]\}} \left|\frac{p(x)}{4}\right| = \max_{\{x\in[0,1]\}} \frac{x^3(1-x)^2}{2} = \left.\frac{x^3(1-x)^2}{2}\right|_{x=3/5} = \frac{54}{3125} \lesssim 0{,}018.$$

Aplicando el Teorema,

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} I_k, \quad \text{donde} \quad I_k := \int_0^1 (4-4x^2+2x^3)\left(\frac{x^3(1-x)^2}{2}\right)^k \mathrm{d}x.$$

Por lo tanto,

$$\pi = \frac{19}{6} - \frac{8}{315} + \frac{59}{180180} - \frac{137}{29099070} + \frac{277}{3893984640} - \cdots,$$

y $c_0 = \frac{19}{6} = \underline{3{,}16}\ldots$, $c_1 = \frac{1979}{630} = \underline{3{,}1412}\ldots$, $c_2 = \underline{3{,}141597}\ldots$, $\ldots$, $|\pi - c_{10}| < 2\times 10^{-20}$, $\ldots$, $|\pi - c_{20}| < 4 \times 10^{-38}$.

Usando de nuevo (2) tenemos una formula cerrada para estas I_k,

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^1 (4-4x^2+2x^3)\left(\frac{x^3(1-x)^2}{2}\right)^k \mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{-1}{2}\right)^k (2k)!\left(4\frac{(3k)!}{(5k+1)!} - 4\frac{(3k+2)!}{(5k+3)!} + 2\frac{(3k+3)!}{(5k+4)!}\right) \\ &= \frac{(-1)^k(3k)!(2k)!}{2^{k-1}(5k+4)!}(187k^3 + 342k^2 + 201k + 38), \end{aligned}$$

donde omitimos los cálculos de la última igualdad. En este algoritmo, como M es cercano a $1/100$ se observa que el número de cifras decimales correctas aumenta casi en dos unidades a cada paso.

Algoritmo 3. Reproducimos en esta sección el algoritmo de Dalzell [10] donde se encuentra la idea seminal de nuestro trabajo. En esta ocasión empezamos con la igualdad

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{22}{7} - \pi.$$

De entrada, siguiendo las misma ideas que en la introducción, ésta nos permite encontrar fácilmente un intervalo que contiene a π. Para $x \in [0,1]$, tenemos que

$$\frac{x^4(1-x)^4}{2} \le \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} \le x^4(1-x)^4.$$

Usando (2) sabemos que $\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x = 1/630$. Por lo tanto,

$$3{,}1412\ldots = \frac{3958}{1260} = \frac{22}{7} - \frac{1}{630} < \pi < \frac{22}{7} - \frac{1}{1260} = \frac{3959}{1260} = 3{,}1420\ldots.$$

En particular, esas desigualdades implican el famoso resultado de Arquímedes basado en el cálculo de los perímetros de los polígonos inscrito y circunscrito de polígonos regulares de 96 lados,

$$3 + \frac{10}{71} = \frac{223}{71} < \frac{3958}{1260} < \pi < \frac{22}{7} = 3 + \frac{10}{70}.$$

Como $p(x) = x^4(1-x)^4$, obtenemos que $q(x) = 4 - 4x^2 + 5x^4 - 4x^5 + x^6$. Además,

$$M = \max_{\{x\in[0,1]\}} \left|\frac{p(x)}{4}\right| = \max_{\{x\in[0,1]\}} \frac{x^4(1-x)^4}{4} = \left.\frac{x^4(1-x)^4}{4}\right|_{x=1/2} = \frac{1}{1024} \lesssim 0{,}001.$$

Aplicando una vez más el teorema tenemos

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} I_k \quad \text{donde} \quad I_k = \int_0^1 \left(\frac{-1}{4}\right)^k q(x) x^{4k}(1-x)^{4k}\,\mathrm{d}x.$$

Usando de nuevo (2),

$$\begin{aligned} I_k &= \left(\frac{-1}{4}\right)^k (4k)! \left(4\frac{(4k)!}{(8k+1)!} - 4\frac{(4k+2)!}{(8k+3)!} + 5\frac{(4k+4)!}{(8k+7)!} - 4\frac{(4k+5)!}{(8k+6)!} + \frac{(4k+6)!}{(8k+7)!}\right) \\ &= \frac{(-1)^k (4k)!(4k+3)!}{4^{k-2}(8k+7)!}(820k^3 + 1533k^2 + 902k + 165), \end{aligned}$$

donde esta segunda igualdad es fruto de varios cálculos. Así,

$$\pi = \frac{22}{7} - \frac{19}{15015} + \frac{543}{594914320} - \frac{77}{104187267600} + \cdots$$

y $c_0 = \frac{22}{7} = \underline{3{,}142}\ldots$, $c_1 = \frac{47171}{15015} = \underline{3{,}141591}\ldots$, $c_2 = \underline{3{,}141592654}\ldots$, $\ldots|c_{10} - \pi| < 4 \times 10^{-34}$, $\ldots|c_{20} - \pi| < 2 \times 10^{-64}$. Este algoritmo proporcionas tres cifras decimals correctas nuevas a cada paso.

1.3. Algoritmo 4. Damos a continuación un algoritmo más rápido que el Algoritmo 3. Empezamos con la igualdad

$$\int_0^1 \frac{x^5(1-x)^6}{2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{377}{120} - \pi.$$

Así, $p(x) = \frac{1}{2}x^5(1-x)^6$, y $p(x) = (1+x^2)q(x) - 4$, con

$$q(x) = 4 - 4x^2 + 4x^4 + \frac{1}{2}x^5 - 7x^6 + 7x^7 - 3x^8 + \frac{1}{2}x^9.$$

En este caso

$$M = \max_{\{x\in[0,1]\}} \frac{x^5(1-x)^6}{8} = \frac{x^5(1-x)^6}{8}\bigg|_{x=5/11} = \frac{18225000}{285311670611} \lesssim 0{,}00007.$$

Por lo tanto,

$$\pi = \frac{377}{120} - \frac{547}{7390240} + \frac{21342733}{6161218256793600} + \cdots,$$

y $c_0 = \frac{377}{120} = \underline{3{,}1416}\ldots$, $c_1 = \frac{69651371}{22170720} = \underline{3{,}141592650}\ldots$, ..., $|\pi - c_{10}| < 3\times 10^{-47}$ ..., $|\pi - c_{20}| < 3\times 10^{-89}$. Como vemos, a cada paso se añaden más de cuatro cifras decimales correctas.

Podemos de nuevo dar la expresión cerrada de las I_k, pero omitimos los detalles de los cálculos. Llegamos a que

$$I_k = \frac{2(-1)^k(5k)!(6k)!}{8^k(11k+10)!}R(k),$$

donde

$$\begin{aligned} R(k) = {} & 3908628707k^9 + 19140347068k^8 + 40673488993k^7 + 49137942692k^6 \\ & +37116292921k^5 + 18135042932k^4 + 5715967247k^3 + 1117115548k^2 \\ & +122381172k + 5700240. \end{aligned}$$

1.4. Algoritmo 5.

Finalmente, partimos del resultado de [18],

$$\int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8(25+816x^2)}{3164(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{355}{113} - \pi. \tag{3}$$

Aquí $p(x) = \frac{1}{3164}x^8(1-x)^8(25+816x^2)$ y $q(x)$ es un polinomio de grado 16 que no explicitamos. Se puede demostrar que

$$M = \max_{\{x\in[0,1]\}} \left|\frac{p(x)}{4}\right| \lesssim 3{,}1\times 10^{-7}.$$

En este caso,

$$\pi = \frac{355}{113} - \frac{23629704851}{885789797823730\,80} + \frac{3594867070013354617}{6193466901790807603959745470720\,0} - \cdots,$$

y $c_0 = \frac{355}{113} = \underline{3{,}1415929}\ldots$, $|\pi - c_1| \le 6\times 10^{-14}$,... $|\pi - c_{10}| < 6\times 10^{-73}$,..., $|\pi - c_{20}| < 3\times 10^{-138}$. Por lo tanto se obtienen unas siete cifras decimals nuevas en cada paso.

Para economizar espacio no damos la expresión explícita de las I_k, que podría obtenerse usando las mismas técnicas que en las secciones anteriores.

1.5. Más fórmulas fuente.

No es difícil buscar otras fórmulas a partir de las cuales obtener nuevos algoritmos. Por ejemplo,

$$\int_0^1 \frac{-x^5(1-x)^6(9+14x^2)}{10(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{311}{99} - \pi,$$

$$\int_0^1 \frac{-x^5(1-x)^6(197+462x^2)}{530(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{333}{106} - \pi,$$

$$\int_0^1 \frac{x^{14}(1-x)^{12}(124360+77159x^2)}{755216(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{103993}{33102} - \pi.$$

Las dos últimas se han extraído de [18]. Otras fórmulas parecidas pueden encontrarse en [2, 6, 11, 17, 20]. Observemos, por ejemplo, que a partir de (3) y de la segunda de las igualdades que acabamos de dar, se obtiene que

$$\frac{333}{106} < \pi < \frac{355}{113}.$$

De hecho, hay una manera sistemática de buscar fórmulas cada vez más precisas. A partir del teorema presentado podemos pensar que $q(x)$ es un polinomio arbitrario y que $p(x) = (1+x^2)q(x) - 4$. Así, en virtud de la fórmula (2), para facilitar los cálculos de las I_k es natural buscar polinomios $q(x)$ de grado m de manera que $p(x) = \alpha x^j(1-x)^{m+2-j}$, para ciertos $\alpha \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$. Las incógnitas son los $m+1$ coeficientes de $q(x)$ y la condición impuesta se reduce al siguiente sistema lineal de $m+2$ ecuaciones

$$p^{(s)}(0) = 0, \quad s = 0, \dots, j-1, \quad \text{y} \quad p^{(s)}(1) = 0, \quad s = 0, \dots, m+2-j-1,$$

dónde $p^{(s)}(x)$ denota la derivada s-ésima de $p(x)$. Como hay más ecuaciones que incógnitas, no tiene porqué tener solución. Si fijamos un m, encontramos que para algunos valores de j este sistema si que es compatible (y determinado). Esos valores de j son los que nos darán lugar a polinomios $p(x)$ adecuados para nuestro propósito. Veamos un par de ejemplos.

Si tomamos $m = 12$, se puede comprobar que el sistema lineal solo es compatible (y determinado) cuando $j \in \{2, 6, 10\}$. En estos casos obtenemos los polinomios $p(x)$,

$$-\frac{1}{16}x^2(1-x)^{12}, \quad \frac{1}{4}x^6(1-x)^8, \quad -x^{10}(1-x)^4,$$

y las respectivas constantes M dadas por nuestro método son menores y cercanas a $5{,}1 \times 10^{-5}$, $4{,}5 \times 10^{-6}$ y $5{,}8 \times 10^{-5}$.

Para $n = 22$, los valores de j para los que el sistema lineal tiene solución son $4, 8, 12, 16$ y 20. El patrón de los valores de j que dan lugar a sistemas compatibles parece bien claro. Los valores de j que dan lugar a una M más pequeña ($\lesssim 10^{-9}$) son $j = 8$ y $j = 12$. Por ejemplo, para este último, $p(x)$ es $x^{12}(1-x)^{12}/16$,

$$\int_0^1 \frac{x^{12}(1-x)^{12}}{16(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{431302721}{137287920} - \pi < 7{,}4 \times 10^{-10},$$

y el correspondiente algoritmo, que no detallamos, fijaría unas nueve cifras decimales nuevas a cada paso.

Las fórmulas obtenidas a partir de polinomios de la forma $p(x) = x^{4m}(1-x)^{4m}/4^{m-1}$, $m \in \mathbb{N}$, son precisamente las que se estudian en [18]. Obsérvese que el caso $m = 1$ corresponde precisamente al Algoritmo 3 de Dalzell [10].

1.6. Un algoritmo debido a Ramanujan. Hay una relación famosa que recuerda a varias de las obtenidas en este trabajo, pero es de naturaleza totalmente diferente. Fue dada sin demostración en el año 1919 por el famoso matemático indio Srinivasa Ramanujan (1887-1920) y es

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}.$$

Se puede consultar por ejemplo [5, 7] para tener más información sobre ésta y otras fórmulas similares. El algoritmo asociado que consiste en tomar u_n como el inverso de la suma parcial n-ésima es extraordinariamente rápido. Por ejemplo, $u_0 = \frac{9801}{4412}\sqrt{2} = \underline{3{,}1415927}\ldots$, $|u_1 - \pi| < 7 \times 10^{-16}, \ldots$ y $|u_6 - \pi| < 5 \times 10^{-56}$.

Según parece a Ramanujan le gustaba encontrar aproximaciones no racionales sencillas de π como la dada por u_0. Algunas otras encontradas por él son

$$\frac{9}{5} + \sqrt{\frac{9}{5}} = \underline{3{,}1416}\ldots, \qquad \sqrt[4]{102 - \frac{2222}{22^2}} = \sqrt[4]{\frac{2143}{22}} = \underline{3{,}141592652}\ldots.$$

El algoritmo asociado a la fórmula de Ramanujan es mucho más eficiente que los presentados en este trabajo ya que cuando se comparan dos algoritmos de este tipo, no sólo hay que tener en cuenta el número de dígitos nuevos que proporciona cada término, sino que también es muy importante estudiar el coste computacional de cada uno de los sumandos, considerando por ejemplo el número y tipo de factoriales, el grado de los polinomios involucrados, ... Es claro que en la serie de Ramanujan el coste de cada término es mucho menor que el de los términos en los Algoritmos 4 o 5, por ejemplo. De hecho esta igualdad de Ramanujan nos da una de las mejores series hipergeométricas para aproximar π. Esta serie es superada por la dada por los hermanos Chudnovsky [5, 9],

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)!(13591409 + 545140134k)}{(k!)^3 (3k)! 640320^{3k+3/2}},$$

en la que se basa uno de los algoritmos más eficientes para calcular π. En este caso los primeros inversos de las sumas parciales w_n, son: $w_0 = \frac{53360}{13591409}\sqrt{640320}$, con $|w_0 - \pi| < 6 \times 10^{-14}$, $|w_1 - \pi| < 4 \times 10^{-28}, \ldots$ y $|w_6 - \pi| < 3 \times 10^{-99}$.

Agradecimientos. El autor esta respaldado por los proyectos MINECO MTM2013-40998-P y MTM2016-77278-P FEDER y por la Generalitat de Catalunya, proyecto 2014SGR568.

Referencias

[1] J. Arndt, C. Haenel, Pi–unleashed. Traducido de la versión alemana de 1998 por C. Lischka y D. Lischka. Second edition. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[2] N. Backhouse, *Pancake functions and approximations to π.* Note 79.36, Math. Gazette 79 (1995), 371–374.

[3] D. H. Bailey, J. M. Borwein, Pi: the next generation. A sourcebook on the recent history of Pi and its computation. Springer, [Cham], 2016.

[4] D. H. Bailey, J. M. Borwein, P. B. Borwein, S. Plouffe, *The quest for pi.* Math. Intelligencer 19 (1997), 50–57.

[5] N. D. Baruah, B. C. Berndt, H. H. Chan, *Ramanujan's series for $1/\pi$: a survey.* Amer. Math. Monthly 116 (2009), 567–587.

[6] J. M. Borwein, *The life of Pi: from Archimedes to ENIAC and beyond.* Part III in: Surveys and studies in the ancient Greek and medieval Islamic mathematical sciences in honor of J. L. Berggren. Edited by Nathan Sidoli and Glen Van Brummelen. Springer, Heidelberg, 2014.

[7] J. M. Borwein, P. B. Borwein, D. H. Bailey, *Ramanujan, modular equations, and approximations to pi, or How to compute one billion digits of pi.* Amer. Math. Monthly 96 (1989), 201–219.

[8] J. M. Borwein, M. S. Macklem, *The (digital) life of Pi.* Austral. Math. Soc. Gaz. 33 (2006), 243–248.

[9] D. V. Chudnovsky, G. V. Chudnovsky, *The computation of classical constants*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 86 (1989) 8178–8182.

[10] D. P. Dalzell, *On* 22/7. J. London Math. Soc. 19, (1944), 133–134.

[11] D. P. Dalzell, *On* 22/7 *and* 355/113. Eureka: the Archimedian's Journal 34 (1971), 10–13.

[12] J.-P. Delahaye, Le fascinant nombre π. Bibliothèque Scientifique. Belin-Pour la Science, Paris, 1997.

[13] P. Eymard, J-P. Lafon, The number π. Traducido de la versión francesa de 1999 por S. S. Wilson. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[14] J. Guillera, *Historia de las fórmulas y algoritmos para* π. La Gaceta de la RSME 10 (2007) 159–178.

[15] G. H. Hardy, E. M. Wright, An introduction to the theory of numbers. Fifth edition. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1979.

[16] A. Joyal, *Le calcul du nombre* π. Materials Matemàtics 2008, treball 5, 17 pp.

[17] S. K. Lucas, *Integral proofs that* $355/113 > \pi$. Austral. Math. Soc. Gaz. 32 (2005), 263–266.

[18] S. K. Lucas, *Approximations to* π *derived from integrals with nonnegative integrands.* Amer. Math. Monthly 116 (2009), 166–172.

[19] J. Navarro, Los secretos del número π. Colección "El mundo es matemático", RBA Coleccionables, 2010.

[20] D. A. Nield (mal escrito Neild en el artículo), *Rational approximations to pi.* New Zealand Math. Mag. 18 (1981/82), 99–100.

[21] C. D. Offner, *Computing the Digits in* π. Preprint 2015. Accesible en https://www.cs.umb.edu/~offner/files/pi.pdf

[22] K. H. Rosen, Elementary number theory and its applications. Fourth edition. Addison-Wesley, Reading, MA, 2000.

[23] A. V. Zhúkov, El omnipresente número π. Serie de divulgación científica: Matemática 11, Ed. URSS, Mosú 2004.

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona
E-mail address: gasull@mat.uab.cat