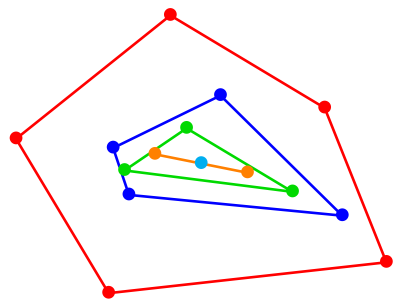
This is a preprint of: "El teorema de Gauss-Lucas", Armengol Gasull, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, vol. 22(3), 550, 2019.

# El teorema de Gauss-Lucas

Si un polinomio real $P$ tiene todas sus raíces reales, del teorema de Rolle se deduce fácilmente que todas las raíces de su derivada están en el intervalo cerrado más pequeño que contiene todas las raíces de $P$.



Este resultado tiene una extensión preciosa en $\mathbb{C}$, que quizás no es suficientemente conocida, el teorema de Gauss-Lucas. Este teorema nos asegura que para cualquier polinomio $P \in \mathbb{C}[z]$ no constante, la envolvente convexa $K$ de todas sus raíces (es decir, el polígono convexo más pequeño, quizás degenerado a un intervalo o a un punto, que las contiene todas) también contiene todas las raíces de $P'$. A la derecha se muestra un pentágono formado por las cinco raíces $-7+\mathrm{i}$, $-2+5\mathrm{i}$, $3+2\mathrm{i}$, $5-3\mathrm{i}$ y $-4-4\mathrm{i}$ de un polinomio $P$ junto con las raíces de $P'$, $P''$, $P'''$ y $P''''$, que forman figuras encajadas.

Sin pretensión de ser originales, para probarlo escribimos $P(z) = c\prod_{j=1}^{n}(z-a_j)$, con $c, a_j \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$ y los $a_j$ no necesariamente diferentes. Tomando derivada logarítmica obtenemos

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z-a_j}.$$

Si $b \in \mathbb{C}$ es una raíz de $P'$ que también lo es de $P$ entonces claramente $b \in K$. Por tanto, para demostrar el teorema podemos suponer que $b$ es una raíz de $P'$ y no lo es de $P$. Sustituyendo $z = b$ en la expresión anterior,

$$0 = \frac{P'(b)}{P(b)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{b-a_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\bar{b}-\bar{a}_j}{|b-a_j|^2} = \bar{b}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|b-a_j|^2}\right) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\bar{a}_j}{|b-a_j|^2}.$$

Si tomamos conjugados y despejamos $b$, llegamos a

$$b = \sum_{j=1}^{n} u_j a_j, \quad \text{con} \quad u_j := \frac{|b-a_j|^{-2}}{\sum_{k=1}^{n} |b-a_k|^{-2}} > 0.$$

Como $\sum_{j=1}^{n} u_j = 1$, la relación anterior es precisamente la condición que define una combinación lineal convexa y demuestra que $b \in K$.

Este teorema ya fue usado por Gauss en el año 1836 en el contexto de ciertos campos de fuerzas creados por partículas localizadas en los ceros de $P$, y fue demostrado por Félix Lucas en el año 1879.

Armengol Gasull, Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona
Correo electrónico: `gasull@mat.uab.cat`
Página web: `http://www.gsd.uab.cat/personal/agasull`