

## JOIES MATEMÀTIQUES

ARMENGOL GASULL

El doble sentit de la paraula “joia” en ha permès triar per aquest treball un títol que conté la, també doble, motivació del treball.

Més concretament, el que es pretén és recollir demostracions, que en opinió de l'autor siguin senzilles i boniques, i a més, siguin tals que llegir-les i comprendre-les ens provoqui una certa felicitat. Senzill és un terme subjectiu, però per situar-lo en un context acadèmic, podríem assimilar-ho al nivell de comprensió matemàtica que tenen els bons alumnes de primers anys de universitat. Si senzill ja és subjectiu, que podem dir de bonic!. Per descomptat ni volem, ni sabem precisar-ho. En tot cas, un resultat per ser bonic ha d'interessar i no deixar indiferents a la majoria dels lectors matemàtics. A més, pot ser bonic per diferents raons: pel seu enunciat, per la seva interpretació, o pel tipus d'argumentacions que han permès demostrar-lo. Uns treballs que reflexionen sobre aquesta qüestió són [21, 30, 46, 48]. Segons Hardy ([23]) en els grans teoremes hi ha un grau molt alt de sorpresa, combinat amb inevitabilitat i economia<sup>1</sup>.

Una recopilació molt més ambiciosa és el famós llibre [1]. També s'ocupen de la mateixa qüestió els tres llibres clàssics [25, 26, 27], els llibres [2, 22, 39] o el treballs [37, 51].

Espero que el lector gaudeixi amb aquest recull tant com ho ha fet l'autor preparant-lo i hi trobi demostracions que no coneixia. El treball està estructurat en seccions independents que s'han intentat ordenar en funció de la seva dificultat. Quan ha estat possible s'han contextualitzat les qüestions i proves presentades. Com no podia ser de cap altra manera, hi ha resultats involucrant els nombres primers,  $\pi$ ,  $e$ , triangles, àrees, volums, polinomis, sèries, fraccions contínues, daus, . . . , vaja, els àtoms de les matemàtiques. Una altra cosa, també inevitable, és la quantitat de noms il·lustres que surten citats al treball. Una versió ampliada d'aquest article és [20].

### ÍNDIX

1. Una pregunta amb resposta sorprenent	2
2. Hi ha infinits nombres primers	2
3. Hi ha infinits primers de la forma $4n - 1$	3
4. Un gran forat sense nombres primers	3
5. Quadrats i més quadrats	3
6. El Teorema de Viviani	5
7. Dues conjectures d'Euler	5
8. Estrelles	6
9. Algunes proves sense paraules	8
10. Ternes pitagòriques i números de Fibonacci	9

---

<sup>1</sup>“In [great theorems] there is a very high degree of unexpectedness, combined with inevitability and economy.”

11. Arc capaç i molt més que Pitàgores	10
12. Fórmules d'Heró i Brahmagupta	13
13. Els babilonis i Newton	16
14. Posició de $n$ punts al pla	17
15. Els primers díigits de $\pi$	18
16. Càlcul d'Arquimedes del volum de l'esfera	19
17. Daus de Sicherman	19
18. La irracionalitat d' $e$	21
19. Càlcul dinàmic del màxim comú divisor	22
20. Divergència de la suma dels inversos dels primers	24
Agraïments	25
Referències	25

1. **Una pregunta amb resposta sorprenent.** Hi ha dos números irracionals  $a$  i  $b$  tals que  $a^b$  sigui racional?

La prova, no constructiva, de que la resposta és “sí” és a la vegada senzilla i bonica. Agafem  $c = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ . Si  $c$  és racional ja hem acabat prenent  $a = b = \sqrt{2}$ . Si no, observem que

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2,$$

per tant podem prendre  $a = c$  i  $b = \sqrt{2}$ .

Observem que la demostració anterior no ens aclareix si  $c$  és racional o no. De fet, l'any 1900 Hilbert va proposar com a problema VII de la seva famosa llista, decidir per exemple si  $2^{\sqrt{2}}$  i  $e^\pi$  eren números transcendentals (és a dir, no eren arrels de cap polinomi no nul amb coeficients enters). Aquestes qüestions van ser resoltes simultàniament per Gelfond i Schneider al 1934. El seu resultat, conegut com Teorema de Gelfond–Schneider, ens diu que si  $a$  i  $b$  són números algebraics (no transcendentals),  $a \notin \{0, 1\}$  i  $b$  és irracional, aleshores  $a^b$  és transcendent.

Anem a veure que la transcendència (i per tant la irracionalitat) dels números  $2^{\sqrt{2}}$ ,  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  i  $e^\pi$  se segueix del teorema. Observi's en primer lloc que si  $\alpha$  és un número no algebraic, aleshores  $\beta = \sqrt{\alpha}$  també ho és, ja que si  $\beta$  fos arrel d'un polinomi  $P(x)$ , no nul amb coeficients enters, aleshores  $\alpha$  seria arrel de  $Q(x) := P(x^2)$ . Per tant, com que  $2^{\sqrt{2}}$  és transcendent el mateix passa amb la seva arrel quadrada,  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ . Finalment, com que  $e^\pi$  és un dels valors que pren  $(e^{i\pi})^{-i} = (-1)^{-i}$ , també sabem que és transcendent.

És curiós observar que encara no se sap si

$$\pi^e \quad \text{o} \quad \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)}$$

són irracionals o transcendentals.

2. **Hi ha infinits nombres primers.** Per a molts matemàtics la prova d'Euclides de que hi ha infinits primers és immillorable. A la secció següent en veurem una variació. Recordem-la breument. Si n'hi hagués un número finit,  $p_1, p_2, \dots, p_k$  arribem a una contradicció considerant  $p_1 p_2 \cdots p_k + 1$  ja que o bé aquest número és un nou primer, o té un primer diferent dels  $n$  donats com a divisor.

Recentment, al 2006, li ha sortit una competidora ([47]) que reproduïm a continuació. Considerem la següent successió de números naturals:

$$x_{k+1} = x_k(x_k + 1), \quad 1 < x_1 \in \mathbb{N}.$$

Demostrarem per inducció que la descomposició en factors primers de  $x_k$  conté com a mínim  $k$  primers diferents. El resultat és clarament veritat per  $k = 1$ . Suposem-lo cert per  $k = n$  i anem a provar-lo per  $k = n + 1$ . Tenim que  $x_k$  és divisible per  $k$  primers diferents. A més, per a tot  $1 < m \in \mathbb{N}$ , els números  $m$  i  $m + 1$  són primers entre si, ja que si  $p$  divideix a  $m$  i  $m + 1$ , divideix també a la resta que és 1. Així  $x_n + 1$  conté algun primer en la seva descomposició en factors primers que no és a la descomposició de  $x_n$ . Per tant  $x_{n+1}$  és divisible, com a mínim, per  $n + 1$  nombres primers, tal i com volíem demostrar.

Entre els dos llibres [34, 44] hi ha una dotzena de proves diferents de l'existència d'infinits nombres primers.

**3. Hi ha infinits primers de la forma  $4n - 1$ .** Del fet que hi ha infinits nombres primers ja sabem que o bé n'hi ha un número infinit de la forma  $4n - 1$ , o bé n'hi ha un número infinit de la forma  $4n + 1$ , o bé les dues opcions es donen.

Anem a veure que la primera opció és certa. La prova és una senzilla i elegant adaptació de la prova d'Euclides de la infinitud dels nombres primers.

Suposem que no, per tal d'arribar a contradicció. Siguin  $p_1, p_2, \dots, p_k$  tots els primers de la forma  $4n - 1$ . Considerem

$$N = 4p_1p_2 \cdots p_k - 1.$$

Aleshores  $N$  no pot ser primer, ja que seria de la forma  $4n - 1$  i no és a la llista de tots els primers d'aquesta forma. Clarament cap  $p_j$  divideix a  $N$ . A més a la descomposició de  $N$  en factors primers n'hi ha com a mínim un de la forma  $4n - 1$ , ja que si tots fossin de la forma  $4n + 1$ ,  $N$  també ho seria ja que  $(4n + 1)(4m + 1) = 4(4nm + n + m) + 1$ . Aquest primer seria de la forma  $4n - 1$  i no és cap dels  $p_j$ ,  $j \leq k$ , obtenint la contradicció desitjada.

De fet, Dirichlet al 1837 va demostrar que, variant  $n \in \mathbb{N}$ , qualsevol expressió  $an + b$  amb  $a$  i  $b$  enters coprimers dona lloc a infinits nombres primers.

**4. Un gran forat sense nombres primers.** Acabem de veure que hi ha infinits nombres primers. De fet, se sap molt més. Per exemple, a l'any 1896, Hadamard i de la Vallée-Poussin van provar, usant idees de Riemann, que si  $\pi(n)$  denota el número de nombres primers menors o iguals que  $n$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n) \ln(n)}{n} = 1.$$

Per això, a primera vista pot resultar sorprenent el resultat següent: per a tot  $m \in \mathbb{N}$  hi ha  $m$  números consecutius de manera que cap d'ells és primer. Abans de seguir llegint potser ve de gust pensar-ho per un mateix.

Hi ha una prova senzillíssima d'aquest fet: per a  $m \geq 2$ , podem prendre  $(m+1)! + k$ , per  $k \in \{2, \dots, m+1\}$ . Clarament, cada  $(m+1)! + k$  és divisible per  $k$ .

**5. Quadrats i més quadrats.** No és senzill dividir un quadrat en un número finit de quadrats més petits, tots disjunts i diferents, vegeu [14, Cap. 2]. Aquestes construccions es poden relacionar amb el disseny de certes xarxes elèctriques, vegeu [6]. A l'esquerra de la Figura 1, donem un quadrat de mida  $112 \times 112$  subdividit

en 21 quadrats més petits i diferents, tots amb costats enters. Va ser trobat l'any 1978 per Duijvestijn i s'ha demostrat que és el més senzill possible amb aquestes característiques. El mateix problema però començant amb un rectangle té solucions més simples, vegeu de nou la mateixa figura, on es mostra un rectangle  $33 \times 32$ , trobat l'any 1925 per Moroń, dividit en 9 peces quadrades diferents, amb costats enters. També se sap que aquesta solució és minimal.

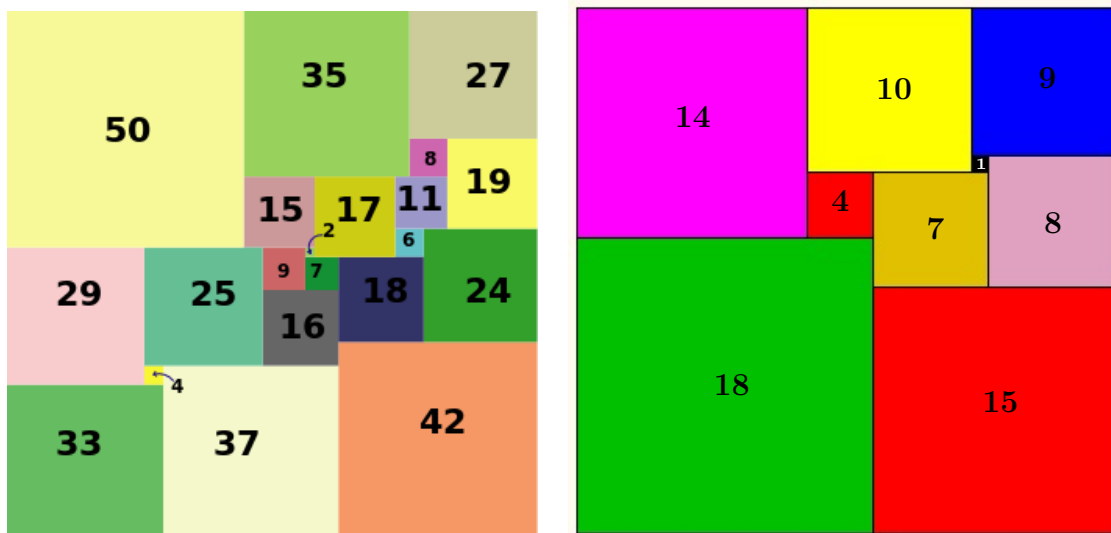


Figura 1. Quadrat i rectangle dividits en quadrats diferents.

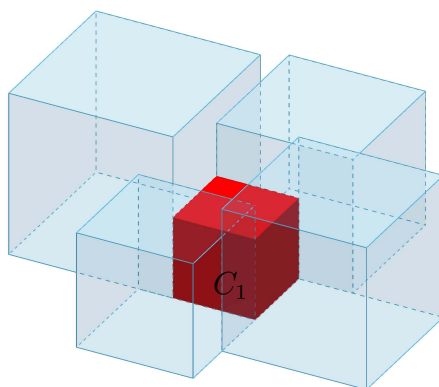


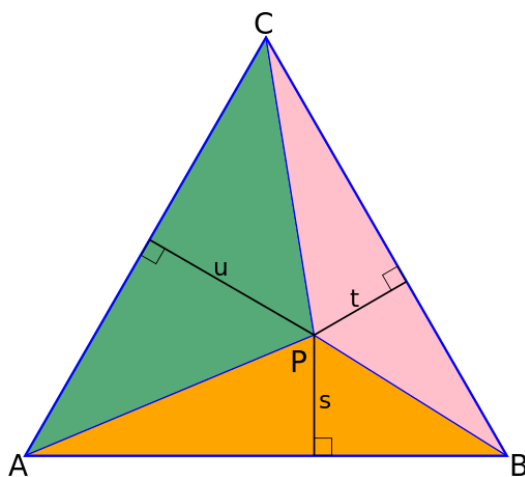
Figura 2. Impossibilitat de dividir un prisma rectangular en cubs diferents.

El que és força curiós és que cap prisma rectangular amb costats sencers es pot dividir en un número finit de cubs més petits, tots diferents. Anem a provar-ho per reducció a l'absurd seguint [15, Cap. 17]. Suposem que sí que es pogués. Aleshores, per exemple la base de sota del prisma quedaria dividida en quadrats, tots amb costats diferents. Sigui  $Q_1$ , el quadrat més petit. Sobre aquest quadrat, el cub corresponent,  $C_1$  és tal que tots els que l'envolten són més alts que ell mateix, vegeu la Figura 2. Aleshores, la base de sobre d'aquest cub és un quadrat (de la mateixa

mida que  $Q_1$ ) de manera que les bases de tots els cubs que estan recolzats en ell el divideixen en quadrats més petits i tots diferents. De nou, n'hi ha un que és el més petit, diem-li  $Q_2$ . Podem raonar igual començant ara amb la cara superior del cub  $C_2$  que té com a base  $Q_2$ , i continuar aquest procés fins arribar a que hi hauria cubs de costat més petit que 1, en contradicció amb el que suposàvem.

De fet, seguint un raonament semblant també podem demostrar que cap prisma rectangular (independentment de les mides dels seus costats) es pot subdividir en un número finit de cubs, tots diferents i tampoc amb costats necessàriament enters.

**6. El Teorema de Viviani.** Aquest teorema va ser provat per Viviani al segle XVII. Afirmar que si  $P$  és un punt interior d'un triangle equilàter aleshores la suma de les distàncies de  $P$  als tres costats del triangle  $AB$ ,  $BC$  i  $CA$  no depèn de  $P$  i val l'alçada  $h$  del triangle. Recordem, que si  $a$  és el costat del triangle, aleshores pel Teorema de Pitàgores,  $h = \sqrt{3}a/2$ .



**Figura 3.** Teorema de Viviani:  $s + t + u$  és constant.

La prova només usa que l'àrea d'un triangle és el producte de la base per alçada entre dos. Així, l'àrea total del triangle,  $ah/2$ , és igual a la suma de les àrees dels tres triangles en que es pot dividir,  $APB$ ,  $BPC$  i  $CPA$ , vegeu la Figura 3. Aquestes àrees són  $as/2$ ,  $at/2$  i  $au/2$ . Per tant  $s + t + u = h$ , tal i com volíem veure.

**7. Dues conjectures d'Euler.** Expliquem a continuació dos problemes que va tractar Euler, pels quals el seu fabulós enginy no va ser suficient per a proposar respostes correctes.

Fixat,  $n \in \mathbb{N}$ , Euler va conjecturar l'any 1769 que si sumen  $k > 1$  potències  $n$ -èsimes de números naturals i obtenim una potència  $n$ -èsima, aleshores  $k \geq n$ . Aquest resultat va resultar ser fals i el primer contraexemple va ser per  $n = 5$  i és de l'any 1966 ([29]):

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5.$$

Més endavant, l'any 1988, Frye va donar un contraexemple per  $n = 4$ ,

$$95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4.$$

El segon problema és el següent: donats dos conjunts amb  $n$  elements  $A$  i  $B$ , un *quadrat grecollatí d'ordre  $n$*  és una quadrícula de mida  $n \times n$  de manera que a cada casella hi ha un element de cada conjunt, tots els elements d' $A \times B$  hi són, i a més, cada element d' $A$  i de  $B$  apareix a totes les files i totes les columnes. Aquests quadrats són coneguts des d'abans d'Euler, però ell els va popularitzar. El seu nom ve de que ell denotava els elements d'un dels conjunts amb lletres gregues i els de l'altre amb lletres llatines. Avui en dia se sap que hi ha quadrats grecollatins per a tot  $n \geq 3$ , excepte per  $n = 6$ , en contra del que va conjeturar Euler en el seu temps. A la Figura 4 se'n mostren dos, un per  $n = 4$ , cosit per la meva mare en punt de creu amb fils de 8 colors, i un altre per  $n = 10$ . En els dos, es representen els elements dels conjunts com els colors de dins i de fora dels quadradets per cadascun dels  $n^2$  quadrats que els formen.



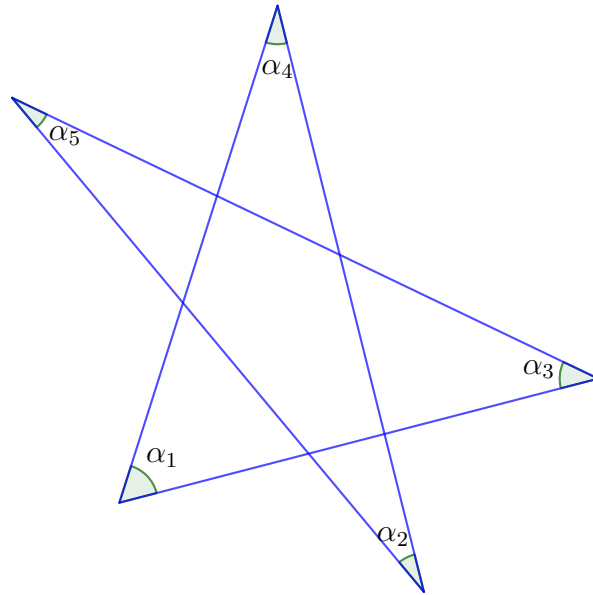
Figura 4. Quadrats grecollatins  $4 \times 4$  i  $10 \times 10$ .

8. **Estrelles.** Donada una estrella qualsevol de cinc puntes, anem a demostrar, seguint les idees de [16, Cap. 5], que la suma dels cinc angles que formen aquestes puntes és  $\pi$ . És a dir, que  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = \pi$ , vegeu la Figura 5.

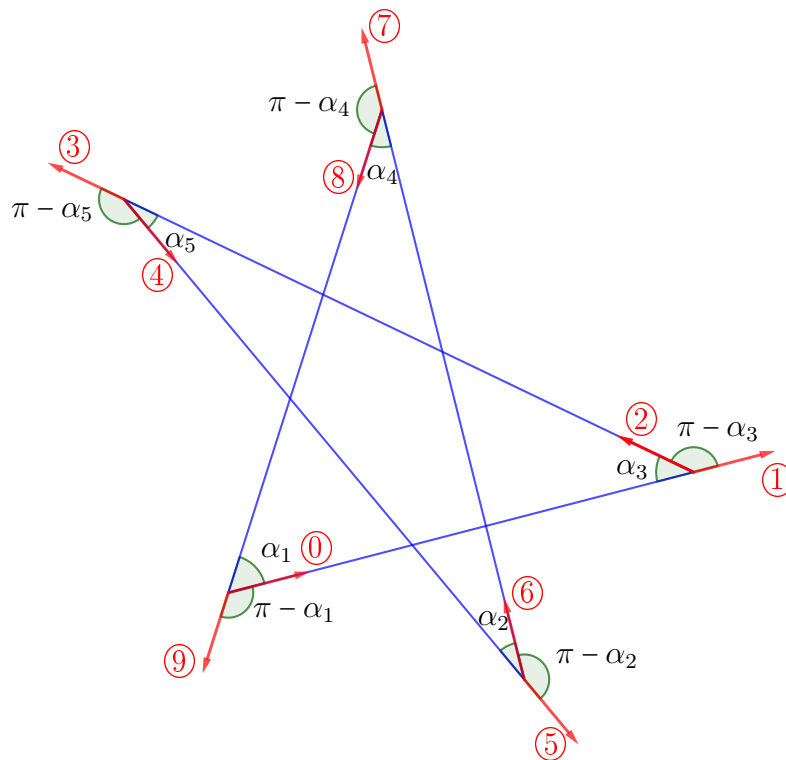
Comencem agafant un vector unitari, situat a un dels vèrtexs de l'estrella, paral·lel a un costat (vegeu el vector a la posició ① en la Figura 6). Aleshores, el fem lliscar fins a la posició ①. A continuació, girem un angle  $\pi - \alpha_3$  fins a estar a la posició ②. Fem el mateix, passant per les posicions ③, ④, ... fins arribar a ⑨ i finalment tornem a la posició ①. Per una banda, és clar que el vector ha fet dos voltes i per tant el seu gir total ha estat de  $4\pi$  radianis. Per altra banda, els angles que ha anat girant a cadascuna de les cinc puntes han estat  $\pi - \alpha_3$ ,  $\pi - \alpha_5$ ,  $\pi - \alpha_2$ ,  $\pi - \alpha_4$  i  $\pi - \alpha_1$ . Per tant,

$$(\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) + (\pi - \alpha_3) + (\pi - \alpha_4) + (\pi - \alpha_5) = 4\pi,$$

d'on es dedueix que  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = \pi$ , tal i com volíem veure.



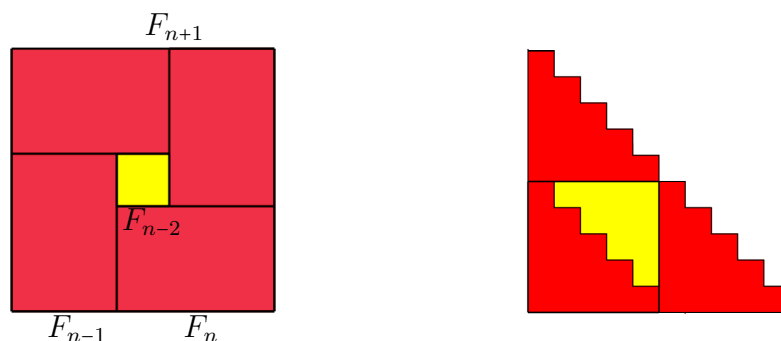
**Figura 5.** Estrella de cinc puntes:  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = \pi$ .



**Figura 6.** Estrella de cinc puntes.

Clarament, usant la mateixa idea, es poden obtenir resultats similars en el cas de polígons o d'estrelles amb més puntes. Per exemple, en el cas d'un triangle tenim que  $(\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) + (\pi - \alpha_3) = 2\pi$  i en el d'un quadrilàter convex  $(\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) + (\pi - \alpha_3) + (\pi - \alpha_4) = 2\pi$ . Per tant, pels triangles  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$  i pels quadrilàters convexos,  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi$ . De fet, el resultat és cert per tots els

quadrilàters, com es pot veure per exemple dividint-los en dos triangles, però pels no convexos aquest argument no demostra el resultat desitjat.

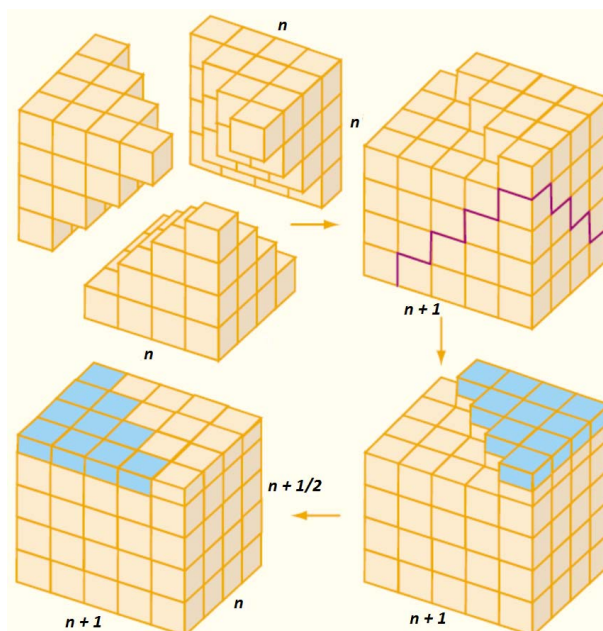


**Figura 7.** Números de Fibonacci i números triangulars.

9. **Algunes proves sense paraules.** Les quatre proves presentades i moltes més es poden trobar a [35, 36]. El famoses números de Fibonacci  $F_n$ , que recordem, venen definits com  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ , amb  $F_0 = 0, F_1 = 1$ , o els números triangulars  $T_n = 1 + 2 + \dots + n$ , satisfan certes relacions. Per exemple

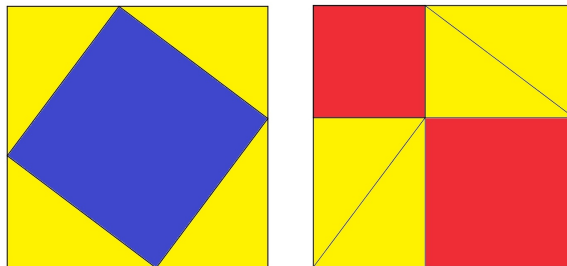
$$F_{n+1}^2 = 4F_n F_{n-1} + F_{n-2}^2, \quad T_{2n} = 3T_n + T_{n-1}.$$

Tot i que no és gens difícil demostrar-les analíticament, les figures següents ens donen *proves sense paraules* de les mateixes.



**Figura 8.** Suma dels quadrats.





**Figura 9.** Teorema de Pitàgores.

Una prova sense paraules de

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+1/2)}{3}, \quad (1)$$

es mostra a la Figura 8. No és difícil demostrar (1) usant inducció. Aquí la bellesa no està pas en el resultat, sinó en la prova visual. Les figures de la Figura 9 demostren el Teorema de Pitàgores ja que la suma de les àrees dels quadrats vermells coincideix amb la del quadrat blau, és a dir  $a^2 + b^2 = c^2$ , on  $a$  i  $b$  són els costats d'un triangle rectangle que formen angle recte i  $c$  és la seva hipotenusa.

**10. Ternes pitagòriques i números de Fibonacci.** Una terna pitagòrica és una tripleta d'enters positius  $a, b, c$  que compleixen  $a^2 + b^2 = c^2$ , és a dir que són els costats d'un triangle rectangle. Euclides ja va demostrar que totes les ternes pitagòriques primitives (és a dir, tals que  $a, b$  i  $c$  no tenen cap divisor comú més gran que 1) venen donades per

$$a = u^2 - v^2, \quad b = 2uv, \quad c = u^2 + v^2, \quad (2)$$

amb  $u$  i  $v$  enters positius,  $u > v$ , coprimers i els dos no senars a la vegada. La més coneguda és  $3^2 + 4^2 = 5^2$  i correspon a  $u = 2$  i  $v = 1$ . Anem a demostrar-ho seguint [41].

Una primera observació és que el números  $a$  i  $b$  han de tenir diferent paritat, i a més  $c$  ha de ser senar. Observem, per exemple que si  $c$  fos parell, aleshores  $c^2 = a^2 + b^2$  hauria de ser divisible per 4, però si  $a$  i  $b$  fossin els dos senars, és a dir  $a = 2k + 1$  i  $b = 2\ell + 1$ , aleshores  $a^2 + b^2 = 4(k^2 + k + \ell^2 + \ell) + 2$ , que no és divisible per 4. Així, suposarem sense pèrdua de generalitat que  $b$  és parell, i  $a$  i  $c$  senars.

Escriuim  $b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a)$ . Com que  $c$  i  $a$  són primers entre si, i els dos senars, l'únic divisor comú entre  $c + a$  i  $c - a$  és 2. En altres paraules,  $(c + a)/2$  i  $(c - a)/2$  són naturals positius i primers entre sí. Per tant tenim la igualtat

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{c+a}{2}\right)\left(\frac{c-a}{2}\right).$$

Finalment, com que  $b/2 \in \mathbb{N}$  i  $(c+a)/2$  i  $(c-a)/2$  no tenen factors en comú, la igualtat donada força que ambdós números siguin també quadrats. Així,  $(c + a)/2 = u^2$  i  $(c - a)/2 = v^2$ , amb  $u, v \in \mathbb{N}$ . Operant,  $c = u^2 + v^2$ ,  $a = u^2 - v^2$  i  $b^2 = 4u^2v^2$ , com volíem demostrar.

A partir de (2) és trivial trobar ternes pitagòriques amb números de Fibonacci, o amb el números que es vulgui. Seguint [5, 39] anem a donar un parell de casos elegants.

Si prenem  $u = F_{n+1}$ ,  $v = F_n$  i usem que  $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$  obtenim

$$(F_{n+1}^2 - F_n^2)^2 + (2F_n F_{n+1})^2 = F_{2n+1}^2.$$

La següent prova de que  $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$  és també força enginyosa. És senzill demostrar per inducció que

$$M^n := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Per tant, com que  $M^{2n} = M^n M^n$ , tenim que

$$\begin{pmatrix} F_{2n+1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Fent el producte de matrius i igualant l'element de la primera fila i la primera columna tenim que  $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$ , tal i com volíem provar.

Si eliminen la condició  $F_0 = 0, F_1 = 1$  dels números de Fibonacci obtenim uns números diferents, que denotarem per  $f_n$  i anomenarem números de fibonacci generalitzats. Per exemple, prenent  $F_0 = 2, F_1 = 1$  obtenim els números de Lucas: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, ...

La segona terna pitagòrica que presentem involucra 4 números de fibonacci generalitzats consecutius  $f_n, f_{n+1}, f_{n+2}$  i  $f_{n+3}$  i és

$$(f_n f_{n+3})^2 + (2f_{n+1} f_{n+2})^2 = (f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2)^2.$$

Els 4 números es poden escriure com  $u - v, v, u, u + v$  i el resultat se segueix de nou de la igualtat  $(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = (v^2 + u^2)^2$ .

**11. Arc capaç i molt més que Pitàgores.** Prenem dos punts  $A$  i  $B$  sobre una circumferència de manera que l'arc que formen és  $2\alpha$ . Aleshores, es pot demostrar que qualsevol punt  $C$  de la mateixa circumferència, i fora d'aquest arc, és tal que l'angle  $ACB$  és  $\alpha$ , vegeu el gràfic de l'esquerra de la Figura 10. Es diu que els punts  $C$  formen l'*arc capaç* del segment  $AB$  amb angle  $\alpha$ . Així, el segment  $AB$  és veu sota un mateix angle  $\alpha$  des dels punts d'aquest arc capaç.

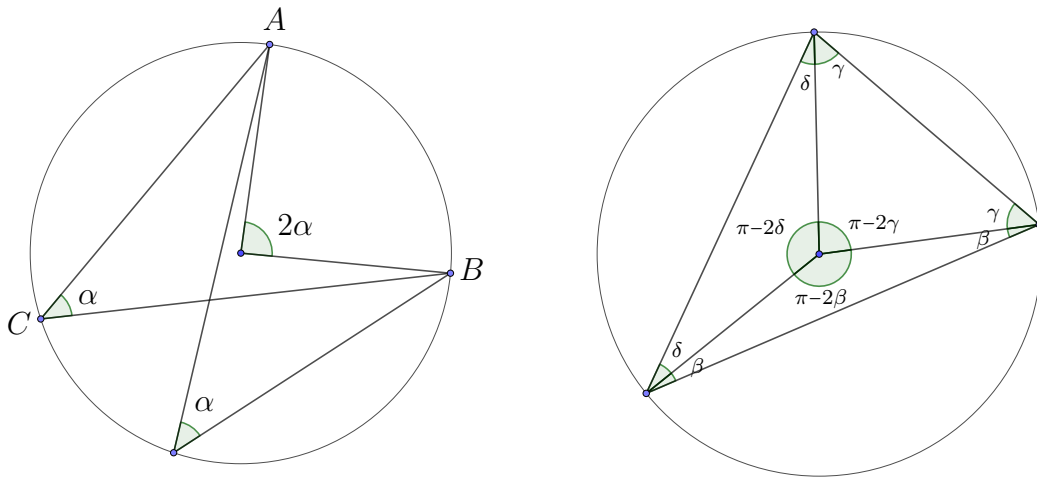
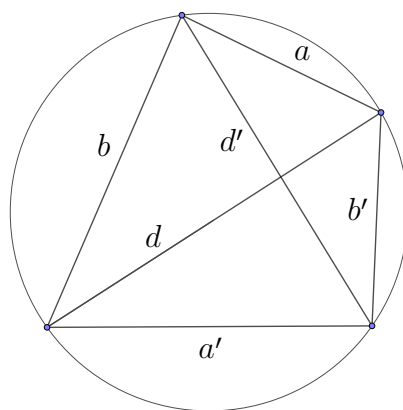


Figura 10. Arc capaç.

Per a demostrar l'afirmació anterior fem la construcció de la dreta de la Figura 10. En aquesta figura suposem que el centre de la circumferència que passa pels tres punts és dins del triangle. El cas en que el centre és fora es pot tractar de manera semblant. En primer lloc, observem que dos costats de cadascun dels tres triangles petits són radis de la circumferència. Per tant tenim que els tres triangles són isòsceles i cadascun d'ells té dos angles iguals, que anomenarem  $\beta$ ,  $\gamma$  i  $\delta$ , respectivament. Per tant, sumant els tres angles que tenen com a vertex el centre de la circumferència obtenim

$$2\pi = (\pi - 2\beta) + (\pi - 2\gamma) + (\pi - 2\delta) = 3\pi - 2(\beta + \gamma + \delta).$$

Com a conseqüència  $\pi - 2\gamma = 2(\beta + \delta)$  que és precisament el que volíem demostrar.

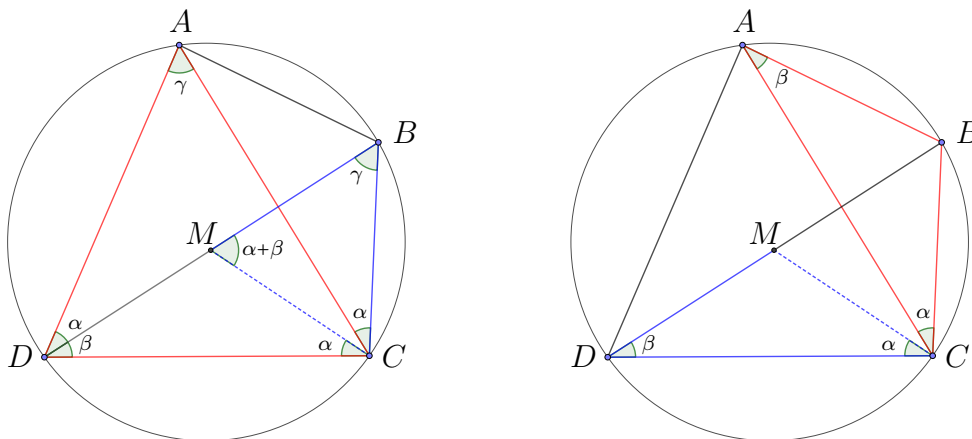


**Figura 11.** Teorema de Ptolemeu:  $aa' + bb' = dd'$ .

Usant arcs capaços anem a provar el Teorema de Ptolemeu, demostrat per aquest astrònom al segle II per a construir taules trigonomètriques, vegeu [9, Cap 10]. Aquest teorema afirma que per un quadrilàter cíclic o inscrit, com el de la Figura 11, és a dir amb els quatre vèrtexs en una mateixa circumferència, es compleix  $aa' + bb' = dd'$ . Observi's que en el cas de que el quadrilàter sigui un rectangle tenim que  $a = a'$ ,  $b = b'$ ,  $d = d'$  i el teorema ens diu que  $a^2 + b^2 = d^2$ , és a dir, el Teorema de Pitàgores.

Demostrarem el Teorema de Ptolemeu seguint [37]. En primer lloc, considerem la construcció de l'esquerra de la Figura 12. Els angles  $ACB$  i  $ADB$  coincideixen ja els punts  $A$  i  $B$  que formen part de l'arc capaç del segment  $AB$ ; els anomenarem  $\alpha$ . De manera semblant els angles  $DAC$  i  $DBC$  són iguals i anomenem  $\gamma$  l'angle que formen. A continuació considerem el segment  $DB$  i busquem un punt  $M$  en aquest segment de manera que l'angle  $DCM$  sigui també  $\alpha$ . Aleshores veiem que l'angle  $CMB$  és  $\alpha + \beta$ . Usant tots els angles esmentats arribem a que els triangles  $ACD$  i  $BCM$  són semblants i per tant

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|BM|}{|BC|},$$



**Figura 12.** Prova del Teorema de Ptolemeu.

on  $|PQ|$  denota la longitud del segment que uneix  $P$  i  $Q$ . Raonant de manera semblant amb la construcció de la dreta, amb els triangles  $ABC$  i  $DMC$ , de la Figura 12 obtenim que

$$\frac{|DC|}{|DM|} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

Finalment, expressant les igualtats anteriors en termes d' $a, a', b, b', d, d'$ , i anomenant  $|DM| = d_1$ ,  $|MB| = d_2$  tenim que

$$\frac{b}{d'} = \frac{d_2}{b'} \quad \text{i} \quad \frac{a'}{d_1} = \frac{d'}{a}.$$

Per tant  $bb' = d_2d'$  i  $aa' = d_1d'$ . Com que  $d = d_1 + d_2$ , sumant les dues igualtats tenim que  $aa' + bb' = dd'$ .

A més, anem a veure com el Teorema de Ptolemeu, junt amb el famós teorema dels sinus, ens permet calcular el sinus d'una suma d'angles. Si a la figura de l'esquerra de la Figura 12 suposem que el segment  $DB$  passa pel centre de la circumferència aleshores els triangles  $ABD$  i  $CBD$  són ambdós rectangles. A més, si la longitud del segment és 1, aleshores  $d = 1$ ,  $a = |AB| = \sin(\alpha)$ ,  $b = |DA| = \cos(\alpha)$ ,  $a' = |DC| = \cos(\beta)$  i  $b' = |CB| = \sin(\beta)$ . Finalment, a partir del teorema dels sinus tenim que  $d' = |AC| = \sin(\alpha + \beta)$ , i el Teorema de Ptolemeu ens diu que

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) = \sin(\alpha + \beta).$$

Per acabar anem a veure que per quadrilàters convexos qualssevol (és a dir, no necessàriament inscrits en una circumferència) es compleix la coneguda com desigualtat de Ptolemeu,  $dd' \leq aa' + bb'$ . Seguirem la prova de [3]. Per això, pensem el quadrilàter inclòs en el pla complex,  $\mathbb{C}$ , i considerem els quatre números complexos,  $u, v, w, z$  associats als quatre vèrtexs de la figura. Si denotem per  $|s|$  la norma de  $s \in \mathbb{C}$ , tenim per exemple que  $a = |v - w|$ ,  $b = |u - v|$ ,  $a' = |u - z|$ ,  $b' = |w - z|$ ,  $d = |u - w|$  i  $d' = |v - z|$ . És fàcil comprovar la següent identitat entre números complexos

$$(u - w)(v - z) = (v - w)(u - z) + (u - v)(w - z).$$

Així, si usem que  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$  i  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  obtenim

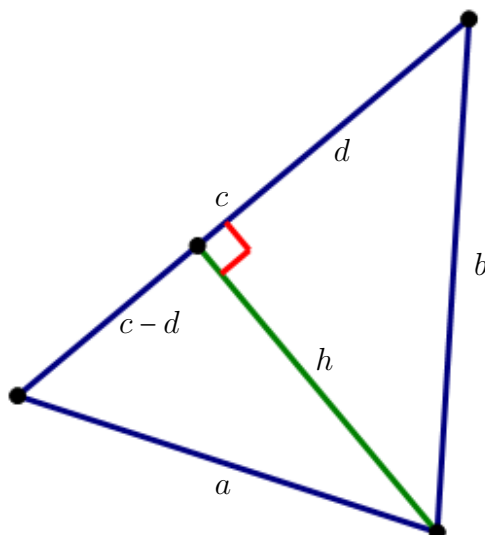
$$\begin{aligned} dd' &= |u - w| |v - z| = |(u - w)(v - z)| = |(v - w)(u - z) + (u - v)(w - z)| \\ &\leq |v - w| |u - z| + |u - v| |w - z| = aa' + bb', \end{aligned}$$

tal i com volíem provar. Ja sabem que la igualtat es dona per quadrilàters inscrits en una circumferència. Amb una mica més de feina es pot veure que aquest és l'únic cas d'igualtat.

**12. Fórmules d'Heró i Brahmagupta.** La fórmula que permet calcular l'àrea  $A$  d'un triangle en funció dels seus costats,  $a, b$  i  $c$ , s'atribueix a Heró d'Alexandria (segle I), tot i que hi ha autors que pensen que Arquimedes (segle III a. C.) ja la coneixia, veure [11, Cap. 3]. Aquest bonic resultat ens diu

$$A = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

on  $s = (a+b+c)/2$ .



**Figura 13.** Prova de la fórmula d'Heró.

Per a demostrar-la, seguint [42], dividim el triangle en dos triangles rectangles mitjançant una alçada, vegeu la Figura 13. Aplicant el Teorema de Pitàgores als dos triangles resultants tenim que  $a^2 = h^2 + (c-d)^2$  i  $b^2 = h^2 + d^2$ . Restant les dues igualtats obtenim que  $a^2 - b^2 = c^2 - 2cd$  i per tant,  $d = (-a^2 + b^2 + c^2)/(2c)$ . Finalment, substituint aquest valor de  $d$  a la segona igualtat tenim

$$\begin{aligned} h^2 &= b^2 - d^2 = b^2 - \left( \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} \right)^2 = \frac{(2bc)^2 - (-a^2 + b^2 + c^2)^2}{4c^2} \\ &= \frac{(2bc - a^2 + b^2 + c^2)(2bc + a^2 - b^2 - c^2)}{4c^2} = \frac{((b+c)^2 - a^2)((a^2 - (b-c)^2)}{4c^2} \\ &= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4c^2}, \end{aligned}$$

on hem usat varies vegades  $u^2 - v^2 = (u + v)(u - v)$ . Per tant

$$A = \frac{ch}{2} = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)},$$

tal com volíem veure.

Hi ha altres maneres d'expressar l'àrea d'un triangle que són equivalents a la fórmula d'Heró. No detallarem els passos per veure-ho, tot i que no són gens evidents. Una d'elles és

$$16A^2 = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

De fet, la matriu de la que s'ha de calcular el determinant s'anomena matriu de Cayley-Menger i té una versió ampliada que permet calcular el volum de prismes  $n$ -dimensionals en funció de les seves arestes, vegeu per exemple [8].

L'altra manera, en lloc de donar l'àrea en termes dels costats del triangle, la dona en termes de les coordenades dels seus punts. Així, si els tres vèrtexs són  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,

$$4A^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2.$$

Abans de passar als quadrilàters, farem una “deducció” heurística de com hauria de ser la fórmula més senzilla que pogués donar  $A$  en termes d' $a, b$  i  $c$ , trobant, sense càlculs, la fórmula d'Heró, veure [28]. Per això, començarem amb una llista de propietats que ha de complir la funció que ens doni l'àrea al quadrat,  $\psi(a, b, c)$ :

- Quan els tres punts estan alineats l'àrea és zero, és a dir  $\psi(b+c, b, c) = \psi(a, a+c, c) = \psi(a, b, a+b) = 0$ .
- La funció  $\psi$  és simètrica, és a dir  $\psi(a, b, c) = \psi(a, c, b) = \dots = \psi(c, b, a)$ .
- La funció és homogènia de pes 4, és a dir,  $\psi(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = \lambda^4 \psi(a, b, c)$ , per a tot  $\lambda > 0$ , ja que l'àrea és homogènia de pes 2.
- L'àrea al quadrat del triangle equilàter de costat 1 és  $3/16$ .

La funció més senzilla que compleix la llista de propietats és

$$\psi(a, b, c) = \frac{1}{16} (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c),$$

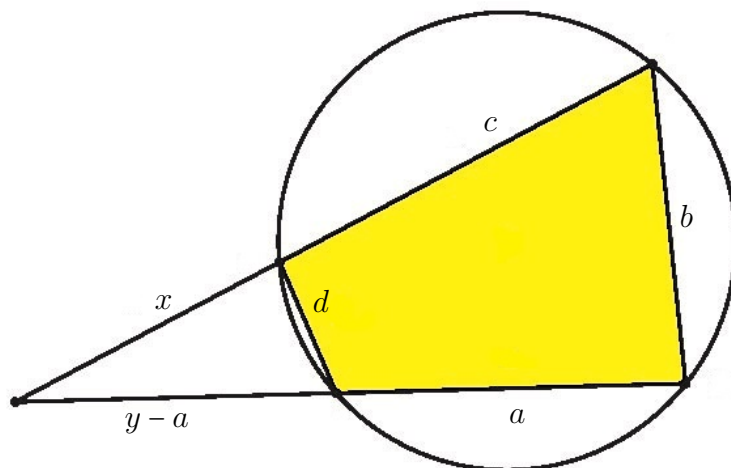
que correspon precisament al resultat d'Heró.

Hi ha una fórmula similar per a calcular l'àrea  $S$  d'un quadrilàter inscrit en una circumferència en funció dels seus quatre costats,  $a, b, c$  i  $d$ , vegeu la Figura 14. Es deguda a Brahmagupta (segle VII) i és

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} \sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)} \\ &= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}, \end{aligned}$$

on  $s = (a+b+c+d)/2$ .

Clarament, la fórmula d'Herò es dedueix d'aquesta prenent  $d = 0$ , però el que farem ara és precisament el contrari. Seguint [24], la demostrarem a partir de la fórmula d'Heró.



**Figura 14.** Prova de la fórmula de Brahmagupta.

Per a provar la fórmula de Brahmagupta ens podem restringir al cas en que el quadrilàter no és un rectangle (sinó, és trivialment certa) i podem suposar que estem en la situació de la Figura 14. Usant un cop més les propietats dels arcs capaços, consulteu la Secció 11, no és difícil provar que la suma de dos angles interns i oposats en un quadrilàter cíclic és  $\pi$ . Per tant, els dos triangles de la Figura 14 són semblants i es compleix

$$\frac{x}{y} = \frac{y-a}{x+c} = \frac{d}{b} =: \lambda < 1. \quad (3)$$

Així, l'àrea que busquem és  $S = A_g - A_p$ , on  $A_g$  i  $A_p = \lambda^2 A_g$  són les àrees dels triangles gran i petit de la mateixa figura. Com que els costats del triangle gran són  $x+c, y$  i  $b$ , utilitzant la fórmula d'Heró,  $A_g = \sqrt{F_1 F_2 F_3 F_4}/4$ , on  $F_1 = x+c+y+b$ ,  $F_2 = -x-c+y+b$ ,  $F_3 = x+c-y+b$  i  $F_4 = x+c+y-b$ . Observem, que usant (3), tenim que

$$\begin{aligned} (1-\lambda)F_1 &= (1-\lambda)(x+c+y+b) = x+c+y+b - (y-a+x+d) = a+b+c-d, \\ (1+\lambda)F_2 &= (1+\lambda)(-x-c+y+b) = -x-c+y+b + (-y+a+x+d) = a+b-c+d, \\ (1+\lambda)F_3 &= (1+\lambda)(x+c-y+b) = x+c-y+b + (y-a-x+d) = -a+b+c+d, \\ (1-\lambda)F_4 &= (1-\lambda)(x+c+y-b) = x+c+y-b - (y-a+x-d) = a-b+c+d. \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} S &= A_g - \lambda^2 A_g = (1-\lambda^2)A_g = \frac{1}{4} \sqrt{((1-\lambda)F_1)((1+\lambda)F_2)((1+\lambda)F_3)((1-\lambda)F_4)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}, \end{aligned}$$

tal i com volíem provar.

Hi ha extensions d'aquestes fórmules per a polígons amb més costats, també inscrits en una circumferència, vegeu per exemple [45].

Per quadrilàters generals és impossible que hi hagi una fórmula que doni la seva àrea només en funció dels costats, ja que aquests són figures deformables sense canviar les mides dels costats (pensem per exemple un quadrilàter fet amb quatre

peces de “Meccano”). Per exemple, fixada la mida dels costats d’un quadrilàter, aquest es pot deformar de manera que tingui àrea tan petita com es vulgui. L’any 1842, Bretschneider va donar una fórmula per quadrilàters convexos que involucra també dos angles interiors oposats del quadrilàter, que anomenarem com  $\alpha$  i  $\gamma$ . La fórmula ens diu que

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right)},$$

vegeu per exemple [17, 40]. Observem que si agaféssim els altres dos angles oposats aleshores la seva suma seria  $2\pi - (\alpha + \gamma)$  i el resultat no variaria. Recordem també, que per als quadrilàters cíclics,  $\alpha + \gamma = \pi$  i per tant aquesta fórmula coincideix amb la de Brahmagupta. Hi ha versions equivalents de la mateixa canviant els angles per les diagonals del quadrilàter ([10]).

**13. Els babilonis i Newton.** El babilonis, als voltants de 2000-1700 AC, calculaven arrels quadrades (amb precisió suficient per als seus interessos) basant-se en una idea geomètrica molt suggerent, veure [9, Cap. 7]. Aquest mètode també va ser descrit per Heró d’Alexandria al segle I. Sigui  $x_0$  una bona aproximació de  $\sqrt{a}$ . Aleshores construïm un rectangle amb base  $x_0$  i alçada tal que la seva àrea sigui  $a$ , és a dir  $a/x_0$ . Si obtenim un quadrat, ja està i  $x_0$  és l’arrel quadrada buscada. Si no, un dels costats és més gran que  $\sqrt{a}$  i l’altre és més petit. Aleshores és natural pensar que el promig d’ambdós valors  $(x_0 + a/x_0)/2$  serà una aproximació millor de  $\sqrt{a}$ . En resum, aquesta idea geomètrica ens dona lloc al següent mètode iteratiu per a calcular  $\sqrt{a}$ ,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}, \quad x_0 \approx \sqrt{a}.$$

De fet, els babilonis feien només unes poques iteracions d’aquest procés.

Seguint, l’estela dels babilonis, anem a fer un raonament semblant amb cubs per a calcular  $\sqrt[3]{a}$ . Donat  $x_0 \approx \sqrt[3]{a}$  construïm un prisma de volum  $a$ , amb base quadrada, i costats  $x_0, x_0$  i  $a/x_0^2$ . Aleshores  $x_1 = (2x_0 + a/x_0^2)/3$ . Més en general, per a calcular  $\sqrt[k]{a}$ , prenem en primer lloc un prisma  $k$ -dimensional de costats  $x_0, x_0, \dots, x_0$  i  $a/x_0^{k-1}$ , i com a aproximació següent  $x_1 = ((k-1)x_0 + a/x_0^{k-1})/k$ . És a dir, és natural considerar el mètode iteratiu per a calcular  $\sqrt[k]{a}$ ,

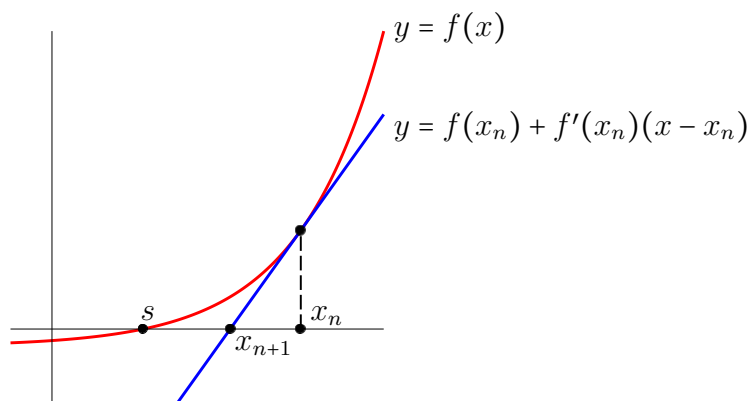
$$x_{n+1} = \frac{(k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}}{k}, \quad x_0 \approx \sqrt[k]{a}.$$

Per altra banda, un dels mètodes més eficients per a trobar una solució,  $s$ , d’una equació general  $f(x) = 0$ , amb  $f$  derivable, és l’anomenat mètode de Newton. Aquest consisteix en considerar la successió

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad x_0 \approx s.$$

La seva interpretació geomètrica es mostra a la Figura 15. Se sap que si  $x_0$  és prou a prop de  $s$ , aleshores la successió  $\{x_n\}$  convergeix cap a  $s$ , veure per exemple [43].





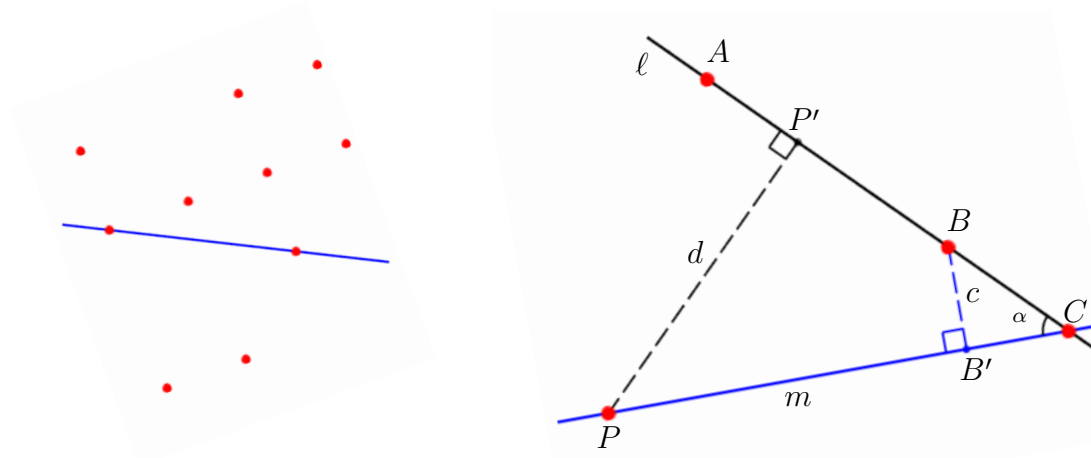
**Figura 15.** Mètode de Newton.

Ara bé, si prenem  $f(x) = x^k - a$ , aleshores  $s = \sqrt[k]{a}$  i el mètode basat en la idea babilònica coincideix amb el mètode de Newton, ja que

$$x - \frac{x^k - a}{kx^{k-1}} = \frac{(k-1)x + \frac{a}{x^{k-1}}}{k}.$$

És força curiós com, pel cas particular  $f(x) = x^k - a$ , el mètode de Newton, que sembla fortament basat en el càlcul d'una derivada apareix també de manera natural usant només idees de geometria clàssica.

**14. Posició de  $n$  punts al pla.** L'any 1893, en una columna de problemes matemàtics, J. J. Sylvester va proposar el següent problema: Demostrar que donada qualsevol distribució de  $n \geq 3$  punts no alineats al pla hi ha una línia que passa per només dos d'aquests punts. Vegeu un cas particular a la figura de l'esquerra de la Figura 16. Intuïtivament és clar que el resultat sembla cert, però en una primera aproximació sembla difícil de formalitzar una prova. En aquest cas el més maco és potser com, amb una mica d'enginy, el problema esdevé ben formalitzat i senzill. La qüestió va ser proposada de nou per Erdős l'any 1943 com a problema 4065 al American Mathematical Monthly. Reproduïm a continuació la prova de Gallai de 1944 de que el resultat és cert, vegeu també [1, Cap. 9]. De fet, aquest es coneix avui en dia com a Teorema de Sylvester-Gallai.



**Figura 16.** Problema de Sylvester.

Donada una recta que passa per dos punts qualssevol del conjunt de punts, hi ha uns quants punts que no són a la recta. Aleshores n'hi ha un (no té perquè ser únic) que és el més proper a aquesta recta. Com que fixats els  $n$  punts hi ha un número finit de rectes passant per dos d'aquests, hi ha sempre una recta  $\ell$  i un punt  $P$  del conjunt de punts (de nou, no necessàriament únics) tals que la distància  $d$  de  $P$  a  $\ell$  és la més petita possible. Sigui  $P'$  el punt de  $\ell$  més proper a  $P$ , vegeu la figura dreta de la Figura 16. Si a  $\ell$  només hi ha dos punts del conjunt inicial de punts, ja hem acabat. Suposarem, per tal d'arribar a contradicció, que  $\ell$  conté com a mínim 3 punts, que denotarem per  $A$ ,  $B$  i  $C$ . A més, com a mínim dos d'ells (diem  $B$  i  $C$ ), són a un mateix costat de  $\ell \setminus \{P'\}$ . Finalment, considerem la recta  $m$  que passa per  $C$  (el punt més allunyat de  $P'$  dels dos) i  $P$ . Sigui  $c$  la distància entre  $B$  i  $m$ . Com que els triangles rectangles  $P'PC$  i  $B'BC$  són semblants és fàcil veure que  $c < d$ , fet que contradiu la minimalitat de  $d$ .

**15. Els primers díigits de  $\pi$ .** Les dues igualtats següents es poden obtenir fàcilment calculant primitives i aplicant la regla de Barrow,

$$0 < \int_0^1 \frac{(3x^2 - 1)^2}{1 + x^2} dx = 4(\pi - 3), \quad 0 < \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx = \frac{22}{7} - \pi, \quad (4)$$

i impliquen que  $3 < \pi < \frac{22}{7}$ , vegeu també [12]. Per exemple,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(3x^2 - 1)^2}{1 + x^2} dx &= \int_0^1 \left( 9x^2 - 15 + \frac{16}{1+x^2} \right) dx \\ &= \left( 3x^3 - 15x + 16 \arctan(x) \right) \Big|_0^1 = 3 - 15 + 4\pi = 4(\pi - 3). \end{aligned}$$

N'hi ha moltes de semblants, i han estat usades en diferents treballs per a obtenir algorismes per a aproximar  $\pi$ , consulteu [4, 13, 19, 32, 33, 38].

La segona d'elles també ens permet conèixer fàcilment els primers díigits de  $\pi$ , ja que per  $x \in [0, 1]$ ,

$$\frac{x^4(1-x)^4}{2} \leq \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} \leq x^4(1-x)^4$$

i  $\int_0^1 x^4(1-x)^4 dx = 1/630$ . Per tant,

$$3.1412\dots = \frac{3958}{1260} = \frac{22}{7} - \frac{1}{630} < \pi < \frac{22}{7} - \frac{1}{1260} = \frac{3959}{1260} = 3.1420\dots \quad (5)$$

Un cop trobada una aproximació de  $\pi$ , aquesta es pot millorar usant, per exemple, el procediment proposat a [49]. Aquest ens diu que si  $P$  és una aproximació de  $\pi$ , correcta fins la xifra decimal  $k$ -èsima, aleshores  $P + \sin(P)$  és correcta fins la xifra decimal  $3k$ -èsima. No es pot negar que aquest resultat té un cert encant, tot i que essent justos és una mica truculent ja que usar la funció sinus implica, de manera implícita, el coneixement de  $\pi$ . Altres vies més naturals per a trobar més díigits de  $\pi$  es poden consultar per exemple a [18]. En qualsevol cas, si  $P = 3$ , tenim que  $3 + \sin(3) \approx 3.1411$ . De manera semblant,  $Q = 3.141 + \sin(3.141) \approx 3.141592653555$ , i  $|Q - \pi| < 4 \times 10^{-11}$ . Per a veure per què el mètode funciona podem aplicar la fórmula de Taylor a  $f(x) = x + \sin(x)$  a  $x = \pi$ . Tenim que

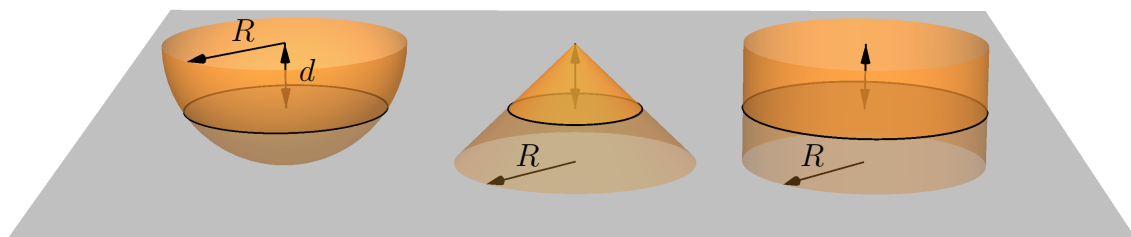
$$x + \sin(x) = \pi - \frac{\cos(sx)}{6}(x - \pi)^3,$$

ja que  $f(\pi) = \pi$ ,  $f'(\pi) = f''(\pi) = 0$  i  $f'''(x) = -\cos(x)$ , on  $s_x$  està entre  $x$  i  $\pi$ . Per tant, per  $x = P$ ,

$$|P + \sin(P) - \pi| \leq \frac{|P - \pi|^3}{6},$$

tal com volíem veure. Iterant el procés obtenim que la successió recurrent  $P_{n+1} = P_n + \sin(P_n)$ , amb  $P_0 = P$ , convergeix cúbicament cap a  $\pi$ .

**16. Càlcul d'Arquimedes del volum de l'esfera.** Calculem a continuació el volum d'una esfera seguint les idees d'Arquimedes. El que va usar en el seu temps, per un cas concret, és el que avui en dia coneixem com a principi de Cavalieri. Al seu torn, aquest principi és un cas molt particular del Teorema de Fubini.



**Figura 17.** Volum de l'esfera.

Considerem la Figura 17. A l'esquerra tenim mitja esfera de radi  $R$ , al mig un con amb base de radi  $R$  i alçada també  $R$  i a la dreta un cilindre amb la mateixa base i la mateixa alçada. Si tallen les tres figures per un pla horitzontal, que està a distància  $d$  dels punts més alts de les tres figures, obtenim tres cercles. Ara bé en el cas de l'esfera, usant el Teorema de Pitàgores tenim un radi  $\sqrt{R^2 - d^2}$ , en el cas del con un radi  $d$  i, en el del cilindre, un radi  $R$ . Per tant, les àrees de les 3 seccions, d'esquerra a dreta són:  $S_{\text{esf}} := \pi(R^2 - d^2)$ ,  $S_{\text{con}} := \pi d^2$  i  $S_{\text{cil}} = \pi R^2$ . Així, es compleix  $S_{\text{esf}} + S_{\text{con}} = S_{\text{cil}}$ . Com a conseqüència,

$$\frac{\text{Volum de l'esfera}}{2} + \text{Volum del con} = \text{Volum del cilindre}.$$

Per tant, sabent com calcular el volum d'un con i d'un cilindre, ja podem calcular el volum  $V$  de l'esfera a partir de la igualtat anterior:

$$\frac{V}{2} + \frac{\pi R^3}{3} = \pi R^3.$$

Obtenim que  $V = 4\pi R^3/3$ .

**17. Daus de Sicherman.** Els daus de Sicherman van ser popularitzats l'any 1978 per Martin Gardner en la seva esperada columna al Scientific American. El que Sicherman va fer és construir dos daus, amb valors diferents als usuals a les seves sis cares, però tals que en tirar-los la probabilitat de que la seva suma fos un cert valor coincidís amb la probabilitat que és té quan es tiren dos daus usuals. Així, mentre els daus normals estan numerats com 1, 2, 3, 4, 5, 6, els daus de Sicherman es numeren com 1, 2, 2, 3, 3, 4 i 1, 3, 4, 5, 6, 8, vegeu la Figura 18. La prova de que la probabilitat de la suma es la mateixa és una comprovació senzilla. Per exemple, la probabilitat d'obtenir suma 6 amb dos daus normals és  $5/36$  ja que aquesta suma

es dona en les 5 parelles (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2) i (5, 1). Pels daus de Sicherman també és 5/36, però en aquest cas les parelles són (1, 5), (2, 4), (2, 4), (3, 3) i (3, 3).



**Figura 18.** Daus de Sicherman.

El que és maco és que el disseny d'aquests daus, i la prova de que no n'hi ha més, es redueix a l'estudi de la descomposició a  $\mathbb{Z}[x]$ , l'anell de polinomis amb coeficients enters, d'un cert polinomi, també de  $\mathbb{Z}[x]$ . Consulteu, per exemple [7], per a més detalls. Anem a veure per què.

El secret està en la *funció generatriu de probabilitats*. Donada una variable aleatòria  $X$  que pren valors a  $\mathbb{N}$  es defineix la seva funció generatriu de probabilitats  $\varphi_X$  com la funció analítica

$$\varphi_X(s) := \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)s^k,$$

on  $P$  denota la probabilitat. En el cas particular que  $X$  prengui un número finit de valors aleshores  $\varphi_X(s)$  és un polinomi. Per exemple, pel cas concret d'un sol dau, és el polinomi

$$Q(s) := \frac{1}{6}s + \frac{1}{6}s^2 + \frac{1}{6}s^3 + \frac{1}{6}s^4 + \frac{1}{6}s^5 + \frac{1}{6}s^6.$$

És clar que sempre  $\varphi_X(1) = 1$ . Una de les propietats més importants de les funcions generatrius és que si  $X$  i  $Y$  son dues variables aleatòries independents, aleshores  $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \cdot \varphi_Y$ . Això és degut a que

$$P(X + Y = k) = \sum_{j=0}^k P(X = j)P(Y = k - j).$$

Així, la funció generatriu de probabilitats de la variable aleatòria tirar dos daus i sumar els resultats obtinguts és

$$\begin{aligned} Q^2(s) &= \frac{1}{36}(s + s^2 + s^3 + s^4 + s^5 + s^6)^2 \\ &= \frac{1}{36}(s^2 + 2s^3 + 3s^4 + 4s^5 + 5s^6 + 6s^7 + 5s^8 + 4s^9 + 3s^{10} + 2s^{11} + s^{12}). \end{aligned}$$

Observem, que el coeficient de  $s^6$  és 5/36, que dona la probabilitat de que la suma sigui 6, calculada a dalt.

Eliminant el 1/36 per comoditat, tenim que

$$\begin{aligned} P(s) &:= \left(s + s^2 + s^3 + s^4 + s^5 + s^6\right)^2 = \left(s(s+1)(s^2+s+1)(s^2-s+1)\right)^2 \\ &= s^2(s+1)^2(s^2+s+1)^2(s^2-s+1)^2, \end{aligned}$$

i, per tant, els daus que busquem corresponen a maneres de descomposar  $P$  a  $\mathbb{Z}[s]$  com a producte de dos polinomis  $P_1$  i  $P_2$  a  $\mathbb{N}[s]$  tals que  $P_1(1) = P_2(1) = 6$  (aquest 6 prové de que  $\varphi_X(1) = 1$ ). Fent totes les combinacions possibles amb els vuit factors de  $P$  només obtenim dues solucions

$$P(s) = (s + s^2 + s^3 + s^4 + s^5 + s^6)^2 = (s + 2s^2 + 2s^3 + s^4)(s + s^3 + s^4 + s^5 + s^6 + s^8),$$

que corresponen al dos daus normals i als daus de Sicherman, respectivament.

A partir d'aquesta idea es pot jugar a dissenyar daus (de  $m$  cares) amb propietats curioses. Donem un parell d'exemples.

Els dos daus tetraèdrics (amb 4 cares) numerats amb 1, 2, 5, 6 i 0, 2, 8, 10, en llençar-los donen una distribució uniforme, amb setze valors entre 1 i 16. El motiu és que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{16} s^k &= s(s+1)(s^2+1)(s^4+1)(s^8+1) = (s(s+1)(s^4+1))((s^2+1)(s^8+1)) \\ &= (s + s^2 + s^5 + s^6)(1 + s^2 + s^8 + s^{10}). \end{aligned}$$

Llençar un dodecèdre numerat, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, i dos daus, numerats com 1, 3, 4, 5, 6, 8 i 1, 1, 3, 3, 5, 5 equival a llençar 3 daus normals. La raó és que

$$(s + s^2 + s^3 + s^4 + s^5 + s^6)^3 = (s + 3s^2 + 4s^3 + 3s^4 + s^5)(s + s^3 + s^4 + s^5 + s^6 + s^8)(s + s^3 + s^5).$$

**18. La irracionalitat d' $e$ .** Reproduïm a continuació la prova de Fourier. Si definim  $S_n = \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!}$ , aleshores

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}.$$

Per tant, com que per  $j \geq 1$ ,  $n!/(n+j)! \leq 1/(n+1)^j$ , amb igualtat només per  $j = 1$ ,

$$e - S_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m!} = \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{n!}{m!} = \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+j)!} < \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^j} = \frac{1}{n!} \frac{\frac{1}{(n+1)}}{1 - \frac{1}{(n+1)}} = \frac{1}{n!n}.$$

Prenent  $n = 2$ , obtenim que

$$2 < e < \frac{11}{4} < 3.$$

Suposem, per tal d'arribar a contradicció que  $e = p/q \in \mathbb{Q}$ . Observem primer que  $q \geq 2$  ja que  $2 < e < 3$  i per tant  $e$  no pot ser enter. Si prenem la desigualtat anterior per  $n = q$ , obtenim

$$S_q < e = \frac{p}{q} < S_q + \frac{1}{q!q}.$$

Multiplicant-la per  $q!$  tenim que

$$q!S_q < q!e = q! \frac{p}{q} = (q-1)!p < q!S_q + \frac{1}{q} < q!S_q + 1.$$

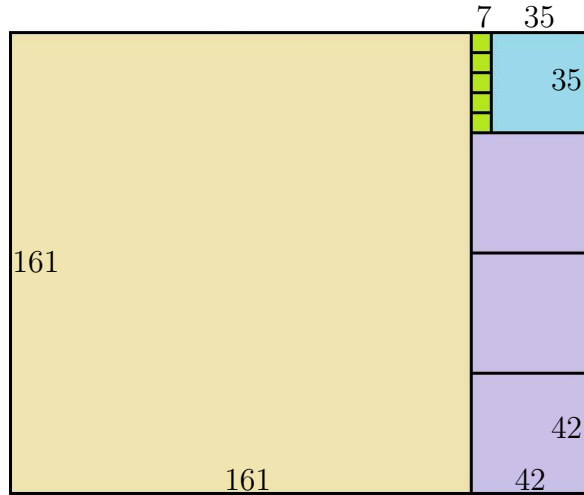
Com que  $q!S_q$  és enter obtenim que  $(q-1)!p$  és un enter situat entre dos enters consecutius, fet que ens dona la contradicció buscada.

Usant la fórmula de Taylor, hi ha una manera alternativa d'obtenir una fita de  $e - S_n$ , ja que

$$e = S_n + \frac{e^{s_n}}{(n+1)!}, \quad s_n \in [0, 1],$$

i per tant  $S_n < e < S_n + 3/(n+1)!$ . A partir d'aquestes desigualtats es pot obtenir de manera semblant una contradicció.

19. **Càlcul dinàmic del màxim comú divisor.** En el seu engrescador treball *Cooking the Classics* ([50]), Ian Stewart mostra una manera de calcular el màxim comú divisor a partir d'un sistema dinàmic discret (SDD) que reproduïm a continuació. Aquest mètode és una reformulació del mètode usat a la Grècia clàssica conegut com *anthyphaeresis*. Donat un rectangle amb costats el dos números, aquest mètode consisteix en eliminar el màxim número possible de quadrats (amb costat el més petit dels del rectangle) fins arribar a un nou rectangle on ja no es pot seguir, i després continuar amb el mateix procediment començant amb el nou rectangle i anar fent el mateix fins arribar al conjunt buit, vegeu la Figura 19.



**Figura 19.** El màxim comú divisor de 203 i 161 és 7.

Dinàmicament, considerem l'aplicació no invertible  $F : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^2$ ,

$$F(x, y) = (\max(x, y) - \min(x, y), \min(x, y)),$$

que dona lloc a un semi-SDD. Com sempre,  $F^0 = \text{Id}$  i  $F^n = F \circ F^{n-1}$ . Anem a demostrar que per a cada  $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ ,  $ab \neq 0$ , hi ha un  $m = m(a, b)$  tal que  $F^m(a, b) = (\text{mcd}(a, b), 0)$ .

Per a demostrar-ho considerem les dues funcions  $V, W : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  definides com  $V(x, y) = x + y$  i  $W(x, y) = \text{mcd}(x, y)$ , on  $\Omega = \mathbb{N}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : xy = 0\}$ . De fet, veurem que aquestes són una funció de Liapunov estricta i una integral primera, respectivament, pel semi-DDS donat per  $F$  sobre  $\Omega$ . Com és habitual, direm que els punts  $(x, y), F(x, y), F^2(x, y), \dots, F^m(x, y), \dots$  són l'òrbita de  $(x, y)$ .

La funció  $V$  és de Liapunov a  $\Omega$ , ja que per  $(x, y) \in \Omega$ ,

$$V(F(x, y)) = \max(x, y) < x + y = V(x, y).$$

A més,  $V(F(x, y)) = V(x, y)$  només quan  $xy = 0$ .

Per veure que  $W$  és una integral primera, el que hem de demostrar és que  $W(F(x, y)) = W(x, y)$ . Per això, observem que si  $z$  divideix a  $x$  i  $y$ , també divideix a  $\max(x, y)$  i  $\min(x, y)$ , i per tant divideix ambdues components de  $F$ . Recíprocament, si  $z$  divideix a  $\max(x, y) - \min(x, y)$  i a  $\min(x, y)$  també divideix la seva suma,  $\max(x, y)$ , i per tant divideix a  $x$  i a  $y$ .

Finalment, observi's que  $F(x, y) = (0, 0)$  si i només  $(x, y) = (0, 0)$ . Per tant, com que  $V$  decreix estrictament i és positiva sobre les òrbites de punts d' $\Omega$ , donat

qualsevol parell  $(x, y) \in \Omega$  ha d'existir  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $V(F^k(x, y)) = (z, 0)$  o  $(0, z)$ , amb  $z \neq 0$ . Com que  $F(0, z) = (z, 0)$  el resultat se segueix amb  $m$  és o bé  $k$ , o bé  $k+1$ . A més, com que tots els punts de l'òrbita tenen el mateix màxim comú divisor,  $z = \text{mcd}(x, y)$ .

De fet, es pot veure que aquest procediment és equivalent a l'algoritme d'Euclides, amb la diferència que no cal fer divisions. Un avantatge més d'aquest punt de vista és que es pot usar per definir de manera molt natural el màxim comú divisor de dos números racionals positius. Si denotem  $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0\}$ , aleshores, per  $a = p/q$ ,  $b = r/s$  amb  $(a, b) \in (\mathbb{Q}^+)^2$  i  $\text{mcd}(p, q) = \text{mcd}(r, s) = 1$  hi ha un  $m = m(a, b)$  i un número racional  $c$  tal que  $F^m(a, b) = (c, 0)$ . Aquest  $c$  s'anomenarà *màxim comú divisor* d' $a$  i  $b$ ,  $\text{mcd}(a, b)$ . A més,

$$c = \text{mcd}(a, b) = \frac{\text{mcd}(p, r)}{\text{mcm}(q, s)} \quad \text{i} \quad \text{mcm}(a, b) := \frac{ab}{\text{mcd}(a, b)}.$$

Anem a provar-ho. Per linealitat,  $F(a, b) = F(qsa, qsb)/(qs) = F(ps, qr)/(qs)$ . Pel resultat sobre punts amb components enteres hi ha un  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$$\begin{aligned} F^m(a, b) &= \frac{F^m(ps, qr)}{qs} = \frac{(\text{mcd}(ps, qr), 0)}{qs} \\ &\stackrel{(*)}{=} \left( \frac{\text{mcd}(p, r) \text{mcd}(q, s)}{\text{mcd}(q, s) \text{mcm}(q, s)}, 0 \right) = \left( \frac{\text{mcd}(p, r)}{\text{mcm}(q, s)}, 0 \right), \end{aligned}$$

on a  $(*)$  hem usat que

$$qs = \text{mcd}(q, s) \text{mcm}(q, s) \quad \text{i} \quad \text{mcd}(ps, qr) = \text{mcd}(p, r) \text{mcd}(q, s).$$

Per exemple,  $F^{11}(22/91, 55/63) = (11/819, 0)$ . Aleshores,  $\text{mcd}(22/91, 55/63) = 11/819$  i  $\text{mcm}(22/91, 55/63) = 110/7$ . Observi's que tots els quocients

$$\frac{22/91}{11/819} = 18, \quad \frac{55/63}{11/819} = 65, \quad \frac{110/7}{22/91} = 65, \quad \frac{110/7}{55/63} = 18,$$

són números naturals.

Finalment, el procediment es pot estendre a condicions inicials a  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  i es pot veure que dona lloc a l'expansió en fraccions contínues dels nombres reals. Només presentem un exemple. Se sap que

$$\begin{aligned} \pi &= [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, \dots] \\ &= 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \dots}}}} \end{aligned}$$

i per tant els seus primers convergents són

$$3, 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \dots \quad (6)$$

Si calculem  $(a_n, b_n) := F^n(\pi, 1)$ , per  $n \in \{3, 3+7 = 10, 10+15 = 25, 25+1 = 26, 26+292 = 318, 318+1 = 319, \dots\}$  obtenim

$$\begin{aligned} a_3 &= \pi - 3, & a_{10} &= 22 - 7\pi, & a_{25} &= 106\pi - 333, \\ a_{26} &= 355 - 113\pi, & a_{318} &= -103993 + 33102\pi, & a_{319} &= 104348 - 33215\pi, \end{aligned}$$

recuperant el numeradors i denominadors de (6).

**20. Divergència de la suma dels inversos dels primers.** Detallem una prova senzilla i maquíssima, deguda a F. Gilfeather i G. Meisters, i publicada a [31], de que  $\sum_{p \text{ primer}} 1/p = 1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/11 + \dots$  és divergent. De fet, la primera prova de la divergència d'aquesta sèrie és deguda a Euler i data de 1737, i la prova que presentem s'inspira en la seva.

Fixat  $2 \leq n \in \mathbb{N}$ , denotem per  $\mathbf{P}_n$  el conjunt de tots els primers  $p \leq n$ . Tenim que

$$\prod_{p \in \mathbf{P}_n} \left( \frac{p}{p-1} \right) = \prod_{p \in \mathbf{P}_n} \left( \frac{1}{1-1/p} \right) = \prod_{p \in \mathbf{P}_n} \left( 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots \right) \quad (7)$$

Com que tot enter positiu  $k \leq n$  descomposa com a producte de primers menors o iguals que  $n$  elevats a potències enteres positives, és segur que  $1/k$  surt com un terme del desenvolupament del producte de la dreta de (7). Per tant

$$\prod_{p \in \mathbf{P}_n} \left( \frac{p}{p-1} \right) > \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Prenent logaritmes en la desigualtat anterior, com que el logaritme és una funció creixent,

$$\sum_{p \in \mathbf{P}_n} (\log(p) - \log(p-1)) > \log \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right).$$

Per altra banda,

$$\sum_{p \in \mathbf{P}_n} (\log(p) - \log(p-1)) = \sum_{p \in \mathbf{P}_n} \int_{p-1}^p \frac{1}{x} dx < \sum_{p \in \mathbf{P}_n} \left( \frac{1}{p-1} \right) \leq \sum_{p \in \mathbf{P}_n} \frac{2}{p}.$$

Usant les dues desigualtats obtingudes arribem a

$$\sum_{p \in \mathbf{P}_n} \frac{1}{p} > \frac{1}{2} \log \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)$$

i com que la sèries harmònica és divergent obtenim el resultat desitjat.

Anem a veure com aquest resultat, a part de provar un cop més l'existència d'infinitos nombres primers, ens dona també una informació força bona sobre el creixement de la sèrie.

Comparant les sumes superior i inferiors de la funció  $1/x$  als intervals  $[1, n]$  i  $[1, n+1]$  amb la seva integral no és difícil veure que

$$\log(n+1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \log(n) + 1.$$

Per tant,

$$\sum_{p \in \mathbf{P}_n} \frac{1}{p} > \frac{1}{2} \log(\log(n) + 1).$$

Aquest resultat és bastant fi, ja que se sap que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{p \in \mathbf{P}_n} \frac{1}{p}}{\log(\log(n))} = 1.$$

De fet, el  $1/2$  que apareix davant de la fita inferior prové del  $2$  de la desigualtat  $1/(p-1) \leq 2/p$ , vàlida per a tot  $p \geq 2$ . Aquest  $2$  es pot disminuir i acostar-lo tant com es vulgui a  $1$ , per sobre, prenent  $p$  prou gran.



**Agraïments.** L'autor vol agrair Gregori Guasp pels seus comentaris i suggeriments durant la redacció d'aquest treball i per la seva ajuda en la preparació de moltes de les il·lustracions que conté. L'autor està recolzat pels projectes MINECO MTM2016-77278-P FEDER i per la Generalitat de Catalunya, projecte 2017SGR1617.

### Referències.

- [1] M. Aigner, G. M. Ziegler, Proofs from The Book. Fifth edition. Including illustrations by Karl H. Hofmann. Springer-Verlag, Berlin, 2014.
- [2] C. Alsina, R. B. Nelsen, Charming Proofs: A Journey into Elegant Mathematics, Dolciani Mathematical Expositions 42, 2010. AMS/MAA Press.
- [3] T. M. Apostol, *Ptolemy's inequality and the chordal metric*. Mathematics Magazine 40 (1967), 233–235.
- [4] N. Backhouse, *Pancake functions and approximations to  $\pi$* . Note 79.36, Math. Gazette 79 (1995), 371–374.
- [5] M. Bicknell-Johnson, *Pythagorean triples containing Fibonacci numbers: solutions for  $F_n^2 \pm F_k^2 = K^2$* . Fibonacci Quart. 17 (1979), 1–12.
- [6] B. Bollobás, Modern Graph Theory. Springer, New York, NY, 1998.
- [7] D. Broline, *Renumbering of the faces of dice*. Mathematics Magazine 52 (1979), 312–315.
- [8] L. M. Blumenthal, B. E. Gillam, *Distribution of points in  $n$ -space*. Amer. Math. Monthly 50 (1943), 181–185.
- [9] J.-L. Chabert *et al.*, A history of algorithms. From the pebble to the microchip. Translated from the 1994 French original by Chris Weeks. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [10] J. L. Coolidge, *A historically interesting formula for the area of a quadrilateral*. American Mathematical Monthly, 46 (1939), 345–347.
- [11] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, Geometry Revisited, Math. Assoc. Amer. 1967.
- [12] D. P. Dalzell, *On 22/7*. J. London Math. Soc. 19, (1944), 133–134.
- [13] D. P. Dalzell, *On 22/7 and 355/113*. Eureka: the Archimedian's Journal 34 (1971), 10–13.
- [14] J.-P. Delahaye, *Mathématiques pour le plaisir. Un inventaire de curiosités*. Belin, Pour la Science, Paris 2010.
- [15] M. Gardner, Mathematical Puzzles & Diversions. The University of Chicago Press 1961.
- [16] M. Gardner, New Mathematical Diversions. The Mathematical Association of America 1995.
- [17] C. E. Garza-Hume, M. C. Jorge, A. Olvera, *Quadrilaterals and Bretschneider's Formula*. The Mathematics Teacher 111 (2018), 310–314.
- [18] A. Gasull, *Integració de funcions racionals i  $\pi$* . Materials Matemàtics 2018, treball 2, 28 pp.
- [19] A. Gasull, *Algoritmos sencillos para calcular  $\pi$* . Per aparèixer a Gac. RSME.
- [20] A. Gasull, *Gemmes matemàtiques*. Per aparèixer a Materials Matemàtics.
- [21] M. Giaquinto, *Mathematical proofs: the beautiful and the explanatory*. J. Humanist. Math. 6 (2016), 52–72.
- [22] M. de Guzmán, *Aventuras matemáticas Una ventana hacia el caos y otros episodios*. Ed. Pirámide, Madrid 2004.
- [23] G. H. Hardy, A Mathematician's Apology, Cambridge University Press, Cambridge, 1969.
- [24] A. Hess, *A highway from Heron to Brahmagupta*. Forum Geom. 12 (2012), 191–192.
- [25] R. Honsberger, *Mathematical gems from elementary combinatorics, number theory, and geometry*. The Dolciani Mathematical Expositions, 1. The Mathematical Association of America, Buffalo, N.Y. 1973.
- [26] R. Honsberger, *Mathematical gems*. II. Dolciani Mathematical Expositions, 2. The Mathematical Association of America, Washington, D.C. 1976.
- [27] R. Honsberger, *Mathematical gems*. III. The Dolciani Mathematical Expositions, 9. Mathematical Association of America, Washington, D.C. 1985.
- [28] D. A. Klain, *An intuitive derivation of Heron's formula*. Amer. Math. Monthly 111 (2004), 709–712.
- [29] L. J. Lander, T. R. Parkin, *Counterexample to Euler's conjecture on sums of like powers*. Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 1079.
- [30] M. Lange, *Explanatory proofs and beautiful proofs*. J. Humanist. Math. 6 (2016), 8–51.

- [31] W. G. Leavitt, *The sum of the reciprocals of the primes*. Two-Year College Mathematics Journal, 10 (1979), 198–199.
- [32] S. K. Lucas, *Integral proofs that  $355/113 > \pi$* . Austral. Math. Soc. Gaz. 32 (2005), 263–266.
- [33] S. K. Lucas, *Approximations to  $\pi$  derived from integrals with nonnegative integrands*. Amer. Math. Monthly 116 (2009), 166–172.
- [34] W. Narkiewicz, *The Development of Prime Number Theory*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [35] R. B. Nelsen, *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking*, Mathematical Association of America, 1997.
- [36] R. B. Nelsen, *Proofs without Words II: More Exercises in Visual Thinking*, Mathematical Association of America, 2000.
- [37] J. Neunhäuserer, *12<sup>2</sup> beautiful mathematical theorems with short proofs*. [Preprint](#).
- [38] D. A. Neild (mal escrit Neild a l'article), *Rational approximations to  $\pi$* . New Zealand Math. Mag. 18 (1981/82), 99–100.
- [39] B. Polster, *Q.E.D. Beauty in mathematical proof*. Wooden Books. Walker & Company, New York, 2004.
- [40] B. Pritsker, *Geometrical Kaleidoscope*. Courier Dover Publications, 2017, 144 pàgines.
- [41] H. Rademacher, O. Toeplitz, *Números y figuras*. Alianza Editorial. Madrid 1970.
- [42] C. H. Raifaizen, *A Simpler Proof of Heron's Formula*. Mathematics Magazine. 44 (1971), 27–28.
- [43] A. Ralston, *A first course in numerical analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto-London 1965.
- [44] P. Ribenboim, *The New Book of Prime Number Records*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [45] D. P. Robbins, *Areas of polygons inscribed in a circle*. Amer. Math. Monthly 102 (1995), 523–530.
- [46] G.-C. Rota, *The Phenomenology of Mathematical Beauty*. Indiscrete Thoughts, Chap. 10, pp. 121–133. Edited by Fabrizio Palombi. Basel: Birkhäuser Verlag AG, 1997,
- [47] F. Saidak, *A New Proof of Euclides' Theorem*. Amer. Math. Monthly 113 (2006), 937–938.
- [48] D. Schattschneider, *Beauty and truth in mathematics*. Mathematics and the Aesthetic: New Approaches to an Ancient Affinity, N. Sinclair, D. Pimm, W. Higgenson (editors), Springer, New York, 2006, pp. 41–57.
- [49] D. Shanks, *Improving an approximation for  $\pi$* . The American Mathematical Monthly 99 (1992), 263.
- [50] I. Stewart, *Cooking the classics*. Math. Intelligencer 33 (2011), 61–71.
- [51] V. G. Tikekar, *Some Interesting Mathematical Gems*. Resonance-Journal of science education 11 (2006), 29–42.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES, UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA  
E-mail address: gasull@mat.uab.cat