

# Joies matemàtiques

**Armengol Gasull**

Departament de Matemàtiques  
Universitat Autònoma de Barcelona  
gasull@mat.uab.cat

## Resum

Un recull de demostracions senzilles i boniques que podem qualificar de petites, o grans, joies matemàtiques. Tot plegat dins la subjectivitat que presenten els termes «senzill» i «bonic». En aquest article, adreçat fonamentalment als entusiastes de les matemàtiques, s'exposen 20 demostracions que abracen des dels nombres primers, els números  $\pi$  i  $e$ , la geometria, els polinomis i les sèries. Podreu gaudir dels enunciats, les interpretacions i la mena d'arguments que han portat a les demostracions finals. Pot ser una magnífica porta a recopilacions molt més ambiciosos.

## Paraules clau

Resolució de problemes, numeració i càlcul, espai i forma, demostracions.

## Abstract

*A collection of simple and beautiful proofs that could be described as small – or great – mathematical gems; not forgetting the subjectivity implicit in the terms «simple» and «beautiful». Aimed primarily at mathematics enthusiasts, this article presents 20 proofs encompassing prime numbers, the numbers  $\pi$  and  $e$ , geometry, polynomials and series. Follow and enjoy the various hypotheses, interpretations, and arguments that lead to the final solutions. The article may serve as a gateway to more challenging collections.*

## Keywords

*Problem-solving, numbers and calculations, space and form, proofs.*

El doble sentit de la paraula joia ens ha permès triar per a aquest treball un títol que conté la, també doble, motivació del treball.

Més concretament, el que es pretén és recollir demostracions que en opinió de l'autor siguin senzilles i boniques i, a més, siguin tals que llegir-les i comprendre-les ens provoqui una certa felicitat. Senzill és un terme subjectiu, però per situar-lo en un context acadèmic podríem assimilar-lo al nivell de comprensió matemàtica que tenen els bons alumnes de primers anys d'universitat. Si senzill ja és subjectiu, què podem dir de bonic! Per descomptat, ni volem, ni sabem precisar-ho. En tot cas, un resultat per ser bonic ha d'interessar i no deixar indiferent a la majoria dels lectors matemàtics. A més, pot ser bonic per diferents raons: pel seu enunciat, per la seva interpretació o pel tipus d'argumentacions que han permès demostrar-lo. Uns

treballs que reflexionen sobre aquesta qüestió són [21, 30, 46, 48]. Segons Hardy ([23]), en els grans teoremes hi ha un grau molt alt de sorpresa, combinat amb inevitabilitat i economia.<sup>1</sup>

Una recopilació molt més ambiciosa és el famós llibre [1]. També s'ocupen de la mateixa qüestió els tres llibres clàssics [25, 26, 27], els llibres [2, 22, 39] i els treballs [37, 51].

Espero que el lector gaudeixi amb aquest recull tant com ho ha fet l'autor preparant-lo i hi trobi demostracions que no coneixia. El treball està estructurat en seccions independents que s'han intentat ordenar en funció de la seva dificultat. Quan ha estat possible, s'han contextualitzat les qüestions i proves presentades. Com no podia ser de cap altra manera, hi ha resultats que involucren els nombres primers,  $\pi$ ,  $e$ , triangles, àrees, volums, polinomis, sèries, fraccions contínues, daus, etc.; vaja, els àtoms de les matemàtiques. Una altra cosa, també inevitable, és la quantitat de noms il·lustres que surten citats en el treball. Una versió ampliada d'aquest article és [20].

## 1. Una pregunta amb resposta sorprenent

Hi ha dos nombres irracionals  $a$  i  $b$  tals que  $a^b$  sigui racional?

La prova, no constructiva, que la resposta és sí, és a la vegada senzilla i bonica. Agafem  $c = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ . Si  $c$  és racional, ja hem acabat prenent  $a = b = \sqrt{2}$ . Si no, observem que

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2,$$

per tant, podem prendre  $a = c$  i  $b = \sqrt{2}$ .

Observem que la demostració anterior no ens aclareix si  $c$  és racional o no. De fet, l'any 1900 Hilbert va proposar com a problema VII de la seva famosa llista, decidir per exemple si  $2^{\sqrt{2}}$  i  $e^{\pi}$  eren nombres transcendentals (és a dir, no eren arrels de cap polinomi no nul amb coeficients enters). Aquestes qüestions van ser resoltes simultàniament per Gelfond i Schneider al 1934. El seu resultat, conegut com a teorema de Gelfond-Schneider, ens diu que si  $a$  i  $b$  són nombres algebraics (no transcendentals),  $a \notin \{0,1\}$  i  $b$  és irracional, aleshores  $a^b$  és transcendent.

Anem a veure que la transcendència (i per tant la irracionalitat) dels nombres  $2^{\sqrt{2}}$ ,  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  i  $e^{\pi}$  segueix del teorema. Observeu en primer lloc que si  $\alpha$  és un número no algebraic, aleshores  $\beta = \sqrt{\alpha}$  també ho és, ja que si  $\beta$  fos arrel d'un polinomi  $P(x)$ , no nul amb coeficients enters, aleshores  $\alpha$  seria arrel de  $Q(x) := P(x^2)$ . Per tant, com que  $2^{\sqrt{2}}$  és transcendent, el mateix passa amb la seva arrel quadrada,  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ . Finalment, com que  $e^{\pi}$  és un dels valors que pren  $(e^{i\pi})^{-i} = (-1)^{-i}$ , també sabem que és transcendent.

És curiós observar que encara no se sap si

$$\pi^e \quad \text{o} \quad \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)}$$

són irracionals o transcendentals.

1. «In [great theorems] there is a very high degree of unexpectedness, combined with inevitability and economy.»

## 2. Hi ha infinits nombres primers

Per a molts matemàtics, la prova d'Euclides que hi ha infinits nombres primers és immillorable. En la secció següent en veurem una variació. Recordem-la breument. Si n'hi hagués un nombre finit,  $p_1, p_2, \dots, p_k$  arribaríem a una contradicció considerant  $p_1, p_2, \dots, p_k + 1$ , ja que o bé aquest nombre és un nou nombre primer, o bé té un nombre primer diferent dels  $n$  donats com a divisor.

Recentment, el 2006, li ha sortit una competidora ([47]) que reproduïm a continuació. Considerem la següent successió de nombres naturals:

$$x_{k+1} = x_k(x_k + 1), \quad 1 < x_1 \in \mathbb{N}.$$

Demostrarem per inducció que la descomposició en factors primers de  $x_k$  conté com a mínim  $k$  nombres primers diferents. El resultat és clarament veritat per a  $k = 1$ . Suposem-lo cert per a  $k = n$  i anem a provar-lo per a  $k = n + 1$ . Tenim que  $x_k$  és divisible per  $k$  primers diferents. A més, per a tot  $1 < m \in \mathbb{N}$ , els nombres  $m$  i  $m + 1$  són primers entre si, ja que si  $p$  divideix  $m$  i  $m + 1$ , divideix també la resta que és 1. Així,  $x_n + 1$  conté algun primer en la seva descomposició en factors primers que no és a la descomposició de  $x_n$ . Per tant,  $x_{n+1}$  és divisible, com a mínim, per  $n + 1$  nombres primers, tal com volíem demostrar.

Entre els dos llibres [34, 44] hi ha una dotzena de proves diferents de l'existència d'infinits nombres primers.

## 3. Hi ha infinits nombres primers de la forma $4n - 1$

Del fet que hi ha infinits nombres primers ja sabem que o bé n'hi ha un nombre infinit de la forma  $4n - 1$ , o bé n'hi ha un nombre infinit de la forma  $4n + 1$ , o bé les dues opcions es donen.

Anem a veure que la primera opció és certa. La prova és una senzilla i elegant adaptació de la prova d'Euclides de la infinitud dels nombres primers.

Suposem que no, per tal d'arribar a la contradicció. Siguin  $p_1, p_2, \dots, p_k$  tots els primers de la forma  $4n - 1$ . Considerem

$$N = 4p_1 p_2 \dots p_k - 1.$$

Aleshores  $N$  no pot ser primer, ja que seria de la forma  $4n - 1$  i no és a la llista de tots els primers d'aquesta forma. Clarament, cap  $p_j$  divideix  $N$ . A més, en la descomposició de  $N$  en factors primers n'hi ha com a mínim un de la forma  $4n - 1$ , ja que si tots fossin de la forma  $4n + 1$ ,  $N$  també ho seria, ja que  $(4n + 1)(4m + 1) = 4(4nm + n + m) + 1$ . Aquest primer seria de la forma  $4n - 1$  i no és cap dels  $p_j, j \leq k$ , amb la qual cosa obtindríem la contradicció desitjada.

De fet, Dirichlet al 1837 va demostrar que, variant  $n \in \mathbb{N}$ , qualsevol expressió  $an + b$  amb  $a$  i  $b$  enters coprimers dona lloc a infinits nombres primers.

## 4. Un gran forat sense nombres primers

Acabem de veure que hi ha infinits nombres primers. De fet, se sap molt més. Per exemple, l'any 1896 Hadamard i de la Vallée-Poussin van provar, usant idees de Riemann, que si  $\pi(n)$  denota el número de nombres primers menors o iguals que  $n$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n) \ln(n)}{n} = 1.$$

Per això, a primera vista pot resultar sorprenent el següent resultat: per a tot  $m \in \mathbb{N}$  hi ha  $m$  nombres consecutius, de manera que cap d'ells és primer. Abans de seguir llegint potser ve de gust pensar-ho per a un mateix.

Hi ha una prova senzillíssima d'aquest fet: per a  $m \geq 2$ , podem prendre  $(m + 1)! + k$ , per a  $k \in \{2, \dots, m + 1\}$ . Clarament, cada  $(m + 1)! + k$  és divisible per  $k$ .

## 5. Quadrats i més quadrats

No és senzill dividir un quadrat en un nombre finit de quadrats més petits, tots disjunts i diferents; vegeu [14, cap. 2]. Aquestes construccions es poden relacionar amb el disseny de certes xarxes elèctriques; vegeu [6]. A l'esquerra de la figura 1 donem un quadrat de mida  $112 \times 112$  mm subdividit en 21 quadrats més petits i diferents, tots amb costats enters. Va ser trobat l'any 1978 per Duijvestijn i s'ha demostrat que és el més senzill possible amb aquestes característiques. El mateix problema però començant amb un rectangle té solucions més simples; vegeu de nou la mateixa figura, on es mostra un rectangle de  $33 \times 32$  mm, trobat l'any 1925 per Morón, dividit en 9 peces quadrades diferents, amb costats enters. També se sap que aquesta solució és minimal.

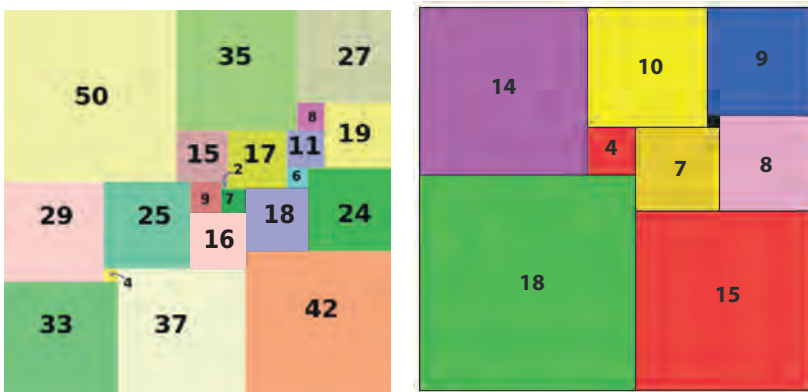
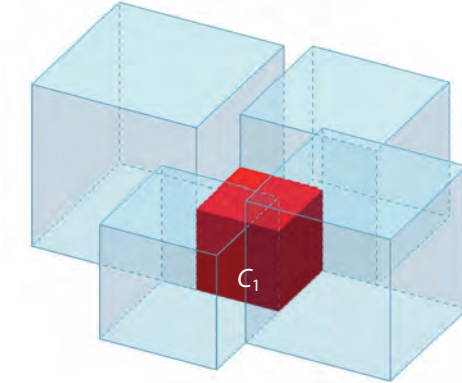


Figura 1. Quadrat i rectangle dividits en quadrats diferents.

El que és força curiós és que cap prisma rectangular amb costats sencers es pot dividir en un nombre finit de cubs més petits, tots diferents. Anem a provar-ho per reducció a l'absurd seguint [15, cap. 17]. Suposem que sí que es pogués. Aleshores, per exemple, la base de sota del prisma quedaria dividida en quadrats, tots amb costats diferents. Sigui  $Q_1$  el quadrat més petit. Sobre aquest quadrat, el cub corresponent,  $C_1$ , és tal que tots els que l'envolten són

més alts que ell mateix; vegeu la figura 2. Aleshores, la base de sobre d'aquest cub és un quadrat (de la mateixa mida que  $Q_1$ ), de manera que les bases de tots els cubs que estan recolzats en ell el divideixen en quadrats més petits i tots diferents. De nou, n'hi ha un que és el més petit, diguem-li  $Q_2$ . Podem raonar igual començant ara amb la cara superior del cub  $C_2$ , que té com a base  $Q_2$ , i continuar aquest procés fins a arribar que hi hauria cubs de costat més petit que 1, en contradicció amb el que suposàvem.

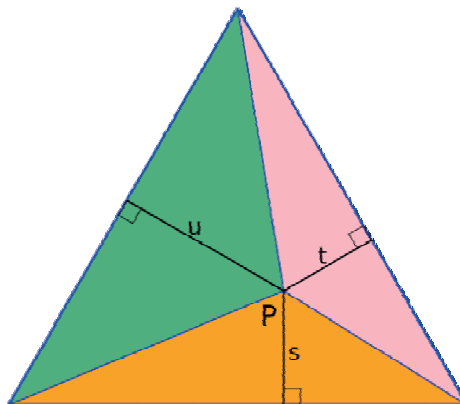


**Figura 2. Impossibilitat de dividir un prisma rectangular en cubs diferents.**

De fet, seguint un raonament semblant també podem demostrar que cap prisma rectangular (independentment de les mides dels seus costats) es pot subdividir en un nombre finit de cubs, tots diferents i tampoc amb costats necessàriament enters.

## 6. El teorema de Viviani

Aquest teorema va ser provat per Viviani al segle XVII. Afirmar que si  $P$  és un punt interior d'un triangle equilàter, aleshores la suma de les distàncies de  $P$  als tres costats del triangle  $AB$ ,  $BC$  i  $CA$  no depèn de  $P$  i val l'alçada  $h$  del triangle. Recordem que si  $a$  és el costat del triangle, aleshores pel teorema de Pitàgores  $h = \sqrt{3}a/2$ .



**Figura 3. Teorema de Viviani:  $s + t + u$  és constant.**

La prova només usa que l'àrea d'un triangle és el producte de la base per l'alçada entre dos. Així, l'àrea total del triangle,  $ah/2$ , és igual a la suma de les àrees dels tres triangles en què es pot dividir,  $APB$ ,  $BPC$  i  $CPA$ ; vegeu la figura 3. Aquestes àrees són  $as/2$ ,  $at/2$  i  $au/2$ . Per tant,  $s + t + u = h$ , tal com volíem veure.

## 7. Dues conjetures d'Euler

Expliquem a continuació dos problemes que va tractar Euler, pels quals el seu fabulós enginy no va ser suficient per a proposar respostes correctes.

Fixat  $n \in \mathbb{N}$ , Euler va conjeturar l'any 1769 que si sumem  $k > 1$  potències  $n$ -èsimes de nombres naturals i obtenim una potència  $n$ -èsima, aleshores  $k \geq n$ . Aquest resultat va mostrar-se fals i el primer contraexemple va ser per a  $n = 5$  i és de l'any 1966 ([29]):

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5.$$

Més endavant, l'any 1988, Frye va donar un contraexemple per a  $n = 4$ ,

$$958.00^4 + 217.519^4 + 414.560^4 = 422.481^4.$$

El segon problema és el següent: donats dos conjunts amb  $n$  elements  $A$  i  $B$ , un quadrat grecollatí d'ordre  $n$  és una quadrícula de mida  $n \times n$  de manera que a cada casella hi ha un element de cada conjunt, tots els elements de  $A \times B$  hi són i, a més, cada element de  $A$  i de  $B$  apareix a totes les files i totes les columnes. Aquests quadrats són coneguts des d'abans d'Euler, però ell els va popularitzar. El seu nom ve del fet que ell denotava els elements d'un dels conjunts amb lletres gregues i els de l'altre, amb lletres llatines. Avui en dia se sap que hi ha quadrats grecollatins per a tot  $n \geq 3$ , excepte per a  $n = 6$ , en contra del que va conjeturar Euler en el seu temps. En la figura 4 se'n mostren dos, un per a  $n = 4$ , cosit per la meva mare en punt de creu amb fils de 8 colors, i un altre per a  $n = 10$ . En els dos, es representen els elements dels conjunts com els colors de dins i de fora dels quadradets per a cadascun dels  $n^2$  quadrats que els formen.



Figura 4. Quadrats grecollatins  $4 \times 4$  i  $10 \times 10$ .

## 8. Estrelles

Donada una estrella qualsevol de cinc puntes, anem a demostrar, seguint les idees de [16, cap. 5], que la suma dels cinc angles que formen aquestes puntes és  $\pi$ . És a dir, que  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = \pi$ ; vegeu la figura 5.

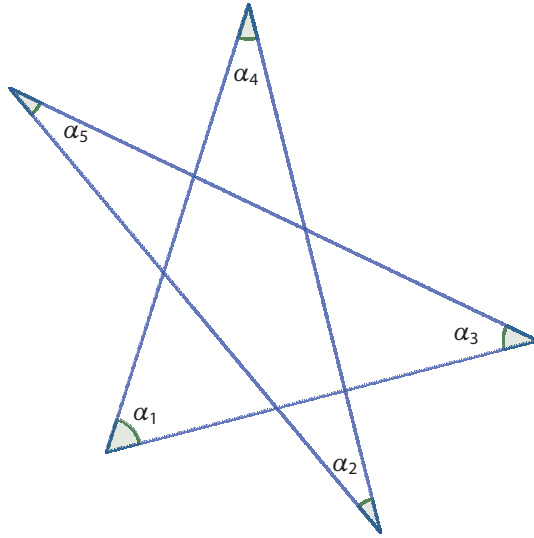


Figura 5. Estrella de cinc puntes:  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = \pi$ .

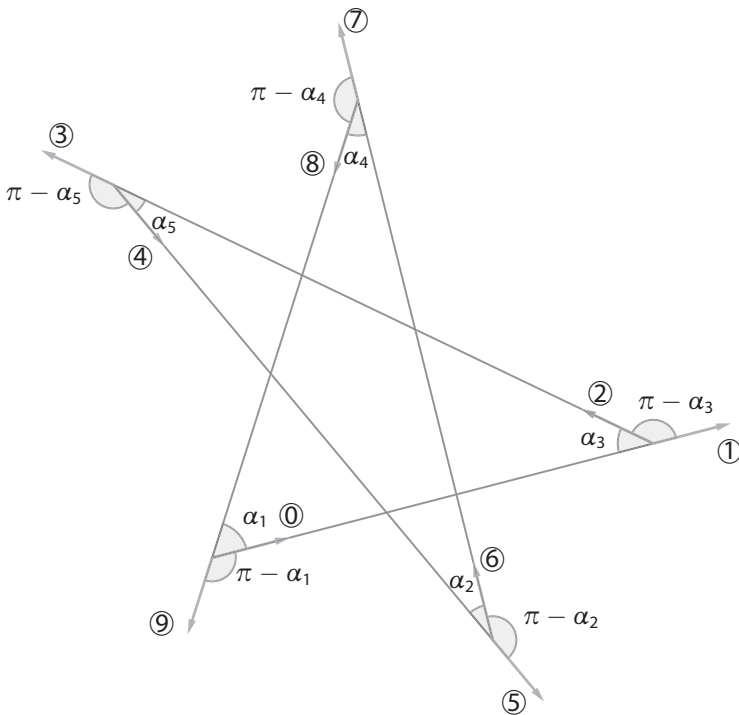


Figura 6. Estrella de cinc puntes.

Comencem agafant un vector unitari, situat en un dels vèrtexs de l'estrella, paral·lel a un costat (vegeu el vector en la posició ① en la figura 6). Aleshores el fem lliscar fins a la posició ①. A continuació el girem un angle  $\pi - \alpha_3$  fins a estar en la posició ②. Fem el mateix passant per les posicions ③, ④, ..., fins a arribar a ⑨ i finalment tornem a la posició ①. Per una banda, és clar que el vector ha fet dues voltes i, per tant, el seu gir total ha estat de  $4\pi$  radians. Per altra banda, els angles que ha anat girant en cadascuna de les cinc puntes han estat  $\pi - \alpha_3$ ,  $\pi - \alpha_5$ ,  $\pi - \alpha_2$ ,  $\pi - \alpha_4$  i  $\pi - \alpha_1$ . Per tant,

$$(\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) + (\pi - \alpha_3) + (\pi - \alpha_4) + (\pi - \alpha_5) = 4\pi,$$

d'on es dedueix que  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = \pi$ , tal com volíem veure.

Clarament, usant la mateixa idea es poden obtenir resultats similars en el cas de polígons o d'estrelles amb més puntes. Per exemple, en el cas d'un triangle tenim que  $(\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) + (\pi - \alpha_3) = 2\pi$  i en el d'un quadrilàter convex,  $(\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) + (\pi - \alpha_3) + (\pi - \alpha_4) = 2\pi$ . Per tant, per als triangles  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$  i per als quadrilàters convexos,  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi$ . De fet, el resultat és cert per a tots els quadrilàters, com es pot veure, per exemple, dividint-los en dos triangles, però per als no convexos aquest argument no demostra el resultat desitjat.

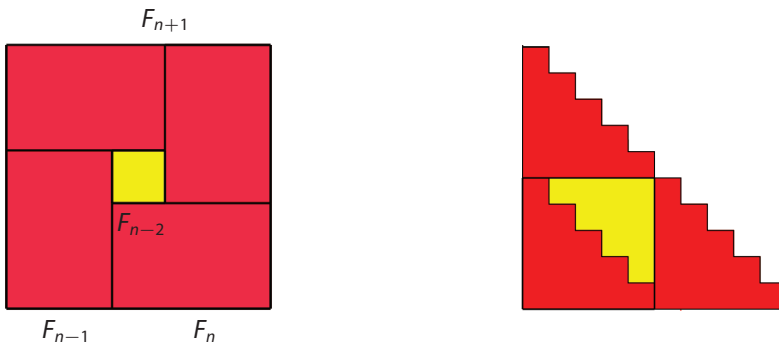


Figura 7. Nombres de Fibonacci i nombres triangulars.

## 9. Algunes proves sense paraules

Les quatre proves presentades i moltes més es poden trobar a [35, 36]. Els famosos nombres de Fibonacci,  $F_n$ , que recordem que venen definits com  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ , amb  $F_0 = 0, F_1 = 1$ , o els nombres triangulars,  $T_n = 1 + 2 + \dots + n$ , satisfan certes relacions. Per exemple:

$$F_{n+1}^2 = 4F_n F_{n-1} + F_{n-2}^2 \quad T_{2n} = 3T_n + T_{n-1}.$$

Tot i que no és gens difícil demostrar-les analíticament, les figures següents ens donen proves sense paraules de les mateixes figures.

Una prova sense paraules de

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+1/2)}{3}, \tag{1}$$



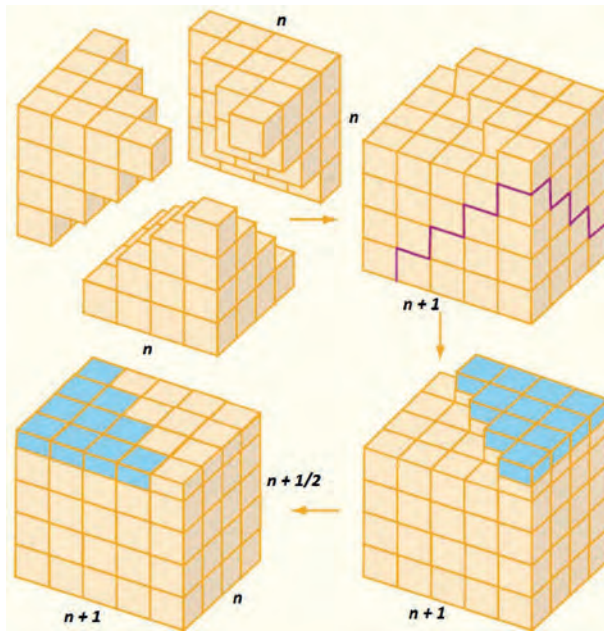


Figura 8. Suma dels quadrats.

es mostra en la figura 8. No és difícil demostrar (1) usant inducció. Aquí la bellesa no està pas en el resultat, sinó en la prova visual. Les figures de la figura 9 demostren el teorema de Pitàgores, ja que la suma de les àrees dels quadrats vermells coincideix amb la del quadrat blau, és a dir,  $a^2 + b^2 = c^2$ , on  $a$  i  $b$  són els costats d'un triangle rectangle que formen angle recte i  $c$  és la seva hipotenusa.

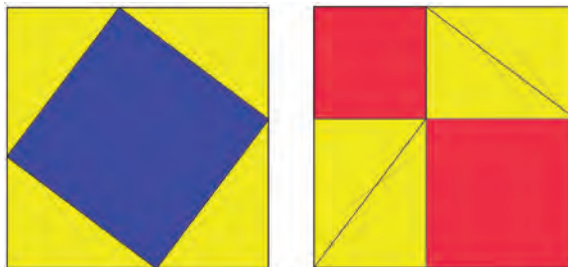


Figura 9. Teorema de Pitàgores.

## 10. Ternes pitagòriques i números de Fibonacci

Una terna pitagòrica és un triplet d'enters positius  $a, b, c$  que compleixen  $a^2 + b^2 = c^2$ , és a dir, que són els costats d'un triangle rectangle. Euclides ja va demostrar que totes les ternes pitagòriques primitives (és a dir, tals que  $a, b$  i  $c$  no tenen cap divisor comú més gran que 1) venen donades per

$$a = u^2 - v^2, \quad b = 2uv, \quad c = u^2 + v^2, \quad (2)$$

amb  $u$  i  $v$  enters positius,  $u > v$ , coprimers i els dos no senars a la vegada. La més coneguda és  $3^2 + 4^2 = 5^2$  i correspon a  $u = 2$  i  $v = 1$ . Anem a demostrar-ho seguint [41].

Una primera observació és que els nombres  $a$  i  $b$  han de tenir diferent paritat i, a més,  $c$  ha de ser senar. Observem, per exemple que si  $c$  fos parell, aleshores  $c^2 = a^2 + b^2$  hauria de ser divisible per 4, però si  $a$  i  $b$  fossin els dos senars, és a dir,  $a = 2k + 1$  i  $b = 2\ell + 1$ , aleshores  $a^2 + b^2 = 4(k^2 + k + \ell^2 + \ell) + 2$ , que no és divisible per 4. Així, suposarem sense pèrdua de generalitat que  $b$  és parell, i  $a$  i  $c$ , senars.

Escrivim  $b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a)$ . Com que  $c$  i  $a$  són primers entre si, i els dos senars, l'únic divisor comú entre  $c + a$  i  $c - a$  és 2. En altres paraules,  $(c + a)/2$  i  $(c - a)/2$  són naturals positius i primers entre si. Per tant, tenim la igualtat

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{c+a}{2}\right)\left(\frac{c-a}{2}\right).$$

Finalment, com que  $b/2 \in \mathbb{N}$  i  $(c+a)/2$  i  $(c-a)/2$  no tenen factors en comú, la igualtat donada força que ambdós nombres siguin també quadrats. Així,  $(c+a)/2 = u^2$  i  $(c-a)/2 = v^2$ , amb  $u, v \in \mathbb{N}$ . Operant,  $c = u^2 + v^2$ ,  $a = u^2 - v^2$  i  $b^2 = 4u^2v^2$ , com volíem demostrar.

A partir de (2) és trivial trobar ternes pitagòriques amb nombres de Fibonacci, o amb els nombres que es vulgui. Seguint [5, 39] donarem un parell de casos elegants.

Si prenem  $u = F_{n+1}$ ,  $v = F_n$  i usem que  $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ , obtenim

$$(F_{n+1}^2 - F_n^2)^2 + (2F_nF_{n+1})^2 = F_{2n+1}^2.$$

La prova següent que  $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$  és també força enginyosa. És senzill demostrar per inducció que

$$M^n := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Per tant, com que  $M^{2n} = M^n M^n$ , tenim que

$$\begin{pmatrix} F_{2n+1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Fent el producte de matrius i igualant l'element de la primera fila i la primera columna, tenim que  $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$ , tal com volíem provar.

Si eliminem la condició  $F_0 = 0, F_1 = 1$  dels nombres de Fibonacci obtenim uns nombres diferents, que denotarem per  $f_n$  i anomenarem nombres de Fibonacci generalitzats. Per exemple, prenent  $F_0 = 2, F_1 = 1$  obtenim els nombres de Lucas: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18...

La segona terna pitagòrica que presentem involucra 4 nombres de Fibonacci generalitzats consecutius,  $f_n, f_{n+1}, f_{n+2}$  i  $f_{n+3}$ , i és

$$(f_n f_{n+3})^2 + (2f_{n+1} f_{n+2})^2 = (f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2)^2.$$

Els 4 nombres es poden escriure com  $u - v, v, u, u + v$ , i el resultat se segueix de nou de la igualtat  $(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = (v^2 + u^2)^2$ .

### 11. Arc capaç i molt més que Pitàgores

Prenem dos punts  $A$  i  $B$  sobre una circumferència, de manera que l'arc que formen és  $2\alpha$ . Aleshores es pot demostrar que qualsevol punt  $C$  de la mateixa circumferència, i fora d'aquest arc, és tal que l'angle  $ACB$  és  $\alpha$ ; vegeu el gràfic de l'esquerra de la figura 10. Es diu que els punts  $C$  formen l'arc capaç del segment  $AB$  amb angle  $\alpha$ . Així, el segment  $AB$  es veu sota un mateix angle  $\alpha$  des dels punts d'aquest arc capaç.

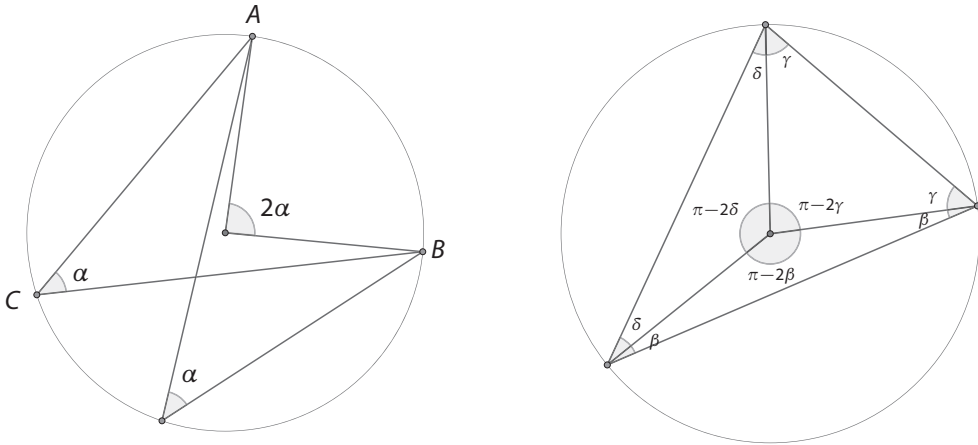


Figura 10. Arc capaç.

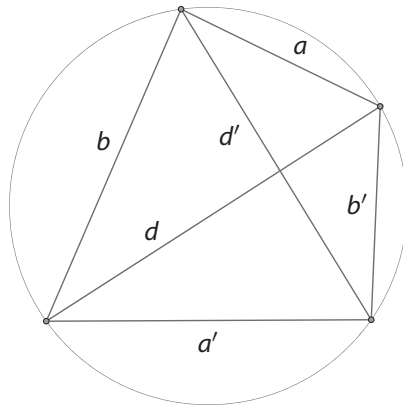
Per a demostrar l'afirmació anterior fem la construcció de la dreta de la figura 10. En aquesta figura suposem que el centre de la circumferència que passa pels tres punts és dins del triangle. El cas en què el centre és fora es pot tractar de manera semblant. En primer lloc, observem que dos costats de cadascun dels tres triangles petits són radis de la circumferència. Per tant, tenim que els tres triangles són isòsceles i cadascun d'ells té dos angles iguals, que anomenarem  $\beta, \gamma$  i  $\delta$ , respectivament. Per tant, sumant els tres angles que tenen com a vèrtex el centre de la circumferència obtenim

$$2\pi = (\pi - 2\beta) + (\pi - 2\gamma) + (\pi - 2\delta) = 3\pi - 2(\beta + \gamma + \delta).$$

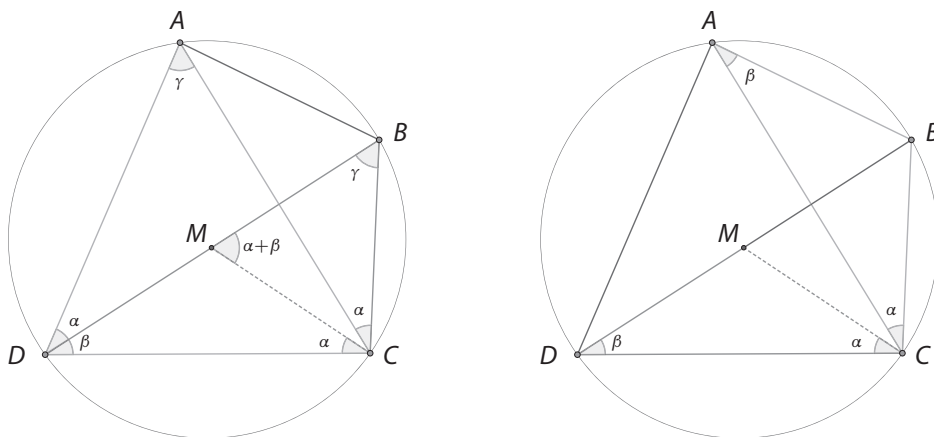
Com a conseqüència,  $\pi - 2\gamma = 2(\beta + \delta)$ , que és precisament el que volíem demostrar.

Usant arcs capaços anem a provar el teorema de Ptolemeu, demostrat per aquest astrònom al segle II per a construir taules trigonomètriques; vegeu [9, cap. 10]. Aquest teorema afirma que per a un quadrilàter cíclic o inscrit, com el de la figura 11, és a dir, amb els quatre vèrtexs en una mateixa circumferència, es compleix  $aa' + bb' = dd'$ . Observem que, en el cas que el

quadrilàter sigui un rectangle, tenim que  $a = a', b = b', d = d'$ , i el teorema ens diu que  $a^2 + b^2 = d^2$ , és a dir, el teorema de Pitàgores.



**Figura 11. Teorema de Ptolemeu:  $aa' + bb' = dd'$ .**



**Figura 12. Prova del teorema de Ptolemeu.**

Demostrarem el teorema de Ptolemeu seguint [37]. En primer lloc, considerem la construcció de l'esquerra de la figura 12. Els angles  $ACB$  i  $ADB$  coincideixen ja en els punts A i B, que formen part de l'arc capaç del segment AB; els anomenarem  $\alpha$ . De manera semblant, els angles  $DAC$  i  $DBC$  són iguals i anomenem  $\beta$  l'angle que formen. A continuació considerem el segment DB i busquem un punt M en aquest segment de manera que l'angle  $DCM$  sigui també  $\alpha$ . Aleshores veiem que l'angle  $CMB$  és  $\alpha + \beta$ . Usant tots els angles esmentats arribem que els triangles  $ACD$  i  $BCM$  són semblants i per tant

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|BM|}{|BC|},$$

on  $|PQ|$  denota la longitud del segment que uneix P i Q. Raonant de manera semblant amb la construcció de la dreta, amb els triangles  $ABC$  i  $DMC$  de la figura 12 obtenim que

$$\frac{|DC|}{|DM|} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

Finalment, expressant les igualtats anteriors en termes de  $a, a', b, b', d, d'$ , i anomenant  $|DM| = d_1$ ,  $|MB| = d_2$ , tenim que

$$\frac{b}{d'} = \frac{d_2}{b'} \quad \text{i} \quad \frac{a'}{d_1} = \frac{d'}{a}.$$

Per tant,  $bb' = d_2 d'$  i  $aa' = d_1 d'$ . Com que  $d = d_1 + d_2$ , sumant les dues igualtats tenim que  $aa' + bb' = dd'$ .

A més, anem a veure com el teorema de Ptolemeu, junt amb el famós teorema dels sinus, ens permet calcular el sinus d'una suma d'angles. Si en la figura de l'esquerra de la Figura 12 suposem que el segment  $DB$  passa pel centre de la circumferència, aleshores els triangles  $ABD$  i  $CBD$  són ambdós rectangles. A més, si la longitud del segment és 1, aleshores  $d = 1$ ,  $a = |AB| = \sin(\alpha)$ ,  $b = |DA| = \cos(\alpha)$ ,  $a' = |DC| = \cos(\beta)$  i  $b' = |CB| = \sin(\beta)$ . Finalment, a partir del teorema dels sinus tenim que  $d' = |AC| = \sin(\alpha + \beta)$ , i el teorema de Ptolemeu ens diu que

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) = \sin(\alpha + \beta).$$

Per acabar, anem a veure que per a quadrilàters convexos qualssevol (és a dir, no necessàriament inscrits en una circumferència) es compleix la coneguda com a desigualtat de Ptolemeu,  $dd' \leq aa' + bb'$ . Seguirem la prova de [3]. Per a això, pensem el quadrilàter inclòs en el pla complex,  $\mathbb{C}$ , i considerem els quatre nombres complexos,  $u, v, w, z$ , associats als quatre vèrtexs de la figura. Si denotem per  $|s|$  la norma de  $s \in \mathbb{C}$ , tenim, per exemple, que  $a = |v - w|$ ,  $b = |u - v|$ ,  $a' = |u - z|$ ,  $b' = |w - z|$ ,  $d = |u - w|$  i  $d' = |v - z|$ . És fàcil comprovar la identitat següent entre nombres complexos

$$(u - w)(v - z) = (v - w)(u - z) + (u - v)(w - z).$$

Així, si usem  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$  i  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ , obtenim

$$\begin{aligned} dd' &= |u - w| |v - z| = |(u - w)(v - z)| = |(v - w)(u - z) + (u - v)(w - z)| \\ &\leq |v - w| |u - z| + |u - v| |w - z| = aa' + bb', \end{aligned}$$

tal com volíem provar. Ja sabem que la igualtat es dona per a quadrilàters inscrits en una circumferència. Amb una mica més de feina es pot veure que aquest és l'únic cas d'igualtat.

## 12. Fórmules d'Heró i Brahmagupta

La fórmula que permet calcular l'àrea  $A$  d'un triangle en funció dels seus costats,  $a, b$  i  $c$ , s'atribueix a Heró d'Alexandria (segle I), tot i que hi ha autors que pensen que Arquimedes (segle III aC) ja la coneixia; veure [11, cap. 3]. Aquest bonic resultat ens diu

$$A = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

on  $s = (a+b+c)/2$ .

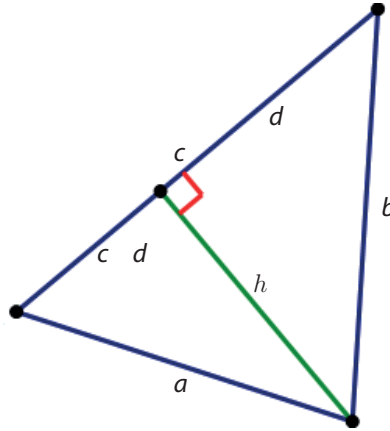


Figura 13. Prova de la fórmula d'Heró.

Per a demostrar-la, seguint [42] dividim el triangle en dos triangles rectangles mitjançant una alçada; vegeu la figura 13. Aplicant el teorema de Pitàgores als dos triangles resultants tenim que  $a^2 = h^2 + (c-d)^2$  i  $b^2 = h^2 + d^2$ . Restant les dues igualtats obtenim que  $a^2 - b^2 = c^2 - 2cd$  i, per tant,  $d = (-a^2 + b^2 + c^2)/(2c)$ . Finalment, substituint aquest valor de  $d$  en la segona igualtat tenim

$$\begin{aligned} h^2 &= b^2 - d^2 = b^2 - \left( \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} \right)^2 = \frac{(2bc)^2 - (-a^2 + b^2 + c^2)^2}{4c^2} \\ &= \frac{(2bc - a^2 + b^2 + c^2)(2bc + a^2 - b^2 - c^2)}{4c^2} = \frac{((b+c)^2 - a^2)((a^2 - (b-c)^2))}{4c^2} \\ &= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4c^2}, \end{aligned}$$

on hem usat diverses vegades  $u^2 - v^2 = (u+v)(u-v)$ . Per tant

$$A = \frac{ch}{2} = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)},$$

tal com volíem veure.

Hi ha altres maneres d'expressar l'àrea d'un triangle que són equivalents a la fórmula d'Heró. No detallarem els passos per veure-ho, tot i que no són gens evidents. Una d'elles és

$$16A^2 = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

De fet, la matriu de la qual s'ha de calcular el determinant s'anomena matriu de Cayley-Menger i té una versió ampliada que permet calcular el volum de prismes  $n$ -dimensionals en funció de les seves arestes; vegeu per exemple [8].

L'altra manera, en lloc de donar l'àrea en termes dels costats del triangle, la dona en termes de les coordenades dels seus punts. Així, si els tres vèrtexs són  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,

$$4A^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2.$$

Abans de passar als quadrilàters farem una «deducció» heurística de com hauria de ser la fórmula més senzilla que pogués donar  $A$  en termes de  $a, b$  i  $c$ , retrobant, sense càlculs, la fórmula d'Heró; vegeu [28]. Per a això, començarem amb una llista de propietats que ha de complir la funció que ens doni l'àrea al quadrat,  $\psi(a, b, c)$ :

- Quan els tres punts estan alineats, l'àrea és zero, és a dir,  $\psi(b + c, b, c) = \psi(a, a + c, c) = \psi(a, b, a + b) = 0$ .
- La funció  $\psi$  és simètrica, és a dir,  $\psi(a, b, c) = \psi(a, c, b) = \dots = \psi(c, b, a)$ .
- La funció és homogènia de pes 4, és a dir,  $\psi(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = \lambda^4 \psi(a, b, c)$ , per a tot  $\lambda > 0$ , ja que l'àrea és homogènia de pes 2.
- L'àrea al quadrat del triangle equilàter de costat 1 és  $3/16$ .

La funció més senzilla que compleix la llista de propietats és

$$\psi(a, b, c) = \frac{1}{16}(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c),$$

que correspon precisament al resultat d'Heró.

Hi ha una fórmula similar per a calcular l'àrea  $S$  d'un quadrilàter inscrit en una circumferència en funció dels seus quatre costats,  $a, b, c$  i  $d$ ; vegeu la figura 14. És deguda a Brahmagupta (segle VII) i és aquesta:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} \sqrt{(-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)} \\ &= \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}, \end{aligned}$$

on  $s = (a + b + c + d)/2$ .

Clarament, la fórmula d'Heró es dedueix d'aquesta prenent  $d = 0$ , però el que farem ara és precisament el contrari. Seguint [24], la demostrarem a partir de la fórmula d'Heró.

Per a provar la fórmula de Brahmagupta ens podem restringir al cas en què el quadrilàter no és un rectangle (si no, és trivialment certa) i podem suposar que estem en la situació de la figura 14. Usant un cop més les propietats dels arcs capaços (consulteu la secció 11) no és

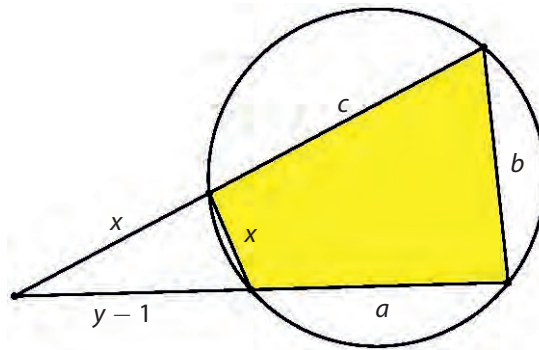


Figura 14. Prova de la fórmula de Brahmagupta.

difícil provar que la suma de dos angles interns i oposats en un quadrilàter cíclic és  $\pi$ . Per tant, els dos triangles de la figura 14 són semblants i es compleix

$$\frac{x}{y} = \frac{y-a}{x+c} = \frac{d}{b} =: \lambda < 1. \quad (3)$$

Així, l'àrea que busquem és  $S = A_g - A_p$ , on  $A_g$  i  $A_p = \lambda^2 A_g$  són les àrees dels triangles gran i petit de la mateixa figura. Com que els costats del triangle gran són  $x + c$ ,  $y$  i  $b$ , utilitzant la fórmula d'Heró,  $A_g = \sqrt{F_1 F_2 F_3 F_4} / 4$ , on  $F_1 = x + c + y + b$ ,  $F_2 = -x - c + y + b$ ,  $F_3 = x + c - y + b$  i  $F_4 = x + c + y - b$ . Observem que, usant (3), tenim que

$$(1 - \lambda)F_1 = (1 - \lambda)(x + c + y + b) = x + c + y + b - (y - a + x + d) = a + b + c - d,$$

$$(1 + \lambda)F_2 = (1 + \lambda)(-x - c + y + b) = -x - c + y + b + (-y + a + x + d) = a + b - c + d,$$

$$(1 + \lambda)F_3 = (1 + \lambda)(x + c - y + b) = x + c - y + b + (y - a - x + d) = -a + b + c + d,$$

$$(1 - \lambda)F_4 = (1 - \lambda)(x + c + y - b) = x + c + y - b - (y - a + x - d) = a - b + c + d.$$

Per tant,

$$\begin{aligned} S &= A_g - \lambda^2 A_g = (1 - \lambda^2) A_g = \frac{1}{4} \sqrt{((1 - \lambda)F_1)((1 + \lambda)F_2)((1 + \lambda)F_3)((1 - \lambda)F_4)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)}, \end{aligned}$$

tal com volíem provar.

Hi ha extensions d'aquestes fórmules per a polígons amb més costats, també inscrits en una circumferència; vegeu per exemple [45].

Per a quadrilàters generals és impossible que hi hagi una fórmula que doni la seva àrea només en funció dels costats, ja que són figures deformables sense canviar les mides dels costats (pensem, per exemple, en un quadrilàter fet amb quatre peces de Meccano). Per exemple, fixada la mida dels costats d'un quadrilàter, aquest es pot deformar de manera que tingui l'àrea tan petita com es vulgui. L'any 1842 Bretschneider va donar una fórmula per



a quadrilàters convexos que involucra també dos angles interiors oposats del quadrilàter, que anomenarem com  $\alpha$  i  $\gamma$ . La fórmula ens diu que

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 \left( \frac{\alpha + \gamma}{2} \right)},$$

vegeu per exemple [17, 40]. Observem que si agaféssim els altres dos angles oposats, aleshores la seva suma seria  $2\pi - (\alpha + \gamma)$  i el resultat no variaria. Recordem també que, per als quadrilàters cíclics,  $\alpha + \gamma = \pi$  i, per tant, aquesta fórmula coincideix amb la de Brahmagupta. Hi ha versions equivalents de la mateixa fórmula canviant els angles per les diagonals del quadrilàter ([10]).

### 13. Els babilonis i Newton

Els babilonis, al voltant dels anys 2000-1700 aC, calculaven arrels quadrades (amb una precisió suficient per als seus interessos) basant-se en una idea geomètrica molt suggeridora; veure [9, cap. 7]. Aquest mètode també va ser descrit per Heró d'Alexandria al segle I. Sigui  $x_0$  una bona aproximació de  $\sqrt{a}$ . Aleshores construïm un rectangle amb base  $x_0$  i alçada tal que la seva àrea sigui  $a$ , és a dir,  $a/x_0$ . Si obtenim un quadrat, ja està, i  $x_0$  és l'arrel quadrada buscada. Si no, un dels costats és més gran que  $\sqrt{a}$  i l'altre és més petit. Aleshores és natural pensar que la mitjana d'ambdós valors  $(x_0 + a/x_0)/2$  serà una aproximació millor de  $\sqrt{a}$ . En resum, aquesta idea geomètrica dona lloc al següent mètode iteratiu per a calcular  $\sqrt{a}$ :

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}, \quad x_0 \approx \sqrt{a}.$$

De fet, els babilonis feien només unes poques iteracions d'aquest procés.

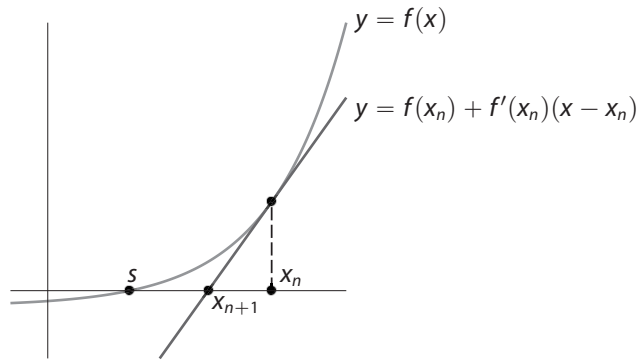
Seguint l'estela dels babilonis, anem a fer un raonament semblant amb cubs per a calcular  $\sqrt[3]{a}$ . Donat  $x_0 \approx \sqrt[3]{a}$ , construïm un prisma de volum  $a$ , amb base quadrada i costats  $x_0, x_0$  i  $a/x_0^2$ . Aleshores,  $x_1 = (2x_0 + a/x_0^2)/3$ . Més en general, per a calcular  $\sqrt[k]{a}$ , prenem en primer lloc un prisma  $k$ -dimensional de costats  $x_0, x_0, \dots, x_0$  i  $a/x_0^{k-1}$ , i com a aproximació següent  $x_1 = ((k-1)x_0 + a/x_0^{k-1})/k$ . És a dir, és natural considerar el mètode iteratiu per a calcular  $\sqrt[k]{a}$ :

$$x_{n+1} = \frac{(k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}}{k}, \quad x_0 \approx \sqrt[k]{a}.$$

Per altra banda, un dels mètodes més eficients per a trobar una solució,  $s$ , d'una equació general  $f(x) = 0$ , amb  $f$  derivable, és l'anomenat mètode de Newton, que consisteix a considerar la successió

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad x_0 \approx s.$$

La seva interpretació geomètrica es mostra en la figura 15. Se sap que si  $x_0$  és prou a prop de  $s$ , aleshores la successió  $\{x_n\}$  convergeix cap a  $s$ ; vegeu per exemple [43].



**Figura 15. Mètode de Newton.**

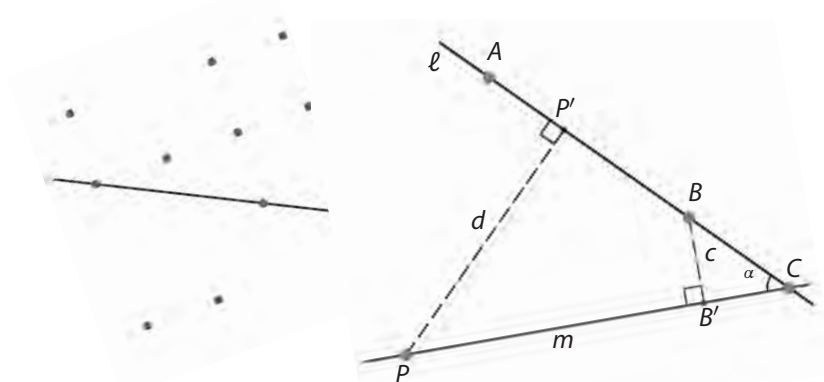
Ara bé, si prenem  $f(x) = x^k - a$ , aleshores  $s = \sqrt[k]{a}$  i el mètode basat en la idea babilònica coincideix amb el mètode de Newton, ja que

$$x - \frac{x^k - a}{kx^{k-1}} = \frac{(k-1)x + \frac{a}{x^{k-1}}}{k}$$

És força curiós com, per al cas particular  $f(x) = x^k - a$ , el mètode de Newton, que sembla fortament basat en el càlcul d'una derivada, apareix també de manera natural usant només idees de geometria clàssica.

### 14. Posició de $n$ punts en el pla

L'any 1893, en una columna de problemes matemàtics, J. J. Sylvester va proposar el problema següent: demostrar que, donada qualsevol distribució de  $n \geq 3$  punts no alineats en el pla hi ha una línia que passa per només dos d'aquests punts. Vegeu un cas particular en la figura de l'esquerra de la figura 16. Intuitivament és clar que el resultat sembla cert, però en una primera aproximació sembla difícil de formalitzar una prova. En aquest cas, el més maco és potser que, amb una mica d'enginy, el problema esdevé ben formalitzat i senzill. La qüestió va ser proposada de nou per Erdős l'any 1943 com a problema 4065 en l'*American Mathematical Monthly*. Reproduïm a continuació la prova de Gallai de 1944 que el resultat és cert; vegeu també [1, cap. 9]. De fet, es coneix avui en dia com a teorema de Sylvester-Gallai.



**Figura 16. Problema de Sylvester.**

Donada una recta que passa per dos punts qualssevol del conjunt de punts, hi ha uns quants punts que no són a la recta. Aleshores n'hi ha un (no té per què ser únic) que és el més proper a aquesta recta. Com que, fixats els  $n$  punts, hi ha un nombre finit de rectes passant per dos d'aquests, hi ha sempre una recta  $\ell$  i un punt  $P$  del conjunt de punts (de nou, no necessàriament únics) tals que la distància  $d$  de  $P$  a  $\ell$  és la més petita possible. Sigui  $P'$  el punt de  $\ell$  més proper a  $P$ ; vegeu la figura dreta de la figura 16. Si a  $\ell$  només hi ha dos punts del conjunt inicial de punts, ja hem acabat. Suposarem, per tal d'arribar a contradicció, que  $\ell$  conté com a mínim tres punts, que denotarem per  $A$ ,  $B$  i  $C$ . A més, com a mínim dos d'ells (diem  $B$  i  $C$ ) són a un mateix costat de  $\ell \setminus \{P'\}$ . Finalment, considerem la recta  $m$ , que passa per  $C$  (el punt més allunyat de  $P'$  dels dos) i  $P$ . Sigui  $c$  la distància entre  $B$  i  $m$ . Com que els triangles rectangles  $P'PC$  i  $B'BC$  són semblants, és fàcil veure que  $c < d$ , fet que contradiu la minimalitat de  $d$ .

## Els primers dígit de $\pi$

Les dues igualtats següents es poden obtenir fàcilment calculant primitives i aplicant la regla de Barrow:

$$0 < \int_0^1 \frac{(3x^2 - 1)^2}{1 + x^2} dx = 4(\pi - 3), \quad 0 < \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx = \frac{22}{7} - \pi, \quad (4)$$

i impliquen que  $3 < \pi < \frac{22}{7}$ ; vegeu també [12]. Per exemple:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(3x^2 - 1)^2}{1 + x^2} dx &= \int_0^1 \left( 9x^2 - 15 + \frac{16}{1 + x^2} \right) dx \\ &= (3x^3 - 15x + 16 \arctan(x)) \Big|_0^1 = 3 - 15 + 4\pi = 4(\pi - 3). \end{aligned}$$

Hi ha moltes igualtats semblants i han estat usades en diferents treballs per a obtenir algorismes per a aproximar  $\pi$ ; consulteu [4, 13, 19, 32, 33, 38].

La segona d'elles també ens permet conèixer fàcilment els primers dígit de  $\pi$ , ja que per a  $x \in [0, 1]$ ,

$$\frac{x^4(1-x)^4}{2} \leq \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} \leq x^4(1-x)^4$$

i  $\int_0^1 x^4(1-x)^4 dx = 1/630$ . Per tant,

$$3,1412\dots = \frac{3.958}{1.260} = \frac{22}{7} - \frac{1}{630} < \pi < \frac{22}{7} - \frac{1}{1.260} = \frac{3.959}{1.260} = 3,1420\dots \quad (5)$$

Un cop trobada una aproximació de  $\pi$ , aquesta es pot millorar usant, per exemple, el procediment proposat a [49]. Aquest ens diu que si  $P$  és una aproximació de  $\pi$ , correcta fins a la xifra decimal  $k$ -èsima, aleshores  $P + \sin(P)$  és correcta fins a la xifra decimal  $3k$ -èsima. No es pot negar que aquest resultat té un cert encant, tot i que si som justos és una mica truculent, ja que usar la funció sinus implica, de manera implícita, el coneixement de  $\pi$ .

Altres vies més naturals per a trobar més dígits de  $\pi$  es poden consultar, per exemple, a [18]. En qualsevol cas, si  $P = 3$ , tenim que  $3 + \sin(3) \approx 3,1411$ . De manera semblant,  $Q = 3,141 + \sin(3,141) \approx 3,141592653555$  i  $|Q - \pi| < 4 \times 10^{-11}$ . Per a veure per què el mètode funciona, podem aplicar la fórmula de Taylor a  $f(x) = x + \sin(x)$  a  $x = \pi$ . Tenim que

$$x + \sin(x) = \pi - \frac{\cos(s_x)}{6}(x - \pi)^3,$$

ja que  $f(\pi) = \pi$ ,  $f'(\pi) = f''(\pi) = 0$  i  $f'''(x) = -\cos(x)$ , on  $s_x$  està entre  $x$  i  $\pi$ . Per tant, per a  $x = P$ ,

$$|P + \sin(P) - \pi| \leq \frac{|P - \pi|^3}{6},$$

tal com volíem veure. Iterant el procés obtenim que la successió recurrent  $P_{n+1} = P_n + \sin(P_n)$ , amb  $P_0 = P$ , convergeix cúbicament cap a  $\pi$ .

## Càlcul d'Arquimedes del volum de l'esfera

Calculem a continuació el volum d'una esfera seguint les idees d'Arquimedes. El que va usar en el seu temps, per a un cas concret, és el que avui en dia coneixem com a principi de Cavalieri. Al seu torn, aquest principi és un cas molt particular del teorema de Fubini.

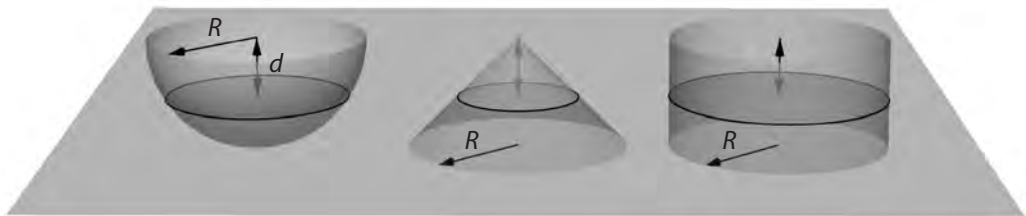


Figura 17. Volum de l'esfera.

Considerem la figura 17. A l'esquerra tenim mitja esfera de radi  $R$ , al mig un con amb base de radi  $R$  i alçada també  $R$ , i a la dreta un cilindre amb la mateixa base i la mateixa alçada. Si tallem les tres figures per un pla horitzontal, que està a distància  $d$  dels punts més alts de les tres figures, obtenim tres cercles. Ara bé, en el cas de l'esfera, usant el teorema de Pitàgores tenim un radi  $\sqrt{R^2 - d^2}$ ; en el cas del con, un radi  $d$ , i en el del cilindre, un radi  $R$ . Per tant, les àrees de les tres seccions, d'esquerra a dreta, són:  $S_{\text{esf}} := \pi(R^2 - d^2)$ ,  $S_{\text{con}} := \pi d^2$  i  $S_{\text{cil}} = \pi R^2$ . Així, es compleix  $S_{\text{esf}} + S_{\text{con}} = S_{\text{cil}}$ . Com a conseqüència,

$$\frac{\text{volum de l'esfera}}{2} + \text{volum del con} = \text{volum del cilindre}.$$

Per tant, sabent com calcular el volum d'un con i d'un cilindre, ja podem calcular el volum  $V$  de l'esfera a partir de la igualtat anterior:

$$\frac{V}{2} + \frac{\pi R^3}{3} = \pi R^3.$$

Obtenim que  $V = 4\pi R^3/3$ .

## 17. Daus de Sicherman

Els daus de Sicherman van ser popularitzats l'any 1978 per Martin Gardner en la seva esperada columna al *Scientific American*. El que Sicherman va fer és construir dos daus, amb valors diferents als usuals en les seves sis cares, però tals que en tirar-los la probabilitat que la seva suma fos un cert valor coincidís amb la probabilitat que es té quan es tiren dos daus usuals. Així, mentre que els daus normals estan numerats amb 1,2,3,4,5,6, els daus de Sicherman es numeren amb 1,2,2,3,3,4 i 1,3,4,5,6,8, vegeu la figura 18. La prova que la probabilitat de la suma és la mateixa és una comprovació senzilla. Per exemple, la probabilitat d'obtenir una suma de 6 amb dos daus normals és  $5/36$ , ja que aquesta suma es dona en les cinc parelles (1,5), (2,4), (3,3), (4,2) i (5,1). Per als daus de Sicherman també és  $5/36$ , però en aquest cas les parelles són (1,5), (2,4), (2,4), (3,3) i (3,3).



Figura 18. Daus de Sicherman.

El que és maco és que el disseny d'aquests daus, i la prova que no n'hi ha més, es redueix a l'estudi de la descomposició a  $\mathbb{Z}[x]$ , l'anell de polinomis amb coeficients enters, d'un cert polinomi, també de  $\mathbb{Z}[x]$ . Consulteu per exemple [7], per a més detalls. Anem a veure per què.

El secret està en la funció generatriu de probabilitats. Donada una variable aleatòria  $X$  que pren valors a  $\mathbb{N}$ , es defineix la seva funció generatriu de probabilitats  $\varphi_X$  com la funció analítica

$$\varphi_X(s) := \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) s^k,$$

on  $P$  denota la probabilitat. En el cas particular que  $X$  prengui un nombre finit de valors, aleshores  $\varphi_X(s)$  és un polinomi. Per exemple, per al cas concret d'un sol dau, és el polinomi

$$Q(s) := \frac{1}{6}s + \frac{1}{6}s^2 + \frac{1}{6}s^3 + \frac{1}{6}s^4 + \frac{1}{6}s^5 + \frac{1}{6}s^6.$$

És clar que sempre  $\varphi_X(1) = 1$ . Una de les propietats més importants de les funcions generatrius és que si  $X$  i  $Y$  són dues variables aleatòries independents, aleshores  $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \cdot \varphi_Y$ . Això és degut que

$$P(X + Y = k) = \sum_{j=0}^k P(X = j)P(Y = k - j).$$

Així, la funció generatriu de probabilitats de la variable aleatòria tirar dos daus i sumar els resultats obtinguts és

$$\begin{aligned} Q^2(s) &= \frac{1}{36} (s + s^2 + s^3 + s^4 + s^5 + s^6)^2 \\ &= \frac{1}{36} (s^2 + 2s^3 + 3s^4 + 4s^5 + 5s^6 + 6s^7 + 5s^8 + 4s^9 + 3s^{10} + 2s^{11} + s^{12}). \end{aligned}$$

Observem que el coeficient de  $s^6$  és  $5/36$ , que dona la probabilitat que la suma sigui 6, calculada a dalt.

Eliminant l' $1/36$  per comoditat, tenim que

$$\begin{aligned} P(s) &:= (s + s^2 + s^3 + s^4 + s^5 + s^6)^2 = (s(s+1)(s^2+s+1)(s^2-s+1))^2 \\ &= s^2(s+1)^2(s^2+s+1)^2(s^2-s+1)^2 \end{aligned}$$

i, per tant, els daus que busquem corresponen a maneres de descompondre  $P$  a  $\mathbb{Z}[s]$  com a producte de dos polinomis  $P_1$  i  $P_2$  a  $\mathbb{N}[s]$  tals que  $P_1(1) = P_2(1) = 6$  (aquest 6 prové de  $\varphi_X(1) = 1$ ). Fent totes les combinacions possibles amb els vuit factors de  $P$ , només obtenim dues solucions:

$$P(s) = (s + s^2 + s^3 + s^4 + s^5 + s^6)^2 = (s + 2s^2 + 2s^3 + s^4)(s + s^3 + s^4 + s^5 + s^6 + s^8),$$

que corresponen als dos daus normals i als daus de Sicherman, respectivament.

A partir d'aquesta idea es pot jugar a dissenyar daus (de  $m$  cares) amb propietats curioses. Donem-ne un parell d'exemples.

Els dos daus tetraèdrics (amb quatre cares) numerats amb 1,2,5,6 i 0,2,8,10, en llançar-los donen una distribució uniforme, amb setze valors entre 1 i 16. El motiu és que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{16} s^k &= s(s+1)(s^2+1)(s^4+1)(s^8+1) = (s(s+1)(s^4+1))((s^2+1)(s^8+1)) \\ &= (s + s^2 + s^5 + s^6)(1 + s^2 + s^8 + s^{10}). \end{aligned}$$

Llançar un dodecaèdre numerat amb 1,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,5 i dos daus numerats amb 1,3,4,5,6,8 i 1,1,3,3,5,5 equival a llançar tres daus normals. La raó és que

$$(s + s^2 + s^3 + s^4 + s^5 + s^6)^3 = (s + 3s^2 + 4s^3 + 3s^4 + s^5)(s + s^3 + s^4 + s^5 + s^6 + s^8)(s + s^3 + s^5).$$

## 18. La irracionalitat de $e$

Reproduïm a continuació la prova de Fourier. Si definim  $S_n = \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!}$ , aleshores

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}.$$

Per tant, com que per  $j \geq 1$ ,  $n!/(n+j)! \leq 1/(n+1)^j$ , amb igualtat només per  $j = 1$ ,

$$e - S_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m!} = \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{n!}{m!} = \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+j)!} < \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^j} = \frac{1}{n!} \frac{\frac{1}{(n+1)}}{1 - \frac{1}{(n+1)}} = \frac{1}{n!n}.$$

Prenent  $n = 2$ , obtenim que

$$2 < e < \frac{11}{4} < 3.$$

Suposem, per tal d'arribar a contradicció que  $e = p/q \in \mathbb{Q}$ . Observem primer que  $q \geq 2$ , ja que  $2 < e < 3$  i, per tant,  $e$  no pot ser enter. Si prenem la desigualtat anterior per  $n = q$ , obtenim

$$S_q < e = \frac{p}{q} < S_q + \frac{1}{q!q}.$$

Multiplicant-la per  $q!$  tenim que

$$q!S_q < q!e = q! \frac{p}{q} = (q-1)!p < q!S_q + \frac{1}{q} < q!S_q + 1.$$

Com que  $q!S_q$  és enter, obtenim que  $(q-1)!p$  és un enter situat entre dos enters consecutius, fet que ens dona la contradicció buscada.

Usant la fórmula de Taylor, hi ha una manera alternativa d'obtenir una fita de  $e - S_n$ , ja que

$$e = S_n + \frac{e^{s_n}}{(n+1)!}, \quad s_n \in [0, 1]$$

i, per tant,  $S_n < e < S_n + 3/(n+1)!$ . A partir d'aquestes desigualtats es pot obtenir de manera semblant una contradicció.

## 19. Càlcul dinàmic del màxim comú divisor

En el seu engrescador treball *Cooking the Classics* ([50]), Ian Stewart mostra una manera de calcular el màxim comú divisor a partir d'un sistema dinàmic discret (SDD) que reproduïm a continuació. Aquest mètode és una reformulació del mètode usat a la Grècia clàssica conegut com a *anthyphaeresis*. Donat un rectangle amb costats els dos mateixos números, aquest mètode consisteix a eliminar el màxim nombre possible de quadrats (amb costat el més petit dels del rectangle) fins a arribar a un nou rectangle on ja no es pot seguir, i després continuar amb el mateix procediment començant amb el nou rectangle i anar fent el mateix fins a arribar al conjunt buit; vegeu la figura 19.

Dinàmicament, considerem l'aplicació no invertible  $F : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^2$ ,

$$F(x, y) = (\max(x, y) - \min(x, y), \min(x, y)),$$

que dona lloc a un semi-SDD. Com sempre,  $F^0 = \text{Id}$  i  $F^n = F \circ F^{n-1}$ . Anem a demostrar que per a cada  $(a,b) \in \mathbb{N}^2, ab \neq 0$ , hi ha un  $m = m(a,b)$  tal que  $F^m(a,b) = (\text{mcd}(a,b),0)$ .



**Figura 19.** El màxim comú divisor de 203 i 161 és 7.

Per a demostrar-ho considerem les dues funcions  $V, W : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  definides com  $V(x,y) = x + y$  i  $W(x,y) = \text{mcd}(x,y)$ , on  $\Omega = \mathbb{N}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : xy = 0\}$ . De fet, veurem que aquestes funcions són una funció de Liapunov estricta i una integral primera, respectivament, pel semi-DDS donat per  $F$  sobre  $\Omega$ . Com és habitual, direm que els punts  $(x,y), F(x,y), F^2(x,y), \dots, F^m(x,y), \dots$  són l'òrbita de  $(x,y)$ .

La funció  $V$  és de Liapunov a  $\Omega$ , ja que per  $(x,y) \in \Omega$ ,

$$V(F(x,y)) = \text{máx}(x,y) < x + y = V(x,y).$$

A més,  $V(F(x,y)) = V(x,y)$  només quan  $xy = 0$ .

Per a veure que  $W$  és una integral primera, el que hem de demostrar és que  $W(F(x,y)) = W(x,y)$ . Per això, observem que si  $z$  divideix  $x$  i  $y$ , també divideix  $\text{máx}(x,y)$  i  $\text{mín}(x,y)$ , i per tant divideix ambdues components de  $F$ . Recíprocament, si  $z$  divideix  $\text{máx}(x,y) - \text{mín}(x,y)$  i  $\text{mín}(x,y)$  també divideix la seva suma,  $\text{máx}(x,y)$ , i per tant divideix  $x$  i  $y$ .

Finalment, observeu que  $F(x,y) = (0,0)$  si i només si  $(x,y) = (0,0)$ . Per tant, com que  $V$  decreix estrictament i és positiva sobre les òrbites de punts de  $\Omega$ , donat qualsevol parell  $(x,y) \in \Omega$  ha d'existir  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $V(F^k(x,y)) = (z,0)$  o  $(0,z)$ , amb  $z \neq 0$ . Com que  $F(0,z) = (z,0)$ , el resultat que se segueix amb  $m$  és o bé  $k$ , o bé  $k + 1$ . A més, com que tots els punts de l'òrbita tenen el mateix màxim comú divisor,  $z = \text{mcd}(x,y)$ .

De fet, es pot veure que aquest procediment és equivalent a l'algoritme d'Euclides, amb la diferència que no cal fer divisions. Un avantatge més d'aquest punt de vista és que es pot usar per a definir de manera molt natural el màxim comú divisor de dos nombres racionals positius. Si denotem  $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0\}$ , aleshores, per  $a = p/q, b = r/s$  amb  $(a,b) \in (\mathbb{Q}^+)^2$  i  $\text{mcd}(p,q) = \text{mcd}(r,s) = 1$  hi ha un  $m = m(a,b)$  i un nombre racional  $c$  tal que  $F^m(a,b) = (c,0)$ .



Aquest  $c$  s'anomenarà màxim comú divisor de  $a$  i  $b$ ,  $\text{mcd}(a,b)$ . A més,

$$c = \text{mcd}(a,b) = \frac{\text{mcd}(p,r)}{\text{mcm}(q,s)} \quad \text{i} \quad \text{mcm}(a,b) := \frac{ab}{\text{mcd}(a,b)}.$$

Anem a provar-ho. Per linealitat,  $F(a,b) = F(qsa, qsb)/(qs) = F(ps, qr)/(qs)$ . Per al resultat sobre punts amb components enteres hi ha un  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$$F^m(a,b) = \frac{F^m(ps, qr)}{qs} = \frac{(\text{mcd}(ps, qr), 0)}{qs}$$

$$\stackrel{(*)}{=} \left( \frac{\text{mcd}(p,r) \text{mcd}(q,s)}{\text{mcd}(q,s) \text{mcm}(q,s)}, 0 \right) = \left( \frac{\text{mcd}(p,r)}{\text{mcm}(q,s)}, 0 \right),$$

on  $(*)$  hem usat que

$$qs = \text{mcd}(q,s) \text{mcm}(q,s) \quad \text{i} \quad \text{mcd}(ps, qr) = \text{mcd}(p,r) \text{mcd}(q,s).$$

Per exemple,  $F^{11}(22/91, 55/63) = (11/819, 0)$ . Aleshores,  $\text{mcd}(22/91, 55/63) = 11/819$  i  $\text{mcm}(22/91, 55/63) = 110/7$ . Observeu que tots els quocients

$$\frac{22/91}{11/819} = 18, \quad \frac{55/63}{11/819} = 65, \quad \frac{110/7}{22/91} = 65, \quad \frac{110/7}{55/63} = 18,$$

són nombres naturals.

Finalment, el procediment es pot estendre a condicions inicials de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  i es pot veure que dona lloc a l'expansió dels nombres reals en fraccions contínues. Només presentem un exemple. Se sap que

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, \dots]$$

$$= 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \dots}}}}$$

i, per tant, els seus primers convergents són

$$3, 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \dots \quad (6)$$

Si calculem  $(a_n, b_n) := F^n(\pi, 1)$ , per  $n \in \{3, 3 + 7 = 10, 10 + 15 = 25, 25 + 1 = 26, 26 + 292 = 318, 318 + 1 = 319, \dots\}$  obtenim

$$a_3 = \pi - 3, \quad a_{10} = 22 - 7\pi, \quad a_{25} = 106\pi - 333,$$

$$a_{26} = 355 - 113\pi, \quad a_{318} = -103993 + 33102\pi, \quad a_{319} = 104348 - 33215\pi,$$

recuperant els numeradors i denominadors de (6).

## 20. Divergència de la suma dels inversos dels nombres primers

Detallem una prova senzilla i maquíssima, deguda a F. Gilfeather i G. Meisters i publicada a [31], que segons la qual  $\sum_{p \text{ primer}} 1/p = 1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/11 + \dots$  és divergent. De fet, la primera prova de la divergència d'aquesta sèrie és deguda a Euler i data del 1737, i la prova que presentem s'inspira en la seva.

Fixat  $2 \leq n \in \mathbb{N}$ , denotem per  $P_n$  el conjunt de tots els nombres primers  $p \leq n$ . Tenim que

$$\prod_{p \in P_n} \left( \frac{p}{p-1} \right) = \prod_{p \in P_n} \left( \frac{1}{1-1/p} \right) = \prod_{p \in P_n} \left( 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots \right). \quad (7)$$

Com que tot enter positiu  $k \leq n$ , descompon com a producte de primers menors o iguals que  $n$  elevats a potències enteres positives, és segur que  $1/k$  surt com un terme del desenvolupament del producte de la dreta de (7). Per tant:

$$\prod_{p \in P_n} \left( \frac{p}{p-1} \right) > \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Prenent logaritmes de la desigualtat anterior, com que el logaritme és una funció creixent,

$$\sum_{p \in P_n} (\log(p) - \log(p-1)) > \log \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right).$$

Per altra banda,

$$\sum_{p \in P_n} (\log(p) - \log(p-1)) = \sum_{p \in P_n} \int_{p-1}^p \frac{1}{x} dx < \sum_{p \in P_n} \left( \frac{1}{p-1} \right) \leq \sum_{p \in P_n} \frac{2}{p}.$$

Usant les dues desigualtats obtingudes arribem a

$$\sum_{p \in P_n} \frac{1}{p} > \frac{1}{2} \log \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right),$$

i com que la sèrie harmònica és divergent, obtenim el resultat desitjat.

Anem a veure com aquest resultat, a part de provar un cop més l'existència d'infinitos nombres primers, ens dona també una informació força bona sobre el creixement de la sèrie.

Comparant les sumes superior i inferior de la funció  $1/x$  en els intervals  $[1, n]$  i  $[1, n+1]$  amb la seva integral, no és difícil veure que

$$\log(n+1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \log(n) + 1.$$

Per tant,

$$\sum_{p \in \mathbb{P}_n} \frac{1}{p} > \frac{1}{2} \log(\log(n) + 1).$$

Aquest resultat és bastant fi, ja que se sap que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{p \in \mathbb{P}_n} \frac{1}{p}}{\log(\log(n))} = 1.$$

De fet, el 1/2 que apareix davant de la fita inferior prové del 2 de la desigualtat  $1/(p-1) \leq 2/p$ , vàlida per a tot  $p \geq 2$ . Aquest 2 es pot disminuir i acostar tant com es vulgui a 1, per sobre, prenent  $p$  prou gran.

## Agraïments

L'autor vol agrair a Gregori Guasp els seus comentaris i suggeriments durant la redacció d'aquest treball i la seva ajuda en la preparació de moltes de les il·lustracions que conté. L'autor rep el suport dels projectes MINECO MTM2016-77278-P FEDER i 2017SGR1617 de la Generalitat de Catalunya.

## Bibliografia

- [1] M. Aigner, G. M. Ziegler, *Proofs from The Book. Fifth edition. Including illustrations by Karl H. Hofmann*. Springer-Verlag, Berlín, 2014.
- [2] C. Alsina, R. B. Nelsen, «Charming Proofs: A Journey into Elegant Mathematics», *Dolciani Mathematical Expositions* 42, 2010.
- [3] T. M. Apostol, «Ptolemy's inequality and the chordal metric». *Mathematics Magazine* 40 (1967), 233-235.
- [4] N. Backhouse, «Pancake functions and approximations to  $\pi$ ». Note 79.36, *Mathematics Gazette* 79 (1995), 371-374.
- [5] M. Bicknell-Johnson, «Pythagorean triples containing Fibonacci numbers: solutions for  $F_n^2 \pm F_k^2 = K^2$ ». *Fibonacci Quarterly* 17 (1979), 1-12.
- [6] B. Bollobás, *Modern Graph Theory*. Springer, Nova York, NY, 1998.
- [7] D. Broline, «Renumbering of the faces of dice». *Mathematics Magazine* 52 (1979), 312-315.
- [8] L. M. Blumenthal, B. E. Gillam, «Distribution of points in  $n$ -space». *American Mathematical Monthly* 50 (1943), 181-185.
- [9] J.-L. Chabert et al., *A history of algorithms. From the pebble to the microchip. Translated from the 1994 French original by Chris Weeks*. Springer-Verlag, Berlín, 1999.
- [10] J. L. Coolidge, «A historically interesting formula for the area of a quadrilateral». *American Mathematical Monthly*, 46 (1939), 345-347.
- [11] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America 1967.
- [12] D. P. Dalzell, «On  $22/7$ ». *Journal of the London Mathematical Society* 19, (1944), 133-134.
- [13] D. P. Dalzell, «On  $22/7$  and  $355/113$ ». *Eureka: The Archimedian's Journal* 34 (1971), 10-13.
- [14] J.-P. Delahaye, *Mathématiques pour le plaisir. Un inventaire de curiosités*. Belin, Pour la Science, París 2010.

- [15] M. Gardner, *Mathematical Puzzles & Diversions*. The University of Chicago Press, 1961.
- [16] M. Gardner, *New Mathematical Diversions*. The Mathematical Association of America, 1995.
- [17] C. E. Garza-Hume, M. C. Jorge, A. Olvera, «Quadrilaterals and Bretschneider's Formula». *The Mathematics Teacher* 111 (2018), 310-314.
- [18] A. Gasull, «Integració de funcions racionals i  $\pi$ ». *Materials Matemàtics* 2018, treball 2, 28 p.
- [19] A. Gasull, «Algoritmos sencillos para calcular  $\pi$ ». *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* (en premsa).
- [20] A. Gasull, «Gemmes matemàtiques». *Materials Matemàtics* (en premsa).
- [21] M. Giaquinto, «Mathematical proofs: the beautiful and the explanatory». *Journal of Humanistic Mathematics* 6 (2016), 52-72.
- [22] M. de Guzmán, *Aventuras matemáticas Una ventana hacia el caos y otros episodios*. Pirámide, Madrid, 2004.
- [23] G. H. Hardy, *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1969.
- [24] A. Hess, «A highway from Heron to Brahmagupta». *Forum Geometricorum* 12 (2012), 191-192.
- [25] R. Honsberger, *Mathematical gems from elementary combinatorics, number theory, and geometry*. The Dolciani Mathematical Expositions, 1. The Mathematical Association of America, Buffalo, 1973.
- [26] R. Honsberger, *Mathematical gems. II*. The Dolciani Mathematical Expositions, 2. The Mathematical Association of America, Washington DC, 1976.
- [27] R. Honsberger, *Mathematical gems. III*. The Dolciani Mathematical Expositions, 9. Mathematical Association of America, Washington DC, 1985.
- [28] D. A. Klain, «An intuitive derivation of Heron's formula». *American Mathematical Monthly* 111 (2004), 709-712.
- [29] L. J. Lander, T. R. Parkin, «Counterexample to Euler's conjecture on sums of like powers». *Bulletin of the American Mathematical Society* 72 (1966), 1079.
- [30] M. Lange, «Explanatory proofs and beautiful proofs». *Journal of Humanistic Mathematics* 6 (2016), 8-51.
- [31] W. G. Leavitt, «The sum of the reciprocals of the primes». *Two-Year College Mathematics Journal* 10 (1979), 198-199.
- [32] S. K. Lucas, «Integral proofs that  $355/113 > \pi$ ». *Australian Mathematical Society Gazette* 32 (2005), 263-266.
- [33] S. K. Lucas, «Approximations to  $\pi$  derived from integrals with nonnegative integrands». *American Mathematical Monthly* 116 (2009), 166-172.
- [34] W. Narkiewicz, *The Development of Prime Number Theory*, Springer-Verlag, Nova York, 2000.
- [35] R. B. Nelsen, *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking*, Mathematical Association of America, 1997.
- [36] R. B. Nelsen, *Proofs without Words II: More Exercises in Visual Thinking*, Mathematical Association of America, 2000.
- [37] J. Neunhäuserer, *12<sup>2</sup> beautiful mathematical theorems with short proofs*. Reedició.
- [38] D. A. Nield (mal escrit Neild a l'article), «Rational approximations to pi». *The New Zealand mathematics magazine* 18 (1981-1982), 99-100.
- [39] B. Polster, Q.E.D. *Beauty in mathematical proof*. Wooden Books. Walker & Company, Nova York, 2004.
- [40] B. Pritsker, *Geometrical Kaleidoscope*. Courier Dover Publications, 2017, 144 pàgines.

- [41] H. Rademacher, O. Toeplitz, *Números y figuras*. Alianza, Madrid, 1970.
- [42] C. H. Raifaizen, «A Simpler Proof of Heron's Formula». *Mathematics Magazine* 44 (1971), 27-28.
- [43] A. Ralston, *A first course in numerical analysis*. McGraw-Hill Book Co., Nova York/Toronto/London, 1965.
- [44] P. Ribenboim, *The New Book of Prime Number Records*, Springer-Verlag, Nova York, 1996.
- [45] D. P. Robbins, «Areas of polygons inscribed in a circle». *American Mathematical Monthly* 102 (1995), 523-530.
- [46] G.-C. Rota, «The Phenomenology of Mathematical Beauty», *Indiscrete Thoughts*, a cap. 10, p. 121-133. Basilea: Birkhäuser Verlag AG, 1997.
- [47] F. Saidak, «A New Proof of Euclides' Theorem». *American Mathematical Monthly* 113 (2006), 937-938.
- [48] D. Schattschneider, «Beauty and truth in mathematics», a N. Sinclair, D. Pimm, W. Higgenson (editors), *Mathematics and the Aesthetic: New Approaches to an Ancient Affinity*, Springer, Nova York, 2006, p. 41-57.
- [49] D. Shanks, «Improving an approximation for Pi». *The American Mathematical Monthly* 99 (1992), 263.
- [50] I. Stewart, «Cooking the classics». *The Mathematical Intelligencer* 33 (2011), 61-71.
- [51] V. G. Tikekar, «Some Interesting Mathematical Gems». *Resonance-Journal of Science Education* 11 (2006), 29-42.

