This is a preprint of: “AB y BA”, Armengol Gasull, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, vol. 23(3), 550, 2020.

AB y BA

Es bien conocido que, dadas dos matrices cuadradas A y B, se cumple que $\det(AB) = \det(BA)$. Cuando un compañero me comentó que sucedía lo mismo con la traza me quedé un poco sorprendido. Aunque esto se puede demostrar con cálculos directos, a continuación presentaremos dos pruebas, casi exentas de cálculos, de un hecho más general: *los polinomios característicos de AB y BA coinciden* (recordemos que la traza es, salvo quizás el signo, uno de los coeficientes del polinomio característico). No es difícil encontrar ejemplos para los que los respectivos polinomios mínimos no coinciden.

Si alguna de las matrices, digamos A, es invertible, el resultado es claro ya que $A^{-1}(AB)A = BA$ y por lo tanto AB y BA son conjugadas. En consecuencia, solo nos falta demostrarlo cuando ambas son no invertibles. La primera prueba es válida para matrices con coeficientes en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ (u otros cuerpos donde el argumento con límites funciona).

Si denotamos por $\mathrm{pol}_C(\lambda) = \det(C - \lambda\,\mathrm{Id})$ al polinomio característico de una matriz C, y C_ε son matrices cuadradas tales que $\lim_{\varepsilon\to 0} C_\varepsilon = C$, observemos que $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{pol}_{C_\varepsilon}(\lambda) = \mathrm{pol}_C(\lambda)$. Para A no invertible, considerando $A_\varepsilon = A - \varepsilon\,\mathrm{Id}$, es claro que $\mathrm{pol}_{A_\varepsilon}(\lambda) = \mathrm{pol}_A(\lambda+\varepsilon)$. Por lo tanto, dado que $\mathrm{pol}_A(0) = \det(A) = 0$ y que los ceros de un polinomio no nulo son aislados, $\det(A_\varepsilon) = \mathrm{pol}_A(\varepsilon) \neq 0$ para $|\varepsilon| \neq 0$ suficientemente pequeño. Así, como $A_\varepsilon B$ y BA_ε son conjugadas y A_ε es invertible, $\mathrm{pol}_{A_\varepsilon B}(\lambda) = \mathrm{pol}_{BA_\varepsilon}(\lambda)$. Pasando al límite obtenemos el resultado deseado.

Esbozamos ahora una prueba válida en cualquier cuerpo. Se atribuye a Paul Halmos y se basa en la equivalencia de matrices por transformaciones elementales (por filas y columnas). Recordemos que, si A es una matriz $n \times n$ no invertible, esto nos permite escribir $A = PDQ$, con P y Q invertibles y D como se describe a continuación, y además expresar $B = Q^{-1}EP^{-1}$, donde

$$D = \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E = QBP = \begin{pmatrix} S & T \\ U & V \end{pmatrix},$$

Id y S son matrices $r \times r$, $r = \mathrm{rango}(A) < n$, las matrices 0 y V en la diagonal tienen tamaño $(n-r)\times(n-r)$, y las otras cuatro son, en general, rectangulares. Entonces,

$$AB = PDEP^{-1} = P\begin{pmatrix} S & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} \quad \text{y} \quad BA = Q^{-1}EDQ = Q^{-1}\begin{pmatrix} S & 0 \\ U & 0 \end{pmatrix}Q.$$

Por lo tanto, $\mathrm{pol}_{AB}(\lambda) = (-\lambda)^{n-r}\,\mathrm{pol}_S(\lambda) = \mathrm{pol}_{BA}(\lambda)$, tal y como queríamos probar.

Si las matrices no son cuadradas, pero AB es $n \times n$ y BA es $m \times m$, con $n \geq m$, la misma idea nos permite demostrar que $\mathrm{pol}_{AB}(\lambda) = (-\lambda)^{n-m}\,\mathrm{pol}_{BA}(\lambda)$.

Armengol Gasull, Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona
Correo electrónico: gasull@mat.uab.cat
Página web: http://www.gsd.uab.cat/personal/agasull