This is a preprint of: “Conjectures”, Armengol Gasull, *Butl. Soc. Catalana Mat.*, vol. 36(1), 69–113, 2021.
DOI: [10.2436/20.2002.01.98]

CONJECTURES

ARMENGOL GASULL

Resum. L’objectiu d’aquest treball es donar a conèixer diverses conjectures matemàtiques que el que tenen en comú és que les qüestions de les que s’ocupen es poden entendre sense ser un matemàtic professional. Les agruparem en tres grans blocs: les que parlen de nombres primers, les que involucren nombres naturals i un tercer bloc més heterogeni on es tracten problemes de diverses branques de les matemàtiques. En total parlarem, amb més o menys profunditat, de més de 40 conjectures. També es planteja la possibilitat d’usar les conjectures com una eina de motivació pels estudiants de batxillerat i primers anys d’universitat, presentant les matemàtiques com una disciplina viva i en creixement.

En aquest treball donarem a conèixer diverses conjectures matemàtiques, que el que tenen en comú és que el que afirmen es pot entendre sense ser un matemàtic professional[1]. En particular, només considerarem conjectures tals que el seu enunciat sigui curt i autocontingut. Cadascuna d’elles es pot llegir de manera independent. El nostre objectiu, a part d’ampliar els coneixements i entretenir als lectors, és mostrar les matemàtiques no com una ciència tancada en la que tot es coneix, ans tot el contrari, com una disciplina viva i en creixement. Com veurem, tot i que les conjectures que es detallen toquen diferents parts de les matemàtiques, la major part d’elles són de caire teòric o lúdic i deixen de banda una de las raons de ser de les matemàtiques, la modelització i comprensió del món. Això sí, els mateixos matemàtics que han proposat o estudiat aquestes conjectures són els que han fet avançar la matemàtica en totes les seves vessants.

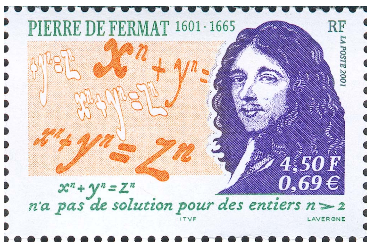

Figura 1. Darrer Teorema de Fermat.

Però, què és una conjectura matemàtica? Una possible definició seria que és un resultat consistent amb tot el que es coneix, però no s’ha pogut verificar si és cert o fals.

Però potser podem entendre millor el que és llegint un tros de la correspondència que el 1742 van tenir el matemàtic i científic suïs Leonhard Euler i el matemàtic alemany Christian Goldbach, sobre el que avui en dia es coneix com conjectura de Goldbach. Euler li deia:

> *Que . . . tot nombre enter parell és una suma de dos primers, jo ho veig com un teorema completament cert, però no ho puc provar.*

[1]Una altra qüestió ben diferent és el nivell i profunditat matemàtiques necessaris per saber si són certes o falses!

Així, una conjectura és un resultat que molts matemàtics pensen que hauria de ser un teorema, però que cap d'ells ha pogut provar. A més, aquest candidat a teorema ha resistit tots els esforços per buscar-li un contraexemple. I si la conjectura admet ser estudiada amb l'ajut de programes, s'ha pogut verificar fins a on poden arribar els ordinadors més potents disponibles fins al moment. Finalment, és possible que existeixin idees heurístiques, probabilístiques o intuïtives que també fan pensar que és certa.

Hi ha conjectures degudes a matemàtics il·lustres que han resultat certes i altres falses. Un dels exemples més famosos de conjectura certa és la que es va popularitzar com a *darrer Teorema de Fermat,* quan encara no era un teorema. Aquest va ser enunciat pel matemàtic i advocat francès Pierre de Fermat el 1637, i afirmava que l'equació $x^n + y^n = z^n$, per a $2 < n \in \mathbb{N}$, no tenia solucions $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$. La demostració d'aquest resultat va haver d'esperar fins el 1995, i és deguda al matemàtic anglès Andrew Wiles. Una altra conjectura ben famosa, però molt més tècnica sobre una caracterització topològica de les esferes 3-dimensionals, i que ja és també un teorema, és la conjectura de Poincaré demostrada el 2003 pel matemàtic rus Grigori Y. Perelman.

Euler el 1769, en un intent d'estendre el darrer Teorema de Fermat, va proposar la següent conjectura que ens servirà per a il·lustrar el cas contrari: Si per a certs $n > 1, k > 1$ enters hi ha $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tal que

$$x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k = y^k,$$

aleshores $n \geq k$. Un exemple conegut ja a l'antiga Grècia i coherent amb la conjectura és $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. El primer contraexemple d'aquesta conjectura, per a $k = 5$, va ser trobat usant un programa d'ordinador per Lander i Parkin el 1966,

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5,$$

i està publicat en el que potser és l'article més curt de matemàtiques ([71]): 5 línies de text i una referència. El 1986, Elkies va trobar, també via programació, el primer contraexemple per a $k = 4$. El més senzill que es coneix és de l'any 1988 i és degut a Frye,

$$95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4.$$

Per $k = 3$ la conjectura és certa, ja que com acabem de comentar, el darrer Teorema de Fermat és, avui en dia, un teorema.

Aquest treball no intenta de cap manera llistar totes les conjectures matemàtiques existents, ni tan sols presentar les més importants. El criteri que s'ha intentat seguir en la selecció feta és que els seus enunciats estiguin a l'abast d'estudiants de batxillerat o primers anys de carreres científiques i també de persones amb un interès ampli per les matemàtiques. Sense ànims de ser exhaustius, però per completesa, donarem els noms d'algunes conjectures famoses que no descriurem aquí i que necessiten més coneixements matemàtics per entendre els seus enunciats: la conjectura ABC (també coneguda com conjectura d'Oesterlé–Masser) o la conjectura de Birch and Swinnerton-Dyer (teoria de nombres), la conjectura de Carathéodory (geometria diferencial), la conjectura de Hadamard (combinatòria), les conjectures de Kaplansky (àlgebra), el closing Lema de Pugh (sistemes dinàmics), la finitud de les configuracions centrals (mecànica celeste), ...

En moltes de les conjectures que presentem es donen referències més detallades i, en particular, moltes de les relacionades amb teoria de nombres apareixen al llibre de R. K. Guy *Unsolved Problems in Number Theory* ([53]) o [6, 82]. També s'han consultat els treballs [57, 58, 59, 60]. A part d'aquestes referències s'han usat de manera sistemàtica diverses planes web. Així a la Wikipedia en anglès s'han consultat les planes amb títols: "List of unsolved problems in mathematics," "List of conjectures", i "Conjectures", amb els seus enllaços corresponents. També hi ha molta informació a les planes del *MathWorld-A Wolfram Web Resource* i a la del *CNRS-Images des maths* dins de la secció "Les conjectures du trimestre".

Les conjectures de que parlarem s'han dividit en tres grups. Cada grup es presenta en una secció diferent.

Així a la Secció 1 incloem les que estan fortament relacionades amb els nombres primers i la seva estructura. Així ens ocuparem de les conjectures sobre els primers bessons, de Legendre, imposant expressions concretes pels nombres primers, de Goldbach, de Lemoine, d'Oppermann, de Brocard, d'Andrica, de Firoozbakht, de Cramér, de Gilbreath, segona de Hardy–Littlewood, dels primers de Germain, i de Grimm.

La Secció 2 està dedicada a conjectures que involucren nombres naturals. Considerem les conjectures sobre els nombres perfectes, d'Erdös–Strauss, de Brocard–Ramanujan–Erdös, de Goormaghtigh, de Carmichael, de Singmaster, de Beal, sobre la màxima persistència multiplicativa, la de no palindromia, i de Selfridge.

Finalment, a la Secció 3 hi ha un popurri de conjectures sobre temes diferents. Parlem de la conjectura de Lagarias equivalent a la hipòtesi de Riemann, i les conjectures $3x+1$, Jacobiana, de Casas-Alvero, sobre la normalitat de π, sobre la irracionalitat de γ, sobre la seqüència de Kolakoski, de Frankl, de Toeplitz, d'Erdös–Szekeres, del billars triangulars, del sofà, i de Levi–Hadwiger.

De manera tangencial també parlarem al text de les conjectures de Polignac, de les cadenes de Cunningham, de Dickson, de Sierpinski i de Kakeya.

És clar que els gustos i coneixements de l'autor també han influït en la tria feta.

A l'última secció incloem algunes reflexions sobre la utilitat tant didàctica, com científica, com pràctica d'estudiar conjectures matemàtiques. Com veurem, en particular moltes de les conjectures que es presenten ens proporcionen idees interessants i engrescadores per introduir als nostres alumnes en el món de la investigació i en el de la programació. En aquesta direcció podeu llegir el blog de Ben Braun del maig de 2005: "Famous Unsolved Math Problems as Homework," penjat als blogs de l'AMS dins de la secció "On Teaching and Learning Mathematics." També aprofitarem aquesta secció per a presentar alguns exemples famosos de propietats que són certes per a molts casos particulars i podrien fer pensar que donen lloc a una conjectura, o millor encara a un teorema, però que acaben essent falses.

Acabarem aquesta introducció amb un aspecte del que de vegades s'oblida parlar quan un s'enfronta a una conjectura. Hi ha la possibilitat que una conjectura no sigui ni certa ni falsa. Per il·lustrar aquesta darrera afirmació posarem un parell d'exemples. El més famós és el relacionat amb l'anomenada *hipòtesi del continu.* Anem a explicar-la breument.

Si hi ha dos conjunts entre els que podem definir una aplicació bijectiva es diu que tenen la mateixa cardinalitat. Així, els conjunts $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, o $\mathbb{Q}$ tenen cardinalitat numerable, o també anomenada $\aleph_0$, que es llegeix com alef sub zero. Per altra banda els conjunts $(0,1), [0,1], \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ tenen la mateixa cardinalitat que el conjunt de tots els subconjunts de $\mathbb{N}$, i aquesta es denota com $2^{\aleph_0}$. Així, sorgeix una pregunta molt natural: *Hi ha algun conjunt amb una cardinalitat intermèdia entre $\aleph_0$ i $2^{\aleph_0}$?*

De fet, aquesta pregunta va ser el primer problema d'una llista de 23 que va posar el matemàtic alemany David Hilbert a la comunitat matemàtica, l'any 1900 a París en el Congrés Mundial de Matemàtiques.

La no existència de conjunts amb cardinalitat entre $\aleph_0$ i $2^{\aleph_0}$ és precisament el que s'anomena hipòtesi del continu. L'any 1939 el matemàtic, filòsof i especialista en lògica, austríac-americà, Kurt Gödel va demostrar que la hipòtesi del continu és compatible amb tots els altres axiomes de la teoria de conjunts. Per tant, mai es podrà demostrar la seva falsedat. L'any 1963 el matemàtic nord-americà Paul Cohen va demostrar la indecidibilitat de la hipòtesi del continu. Això vol dir que tant suposar que la hipòtesi del continu és certa, com suposar que és falsa, no porta a cap contradicció amb els esmentats axiomes. En altres paraules, tant si haguéssim conjecturat l'existència d'aquest conjunt, com si haguéssim conjecturat la seva no existència, mai ho hauríem pogut demostrar.

Es curiós observar que abans de que es demostrés el darrer Teorema de Fermat, fins i tot s'especulava que pogués ser un resultat indecidible, consulteu l'interessant treball de John H. Conway ([28]). De fet, en el seu treball Conway demostra l'existència de enunciats similars al presentat a la conjectura $3x + 1$, de la que parlarem més endavant, que són indecidibles.

1. Conjectures sobre nombres primers

Euclides ja va demostrar que hi ha infinits primers i, de fet, entre els dos llibres [81, 92] hi ha una dotzena de proves diferents d'aquest fet. A més, se saben moltes propietats sobre la seva distribució. Per exemple, a l'any 1896, el matemàtic francès Jacques Hadamard i el matemàtic belga Charles-Jean de la Vallée-Poussin van provar, usant idees del matemàtic alemany Georg Friedrich B. Riemann, que si $\pi(n)$ denota el número de nombres primers menors o iguals que n,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)\ln(n)}{n} = 1.$$

Per una banda, hi ha propietats interessants d'ells que són fàcils de demostrar. Per exemple, que per a tot $m \in \mathbb{N}$ hi ha com a mínim m números consecutius de manera que cap d'ells és primer, o que per a tot primer $p \geq 5$, el residu de p^2 entre 24 és sempre 1. Per a demostrar la primera propietat podem prendre $(m+1)! + k$, per a $k = 2, 3, \ldots, m+1$, i clarament, cada $(m+1)!+k$ no és primer ja que és divisible per k. La prova de la segona és equivalent a veure que $p^2 = 24\ell + 1$, per a un cert $\ell \in \mathbb{N}$, o en altres paraules, a veure que $(p+1)(p-1)$ és divisible per 24. Considerem els 3 números consecutius: $p-1 < p < p+1$. Clarament $p-1$ i $p+1$ són ambdós parells, i encara més, un d'ells ha de ser múltiple de 4. De manera similar, donats tres números consecutius, 3 ha de dividir a un d'ells. Com que p és primer, en el nostre cas ha de dividir o bé a $p-1$ o a $p+1$. En resum $(p-1)(p+1)$ ha de tenir els divisors $2, 3, 4$ i per tant ser divisible per 24, tal i com volíem provar. Per altra banda hi ha propietats dels primers molt difícils de demostrar.

En aquesta secció enunciarem diverses conjectures sobre ells i la seva distribució. Les quatre primeres inclouen el coneguts com els quatre *problemes de Landau,* ja que el matemàtic alemany Edmund Landau els va enunciar al Congrés Internacional de Matemàtiques de 1912. Com veurem n'hi ha de dos tipus. Les de Goldbach i Lemoine usen els primers com una mena de descomposició additiva de tots els enters positius. Totes les altres estudien la seva distribució.

Conjectura sobre els primers bessons. Hi ha infinites parelles de nombres primers de la forma $p, p+2$.

Les primeres parelles de primers bessons són $(3,5)$, $(5,7)$, $(11,13)$, $(17,19)$. És fàcil raonar que 5 és l'únic número que apareix a dues parelles diferents. L'any 2018, la parella més gran de primers bessons coneguda era $2996863034895 \times 2^{1290000} \pm 1$, formada per nombres amb més de 380 000 xifres.

101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151	157
163	167	173	179	181	191	193	197	199	211	223	227
229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281	283

Primers i primers bessons (en vermell o blau) entre 100 i 292.

Aquesta conjectura va ser estesa el 1849, pel matemàtic francès Alphonse de Polignac, qui va preguntar-se si per a tot nombre natural k, hi ha infinits primers de manera que p i $p+2k$ son ambdós primers. Aquesta segona propietat es coneix com conjectura de Polignac. Observi's que per a la conjectura que ens ocupa $k=1$.

La conjectura sobre els primers bessons sembla ser de les més antigues en teoria de nombres tot i que el progressos més grans cap a la seva possible demostració són molt recents. L'any 2013, Yitang Zhang ([111]) va provar que hi ha un k menor que 35 millions, de manera que existeixen infinites parelles de nombres primers que difereixen $2k$. Més concretament, el seu teorema ens diu que

$$\liminf_{n\to\infty} (p_{n+1} - p_n) < 7 \times 10^7,$$

on, com sempre, p_n indica el primer enèsim. Avui en dia s'està rebaixant significativament aquest fita amb les contribucions de James Maynard i Terence Tao.

Una de les maneres (no senzilles) de demostrar l'existència d'infinits primers és provar que la serie $\sum_{p \text{ primer}} 1/p$ és divergent; vegeu [1, 35, 40]. És molt curiós observar que el matemàtic noruec Viggo Brun va demostrar el 1919 ([16]) que si considerem la sèrie formada pels inversos dels primers bessons,

$$\sum_{p,p+2 \text{ primers}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2}\right) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right) + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19}\right) + \left(\frac{1}{29} + \frac{1}{31}\right) + \cdots,$$

aquesta és convergent. El valor de la seva suma es coneix avui en dia com la constant de Brun, B_2, i el seu valor aproximat és 1.90216 ([83, 35]). Malauradament, aquest resultat no prova la conjectura, ja que és coherent amb que sigui certa o falsa. El que si que dóna és una via per a intentar demostrar-la: provar que B_2 és irracional.

Conjectura de Legendre. Per a tot $0 < n \in \mathbb{N}$ hi ha un nombre primer p satisfent $n^2 < p < (n+1)^2$.

La conjectura de Legendre ve recollida a diferents textos i s'atribueix al matemàtic francès Adrien-Marie Legendre, que va viure a cavall dels segles XVIII i XIX. El resultat més important relacionat és degut al matemàtic xinès Jingrun Chen ([26]) qui el 1975 va provar que la conjectura és certa si s'admet que p sigui o primer, o semiprimer. Recordem que un número es diu semiprimer si és el producte de dos primers, eventualment iguals.

Un resultat similar, però més dèbil va ser conjecturat el 1845 pel matemàtic francès Joseph Bertrand. Aquest afirmava que per a tot $3 < n \in \mathbb{N}$ hi ha un nombre primer p satisfent $n < p < 2n - 2$ i va verificar-ho per a tots els nombres menors que 3×10^6. La conjectura de Bertrand és va convertir en teorema quan va ser demostrada pel matemàtic rus Pafnuti L. Txebixev el 1852.

Conjectures imposant expressions concretes pels nombres primers. Hi ha infinits primers de cada una de les formes següents:

$$n^2 + 1, \quad n! + 1, \quad n! - 1, \quad 2^n + 1, \quad 2^n - 1.$$

La qüestió sobre l'existència d'infinits primers de la forma $n^2 + 1$ es remunta a Euler, és el quart problema dels de la llista de Landau i també apareix en una conjectura dels matemàtics britànics Hardy–Littlewood ([55, 102]), que de fet, afirma el mateix per nombres de la forma $An^2 + Bn + C$, per a molts valors enters d'A, B i C. Òbviament, per exemple, no hi ha primers de les formes $n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$ o $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

Segons Shanks [101], entre els nombres enters n entre 1 i 180 000 n'hi ha 11 223 pels quals $n^2 + 1$ és primer. Un exemple concret de primer és $\left(4 \times 10^{34}\right)^2 + 1$.

Pel que coneix l'autor els nombres primers més grans coneguts de les dues formes següents són $150209! + 1$ i $208003! - 1$.

En una línia similar, el matemàtic prussià Johann P. G. L. Dirichlet el 1837 va demostrar que, variant $n \in \mathbb{N}$, qualsevol expressió $An+B$ amb A i B enters coprimers dóna lloc a infinits nombres primers.

El nombres primers de la forma $2^n + 1$ s'anomenen primers de Fermat. Anem a demostrar que si $2^n + 1 > 2$ és primer, aleshores $n = 2^m$.

Per començar, és fàcil provar que per a tot $0 < k, a \neq b \in \mathbb{R}$, $a - b$ divideix a $a^k - b^k$. Això és degut a la igualtat

$$a^k - b^k = (a-b)\left(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1}\right).$$

Si considerem $2^n + 1$, amb n no essent una potència de 2, tenim que $n = rs$ per a un cert s, senar. Aleshores, prenent $a = 2^r$, $b = -1$ i $k = s$, en la igualtat anterior tenim que $2^r + 1$ divideix a $2^{rs} - (-1)^s = 2^n + 1$, i per tant $2^n + 1$ no és primer.

En conseqüència el únics nombres $2^n + 1$ que poden ser primers són els de la forma $2^{2^m} + 1 =: F_m$, que són els anomenats nombres de Fermat. Se sap, des del temps de Fermat, que els F_m són primers per a $m = 0, 1, 2, 3, 4$. Euler va provar que F_5 té el factor 641. La seva descomposició en factors primers és

$$F_5 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417.$$

De fet, no es coneix cap més nombre de Fermat que sigui primer, i avui en dia es comença a pensar que potser no n'hi haurà cap més.

Els nombres primers de la forma $2^n - 1$ s'anomenen primers de Mersenne, en honor al matemàtic francès Marin Mersenne (1588-1648). Parlarem d'ells en la secció següent, quan estudiem els nombres perfectes.

Conjectura de Goldbach. Tot nombre enter parell, més gran que 2, és suma de dos nombres primers

Aquesta conjectura és un dels problemes oberts més famosos a matemàtiques. Com ja hem dit a la introducció, apareix el 1742 a partir de la correspondència entre Christian Goldbach i Leonhard Euler. Per exemple,

$$100 = 3 + 97 = 11 + 89 = 17 + 83 = 29 + 71 = 41 + 59 = 47 + 53.$$

Avui en dia se sap que és certa per a tot els naturals fins a 4×10^{18}. De fet, el que Goldbach va començar proposant és que tot nombre enter més gran que 5 era suma de tres nombres primers (be, de fet, ell va dir tot nombre més gran que 2 ja que per aquell temps encara es considerava 1 com a primer) i Euler li va respondre que la seva conjectura era conseqüència de la que hem enunciat.

Un del avenços més importants en la direcció de provar-la és degut de nou a Jingrun Chen. El 1973 va demostrar que per a n parell prou gran, n és o bé la suma de dos primers o bé la suma d'un primer i un semiprimer ([25]). Un altre resultat molt relacionat és el del recent treball de Terence Tao ([107]) on l'autor prova que tot nombre senar més gran que 1 és suma de com a molt cinc primers.

Conjectura de Lemoine. Tot nombre senar, més gran que 5, és la suma d'un nombre primer i el doble d'un nombre primer

Aquesta conjectura és molt semblant a la anterior. Va ser proposada el 1894 pel matemàtic i enginyer francès Émile Lemoine. Hardy i Littlewood la van llistar com conjectura I en un dels seus treballs. Per exemple,

$$47 = 13 + 2 \times 17 = 37 + 2 \times 5 = 41 + 2 \times 3 = 43 + 2 \times 2.$$

Canviant el primers per altres tipus de nombres, com per exemple quadrats hi ha resultats amb el mateix esperit que aquesta conjectura i la de Goldbach. Així, Lagrange va demostrar que tot enter positiu és suma de quatre quadrats.

Conjectura d'Oppermann. Per a tot $1 < n \in \mathbb{N}$ hi ha un parell de nombres primers p i q satisfent $n(n-1) < p < n^2 < q < n(n+1)$.

La conjectura d'Oppermann és molt similar a la de Legendre, però encara més restrictiva. Va ser enunciada pel matemàtic danès Ludvig Oppermann el 1877.

Conjectura de Brocard. Per a tot $n \geq 2$ hi ha com a mínim quatre nombres primers entre p_n^2 i p_{n+1}^2, on p_n denota l'enèsim nombre primer.

Aquesta conjectura va ser proposada pel matemàtic i meteoròleg francès Henri Brocard a principis del segle XX. Per exemple, entre $p_2^2 = 9$ i $p_3^2 = 25$ en tenim cinc: $11, 13, 17, 19, 23$. L'expressió de la conjectura en una fórmula és $\Delta(n) = \pi(p_{n+1}^2) - \pi(p_n^2) \geq 4$, on recordem que $\pi(n)$ denota el número de primers menors o iguals que n. Així, el primers valors de Δ per a $n \geq 2$ són: $5, 6, 15, 9, 22, 11, 27, 47, 16, \ldots$

Conjectura d'Andrica. Per a tot $n \geq 1$ es compleix que $A(n) = \sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1$, on p_n denota l'enèsim nombre primer.

Aquesta conjectura va ser proposada pel matemàtic romanès Dorin Andrica el 1986 ([2]). Per exemple, és fàcil veure que $A(n) < 1$ quan $p_n = m$ i $p_{n+1} = m + 2$ són una parella de primers bessons ja que $A(n) = \sqrt{m+2} - \sqrt{m} < 0.51$, per a $m \geq 3$. De fet, la conjectura ens diu que el forat entre dos primers consecutius, $p_{n+1} - p_n$, compleix $p_{n+1} - p_n < 1 + 2\sqrt{p_n}$. S'ha comprovat que $A(n) < 1$ fins a $n = 10^{16}$ i el valor màxim fins el moment és $A(4) = \sqrt{11} - \sqrt{7} \approx 0.67$, vegeu a la Figura 2 la gràfica d'A per a $n \leq 1000$. Fins i tot a [109] es proposa que $A(n) < 1/2$, per a $n > 30$.

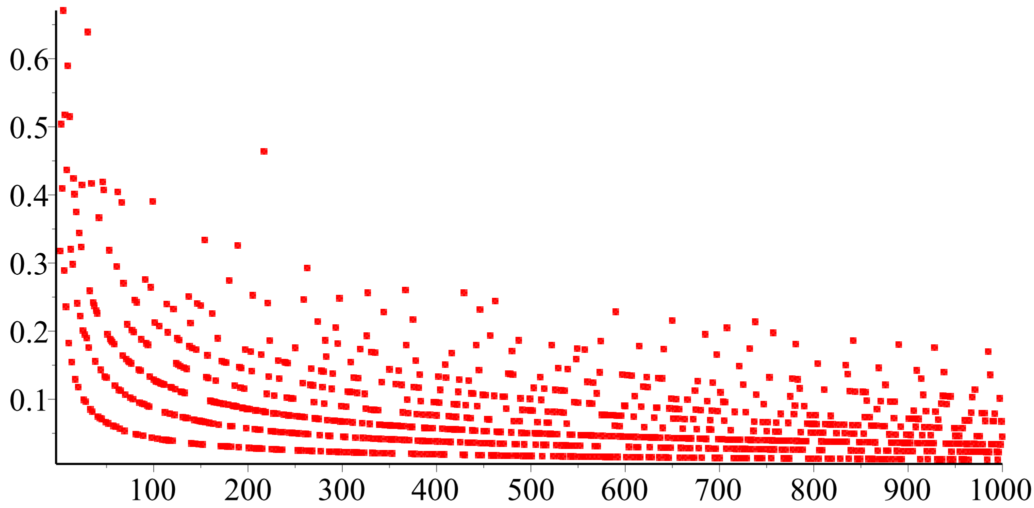

Figura 2. Valors de $\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n}$ per a $1 \leq n \leq 1000$.

Conjectura de Firoozbakht. La funció $\sqrt[n]{p_n}$, on p_n denota l'enèsim nombre primer, és estrictament decreixent.

Va ser proposada pel matemàtic iranià Farideh Firoozbakht el 1982. S'ha verificat per a tots els primers menors que 2^{64}.

Conjectura de Cramér. Es compleix que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\ln^2(p_n)} = 1,$$

on p_n denota l'enèsim nombre primer.

L'enunciat que donem és una versió una mica més forta que la conjectura que va donar el matemàtic suec Harald Cramér el 1936, que deia que $p_{n+1} - p_n = O(\ln^2(p_n))$, i que és la que s'intenta provar avui en dia. El mateix Cramér va demostrar que si la hipòtesi de Riemann, de la que parlarem més endavant, fos certa, aleshores $p_{n+1} - p_n = O(\sqrt{p_n}\ln(p_n))$. Recordem que és diu que $f(n) = O(g(n))$ si existeix $N \in \mathbb{N}$ i $K \in \mathbb{R}$ tals tal que per a tot $n \geq N$, $|f(n)| \leq Kg(n)$. El 1931, Westzynthius ja va demostrar que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\ln(p_n)} = \infty.$$

Conjectura de Gilbreath. Sigui $\{p_n\}_n$ la successió dels nombres primers ordenats. Per a tot $0 < n \in \mathbb{N}$, definim $d_n^{(1)} = p_{n+1} - p_n$ i de manera recurrent, per a tot $k > 0$, $d_n^{(k+1)} = \left|d_{n+1}^{(k)} - d_n^{(k)}\right|$. Aleshores, per a tot $0 < k \in \mathbb{N}$, es compleix que $d_1^{(k)} = 1$.

El seu nom és degut a que el màgic nord-americà Norman L. Gilbreath la va formular el 1958, quan era estudiant. Tot i el nom amb el que es coneix, l'any 1878 el matemàtic autodidacta francès François Proth ja l'havia proposat i intentat demostrar.

Per exemple, en els càlculs següents es comprova que $d_1^{(k)} = 1$, per a $k \leq 6$.

$$\begin{aligned}
&2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots \\
&1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, \dots \\
&1, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 4, \dots \\
&1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 2, \dots \\
&1, 2, 0, 0, 0, 0, 2, \dots \\
&1, 2, 0, 0, 0, 2, \dots \\
&1, 2, 0, 0, 2, \dots
\end{aligned}$$

Se sap que $d_1^{(k)} = 1$, per a $k \leq 3.4 \times 10^{11}$. Paul Erdös va especular sobre que aquesta conjectura és certa però segurament passarien més de 200 anys abans no es pogués demostrar. La principal raó és que no és semblant a altres tipus de problemes estudiats pels quals hi ha eines matemàtiques molt potents i ben desenvolupades. De fet, el matemàtic hongarès és famós per la qualitat i quantitat dels seus treballs i pel gran nombre de col·laboradors que va tenir. A més, fins i tot hi ha una plana a la Wikipedia dedicada exclusivament a les seves conjectures. Quan s'està escrivint aquest article hi ha una llista de 12 conjectures obertes i 14 de resoltes, de les quals només una ha resultat ser falsa.

Segona conjectura de Hardy–Littlewood. Sigui $\pi(x)$ la funció que compta el número de nombres primers menors o iguals que x. Aleshores $\pi(x+y) \leq \pi(x)+\pi(y)$ per a tot $x \geq 2, y \geq 2$.

Aquesta conjectura va ser proposada el 1923 per Godfrey H. Hardy i John E. Littlewood al mateix temps que una primera conjectura que generalitzava la de l'existència d'infinites parelles de primers bessons ([55]). Per exemple,

$$16\,252\,325 = \pi(3 \times 10^8) < \pi(10^8) + \pi(2 \times 10^8) = 5\,761\,455 + 11\,078\,937 = 16\,840\,392.$$

És curiós observar que el 1974, Richards va demostrar que ambdues conjectures de Hardy–Littlewood són incompatibles.

Conjectura dels primers de Germain. Hi ha infinites parelles de nombres primers de la forma $p, 2p+1$.

Aquesta conjectura és similar a la dels primers bessons. Un nombre primer p es diu que és un *primer de Germain* si $S(p) = 2p+1$ és també primer. Aquests nombres van ser considerats per primer cop per la matemàtica francesa Marie-Sophie Germain (1776-1831) en els seus intents de provar el darrer Teorema de Fermat. Uns quants d'aquests són $2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83, 89, \dots, 491, 509, 593, \dots$ i el més gran que es coneix té més de 380 000 xifres.

Una seqüència de números de la forma $[p, S(p), S(S(p)), ..., S^k(p)]$, on $S^m(p) = S(S^{m-1}(p))$, en la que tots els seus elements són primers s'anomena cadena de Cunningham ([29]), en honor al matemàtic britànic Allan Cunningham (1842–1928). En aquesta cadena tots els elements menys l'últim són primers de Germain. Un exemple de cadena completa, és a dir que no es pot allargar més, de mida 6 és $[89, 179, 359, 719, 1439, 2879]$, ja que $5759 = 13 \times 443$. Es conjectura també que per a tot $k \in \mathbb{N}$ hi ha infinites cadenes de Cunningham de mida k. A la vegada, aquesta nova conjectura va ser estesa el 1904 per la coneguda com conjectura de Dickson

([34]), que no descrivim amb detall. En poques paraules, afirma que fixades $k \in \mathbb{N}$ expressions afins en n del tipus considerat per Dirichlet, amb coeficients naturals, en molts casos aquestes donen lloc simultàniament a k nombres primers, per a infinits valors de n.

Conjectura de Grimm. Donats k nombres naturals consecutius, $n+1, \dots, n+k$ de manera que cap d'ells és primer, hi ha k primers diferents, $q_1, q_2, \dots, q_k$, no necessàriament ordenats, tals que cada q_j divideix a $n+j$ per a $1 \le j \le k$.

Per exemple, els 13 números consecutius entre 114 i 126 són compostos (no primers) i tenen respectivament els divisors primers $2, 23, 29, 13, 59, 17, 3, 11, 61, 41, 31, 5$, i 7. Aquesta conjectura va ser proposada per Grimm en un article de 1969 ([50]).

2. Conjectures sobre nombres naturals

Recollim aquí diferents conjectures que el que tenen en comú és que involucren nombres naturals però en les que l'objectiu no és l'estudi dels nombres primers. Varies d'elles consideren equacions diofàntiques, és a dir equacions amb coeficients enters (i moltes d'elles polinomials) per a les quals només es busquen solucions enteres.

Conjectura sobre els nombres perfectes. Hi ha infinits nombres perfectes.

És diu que un nombre natural n és perfecte si és igual a la suma de tots els seus divisors menors que ell mateix. Així el més petit és $6 = 1 + 2 + 3$. El primer en estudiar-los va ser Euclides, qui ja va demostrar que si $2^n - 1$ és primer, aleshores $2^{n-1}(2^n - 1)$ és un nombre perfecte. Com ja hem comentat, el primers de la forma $M_n = 2^n - 1$ s'anomenen primers de Mersenne, i no és difícil veure que una condició necessària per a que $2^n - 1$ sigui primer és que n sigui primer. Això és degut a que si $n = pq$, aleshores

$$2^n - 1 = \left(2^p\right)^q - 1 = (2^p - 1)\left(\left(2^p\right)^{q-1} + \left(2^p\right)^{q-2} + \cdots + 2^p + 1\right),$$

ja que $x^q - 1 = (x-1)(x^{q-1} + x^{q-2} + \cdots + x + 1)$. La condició no és suficient, com mostra l'exemple $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$. Ara bé hi ha una caracterització dels casos primers introduïda el 1878 pel matemàtic francès Édouard Lucas i completada el 1930 pel matemàtic nord-americà Derrick H. Lehmer. Avui en dia aquesta condició es coneix com el test de primalitat de Lucas–Lehmer, vegeu ([63, 98]) i les seves referències. Aquest test ens diu que si per a tot $n \in \mathbb{N}$, introduïm la seqüència de nombres de Lucas–Lehmer

$$L_{n+1} = L_n^2 - 2, \quad L_1 = 4,$$

aleshores, per a $n \ge 3$, $M_n = 2^n - 1$ és primer si i només si M_n divideix a L_{n-1}.

Per exemple, com que $M_3 = 7$ divideix $L_2 = 14$ tenim que 7 és primer. De manera similar, $M_5 = 31$ divideix $L_4 = 37634 = 31 \times 1214$ i per tant 31 és primer. En canvi es pot comprovar que M_{11} no divideix a L_{10}. De fet, el 1876, Lucas va utilitzar el seu resultat per demostrar que M_{127} és un nombre primer (de 39 xifres). Avui en dia és el més gran trobat sense l'ajut de cap ordinador.

Figura 3. El 39è primer de Mersenne, trobat el 2001.

A finals de 2018 és va trobar el primer de Mersenne més gran conegut fins avui, que correspon a $n = 82\,589\,933$, és el que fa 51, té més de 24×10^6 dígits i també és el nombre primer més gran conegut.

Tots els nombres perfectes coneguts són de la forma $2^{n-1}(2^n - 1)$. Els quatre primers ja van ser donats per Euclides i són $6, 28, 496$, i 8128. Els tres següents eren coneguts al segle XII pel matemàtic egipci Ismail ibn Fallus:

$$33\,550\,336 = 2^{12}\big(2^{13} - 1\big),\ 8\,589\,869\,056 = 2^{16}\big(2^{17} - 1\big),\ \text{i } 137\,438\,691\,328 = 2^{18}\big(2^{19} - 1\big).$$

A Europa no es van trobar fins el segle XVI. Al segle XVIII Euler va provar que tots els nombres perfectes parells eren de la forma $2^{n-1}(2^n - 1)$. Aquest resultat es sol a conèixer com el Teorema d'Euclides–Euler. Avui en dia es coneixen 51 nombres perfectes parells i el més gran correspon al primer de Mersenne esmentat a dalt.

Com a conseqüència del Teorema d'Euclides–Euler tots els nombres perfectes parells acaben en 6 o en 8. Anem a provar-ho. Recordem que n ha de ser primer, i si $n > 2$, aleshores o bé $n = 4m + 1$, o bé $n = 4m + 3$. En el primer cas,

$$2^{n-1}\big(2^n-1\big) = 2^{4m}\big(2^{4m+1}-1\big) = 16^m(2\times 16^m-1) \equiv 6^m\big(2\times 6^m-1\big) \equiv 6(12-1) \equiv 6 \pmod{10},$$

ja que $6^m \equiv 6 \pmod{10}$. Recordem que, donats $r, s \in \mathbb{N}$, $r \equiv s \pmod{10}$ si i només si acaben amb la mateixa xifra. De manera similar, si $n = 4m + 3$,

$$2^{n-1}\big(2^n - 1\big) = 4 \times 16^m\big(8 \times 16^m - 1\big) \equiv 4 \times 6(8 \times 6 - 1) \equiv 4(8 - 1) \equiv 8 \pmod{10}.$$

Per tant, el resultat es compleix per a tots els nombres perfectes més grans que 6. Per 6 és trivial.

L'expressió en base dos de tots els nombres perfectes coneguts és ben curiosa i es dedueix clarament de la igualtat

$$2^{n-1}(2^n - 1) = 2^{n-1}\big(2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1\big) = 2^{2n-2} + 2^{2n-3} + \cdots + 2^{n+1} + 2^n + 2^{n-1}.$$

Així

$$6_{10} = 110_2, \quad 28_{10} = 11100_2, \quad 496_{10} = 111\,110\,000_2, \quad 8128_{10} = 1\,111\,111\,000\,000_2$$

També és curios observar que tot nombre parell perfecte és la suma dels primers $2^n - 1$ nombres enters i també, si és més gran que 6, la suma de tots els senars al cub fins a $2^{(n+1)/2}-1$. Per exemple,

$$\begin{aligned}
6 =&2^1\big(2^2-1\big)=1+2+3,\\
28 =&2^2\big(2^3-1\big)=1+2+3+4+5+6+7=1^3+3^3,\\
496 =&2^4\big(2^5-1\big)=1+2+3+\cdots+29+30+31=1^3+3^3+5^3+7^3,\\
8128 =&2^6\big(2^7-1\big)=1+2+3+\cdots+126+127=1^3+3^3+5^3+\cdots+13^3+15^3,\\
33550336 =&2^{12}\big(2^{13}-1\big)=1+2+3+\cdots+8190+8191=1^3+3^3+5^3+\cdots+125^3+127^3.
\end{aligned}$$

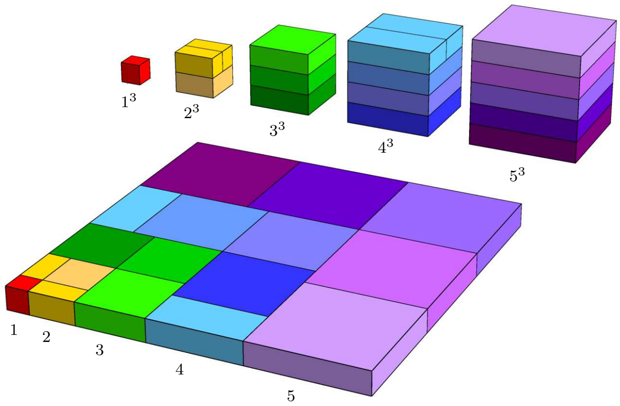

Figura 4. Prova sense paraules d'una fórmula per trobar la suma dels cubs.

Aquesta segona propietat és deguda a que

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

vegeu la Figura 4. Per tant,

$$\begin{aligned}
1^3+3^3+\cdots+(2m-1)^3 =&\big(1^3+2^3+\cdots+(2m)^3\big)-\big(2^3+4^3+\cdots+(2m)^3\big)\\
=&\frac{(2m)^2(2m+1)^2}{4}-2^3\frac{m^2(m+1)^2}{4}=m^2(2m^2-1).
\end{aligned}$$

Així, prenent $m^2=2^{n-1}$ obtenim el resultat desitjat. La major part dels resultats presentats en aquesta secció han estat extrets de l'excel·lent survey [110].

No se sap si hi ha nombres perfectes senars. En cas d'existir haurien de ser més grans que 10^{1500}, vegeu [88].

Conjectura d'Erdös–Strauss. Per a tot $2<k\in\mathbb{N}$ hi ha tres nombres naturals ℓ, m i n tals que

$$\frac{4}{k}=\frac{1}{\ell}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}.$$

Paul Erdös i Ernst G. Strauss van formular aquesta conjectura el 1948, vegeu [39] i les seves referències. Està relacionada amb les anomenades *fraccions egípcies* que era la forma en la que els antics egipcis representaven el nombres racionals. De fet, se sap que tot nombre racional és suma d'un número finit de fracciones de la forma

$1/n$, totes diferents. Aquesta és una representació del nombre en fraccions egípcies i no té per que ser única. Per exemple,

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10},$$
$$\frac{4}{17} = \frac{1}{5} + \frac{1}{30} + \frac{1}{510} = \frac{1}{5} + \frac{1}{29} + \frac{1}{1233} + \frac{1}{3039345}.$$

Al papir de Rhind hi ha una taula de fraccions egípcies per a molts $2/k$, vegeu [96].

No és difícil provar que si la conjectura fos falsa, el primer contraexemple seria un nombre k primer. En efecte, si $k = pq$, amb $p, q \in \mathbb{N}$, aleshores l'expressió desitjada de $4/k$ es pot obtenir a partir de la de $4/p$ o $4/q$ com segueix:

$$\frac{4}{k} = \frac{1}{p} \times \frac{4}{q} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{p\ell} + \frac{1}{pm} + \frac{1}{pn}.$$

S'ha vist que la conjectura és certa per a tot $k \leq 10^{17}$.

Quan certes congruències es compleixen és fàcil trobar la descomposició. Per exemple, si $k \equiv 2 \pmod 3$, és a dir $k = 3j + 2$, $j \in \mathbb{N}$, tenim

$$\frac{4}{k} = \frac{4}{3j+2} = \frac{1}{3j+2} + \frac{1}{j+1} + \frac{1}{(j+1)(3j+2)} = \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)/3} + \frac{1}{k(k+1)/3}.$$

Molt més en general ja se sap que el resultat és cert sempre que

$$k \not\equiv 1, 121, 169, 289, 361, 529 \pmod{840},$$

com observa Guy al seu llibre [53], a partir de resultats de diversos autors, vegeu també [62].

El mateix problema però per a fraccions de la forma $5/k$ es coneix com conjectura de Sierpinski i és deguda la matemàtic polonès Waclaw Sierpinski, famós en particular per definir el fractal conegut com triangle de Sierpinski, vegeu la Figura 5.

Si permetem que un dels valors ℓ, m, n sigui enter negatiu, és molt fàcil descomposar $4/k$ com volem. La clau està en que si $k = 2j + 1$ és senar aleshores tenim

$$\frac{4}{k} = \frac{4}{2j+1} = \frac{1}{j} + \frac{1}{j+1} - \frac{1}{j(j+1)(2j+1)} = \frac{1}{\frac{k-1}{2}} + \frac{1}{\frac{k+1}{2}} - \frac{1}{k\left(\frac{k-1}{2}\right)\left(\frac{k+1}{2}\right)},$$

consulteu de nou [62].

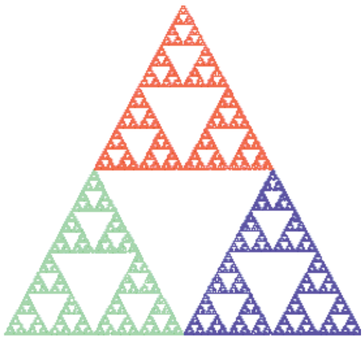

Figura 5. Triangle de Sierpinski.

Conjectura de Brocard–Ramanujan–Erdös. Les úniques solucions naturals de $n! + 1 = m^2$ són les parelles $(n, m) \in \{(4, 5), (5, 11), (7, 71)\}$.

Aquesta conjectura va ser proposada per primer cop pel matemàtic i meteoròleg francès Henri Brocard en un parell de treballs el 1876 i 1885, pel famós matemàtic indi Srinivasa Ramanujan el 1913 i també per Paul Erdös, vegeu [9]. El 1993, Overholt va demostrar que si la conjectura ABC, esmentada a la introducció, fos certa, aleshores l'equació considerada tindria un número finit de solucions naturals, vegeu [89].

Una qüestió que recorda a aquesta conjectura va ser proposada el 2005 per C. M. Tomaszewski quan es preguntava si els únics números que a la vegada són triangulars i factorials són 1, 6, i 120. Recordem que el nombres triangulars són $1 + 2 + 3 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}$. Per tant, la qüestió és equivalent a: *Són les parelles* $(n, m) \in \{(1, 1), (3, 3), (5, 15)\}$ *les úniques solucions naturals de* $2(n!) = m(m + 1)$*?*

Conjectura de Goormaghtigh. Les úniques solucions amb $x > y > 1$, $m, n > 2$, i $x, y, n, m \in \mathbb{N}$ de l'equació

$$\frac{x^m - 1}{x - 1} = \frac{y^n - 1}{y - 1},$$

són $(x, y, m, n) = (5, 2, 3, 5)$ i $(x, y, m, n) = (90, 2, 3, 13)$.

El matemàtic i enginyer belga René Goormaghtigh la va formular el 1917. Clarament,

$$\frac{5^3 - 1}{5 - 1} = \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 31 \quad \text{i} \quad \frac{90^3 - 1}{90 - 1} = \frac{2^{13} - 1}{2 - 1} = 8191.$$

A partir de la identitat $x^m - 1 = (x - 1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x^2 + x + 1)$ tenim que les dues igualtats anteriors són equivalents a

$$111_5 = 11\,111_2 \quad \text{i} \quad 111_{90} = 1\,111\,111\,111\,111_2,$$

respectivament, on k_ℓ denota l'expressió d'un nombre natural en base ℓ. Així, si la conjectura és certa, 31 i 8191 serien el únics nombres naturals que s'expressen en dues bases diferents com a tires successives d'1's. Aquest tipus de nombres s'anomenen *repunits.* L'etimologia del nom és clara: repetició d'unitats. Observeu que tots el nombres de Mersenne, $2^n - 1$ són repunits en base 2.

Conjectura de Carmichael. Sigui $\varphi(n)$ el número d'enters positius menors o iguals que $n \in \mathbb{N}$ que són coprimers amb n. Aleshores, per a tot $n \in \mathbb{N}$ existeix un $m \neq n$ tal que $\varphi(n) = \varphi(m)$.

Recordem que es diu que dos nombres naturals són coprimers si el seu màxim comú divisor és 1. La funció φ s'anomena funció φ d'Euler. Per exemple, $\varphi(20) = 8$ ja $1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19$ són els únics coprimers amb 20, menors que ell.

El matemàtic nord-americà Robert D. Carmichael va fer la conjectura el 1922, 15 anys després de pensar que tenia una demostració del mateix resultat, vegeu [18, 19]. Se sap que si no fos certa el contraexemple hauria de tenir més de 10^{10} xifres.

Per exemple, $\varphi(69) = \varphi(92) = \varphi(138) = 44$. També, per a tot primer $p > 2$, $\varphi(p) = \varphi(2p) = p - 1$. Una manera de provar-ho és usar que si el $\operatorname{mcd}(m, n) = 1$ aleshores $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$. Per tant, com que per a $p > 2$, primer, $\operatorname{mcd}(2, p) = 1$, $\varphi(2p) = \varphi(2)\varphi(p) = \varphi(p)$.

Conjectura de Singmaster. Hi ha un valor $S \in \mathbb{N}$ tal que qualsevol número diferent a 1 apareix al triangle de Tartaglia com a molt S cops.

Aquest triangle de nombres combinatoris es coneix a occident amb els noms de triangle de Tartaglia o de Pascal, deguts al matemàtic italià Niccolò Fontana (1499-1557), anomenat Tartaglia, i al matemàtic francès Blaise Pascal (1623-1662). Tot i així sembla que a Europa es va usar abans a França (Gersonides, segle XIV) i Alemanya (Petrus Apianus, segle XVI). De fet, molt abans, ja es coneixia a l'Índia, Persia (Iran), o Xina. Per exemple, a l'Índia als voltants del segle II abans de Crist ja l'usava el matemàtic indi, Acharya Pingala, a Iran se l'anomena triangle de Khayyám, en honor a l'astrònom i matemàtic Omar Khayyám (1048–1131) i a la Xina se'l coneix com triangle de Yang Hui pel matemàtic del mateix nom que va viure entre 1238 i 1298. De fet, semblà ser que a Persia i Xina, aquest triangle era conegut fins i tot una mica abans dels matemàtics que li donem nom. A la Figura 6 es veu una reproducció de 1303 del mateix, que usa nombres xinesos tradicionals i una altra amb numeració actual.

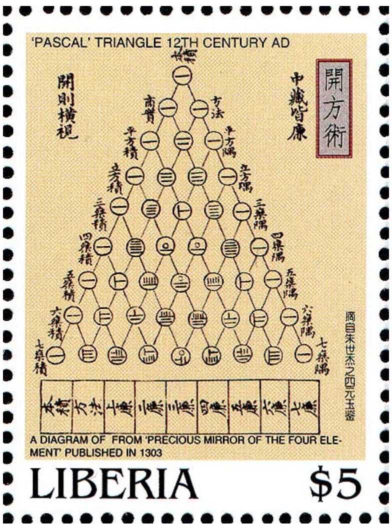

Figura 6. Triangles de Tartaglia/Pascal.

El matemàtic britànic David Singmaster va proposar la conjectura que ens ocupa el 1971. Ell mateix va provar el 1975 que hi ha infinits valors que apareixen com a mínim 6 vegades. Un d'ells és 120,

$$120 = \binom{120}{1} = \binom{120}{119} = \binom{16}{2} = \binom{16}{14} = \binom{10}{3} = \binom{10}{7}.$$

L'únic número conegut que apareix 8 cops és

$$3003 = \binom{3003}{1} = \binom{3003}{3002} = \binom{78}{2} = \binom{78}{76} = \binom{15}{5} = \binom{15}{10} = \binom{14}{6} = \binom{14}{8}.$$

Així, en cas de ser certa la conjectura, $S \geq 8$. Sembla ser que Singmaster pensava que S podria ser 10 o 12. El que si és fàcil veure és que qualsevol $1 < m \in \mathbb{N}$ apareix un nombre finit de vegades. Això és degut a que el valor m només pot aparèixer a les primeres $m+1$ files.

Conjectura de Beal. Si $A, B, C, \ell, m, n \in \mathbb{N}$ són enters positius, amb $\ell, m, n > 2$ i tals que

$$A^\ell + B^m = C^n,$$

aleshores A, B i C tenen un factor primer en comú.

Aquesta conjectura va ser formulada el 1993 pel banquer i matemàtic aficionat Andrew Beal, mentre investigava extensions del celebre darrer Teorema de Fermat, del que ja hem parlar a la introducció. L'exemple $7^3 + 13^2 = 2^9$ mostra perquè es demana que tots els exponents siguin més grans que 2. És clar que hi ha altres solucions amb A, B i C no coprimers. Per exemple, per a $k \geq 1$, $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ o $3^{3k} + (2 \times 3^k)^3 = 3^{3k+2}$.

Conjectura sobre la màxima persistència multiplicativa. Donat $n \in \mathbb{N}$, sigui $\Pi(n) \in \mathbb{N}$ el producte de totes les seves xifres. Denotem com $\mathrm{Pm}(n) \in \mathbb{N}$ el primer enter tal que $\Pi^{\mathrm{Pm}(n)}(n) = \Pi^{\mathrm{Pm}(n)+1}(n)$, on $\Pi^0 = \mathrm{Id}$ i $\Pi^k(n) = \Pi(\Pi^{k-1}(n))$. Aleshores, per a tot $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Pm}(n) \leq 11$.

Donat $n \in \mathbb{N}$, el valor $\mathrm{Pm}(n)$ s'anomena persistència multiplicativa de n. El seu significat es veu més clarament fent un exemple. Si considerem $n = 68889$ tenim que $\Pi(68889) = 6 \times 8 \times 8 \times 8 \times 9 = 27648$. Si continuem aplicant successivament Π obtenim

$$68889 \to 27648 \to 2688 \to 768 \to 336 \to 54 \to 20 \to 0 \to 0 \to 0 \to \cdots,$$

és a dir que $\mathrm{Pm}(6889) = 7$, ja que $\Pi^7(6889) = \Pi^8(6889) = 0$ i no hi ha hagut cap coincidència anterior entre dos valors consecutius de les iteracions. Els números més petits amb persistències multiplicatives $1, 2, \ldots, 11$ són $10, 25, 39, 77, 679, 6788, 68889$, 2677889, $26\,888\,999$, $3\,778\,888\,999$, $M = 277\,777\,788\,888\,899$. De fet se sap que no apareixen persistències més altes per a $n < 10^{233}$.

Aquesta conjectura comença amb el treball de N. Sloane ([104]) publicat el 1973 al *Journal of Recreational Mathematics*. Observem que, per exemple, $\Pi(M) = 2^{19}3^4 7^6$. En general, una primera simplificació ja observada per ell és que la descomposició en factors primers que qualsevol $\Pi(n)$ amb persistència més gran que 3 ha de ser o bé $2^i 3^j 7^k$ o $3^i 5^j 7^k$, i per tant només cal estudiar la persistència d'aquests dos tipus de números. L'afirmació és certa ja que com $\Pi(n)$ és producte de números d'una xifra, $\Pi(n) = 2^i 3^j 5^k 7^m$, amb els exponents enters més grans o iguals que zero, i a més, si apareixen a la vegada el 2 i el 5, és a dir si $i > 0$ i $k > 0$, $\Pi^{\ell}(2^i 3^j 5^k 7^m) = 0$, per a tot $0 < \ell \in \mathbb{N}$, ja que $2^i 3^j 5^k 7^m$ acaba en zero.

S'ha estudiat també el problema quan els números estan expressats en altres bases, vegeu per exemple [31]. El treball citat ataca el problema des del punt de vista dels Sistemes Dinàmics.

Conjectura de no palindromia. Sigui $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida com $f(n) = n + \mathrm{rev}(n)$, on rev és l'aplicació que inverteix l'ordre de les xifres de n. Aleshores hi ha infinits valors de n tals que si es consideren tots els números $f^k(n)$, per a $0 < k \in \mathbb{N}$, on $f^0 = \mathrm{Id}$ i $f^k(n) = f(f^{k-1}(n))$, cap d'ells és capicua. A més, el menor d'aquest números és 196.

Com en la conjectura anterior, comencem amb un cas senzill per entendre millor l'enunciat. Per exemple, si prenem $n = 183$, $f(183) = 183 + 381 = 564$, i tenim

$$183 \to 564 \to 564 + 465 = 1029 \to 1029 + 9201 = 10230 \to 10230 + 3201 = 13431,$$

que és capicua. Si es comença amb $n = 89$, es necessiten 24 iteracions per trobar un valor capicua, que és 8813200023188. Resulta que si es comença amb $n = 196$ encara no s'ha trobat cap iterat que sigui capicua, tot i els milions que se n'han fet ([87]). Es desconeix qui va ser el primer que va estudiar aquesta qüestió i la referència més antiga és un treball de Lehmer ([73]) a la revista belga de divulgació matemàtica *Sphinx,* que només es va publicar entre 1931 i 1939. La qüestió es va tornar a popularitzar a partir del treball de Trigg ([108]), publicat el 1967. En anglès, el números n tals que cap dels seus iterats és capicua s'anomenen de vegades nombres de Lychrel (acrònim del nom Cheryl).

Figura 7. Un palíndrom o frase capicua en anglès.

Els primers números que podrien ser de Lychrel són

$$196, 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 879, 887, 978, 986, \ldots$$

A la Figura 8 fem la gràfica de la funció h que assigna a cada $n \in \mathbb{N}$ el mínim valor $h(n) \le 1000$ que fa que $f^{h(n)}$ sigui capicua, o 1000 en cas de que cap dels 1000 primers iterats ho sigui. Per claredat, restringim la gràfica a la banda $1 \le h(n) \le 40$. Els pics que presenta corresponen als 13 valors de la llista anterior. Observi's que, per a tots els altres valors, $h(n)$ és com a molt 24.

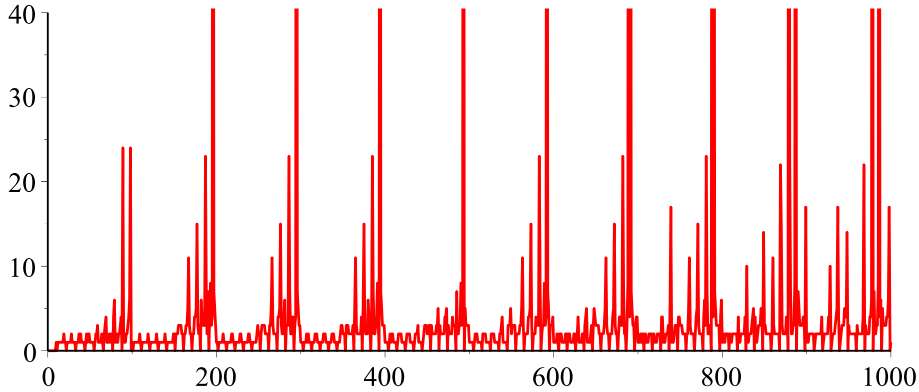

Figura 8. Possibles nombres de Lychrel.

En resum, avui en dia no es coneix cap nombre de Lychrel en base 10. Per altra banda, sí que se sap que hi ha nombres de Lychrel en base 2. Per exemple $n = 10110_2$ (que correspon a 22 en base 10) ho és. Això és degut a que $f^4(n) = 10110100_2$, ja que

$$10110_2 \to 10110_2 + 01101_2 = 100011_2 \to 1010100_2 \to 1101001_2 \to 10110100_2,$$

$f^8(n) = 1011101000_2$, $f^{12}(n) = 101111010000_2$, i en general, com es demostra a [15], després de $4n$ iteracions s'arriba a un número que comença en 10, després té $n+1$ uns, segueix un 01 i acaba amb $n+1$ zeros.

Conjectura de Selfridge. El menor número senar $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \times 2^n + 1$ és no primer per a tot $n \in \mathbb{N}$ és $k = k_0 = 78557$.

En general, un número senar $k \in \mathbb{N}$ es diu de Sierpinski si $k \times 2^n + 1$ és no primer per a tot $n \in \mathbb{N}$. Així, en altres paraules la conjectura afirma que k_0 és el menor nombre de Sierpinski. De fet, el 1960 Sierpinski va provar que hi ha infinits nombres de Sierpinski. Els primers que es coneixen són $k_0, 271129$ i 271577. La prova de que k_0 ho és és deguda al matemàtic nord-americà John L. Selfridge, qui va fer la conjectura que ens ocupa el 1962. Avui en dia, el únics candidats a desbancar el valor k_0 són $21181, 22699, 24737, 55459$, i 67607. Per tots els altres valors de $k < k_0$ hi ha un $n(k)$ de manera que $k \times 2^{n(k)} + 1$ és primer. De fet fins el 2017 hi havia el 10223 a la llista anterior, però es va demostrar que $10223 \times 2^{31172165} + 1$ és primer.

Pels números de la forma $k \times 2^n - 1$, que es diuen de Riesel, en honor al matemàtic suec Hans Ivar Riesel, hi ha resultats i problemes similars. En aquest cas, el menor k trobat complint la propietat desitjada és 509203.

3. Altres conjectures

Versió de Lagarias de la hipòtesi de Riemann. Si $H_n = \sum_{j=1}^{n} 1/j$ aleshores

$$\sum_{d|n} d \le H_n + \exp(H_n)\ln(H_n),$$

amb igualtat només per a $n = 1$.

En l'enunciat, el valors H_n són les sumes parcials de la sèrie harmònica i són coneguts com *nombres harmònics* i $\sigma(n) = \sum_{d/n} d$ és la funció *suma dels divisors* *de n*. Per exemple $\sigma(6) = 12$ i, de fet, per a tots els nombres perfectes $\sigma(n) = 2n$. Es té que $H_6 + \exp(H_6)\ln(H_6) \approx 12.83$, vegeu també la Figura 9. Tot i que la conjectura anterior només involucra conceptes senzills, Lagarias a [68] prova que és equivalent a la famosa *hipòtesi de Riemann,* enunciada pel matemàtic alemany el 1859. Recordem-la breument. Considerem la funció *zeta de Riemann* definida com segueix: al semiplà complex $\mathrm{Re}(s) > 1$, és la sèrie convergent

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

i al semiplà tancat complementari és la seva extensió analítica, vegeu [37, 38, 91]. És conegut que aquesta funció només té una singularitat a $s = 1$, que és un pol simple. La hipòtesi de Riemann afirma que tots els zeros no reals de ζ estan sobre la recta $\mathrm{Re}(s) = 1/2$. Si la conjectura fos certa implicaria un coneixement millor de la distribució dels nombres primers i tindria moltes aplicacions en altres problemes de la matemàtica i la física, vegeu de nou [37, 68]. De fet, avui en dia aquesta conjectura està considerada com una de les més importants en matemàtiques.

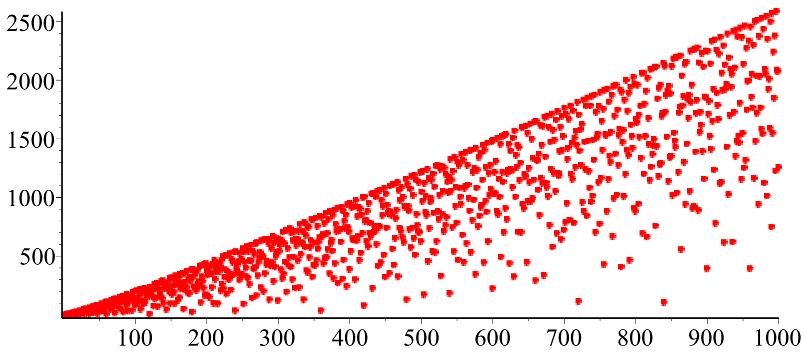

Figura 9. Valors de $H_n + \exp(H_n)\ln(H_n) - \sigma(n)$ per $n \leq 1000$.

Conjectura $3x+1$**.** Si per a qualsevol $x_0 \in \mathbb{N}$, considerem la successió

$$x_{n+1} = g(x_n) = \begin{cases} \frac{3x_n+1}{2}, & \text{quan } x_n \text{ és senar,} \\ \frac{x_n}{2}, & \text{quan } x_n \text{ és parell,} \end{cases}$$

hi ha un $N = N(x_0)$ tal que per a tot $n > N$, la successió és $2, 1, 2, 1, 2, 1, \ldots$

Per exemple, si comencem amb $x_0 = 11$ la successió és $11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1, 2, 1, \ldots$ En llenguatge dinàmic la conjectura ens diu que l'òrbita de tota condició inicial natural acaba en l'òrbita 2-periòdica $\{1,2\}$. A la Figura 10 es mostren els 164 iterats que es necessiten per arribar fins a 2, si $x_0 = 6171$. De fet, per primer cop $x_{164} = 2$ i el més allunyat és $x_{46} = 487\,700$. Se sap que el resultat és cert per a tot x_0 menor que 87×2^{60}. Hi ha molta més informació als surveys [24, 67, 69]. Segons l'autor d'un d'ells, J. Lagarias, "aquesta conjectura és un problema extraordinàriament difícil, completament fora de l'abast de les matemàtiques d'avui en dia."

De vegades es presenta una versió equivalent de la conjectura en la que el $\frac{3x_n+1}{2}$ es canvia simplement per un $3x_n+1$ en la definició de g. Aquesta equivalència és deguda a que $3x_n + 1$ és sempre parell. És clar que aleshores la conjectura té un enunciat equivalent en el que afirma que tota successió acaba fent 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, . . . Òbviament, el valor $N(x_0)$ canvia i es fa més gran.

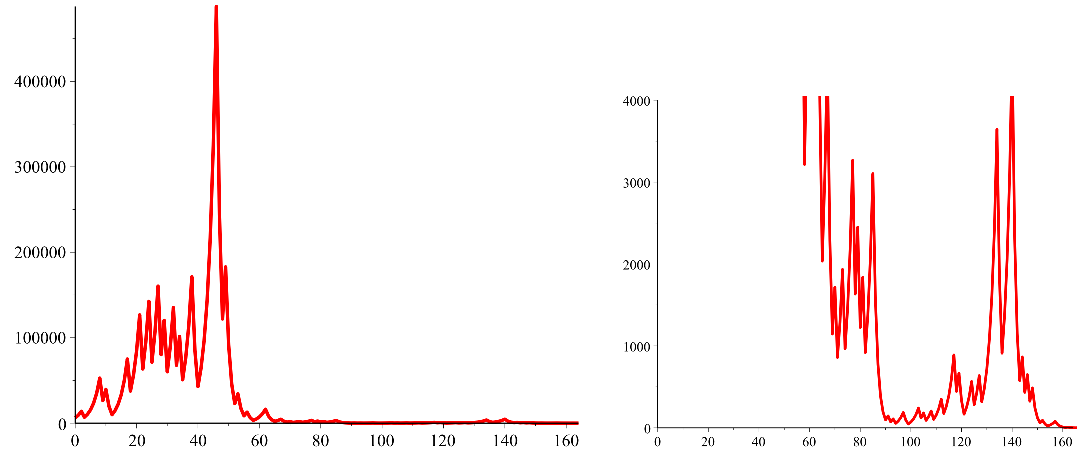

Figura 10. Òrbita corresponent a $x_0 = 6171$ fins arribar al valor 2 i ampliació dels darrers valors.

Sembla ser que la primera persona que va estudiar aquesta qüestió va ser el matemàtic alemany Lothar Collatz, als voltants de 1930. També es coneix com conjectura de Collatz, conjectura d'Ulam, problema de Kakutani o problema de Syracuse.

El resultat no és cert per a $x_0 \in \mathbb{Z}$ no positius. Començant amb $x_0 \in \{0, -1, -5, -17\}$ apareixen quatre comportaments finals diferents. Per exemple tenim $-5, -7, -10, -5, -7, -10, \ldots$ De moment no s'han trobat altres comportaments finals.

L'aplicació g es pot estendre als nombres reals o als complexos, com

$$g(z) = \frac{z}{2}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}z\right) + \frac{3z+1}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}z\right) = \frac{1+4z-(1+2z)\cos(\pi z)}{4}.$$

Aquesta aplicació presenta dinàmiques complicades, vegeu [23, 75].

Conjectura Jacobiana. Si $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ és una aplicació polinomial tal que $\det(DF(\mathbf{x})) \equiv c$, on $0 \neq c \in \mathbb{C}$, aleshores F és globalment invertible (i la seva inversa també és polinomial).

Aquesta conjectura va ser proposada pel matemàtic alemany Ott-Heinrich Keller el 1939 per a polinomis amb coeficients enters i amb el temps es va estendre al cas general. De vegades se l'anomena també problema de Keller. L'afirmació de que la inversa és polinomial està entre parèntesis perquè ja s'ha provat que si F és globalment invertible aleshores obligatòriament la inversa és també polinomial. De fet, pels resultats de Bialynicki–Birula i Rosenlicht de 1962 i de Rudin de 1995, se sap que fins i tot n'hi ha prou amb provar només que F és injectiva. Per a tenir més informació sobre la conjectura i referències dels resultats que descrivim a continuació podeu consultar la monografia d'Arno van den Essen sobre el tema [43].

Recordem que DF indica la matriu Jacobiana de l'aplicació. Així, si F admet una inversa global diferenciable, diguem G, tenim que $G(F(\mathbf{x})) \equiv \mathbf{x}$. Derivant obtenim $DG(F(\mathbf{x}))DF(\mathbf{x}) \equiv \mathrm{Id}$. Prenent determinants

$$\det(DG(F(\mathbf{x}))\,\det(DF(\mathbf{x})) \equiv 1,$$

i com a conseqüència $\det(DF(\mathbf{x})) \neq 0$ per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{C}$. Ara bé, si F és una aplicació polinomial, $\det(F(x))$ és un polinomi en n-variables a $\mathbb{C}$, i l'única manera de que no s'anul·li mai és que sigui una constant. En poques paraules acabem de veure que $\det(DF(\mathbf{x})) \equiv c$, amb $0 \neq c \in \mathbb{C}$, és una condició necessària perquè una F polinomial sigui globalment invertible. Pel Teorema de la funció inversa, aquesta condició implica l'existència d'inversa local a tots els punts. El que ens diu la conjectura és que aquesta condició també és suficient.

La conjectura només es planteja per a polinomis ja que per a funcions analítiques ja se sap que no és certa. L'exemple que se sol presentar és l'aplicació de $\mathbb{C}^2$ en si mateix,

$$F(x,y) = \big(F_1(x,y), F_2(x,y)\big) = \big(\sqrt{2}\mathrm{e}^{x/2}\cos(y\mathrm{e}^{-x}), \sqrt{2}\mathrm{e}^{x/2}\sin(y\mathrm{e}^{-x})\big).$$

Per aquest exemple, per a tot $(x,y) \in \mathbb{C}^2$,

$$\det(DF(x,y)) = \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial x}\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} = 1,$$

però $F(0, y + 2k\pi) = F(0,y)$ per a tot $k \in \mathbb{Z}$.

Usant resultats bàsics d'àlgebra lineal és clar que la conjectura es compleix quan F té grau 1. Si F té grau 2 va ser demostrada per Stuart Wang l'any 1980. El que és més curios és que també a principis dels 80, Bass, Connell, Wright, per una banda i Yagzhev per una altra van provar que si la conjectura fos certa en qualsevol dimensió, per a totes les F's de grau 3, també seria certa en general i per a qualsevol dimensió.

Per altra banda, és molt fàcil veure que la conjectura és certa en dimensió 1, però per a $n = 2$, fins i tot en el cas d'aplicacions polinomials reals, encara és un problema obert.

En l'original article [42], l'autor explica que segons una enquesta feta per ell l'any 1977 entre els assistents a un congrés sobre el tema, el 62.4% pensava que la conjectura en general seria falsa.

En cap moment hem parlat de "la finor" d'una conjectura. Direm que una conjectura és fina si debilitant una mica les seves hipòtesis ja no és certa. En aquest sentit és famosa la broma que es fa sobre la conjectura Jacobiana. Seria la "metaconjectura" següent: *Si una conjectura és més forta que la conjectura Jacobiana (és a dir la implica però no és equivalent) aleshores és falsa.* Fins al moment, aquesta metaconjectura s'ha mostrat certa! Per exemple, durant uns quants anys es va pensar que per a aplicacions polinomials reals de $\mathbb{R}^n$ en si mateix, es podia substituir la hipòtesi $\det(DF(\mathbf{x})) \equiv c \neq 0$, per la hipòtesi més dèbil $\det(DF(\mathbf{x})) \neq 0$, per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, i el resultat d'invertibilitat global seguia essent cert. L'any 1994, Pinchuk va donar el primer contraexemple per a $n = 2$ i grau 25.

Conjectura de Casas-Alvero. Si un polinomi P de grau n a $\mathbb{C}[x]$ té alguna de les seves arrels en comú amb cada una de les seves derivades $P^{(k)}, k = 1, 2, \ldots, n-1$, aleshores $P(z) = a(z-b)^n$ per a certs $0 \neq a, b \in \mathbb{C}$.

En principi, les arrels comuns entre P i cada $P^{(k)}$ poden dependre de k, però si la conjectura fos certa, precisament ens diria que aquesta arrel sempre ha de ser la mateixa. Casas-Alvero va arribar a aquest problema a principis d'aquest segle treballant en el seu article [20], en el que intentava obtenir criteris d'irreductibilitat per a series de potencies complexes en dues variables. A [21] podeu llegir una explicació de la conjectura en les seves pròpies paraules.

Els graus més petits pels quals la conjectura no s'ha provat són $n = 24, 28$, o 30. També se sap que és certa quan n és de la forma $p^m, 2p^m, 3p^m$, o $4p^m$, per a un cert primer p i $m \in \mathbb{N}$, vegeu [22, 33, 36, 48].

Quan $P \in \mathbb{R}[x]$, afegint que totes les seves arrels són reals, també es conjectura el resultat equivalent.

La conjectura no és certa per a polinomis sobre cossos amb característica $p \neq 0$. Per exemple, considerem $P(x) = x^2(x^2+1)$ en característica 5 amb arrels $0, 0, 2$, i 3. Aleshores $P'(x) = 2x(2x^2+1)$, $P''(x) = 12x^2 + 2 = 2(x^2+1)$, i $P'''(x) = 4x$ i tots ells comparteixen arrels amb P.

Conjectura sobre la normalitat de π. Per a tot $0 < k \in \mathbb{N}$, en l'expressió decimal de π qualsevol bloc de k dígits apareix amb probabilitat 10^{-k}.

Un nombre real x es diu normal (en base 10) si, en les seves xifres decimals, qualsevol bloc de k dígits apareix amb una freqüència relativa límit 10^{-k}, vegeu [5, 65, 84]. Més concretament, si $\mathcal{B}$ és un bloc qualsevol de k dígits i denotem per $m_n(\mathcal{B}, x)$ el número de vegades que el bloc $\mathcal{B}$ apareix en les primeres n xifres decimals de x, aleshores, per a tot bloc $\mathcal{B}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_n(\mathcal{B}, x)}{n} = \frac{1}{10^k}.$$

Els nombres normals són, d'alguna manera, els "més aleatoris". El matemàtic francès Émile Borel va demostrar que gairebé tots els nombres són normals, però no és gens fàcil donar exemples concrets. Alguns dels nombres normals més famosos són

$$0.12345678910111213\ldots, \quad 0.1491625364964811OO\ldots, \quad 0.2357111317192329\ldots.$$

Aquests corresponen a posar de manera consecutiva el nombres naturals, els quadrats o els nombres primers, respectivament. Les corresponents proves són de Champernowne (1933), Besicovitch (1935), i Copeland i Erdös (1946).

Si π fos normal, en particular la proporció de qualsevol dels deu dígits a les seves xifres decimals seria 1/10. Les comprovacions que s'han fet fins el moment semblen recolzar la conjectura. Per exemple, segons els càlculs de Kanada de 1995 (veure [32, Cap. 10]), les primeres 6×10^9 xifres decimals mostren les freqüències següents:

"**0**" :	599 963 005,	"**5**" :	600 017 176,
"**1**" :	600 033 260,	"**6**" :	600 016 588,
"**2**" :	599 999 169,	"**7**" :	600 009 044,
"**3**" :	600 000 243,	"**8**" :	599 987 038,
"**4**" :	599 957 439,	"**9**" :	600 017 038.

Tampoc se sap si $\sqrt{2}$ o e són normals.

Conjectura sobre la irracionalitat de γ. El número

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right)$$

és irracional.

La constant γ s'anomena constant d'Euler o d'Euler–Mascheroni i és, conjuntament amb π, e, i el nombre d'or Φ, una de les més famoses dins de les matemàtiques. El seu nom prové dels estudis del matemàtic italià Lorenzo Mascheroni, qui el 1790 la va calcular amb dinou xifres decimals correctes, i dels de Gauss, qui l'any 1812 la va obtenir amb quaranta xifres significatives. El seu valor aproximat és $\gamma \approx 0.577218$. És un número que apareix a moltíssims llocs, vegeu [56, 70]. Veiem uns quants exemples:

$$\gamma = -\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\ln(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\ln^2(x)\,\mathrm{d}x = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6},$$

o

$$\gamma = \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{\zeta(k)}{k} \quad \text{on} \quad \zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k},$$

i ζ és la famosa funció zeta de Riemann. Gronwall ([51]) el 1913 prova

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\sigma(n)}{n\ln(\ln(n))} = \mathrm{e}^\gamma,$$

on recordem que $\sigma(n)$ denota la suma de tots els divisors de n.

Se sap π, e, i Φ són irracionals. Intentar provar que γ també és irracional és un dels grans reptes per a la comunitat matemàtica. S'ha demostrat que si fos racional el seu denominador hauria de ser més gran que 10^{244663}. A [105] es desenvolupen criteris per intentar provar-ho.

Una altra constant famosa és la constant de Catalan,

$$G = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots = 0.915965594\ldots$$

S'anomena així en honor al matemàtic franco-belga Eugène C. Catalan, qui en un article de 1883 ja la va denotar per G. Apareix sovint a treballs sobre combinatòria. Es pensa que G és irracional, però aquest fet no s'ha pogut demostrar. Més en general, $G = \beta(2)$ on β és l'anomenada funció beta de Dirichlet:

$$\beta(s) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}.$$

Per una banda, per exemple, $\beta(1) = \pi/4$, $\beta(2) = \pi^3/32$ són irracionals. Per altra banda, tot i que com ja hem dit no s'ha pogut demostrar que $\beta(2)$ ho sigui, hi ha un resultat molt curiós en aquesta direcció ([112]): com a mínim, un dels sis números $\beta(2k), k = 1,2,\ldots,6$ és irracional.

De fet, fins fa poc s'intentava demostrar la que es coneixia com conjectura de Catalan, proposada per ell el 1884. Aquesta afirma que els dos únics números naturals positius consecutius que són potencies naturals d'un número natural són el $8 = 2^3$ i el $9 = 3^2$. El 2002, aquesta conjectura es va convertir en un teorema degut al treball [80] del matemàtic romanès Preda Mihailescu.

Conjectura sobre la seqüència de Kolakoski. Si considerem la seqüència auto-generada de Kolakoski

$$\mathcal{K} = 1,2,2,1,1,2,1,2,2,1,2,2,1,1,2,1,1,2,2,1,2,1,1,2,1,2,2,1,1,\ldots,$$

aleshores

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\text{número d'uns entre els } n \text{ primers termes de } \mathcal{K}}{n} = \frac{1}{2}.$$

Comencem explicant que vol dir la seqüència $\mathcal{K}$ sigui auto-generada. A partir d'una seqüència qualsevol $\mathcal{S}$ formada només per successius 1's i 2's, en construïm una altra

$\mathcal{S}'$ formada pels números naturals que corresponen al número de vegades consecutives que surt cadascun dels dígits, en el mateix ordre en el apareixen a la seqüència. Per exemple,

$$\mathcal{S} = 1,2,2,2,1,1,1,1,2,1,2,1,1,1,2,1,\ldots \Longrightarrow \mathcal{S}' = 1,3,4,1,1,1,3,1,\ldots$$

La seqüència és diu *auto-generada* si $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ i per tant $\left(\mathcal{S}'\right)' = \mathcal{S}$. Clarament, en una seqüència auto-generada no hi ha ni més de dos 1 ni més de dos 2 consecutius. Pensant una mica no és difícil veure que n'hi ha només una que comenci amb 1, que es denota per $\mathcal{K}$, que és va "auto-generant" i que els seus primers termes són els de l'enunciat de la conjectura. Així, $\mathcal{K}' = \mathcal{K}$. La que comença amb 2 no és més que la mateixa $\mathcal{K}$ sense el primer 1. És un problema obert trobar una expressió explícita per al seu terme enèsim. A molts llocs es coneix també com seqüència d'Oldenburger–Kolakoski. El seu nom és degut a l'artista i aficionat a la matemàtica recreativa nord-americà W. Kolakoski, qui la va descriure el 1965, tot i que ja l'havia considerat el 1939 el matemàtic i enginyer, també nord-americà, R. Oldenburger.

A [86] es prova que existeix un N tal que

$$\sup_{n\geq N}\left|\frac{\text{número d'uns entre els } n \text{ primers termes de } \mathcal{K}}{n} - \frac{1}{2}\right| \leq 0.00008,$$

resultat que és coherent amb la conjectura, tot i que ni tan sols prova que el limit que es vol calcular existeix.

Hi ha seqüències de Kolakoski en altres alfabets. Per exemple, usant només 1's i 3's tenim

$$1,3,3,3,1,1,1,3,3,3,1,3,1,3,3,3,1,1,1,3,3,3,1,3,3,3,1,3,3,3,\ldots,$$

i també es poden usar alfabets amb més números.

Conjectura de Frankl. Sigui $\mathcal{F}$ una familia finita no trivial de conjunts finits de manera que si $A, B \in \mathcal{F}$ es compleix que $A \cup B \in \mathcal{F}$. Aleshores hi ha un element que pertany com a mínim a la meitat dels conjunts de $\mathcal{F}$.

Les families de conjunts $\mathcal{F}$ complint aquesta propietat s'anomenen *families tancades per la unió*. Que la familia sigui no trivial, senzillament vol dir que té algun element més que el conjunt buit. Aquesta conjectura va ser proposada el 1979 pel matemàtic hongarès Péter Frankl.

Hi ha casos especials en els que la prova és senzilla. Per exemple, suposem que $\mathcal{F}$ té un conjunt $C = \{x\}$ que té un sol element. Siguin $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tots els elements de $\mathcal{F}$ que no contenen x. Aleshores $A_j \cup \{x\}, j = 1,2,\ldots,k$, també han de ser elements de $\mathcal{F}$ i, òbviament contenen a x. Per tant, com a mínim la meitat dels elements de $\mathcal{F}$ contenen x.

Se sap també que la conjectura és certa per exemple per a families formades com a màxim per 46 conjunts ([95]) o per a families en les que la unió de tots els seus conjunts té com a molt 11 elements ([13]).

Conjectura de Toeplitz. Qualsevol corba plana, contínua, tancada i simple conté quatre punts que són els vèrtexs d'un quadrat.

Recordem que una corba plana, contínua, tancada, i simple ve donada per una aplicació contínua i injectiva $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ i s'anomena corba de Jordan, en honor al matemàtic francès Camille Jordan. Aquesta conjectura va ser proposada pel matemàtic alemany Otto Toeplitz l'any 1911 i de vegades també és coneguda com la *conjectura del quadrat inscrit,* vegeu la Figura 11. Podeu consultar molta informació sobre la mateixa a l'excel·lent survey [78]. En particular se sap que és certa si la corba envolta un conjunt convex (és a dir, tal que donats dos punts qualssevol del mateix, el segment que els uneix està totalment contingut al cos), si ve donada per una funció dos cops derivable amb continuïtat, o si està formada per un número finit de trossos analítics, de manera que cada tros té un número finit de punts d'inflexió o altres singularitats i als punts de no analiticitat, les derivades per la dreta i l'esquerra existeixen. Així, en particular és certa per a tots els polígons. Es pot veure que els triangles obtusangles admeten un sol quadrat inscrit, els rectangles dos, i els acutangles exactament tres.

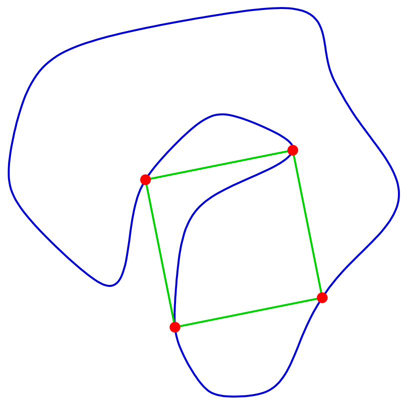

Figura 11. Un quadrat inscrit.

Hi ha resultats provats quan en comptes d'un quadrat es busca una altra figura inscrita. Per exemple Nielsen ([85]) prova el 1995 que hi ha molts rombes i paral·lelograms inscrits. Per altra banda, Meyerson ([79]) inclou al seu treball una prova basada en una conferència de Vaughan de 1977 de la existència d'un rectangle inscrit per a tota corba de Jordan. La prova és molt maca i està basada en eines purament topològiques.

Conjectura d'Erdös–Szekeres. Per a tot $2 < n \in \mathbb{N}$, el mínim número de punts al pla, de manera que mai tres d'ells estan alineats, per tal que sempre n'hi ha hagi n que són els vèrtexs d'un polígon convex de n costats és $f(n) = 2^{n-2} + 1$.

Aquest problema, sense donar l'expressió general de $f(n)$, sembla ser que va ser proposat i resolt per a $n = 5$ per la matemàtica australiana-hongaresa Esther Klein el 1933 en un seminari. L'existència d'una $f(n)$ i la conjectura per a la seva expressió explícita es deuen al treball de 1935 ([41]) de Paul Erdös i del també matemàtic australià hongarès George Szekeres, qui va acabar casant-se amb Klein (després Esther Szekeres).

La solució per a $n = 5$, ja apareix al treball de 1935, atribuïda a E. Makai. Curiosament el 2006, de nou Szekeres i Peters ([106]) proven la conjectura per a $n = 6$. És probablement el cas d'interval de temps més llarg entre dues publicacions matemàtiques del mateix autor i sobre el mateix tema: 70 anys. De fet, el treball és pòstum

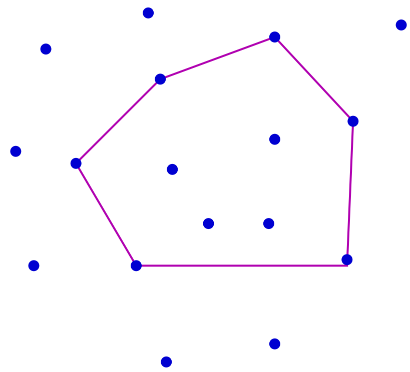

Figura 12. Una situació de la conjectura d'Erdös–Szekeres per a $n = 6$ amb 17 punts.

ja que George Szekeres va morir el 2005. També és conegut que, per a tot n, amb menys punts segur que es poden distribuir complint l'altra hipòtesi de manera que no sigui possible construir el desitjat polígon.

Conjectura del billars triangulars. En un billar triangular sempre hi ha una trajectòria periòdica.

Comencem prenent un billar convex tal que la seva vora ve donada per una corba diferenciable i amb derivada continua. Considerem les trajectories d'una bola puntual que es mou sense fregament i que rebota a les vores de la manera natural, és a dir de manera que l'angle d'incidència és igual a l'angle de reflexió. És conegut que sempre hi ha trajectòries periòdiques ([64]). El número de vegades que una trajectòria periòdica toca la vora s'anomena el seu *període*.

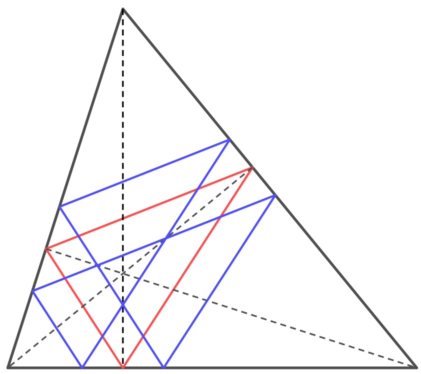

Figura 13. Trajectòries de període 3 i 6 en un billar triangular acutangle.

Si prenem un billar convex, però de manera que la seva vora és un polígon, té sentit plantejar-se si també serà cert que sempre hi ha una trajectòria periòdica. Per aquests billars, si en algun moment la bola toca uns dels vèrtexs de la vora es considera la trajectòria per acabada, i per descomptat no periòdica. El que és curiós és que fins i tot per a billars triangulars aquesta qüestió és un problema obert.

Comentem alguns casos particulars de billars triangulars en els que se sap que la conjectura és certa. Per exemple, quan la vora és un triangle acutangle sempre hi ha una trajectòria periòdica de període 3. Aquesta trajectòria està formada pel triangle que té com a vèrtexs els punts base a les vores de les tres alçades, vegeu la Figura 13. Molta de la informació que donem està extreta del treballs [66], que està dedicat als microlasers triangulars orgànics, i de [4, 54]. De vegades es diu a aquesta trajectòria de Fagnano, en honor al matemàtic italià Giulio Fagnano qui ja la va trobar el 1775 per resoldre un altre problema: *buscar el triangle inscrit en un triangle acutangle amb mínima longitud.* La conjectura també és certa per a triangles rectangles ([27, 46, 47, 61]), per a triangles isòsceles ([27]), per a triangles obtusangles en els que cap angle té més de 100 graus ([100]), per a altres triangles obtusangles ([54]), i per a triangles racionals ([12]). Recordem que un triangle es diu racional si tots els seus angles són múltiples racionals de π.

Conjectura del sofà més gran. L'àrea màxima d'un "sofà" pla que pot lliscar per un passadís pla d'amplada 1 amb forma de L és $S_0 = 2.219531\ldots$

Aquest problema va ser proposat pel matemàtic austríac-canadenc Leo Moser el 1966. Matemàticament un sofà serà qualsevol figura plana connexa amb àrea ben definida. En el treball [97] es poden trobar més referències i detalls sobre el tema i és el que hem consultat per a la breu explicació que segueix. Observem que la conjectura que presentem només dóna les primeres xifres significatives de S_0.

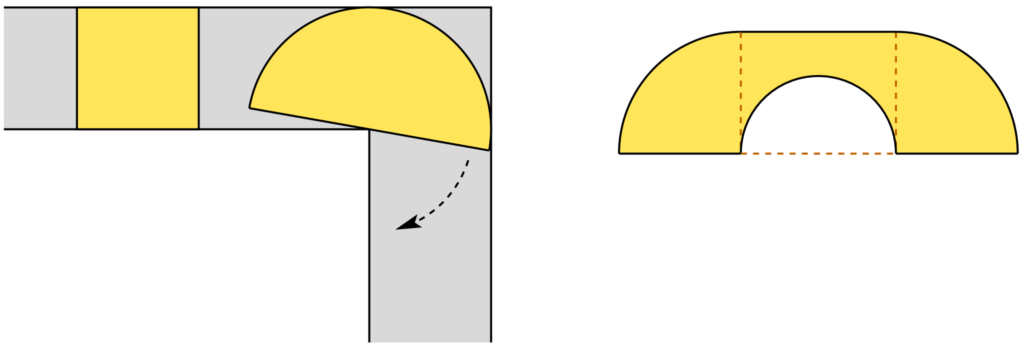

Figura 14. Sofas simples i sofà de Hammersley.

És fàcil trobar sofàs d'àrea 1 (quadrat) i d'àrea $\pi/2$ (semicircular) que poden travessar el passadís. El primer sofà amb una mica de mèrit és conegut com sofà de Hammersley i té àrea $\pi/2 + 2/\pi \approx 2.2074$. Aquest s'assembla al perfil de l'auricular d'un telèfon fix i està format per un rectangle de mides $1 \times 4/\pi$, al que se li ha tret un semicercle de radi $2/\pi$, i se li han afegit dos quarts de cercle de radi 1 als costats, vegeu la Figura 14. Observeu que la seva vora està formada per 6 trossos de corbes algebraiques.

El conegut com sofà de Gerver és una petita variació del de Hammersley, és a dir té una forma semblant, però en aquest cas la seva vora esta formada per 18 trossos de corbes analítiques de les quals 3 són rectes i 15 venen donades com solucions d'un sistema no-lineal de quatre equacions. Aquestes corbes també es poden veure com solucions de certes equacions diferencials. Les primeres xifres decimals de l'àrea del sofà de Gerver són les que proposa la conjectura.

El 1968, Hammersley ja va demostrar que $S_0 \leq 2\sqrt{2} \approx 2.8284$ i el 2017, Kallus i Romik van millorar el seu resultat, provant que $S_0 \leq 2.37$.

Una qüestió que recorda molt a la conjectura del sofà és l'anomenat *problema de Kakeya*, proposat el 1917 pel matemàtic japonès Soichi Kakeya. La nostra principal font és el capítol "The finite Kakeya problem" de l'interessant llibre [1]. Kakeya es preguntava quin era el subconjunt més petit del pla en el que una agulla de longitud 1 pot girar sense sortir d'ell fent una volta completa. La matematització de la paraula "girar" és que els moviments de l'agulla siguin continus. Pensant una mica, és clar que ho pot fer en un disc de diàmetre 1 (àrea $\pi/4 \approx 0.785$) o en un triangle equilàter d'alçada 1 (àrea $\sqrt{3}/3 \approx 0.577$). De fet, Juluis Pal el 1920 va demostrar que aquest triangle és la figura convexa de mínima àrea que ho permet. Però sembla ser que el mateix Kakeya ja va trobar una figura no convexa d'àrea més petita. Concretament, una figura amb vora una corba anomenada deltoide, amb àrea $\pi/8 \approx 0.393$, que ve donada pels punts del pla que compleixen

$$(x^2+y^2)^2 - 2x(x^2-3y^2) + \frac{9}{8}(x^2+y^2) - \frac{27}{256} = 0,$$

vegeu la Figura 15. La gran sorpresa va ser quan el matemàtic rus Abram S. Besicovitch el 1928 va trobar conjunts complicats, amb molts forats i diàmetres grans, que permetien fer-ho i tenien àrea tan petita com es volgués. Més endavant Cunningham ([30]) va aconseguir provar el mateix però amb conjunts sense cap forat i que cabien dins d'un cercle de diàmetre 2.

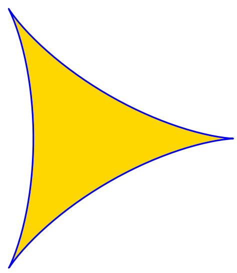

Figura 15. Corba deltoide.

En els seus treballs, Besicovitch va començar a tractar un problema relacionat, definint un *conjunt de Kakeya* (avui en dia també conegut com *conjunt de Besicovitch*) com un subconjunt de $\mathbb{R}^n, n \geq 2$ que conté el segment unitat (l'agulla) en totes les orientacions possibles. Observi's que s'ha eliminat la hipòtesi de que l'agulla s'ha de moure contínuament i es considera el problema en dimensió arbitraria. Aleshores Besicovitch va demostrar el sorprenent resultat de que per a tot $n \geq 2$, hi ha conjunts de Kakeya amb mesura 0.

Per a distingir millor entre tots els conjunts que tenen la mateixa mesura, el 1918 el matemàtic alemany Felix Hausdorff va introduir el que avui en dia s'anomena *dimensió de Hausdorff*, o també, *dimensió de Hausdorff–Besicovitch.* No entrarem en detalls sobre la seva definició; simplement comentarem que, donat un conjunt $C \subset \mathbb{R}^n$, el fet que aquesta dimensió, que com a molt és n, no sigui un enter és una de les condicions per a que C sigui el que s'anomena un *conjunt fractal.* Per exemple, els conjunts numerables tenen mesura 0 i dimensió de Hausdorff 0, i el famós conjunt de Cantor, contingut a $\mathbb{R}$, té mesura 0 i dimensió de Hausdorff $\ln(2)/\ln(3) \approx 0.63$. Per més detalls consulteu [44].

L'anomenada *conjectura de Kakeya* afirma per a tot $2 \leq n \in \mathbb{N}$ la dimensió de Hausdorff de tot conjunt de Kakeya a $\mathbb{R}^n$ és n. Aquesta conjectura només ha estat provada per a $n = 2$. Si fos certa ens diria que tot i que els conjunts de Kakeya poden tenir mesura 0, la seva dimensió de Hausdorff és la més gran possible, o en altres paraules, que estan "molt plens de punts".

Conjectura de Levi–Hadwiger. Qualsevol cos convex inclos a $\mathbb{R}^n$ es pot cobrir per $2n$ o menys copies homotètiques (més petites) d'ell mateix. A més, només se'n necessiten $2n$ si el cos és un paral·lelepípede.

Recordem que un cos es diu que és convex, si donats dos punts qualssevol del mateix, el segment que els uneix està totalment contingut al cos. Aquesta conjectura va ser proposada independentment el 1955 pel matemàtic alemany Friedrich W. Levi i el 1957 pel matemàtic suïs Hugo Hadwiger. De fet, el mateix Levi ([76]) va demostrar que la conjectura és certa per a $n = 2$.

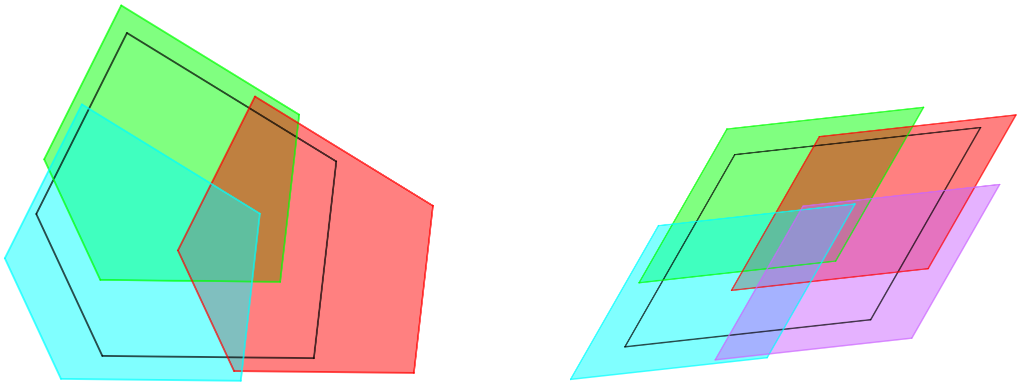

Figura 16. Cobriments amb 3 i 4 copies homotètiques a $\mathbb{R}^2$ tal com afirma la conjectura de Levi–Hadwiger, ja provada al pla.

Aquesta conjectura i moltes altres sobre el que s'anomena Geometria Discreta es poden consultar a la monografia [14].

4. Utilitat didàctica i pràctica de les conjectures

El matemàtic britànic-libanès Michael F. Atiyah, en el seu llibre [3] comenta: "Alguns problemes obren portes, alguns les tanquen i altres queden com curiositats, però tots ells aguditzen el nostre enginy, actuen com reptes a la nostra inventiva i posen a prova els nostres coneixements". Aquesta afirmació es pot aplicar sens dubte a les conjectures matemàtiques.

No puc deixar de parlar en aquest punt d'un exemple recent de conjectura lúdica i que té petites semblances amb les conjectures sobre la màxima persistència multiplicativa i la de no palindromia. Basant-se en una conversa entre els protagonistes

del la famosa sèrie televisiva de la CBS, *The Big Bang Theory*, el 2015 a [17] el autors van introduir el que van anomenar conjectura de Sheldon, en honor al personatge Sheldon Cooper. Per a enunciar-la definirem el que és un primer de Sheldon. Recordem que, com en tot el treball, p_n denota el primer enèsim.
• Direm que p_n compleix *la propietat del producte* si $\Pi(p_n) = n$, on $\Pi(k)$ és el producte de les xifres de k. Per exemple, $p_{21} = 73$ i $\Pi(73) = 21$.
• Direm que p_n compleix *la propietat del mirall* si $\mathrm{rev}(p_n) = p_{\mathrm{rev}(n)}$, on recordem que $\mathrm{rev}(k)$ denota l'aplicació que inverteix l'ordre de les xifres de k. Per exemple, $\mathrm{rev}(p_{21}) = \mathrm{rev}(73) = 37$ i $p_{\mathrm{rev}(21)} = p_{12} = 37$.

Un primer és un *primer de Sheldon* si compleix les dues propietats anteriors. Per exemple, 73 ho és. La conjectura afirmava que 73 era l'únic primer de Sheldon i va ser provada el 2019 a [90]. De fet, en el seu treball els autors proposen una nova conjectura: *els únics primers que compleixen la propietat del producte són*

$$p_7 = 17, \quad p_{21} = 73 \quad \text{i} \quad p_{181\,440} = 2\,475\,989.$$

Observem que $2 \times 4 \times 7 \times 5 \times 9 \times 8 \times 9 = 181\,440$. Al mateix treball es suggereix que segurament hi ha infinits nombres primers que complexen la propietat del mirall. Com veiem, el món de les conjectures no s'acaba mai.

A més, a la sèrie de televisió, Sheldon afirma que 73 és el millor número natural del món, ja que 73 també és capicua en base 2, $73 = 1001001_2$.

Totes les conjectures de les dues primeres seccions, i també alguna de les que apareixen a la darrera secció, tenen una cosa en comú: ràpidament ens venen ganes de comprovar-les per números petits o casos particulars. Un segon pas, molt natural, és que pensem en fer un programa que vagi més enllà del que hem pogut fer amb paper i llapis. Jo mateix, un dels primers programes que vaig fer, ja fa més de 40 anys, va ser per buscar nombres perfectes. De fet, aquesta segona opció és molt bona per intentar demostrar que certes conjectures són falses, però mai ens donarà cap demostració.

Les conjectures presentades en aquest treball han estat testades per moltíssima gent, i amb els ordinadors més potents, i de moment resisteixen com a conjectures. De fet, de ben segur que cada cop que apareixen ordinadors més potents hi ha gent que intenta buscar contraexemples de moltes d'elles.

Exposàrem a continuació uns quants exemples en els que s'ha d'arribar cada cop més lluny per veure que una determinada propietat no és certa. N'apareixen molts més a [8, 52]. Aquests serveixen per consolidar la idea de que per molt lluny que puguem arribar fent càlculs, mai podrem estar segurs que un resultat és cert si no trobem una demostració del mateix.

Comencem per un de molt senzill: el polinomi $P(n) = n^2 + n + 41$, donat per Euler el 1772, proporciona valors primers per a $n = 0, 1, 2, \ldots, 38, 39$. Així, $P(0) = 41$ i $P(39) = 1601$ són primers. Ara bé, $P(40) = 40 \times 41 + 41 = 41^2$. Un altre polinomi que dóna valors primers per a $n = 0, 1, \ldots, 79$, és $n^2 - 79n + 1601$, tot i que només dóna 40 nombres primers diferents. Això és degut a que

$$Q(n) = n^2 - 79n + 1601 = (n - 40)^2 + (n - 40) + 41$$

i a que, com va observar Legendre el 1798, el polinomi $n^2 - n + 41$, també dóna valors primers per a $n = 0, 1, 2, \ldots, 38, 39$ i, a més, proporciona els mateixos primers que el polinomi d'Euler. Per aquest nou polinomi $Q(80) = 41^2$ ja no és primer.

Continuem amb un exemple sorprenent sobre el valor de certes integrals impròpies i convergents, veure [10, 99]. Es pot demostrar que

$$J_n = \int_0^\infty 2\cos(x) \prod_{k=1}^{n} \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{2k-1}\right) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{si} \quad n = 1, 2, \dots, 56,$$

però $J_{57} < \pi/2$, tot i que J_{57} és molt proper a $\pi/2$. La funció $\operatorname{sinc}(x) = \sin(x)/x$ té nom propi, degut a la seva aparició freqüent al processament digital de senyals i en la teoria de la informació, i es coneix com *sinus cardinal*. Integrals similars a J_n se solen anomenar *integrals de Borwein* degut a que els germans Borwein, matemàtics escocesos contemporanis, van mostrar per primer cop aquest tipus de fenomen ([10]). Avui en dia hi ha exemples d'integrals de Borwein depenent d'un paràmetre n que es mantenen constants fins un valor de n, amb més de 40 dígits, i després canvien de valor.

En l'exemple presentat, es demostra que la raó del canvi per $n = 57$ és que

$$2.994 \approx \sum_{k=1}^{56} \frac{1}{2k-1} = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{111} < 3 < \sum_{k=1}^{57} \frac{1}{2k-1} = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{113} \approx 3.003.$$

Un tercer exemple ens el proporciona una de les anomenades *carreres de primers,* vegeu [49]. Dividim en dos equips els nombres primers: equip E_1 format pels de la forma $3n+1$ i equip E_2, format pels de la forma $3n+2$. Així, $E_1 = (7, 13, 19, \dots)$ i $E_2 = (2, 5, 11, 17, \dots)$. Si, per a $j = 1, 2$ definim

$$\pi_j(x) = \text{número de primers a } E_j \text{ menors o iguals que } x,$$

la qüestió consisteix en saber, a mesura que x augmenta, si una de les dues funcions és sempre més gran que l'altra. És clar que $\pi(x) = \pi_1(x) + \pi_2(x) + 1$, ja que 3 no és a cap dels dos equips. Aquesta carrera és molt disputada, ja que se sap que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi_1(x)}{\pi_2(x)} = 1.$$

Aquest resultat és també cert en general quan es comparen primers de les formes $An + B$ i $An + C$, amb A, B coprimers i A, C coprimers. Clarament és, a més, més fort que el de Dirichlet, el qual hem esmentat quan parlàvem sobre les conjectures que busquen nombres primers amb expressions concretes.

En el cas que ens ocupa, per exemple, l'equip E_2 comença guanyant i continua guanyant durant força temps: $\pi_2(100) = 13 > 11 = \pi_1(100)$ o $\pi_2(10^5) = 4807 > 4784 = \pi_1(10^5)$. De fet, la desigualtat es manté fins a $x = 608\,981\,813\,029$, valor en el que el equip E_1 es posa per davant per primer cop. Se sap que cap dels dos equips guanya la cursa ja que van alternant indefinidament la seva posició.

Una situació semblant es presenta quan es comparen les funcions $\pi(x)$, que recordem compta el número de primers menors o iguals que x, amb la funció *logaritme integral*

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{1}{\ln(t)} \mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\{ \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\ln(t)} \mathrm{d}t + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{1}{\ln(t)} \mathrm{d}t \right\}.$$

El mateix Gauss, amb 15 anys, el 1796 va demostrar que $\pi(x) < \operatorname{li}(x)$ per $x < 3 \times 10^6$. Durant més de cent anys es va pensar que la desigualtat es mantenia per a tot $x > 0$, fins que el 1914, Littlewood ([77]) va demostrar que $\pi(x) - \operatorname{li}(x)$ canvia de signe infinits cops quan x tendeix a infinit. Les fites superiors pel primer valor de x pel qual la funció $\pi(x) - \operatorname{li}(x)$ s'anul·la s'anomenen *nombres de Skewes* en honor al matemàtic sud-africà Stanley Skewes, qui al 1955 va donar la primera fita explicita, que era un número immens ([103]). Avui en dia la millor fita explicita té més de 300 dígits i al seu voltant la funció resta té més de 10^{150} zeros ([7]). Aquestes fites es poden obtenir a partir d'un resultat clau de 1966 de Lehman ([72]) que usa que tots els zeros no trivials de la funció zeta de Riemann, amb part imaginària menor que un cert valor, tenen part real 1/2. Intuïtivament, com més gran és aquest valor, més petit és el nombre de Skewes obtingut.

Els dos últims exemples són també força espectaculars. En el primer d'ells ens preguntem si és cert o no que $n^{17}+9$ i $(n+1)^{17}+9$ són primers entre si. Resulta que ho són per a tot $n<N$. En canvi, per $n=N$, on

$$N = 8424432925592889329288197322308900672459420460792433$$

té 51 xifres, no ho són. De fet, tenen un màxim comú divisor m també de 51 xifres, on $m = \mathrm{Res}_n\big(n^{17}+9,(n+1)^{17}+9\big)$ i Res_n denota la resultant dels dos polinomis respecte a n. Per més detalls, vegeu [45].

En l'últim exemple estudiem si per a tot $0<n\in\mathbb{N}$ la quantitat $1381n^2+1$ pot ser un quadrat perfecte. La resposta és que no ho és per a tot $n<M$, però en canvi ho és per primer cop per a $n=M$, on

$$M = 2472690352775053537868141555978544119564691977342423075952738420$$

té més de 60 xifres. De fet, les equacions diofàntiques de la forma $dn^2+1=m^2, d\in\mathbb{N}$ es coneixen com *equacions de Pell* i se sap que sempre que d no sigui un quadrat perfecte tenen infinites solucions $(n,m)\in\mathbb{N}^2$ i hi ha algoritmes per trobar-les totes i saber quina és la més petita, vegeu per exemple [74] i les seves referències. De manera similar, tenim que $9949n^2+1$ és un quadrat per primer cop per a un valor n amb més de 200 xifres i $24229n^2+1$ ho és, també per primer cop, per a un n amb més de 300 xifres. Aquests valors de d s'han tret de la interessant plana web "The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences", de la secció amb número de referència A033316.

Un altre interès didàctic de les conjectures numèriques proposades és que proporcionen idees interessants i engrescadores per introduir als nostres alumnes en el món de la investigació i en el de la programació, vegeu de nou la plana web comentada a la introducció.

Finalment, per si algú es pregunta si apart de pel seu interès científic i intel·lectual (els quals no són gens menyspreables), el pensar les conjectures numèriques que hem presentat en aquest treball té algun interès pràctic, recordem a continuació, com a exemple, el paper que va tenir l'estudi dels primers bessons en la detecció d'un dels errors més famosos i greus que presentava un processador comercial.

Durant el càlcul de la constant de Brun, B_2 (suma dels inversos dels primers bessons), el 1994, Thomas Nicely ([83]) va trobar el famós error (bug) en les divisions que feia el processador Intel Pentium, i més precisament quan considerava el parell de primers bessons 824 633 702 441 i 824 633 702 443; vegeu [29]. El seu famós e-mail començava:

> *Sembla que hi ha un error a la unitat de coma flotant (coprocessador numèric) de molts, i potser tots, els processadors Pentium. En resum, el Pentium FPU torna valors erronis per a determinades divisions. Per exemple,* 1/824633702441.0 *es calcula incorrectament (tots els dígits més enllà del vuitè dígit significatiu són erronis)...*

En poques paraules, el processadors es testen amb càlculs matemàtics, el més complexos possible. Aquests càlculs involucren tant el coneixement de nombres primers enormes, com la implementació d'algoritmes per calcular xifres i més xifres decimals de certs nombres paradigmàtics, com per exemple π, vegeu [11]. A més, avui en dia és ben conegut que l'ús de nombres primers, el més gran possibles, juga un paper essencial en el xifrat i codificació d'informació. Un exemple famós és el algorisme de xifratge de clau pública RSA, vegeu [94].

Sobre els materials audiovisuals. Tot i que fins ara només hem citat treballs en paper i planes web, voldria esmentar que avui en dia l'existència de materials audiovisuals pot millorar substancialment la comprensió de les matemàtiques. A tall d'exemples aconsellem veure a Youtube els videos amb títols "Who cares about topology? (Inscribed rectangle problem)" sobre l'existència d'un rectangle inscrit per a tota corba de Jordan, o "The Moving Sofa Problem" sobre la conjectura del seu títol. També és molt interessant escoltar la xerrada de J. Oesterlé el 2013 amb títol "Some simple open problems in mathematics", dins del *IMSC 50 Years Golden Jubilee Celebrations* i disponible a la xarxa.

Agraïments. L'autor vol agrair Francesc Mañosas i Wolfgang Pitsch els seus suggeriments sobre una primera versió d'aquest treball. A més, a Gregori Guasp la seva ajuda en la preparació de moltes de les il·lustracions que conté. L'autor està recolzat pel projecte MTM2016-77278-P FEDER i per la Generalitat de Catalunya, projecte 2017SGR1617.

Referències

[1] M. Aigner, G. M. Ziegler, Proofs from The Book, Springer, Berlin, 1988.
[2] D. Andrica, *Note on a conjecture in prime number theory.* Studia Univ. Babes–Bolyai Math. 31 (1986), 44–48.
[3] M. Atiyah, Mathematics: frontiers and perspectives, by the International Mathematical Union. Publications of the American Mathematical Society 2000.
[4] A. Artigue, *Órbitas periódicas en billares triangulares.* Miscelánea Matemática 59 (2014) 19–40.
[5] D. H. Bailey, R. E. Crandall, *On the random character of fundamental constant expansions.* Experimental Math. 10 (2001), 175–190.
[6] B. Bajnok, An Invitation to Abstract Mathematics, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer 2013.
[7] C. Bays, R. H. Hudson, *A new bound for the smallest x with $\pi(x) > \mathrm{li}(x)$.* Mathematics of Computation, 69 (2000), 1285–1296.
[8] A. Barahmand, *On Mathematical Conjectures and Counterexamples.* Journal of Humanistic Mathematics 9 (2019), 295–303.
[9] B. C. Berndt, W. F. Galway, *The Brocard–Ramanujan diophantine equation $n!+1=m^2$.* The Ramanujan Journal 4 (2000), 41–42.
[10] D. Borwein, J. M. Borwein, *Some remarkable properties of sinc and related integrals.* The Ramanujan Journal 5 (2001), 73–89.
[11] J. M. Borwein, M. S. Macklem, *The (digital) life of Pi,* Austral. Math. Soc. Gaz. 33 (2006), 243–248.
[12] M. Boshernitzan, G. Galperin, T. Krüger, S. Troubetzkoy, *Periodic billiard orbits are dense in rational polygons.* Transactions of the American Mathematical Society 350 (1998), 3523–3535.
[13] I. Bošnjak, P. Markovi, *The 11-element case of Frankl's conjecture.* Electronic Journal of Combinatorics. 15 (2008), R88.

[14] P. Brass, W. O. J. Moser, J. Pach, Research Problems in Discrete Geometry, Springer-Verlag New York 2005.

[15] A. Brousseau, *Palindromes by Addition in Base Two.* Mathematics Magazine 42 (1969), 254–256.

[16] V. Brun, *La série* $1/5+1/7+1/11+1/13+1/17+1/19+1/29+1/31+1/41+1/43+1/59+1/61+\cdots$ *où les dénominateurs sont nombres premiers jumeaux est convergente ou finie.* Bull. des Sci. Mathématiques 43 (1919), 100–104, 124–128.

[17] J. Byrnes, C. Spicer, A. Turnquist, *The Sheldon conjecture.* Math Horizons. 23 (2015), 12–15.

[18] R. D. Carmichael, *On Euler's f-function.* Bulletin of the American Mathematical Society 13 (1907), 241—243.

[19] R. D. Carmichael, *Note on Euler's f-function.* Bulletin of the American Mathematical Society 28 (1922), 109–110.

[20] E. Casas-Alvero, *Higher order polar germs.* J. Algebra 240 (2001), 326–337.

[21] Interview to E. Casas-Alvero in Spanish. https://www.gaussianos.com/la-conjetura-de-casas-alvero-contada-por-eduardo-casas-alvero/

[22] W. Castryck, R. Laterveer, M. Ounaïes, *Constraints on counterexamples to the Casas-Alvero conjecture and a verification in degree 12.* Mathematics of Computation 83 (2014), 3017–3037.

[23] M. Chamberland, *A continuous extension of the* $3x+1$ *problem to the real line,* Dynam. Contin. Discrete Impuls Systems. 2 (1996), 495–509.

[24] M. Chamberland, *Una actualizacio del problema* $3x+1$. But. Soc. Catalana de Matemàtiques 18 (2003), 19–45.

[25] J. R. Chen, *On the representation of a larger even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes.* Sci. Sinica 16 (1973), 157—176.

[26] J. R. Chen, *On the Distribution of Almost Primes in an Interval.* Sci. Sinica 18 (1975), 611–627.

[27] B. Cipra, R. M. Hanson, A. Kolan, *Periodic trajectories in right-triangle billiards.* Phys. Rev. E 52 (1995), 2066–2071.

[28] J. H. Conway, *On Unsettleable Arithmetical Problems.* The American Mathematical Monthly 120 (2013), 192–198.

[29] A. Cunnningham, *On hyper-even numbers and on Fermat's numbers.* Proc. Lond. Math. Soc. 5 (1907), 237–274.

[30] F. Cunningham, Jr., *The Kakeya Problem for Simply Connected and for Star-Shaped Sets.* The American Mathematical Monthly 78 (1971), 114–129.

[31] E. de Faria, C. Tresser, *On Sloane's Persistence Problem.* Experimental Mathematics 23 (2014), 363–382.

[32] J.-P. Delahaye, Le fascinant nombre π. Bibliothèque Scientifique. Belin-Pour la Science, Paris, 1997.

[33] G. M. Díaz-Toca, L. González-Vega, *On analyzing a conjecture about univariate polynomials and their roots by using Maple.* A Maple conference 2006. Proc. of the conference, Waterloo, Ontario, Canada, July 23–26, 2006. Waterloo: Maplesoft, 2006, p. 81–98.

[34] L. E. Dickson, *A new extension of Dirichlet's theorem on prime numbers*, Messenger of mathematics 33 (1904), 155–161

[35] Diversos autors, Suites & séries. Bibiliothèque Tangente HS 41. Éditions POLE 2011.

[36] J. Draisma, J. P. de Jong, *On the Casas-Alvero conjecture.* Eur. Math. Soc. Newsl. 80 (2011), 29–33.

[37] M. du Sautoy, The Music of the Primes: Searching to Solve the Greatest Mystery in Mathematics. HarperCollins, New York 2003.

[38] R. J. Dwilewicz, J. Minác, *Values of the Riemann zeta function at integers.* Materials Matemàtics 2009, treball 6, 26 pp.

[39] C. Elsholtz, *Sums of k unit fractions.* Transactions of the American Mathematical Society 353 (2001), 3209–3227.

[40] P. Erdös, *Über die Reihe* $\sum 1/p$. Mathematica , Zutphen B 7 (1938), 1–2.

[41] P. Erdos, G. Szekeres, *A combinatorial problem in geometry,* Compositio Mathematica 2 (1935), 463–470.

[42] A. van den Essen, *To believe or not to believe: the Jacobian Conjecture* Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino 55, Jacobian Conj. and Dyn. Syst. (1997), 283–290.

[43] A. van den Essen, Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture, Progress in Mathematics, 190, Basel: Birkhäuser Verlag 2000.

[44] K. Falconer. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. John Wiley and Sons, 2003.

[45] P. E. Frenkel, J. Pelikán, *On the Greatest Common Divisor of the Value of Two Polynomials.* The American Mathematical Monthly 124 (2017), 446-450.

[46] G. A. Gal'perin, A. M. Stepin, Y. B. Vorobets, *Periodic billiard trajectories in polygons.* Russian Math. Surveys, 46 (1991), 204–205.

[47] G. A. Gal'perin, A. M. Stepin, Y. B. Vorobets, *Periodic billiard trajectories in polygons: Generation mechanisms.* Russian Math. Surveys 47 (1992), 5–80.

[48] H.-C. Graf von Bothmer, O. Labs, J. Schicho, C. van de Woestijne. *The Casas-Alvero conjecture for infinitely many degrees.* J. Algebra 316 (2007), 224–230.

[49] A. Granville, G. Martin. *Prime Number Races.* The American Mathematical Monthly 113 (2006), 1–33.

[50] C. A. Grimm, *A conjecture on consecutive composite numbers.* The American Mathematical Monthly 76 (1969), 1126—1128.

[51] T. H. Gronwall, *Some asymptotic expressions in the theory of numbers.* Transactions of the American Mathematical Society 14 (1913), 113–122.

[52] R. K. Guy, *The Strong Law of Small Numbers.* The American Mathematical Monthly 95 (1988), 697–712.

[53] R. K. Guy, Unsolved Problems in Number Theory (2nd ed.), New York: Springer-Verlag 1994.

[54] L. Halbeisen, N. Hungerbühler, *On Periodic Billiard Trajectories in Obtuse Triangles.* SIAM Review 42 (2000), 657–670.

[55] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, *Some Problems of Partitio Numerorum. III. On the Expression of a Number as a Sum of Primes.* Acta Math. 44 (1923), 1–70.

[56] J. Havil, Gamma: Exploring Euler's Constant. Princeton, NJ: Princeton University Press 2003.

[57] J.-B. Hiriart-Urruty, *Le rôle des conjectures dans l'avancement des mathématiques: tours et détours à l'aide d'exemples.* QUADRATURE 83 (2012), 27–33. Traduït al castellà a: *El papel de las conjeturas en el avance de las matemáticas.* SUMA^{+} 69 (2012), 83–92.

[58] J.-B. Hiriart-Urruty, *Les nombres entiers : des amis qui nous posent des problèmes.* Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse 176 (2014), 199–210.

[59] J.-B. Hiriart-Urruty, *Conjecturez, conjecturez... il en restera toujours quelque chose.* TANGENTE 168 (2016), 10–11.

[60] J.-B. Hiriart-Urruty, *Conjecturer en mathématiques... comme Fermat?* Xerrada a la jornada "Nouveaux regards sur Pierre (de) Fermat" del 18 de Juny de 2018. Per aparèixer a Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse.

[61] F. Holt, *Periodic reflecting paths in right triangles.* Geom. Dedicata 46 (1993), 73–90.

[62] J. H. Jaroma, *On expanding $4/n$ into three Egyptian fractions.* Crux Mathematicorum 30 (2004), 36–37.

[63] J. H. Jaroma, *Note on the Lucas–Lehmer Test.* Irish Math. Soc. Bulletin 54 (2004), 63–72.

[64] A. Katok, B. Hasselblatt, Introduction to the Mod- ern Theory of Dynamical Systems, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[65] D. Khoshnevisan, *Normal numbers are normal.* Clay Mathematics Institute Annual Report 2006, p. 15 (continued on pp. 27–31).

[66] C. Lafargue & others, *Localized lasing modes of triangular organic microlasers.* Phys. Rev. E 90 (2014) 052922.

[67] J. C. Lagarias, *The $3x + 1$ problem and its generalizations,* The American Mathematical Monthly 92 (1985), 3–23.

[68] J. C. Lagarias, *An Elementary Problem Equivalent to the Riemann Hypothesis.* The American Mathematical Monthly 109 (2002), 534–543.

[69] J. C. Lagarias, The ultimate challenge: the $3x + 1$ problem. Providence, R.I.: Publications of the American Mathematical Society, 2010.

[70] J. C. Lagarias, *Euler's constant: Euler's work and modern developments.* Bulletin of the the American Mathematical Society 50 (2013), 527–628.

[71] L. J. Lander, T. R. Parkin, *Counterexample to Euler's conjecture on sums of like powers.* Bulletin of the American Mathematical Society 72 (1966), 1079.

[72] R. S. Lehman, *On the difference* $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$. Acta Arithmetica, 11 (1966) 397–410.

[73] D. Lehmer, *Sujets d'étude.* Sphinx, Bruxelles, 8 (1938), 12–13.

[74] H. W. Lenstra Jr, *Solving the Pell Equation.* Notices of the American Mathematical Society, 49 (2002), 182–192,

[75] S. Letherman, D. Schleicher, R. Wood, *The* $(3n+1)$*-Problem and Holomorphic Dynamics,* Experimental Mathematics. 8 (1999), 241–252.

[76] F. W. Levi, *Überdeckung eines Eibereiches durch Parallelverschiebungen seines offenen Kerns,* Archiv der Mathematik 6 (1955), 369–370.

[77] J. E. Littlewood, *Sur la distribution des nombres premiers.* Comptes Rendus 158 (1914), 1869–1872.

[78] B. Matschke, *A Survey on the Square Peg Problem.* Notices of the American Mathematical Society 61 (2014), 346–352.

[79] M. D. Meyerson, *Balancing acts.* Topology Proc. 6 (1981), 59–75.

[80] P. Mihailescu, *Primary Cyclotomic Units and a Proof of Catalan's Conjecture.* J. reine angew. Math. 572 (2004) 167–195.

[81] W. Narkiewicz, The Development of Prime Number Theory, Springer-Verlag, New York, 2000.

[82] J. F. Nash, M. Th. Rassias. Open Problems in Mathematics. Springer, New York, 2016.

[83] T. R. Nicely, *Enumeration to* $1.6 * 10^{15}$ *of the twin primes and Brun's constant.* Some Results of Computational Research in Prime Numbers (Computational Number Theory), 1999.

[84] A. Nicolau, *Números Normals.* Materials Matemàtics 2016, treball 1, 13 pp.

[85] M. J. Nielsen, *Rhombi inscribed in simple closed curves.* Geometriae Dedicata 54 (1995), 245–254.

[86] J. Nilsson, *Letter Frequencies in the Kolakoski Sequence.* Acta Physics Polonica A 126 (2014), 549–552.

[87] Y. Nishiyama, *Numerical palindromes and the 196 problem.* International Journal of Pure and Applied Mathematics 80 (2012), 375–384.

[88] P. Ochem, M. Rao, *Odd perfect numbers are greater than* 10^{1500}. Mathematics of Computation. 81 (2012), 1869–1877.

[89] M. Overholt, *The diophantine equation* $n! + 1 = m^2$. Bull. London Math. Soc. 25 (1993), 104.

[90] C. Pomerance, C. Spicer, *Proof of the Sheldon Conjecture.* The American Mathematical Monthly 126 (2019), 688–698.

[91] J. Quer, *La funció* ζ *de Riemann.* Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques 22 (2007), 197–228.

[92] P. Ribenboim, The New Book of Prime Number Records, Springer-Verlag, New York, 1996.

[93] I. Richards, *On the Incompatibility of Two Conjectures Concerning Primes.* Bulletin of the American Mathematical Society 80 (1974), 419–438.

[94] R. Rivest, A. Shamir, L. Adleman, *A Method for Obtaining Digital Signatures and Public-Key Cryptosystems.* Communications of the ACM 21 (1978), 120–126.

[95] I. Roberts, J. Simpson, *A note on the union-closed sets conjecture.* Australas. J. Combin. 47 (2010), 265–267.

[96] G. Rodríguez, *Sobre les fraccions* $2/p$ *del papir de Rhind.* Materials Matemàtics 2010, treball 3, 12 pp.

[97] D. Romik, *Differential Equations and Exact Solutions in the Moving Sofa Problem.* Experimental Mathematics 27 (2018), 316–330.

[98] M. Rosen, *A proof of the Lucas–Lehmer test.* The American Mathematical Monthly 95 (1988), 855–856.

[99] H. Schmid, *Two curious integrals and a graphic proof.* Elem. Math. 69 (2014), 11-–17.

[100] R. E. Schwartz, *Obtuse Triangular Billiards II: One Hundred Degrees Worth of Periodic Trajectories.* Experimental Mathematics 18 (2009), 137–171.

[101] D. Shanks, *A Sieve Method for Factoring Numbers of the Form* $n^2 + l$. Math. Tables Aids Comput. 13 (1959), 78–86.

[102] D. Shanks, *On the Conjecture of Hardy & Littlewood Concerning the Number of Primes of the Form $n^2 + a$.* Mathematics of Computation 14 (1960), 321–332.
[103] S. Skewes, *On the difference $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$.* Proceedings of the London Mathematical Society 5 (1955), 48–70.
[104] N. Sloane, *The persistence of a number.* Journal of Recreational Mathematics 6 (1973), 97–98.
[105] J. Sondow, *Criteria for irracionality of Euler's constant.* Proceeding of the American Mathematical Society 131 (2003), 3335–3344.
[106] G. Szekeres, L. Peters, *Computer solution to the 17-point Erdos-Szekeres problem,* ANZIAM Journal 48 (2006), 151–164.
[107] T. Tao, *Every odd integer larger than 1 is the sum of at most five primes.* Mathematics of computation 83 (2014), 997–1038.
[108] C. W. Trigg, *Palindromes by Addition.* Mathematics Magazine 40 (1967), 26–28.
[109] M. Visser, *Strong Version of Andrica's Conjecture.* International Mathematical Forum 14 (2019), 181–188.
[110] J. Voight, *Perfect Numbers: An Elementary Introduction.* Department of Mathematics, University of California, Berkeley. California, 10 pp.
[111] Y. Zhang, *Bounded gaps between primes.* Annals of Mathematics 179 (2014), 1121–1174.
[112] W. Zudilin, *Arithmetic of Catalan's constant and its relatives.* Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. 89 (2019), 45—53.

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona
E-mail address: `gasull@mat.uab.cat`