

Resolución de tareas “que involucran el área de figuras planas” por estudiantes de sexto de primaria

Sofía Caviedes Barrera

(Universidad Autónoma de Barcelona. España)

Fecha de recepción: 28 de marzo de 2021

Fecha de aceptación: 19 de octubre de 2021

Resumen

El siguiente estudio tiene como finalidad caracterizar la competencia geométrica manifestada por estudiantes de 6to de primaria cuando resuelven tareas que involucran el área de figuras planas. Para esto, se analizan los procedimientos utilizados y justificaciones escritas en dos tareas. La competencia geométrica de los estudiantes se caracteriza en función de los significados parciales del área, teniendo en cuenta los diferentes conceptos, procedimientos, propiedades y representaciones que se movilizan en la resolución de las tareas. Los resultados muestran que la competencia geométrica de los alumnos se ve limitada por el uso mecánico de la fórmula de base x altura, lo que dificulta el uso de procedimientos geométricos cuando no es posible utilizar cálculos.

Palabras clave

Competencia geométrica, significados parciales del área, procedimientos geométricos.

Title

Solving tasks involving the area of flat figures by sixth grade students

Abstract

The following study aims to characterise the geometric competence manifested by 6th grade students when solving tasks involving the area of flat figures. For this purpose, the procedures used and written justifications in two tasks are analysed. Students' geometric competence is characterised in terms of the partial meanings of area, taking into account the different concepts, procedures, properties and representations that are mobilised in the resolution of the tasks. The results show that students' geometric competence is limited by the mechanical use of the base x height formula, which hinders the use of geometric procedures when it is not possible to use calculations.

Keywords

Geometric competence, area partial meanings, geometric procedures.

1. Introducción

Desde hace algunos años la comprensión del concepto de área viene presentando desafíos particulares que se hacen evidentes al constatar una tendencia generalizada, por parte de estudiantes de primaria, secundaria y bachillerato, hacia el uso de fórmulas en la resolución de tareas que involucran el área de figuras planas (Caviedes, De Gamboa, y Badillo, 2020; D'Amore y Fandiño, 2007; Kospentaris, Spyroy y Lappas, 2011; Sisman y Aksu, 2016; Zacharos, 2006). Dicha tendencia dificulta la competencia geométrica de los estudiantes, pues el repertorio de procedimientos relacionados con el corte, movimiento y pegado, la partición equitativa, o la superposición de figuras para establecer relaciones de equivalencia y/o inclusión, se ve afectado de manera negativa por el uso excesivo de cálculos. Las dificultades para utilizar procedimientos de naturaleza geométrica (como los indicados anteriormente) pueden deberse, entre otros aspectos, a que los estudiantes poseen una comprensión



limitada de los conceptos geométricos que subyacen al uso de fórmulas (Duoady y Perrin-Glorian, 1989; Kamii y Kysh, 2006; Sisman y Aksu, 2009).

Algunos autores enfatizan que la enseñanza y construcción del concepto de área y sus procesos de medición, implican el aprendizaje y construcción de diversos elementos. Por ejemplo, Duoady y Perrin-Glorian (1989) se interesan por la diversidad de procedimientos que son necesarios en la enseñanza del área. Estos autores señalan que un aprendizaje comprensivo de los procesos de medición de áreas requiere, primero, de un tratamiento cualitativo con privilegio de procedimientos geométricos, y luego, de un tratamiento cuantitativo con privilegio de procedimientos numéricos. Si esto no se cumple, se dificulta la adquisición comprensiva de las fórmulas. Las diversas situaciones en las que puede aparecer el concepto de área, y la variedad de representaciones geométricas que pueden ser utilizadas, muestran que el área requiere de la coordinación de registros de representación de tipo geométricos asociados al uso de fórmulas, a fin de que los estudiantes puedan resolver tareas de manera competente, comprendiendo, a su vez, el funcionamiento de las fórmulas. En este contexto, el objetivo del presente estudio es caracterizar la competencia geométrica de los estudiantes mediante el uso que éstos hacen de diferentes conceptos, procedimientos, propiedades y representaciones que se enmarcan dentro de dos significados parciales del área: (1) *área como porción de espacio cerrado* y, (2) *área como magnitud/atributo* (Caviedes, De Gamboa, y Badillo, 2020).

2. Marco teórico

2.1. Consideraciones sobre los procedimientos utilizados en la resolución de tareas de área

Diversos estudios analizan los aspectos necesarios para la comprensión del área y el uso comprensivo de fórmulas, entendidos como uso estratégico basado en las propiedades del objeto que se quiere medir. Algunos estudios hacen énfasis en los procedimientos de corte, movimiento y pegado; y, en procedimientos basados en geometría euclidiana, para comprender las diferentes propiedades involucradas en los procesos de medición de áreas que permiten un acercamiento al uso comprensivo de fórmulas (Duoady y Perrin-Glorian, 1989; Freudenthal, 1983; Kordaki y Potari 1998; Kospentaris, Spyrou y Lappas, 2011; Mamona-Downs y Papadopoulos, 2006; Zacharos, 2006). Otras investigaciones focalizan la importancia de las unidades de medida, la comprensión del área como atributo y su naturaleza geométrica, a fin de utilizar las fórmulas de manera comprensiva (Huang y Witz, 2013; Kamii y Kysh, 2006). Sarama y Clements (2009) ponen énfasis en los diferentes conceptos, propiedades y procedimientos que deben ser coordinados para superar las dificultades relacionadas con la estructuración espacial y la composición e iteración de unidades. De manera similar, Outhred y Mitchelmore (2000) enfatizan la relación existente entre el tamaño de la unidad de medida y la superficie a medir. Estos autores consideran que, si bien una cantidad de superficie permanece constante, la magnitud numérica varía en función de la proporción de la unidad de medida. Los estudios anteriores dejan en evidencia que las dificultades de comprensión que suscita el concepto de área han sido ampliamente reportadas.

A modo de ejemplo, Sisman y Aksu (2009), en un estudio con 134 estudiantes de edades entre 13-15 años, evidencian que las dificultades más persistentes en los estudiantes se relacionan con el uso inadecuado de fórmulas y con comprender que el área permanece inmutable cuando una figura es dividida en partes y, posteriormente, reorganizada en una figura diferente. Mamona-Downs y Papadopoulos (2006) en un estudio sobre la resolución de problemas de área que involucran el corte, movimiento y pegado de figuras, evidencian que estudiantes de 12 años no toman en consideración las propiedades geométricas de las figuras para justificar sus procedimientos, sino que recurren a sus

percepciones visuales y al uso de la medición. Ambos estudios remarcan que un enfoque procedimental, basado en el uso de fórmulas, no garantiza la comprensión del concepto de área en los estudiantes, porque, entre otros aspectos, no permite explicar cómo una superficie bidimensional queda determinada por las longitudes de la misma superficie (Zacharos, 2006). Dicha dificultad puede persistir incluso en maestros en formación (Caviedes, De Gamboa, y Badillo, 2019; Simon y Blume, 1996). Sin embargo, si este enfoque se complementa con el estudio del análisis de las propiedades geométricas involucradas en la medición del área, se podría potenciar una comprensión más robusta (Barret, Clements y Sarama, 2017). De manera similar, Olmo, Moreno y Gil (1989) insisten en que la fórmula debe ser presentada a los estudiantes como un último paso, a fin de lograr resultados similares a los que se pueden obtener por medios más espontáneos y laboriosos, como acciones de corte, movimiento y pegado de superficies.

2.2. Registros de representación

Los registros de representación semiótica propuestos por Duval (1995) permiten realizar un análisis de las diferentes representaciones externas que son utilizadas en la resolución de determinadas tareas matemáticas. Las representaciones externas actúan como estímulo en la construcción de nuevas estructuras mentales y expresan la red de significados personales que son utilizados por los sujetos. Las representaciones de los objetos matemáticos, de acuerdo con Duval (2006), se producen al usar sistemas de representación de naturaleza diferentes. Estos pueden ser de naturaleza semiótica; es decir, por medio del uso de signos; o, de naturaleza no semiótica, relacionada con redes neuronales o la manipulación de instrumentos físicos. En tanto que en matemáticas los objetos de conocimiento no son accesibles de forma perceptual o instrumental, el uso de registros semióticos se considera obligado e indispensable (Duval, 1999).

El acceso a un objeto representado ocurre en la medida que se cumplan dos condiciones: (1) que se disponga de al menos dos registros diferentes para representar el objeto; y, (2) que se pueda pasar de manera natural de un registro a otro, aun sin ser consciente del uso de las representaciones que se están articulando (Duval, 2006). Si esto no ocurre, la representación y el objeto representado se confunden. Por ello, es preciso apropiarse de una variedad de sistemas de representación semiótica, pudiendo transformar una representación semiótica en otra. Así, la complejidad cognitiva que subyace a los procesos de pensamiento en matemáticas se relaciona con la existencia de dos formas específicas de transformación: la conversión y el tratamiento (Duval, 2006). Mientras que las conversiones se dan entre registros diferentes, los tratamientos se producen dentro de un mismo registro.

En el caso del cálculo del área de figuras planas, el registro de representación más extendido, entre los estudiantes, es el uso de la fórmula, $\text{base} \times \text{altura}$ y las demás fórmulas que de ésta se derivan, en donde de manera general se tiende a olvidar un aspecto importante. Esto es, que las representaciones geométricas relacionadas con procedimientos de corte, movimiento y pegado, o con la descomposición de superficies, permiten simplificar el uso de fórmulas. Así mismo, permiten obtener el área mediante procesos aditivos, o por estimación en el caso de superficies irregulares. La omisión de este aspecto da lugar a que se confunda el concepto de área con su representación numérica basada en el uso de fórmulas, lo que dificulta las transformaciones de tratamiento dentro de registros geométricos y numéricos, y la conversión entre registros de naturaleza numérica y geométrica. La argumentación de estas transformaciones es clave para promover un uso comprensivo de las fórmulas y dar cuenta de la complejidad del concepto de área.

2.3. Objetos y significados parciales del área

Para identificar los diferentes objetos matemáticos que se movilizan en la resolución de tareas de área, y que permiten caracterizar la competencia geométrica, se utilizan algunas herramientas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS). El EOS distingue seis objetos primarios con base en su naturaleza y permite, además, analizar la manera en que dichos objetos



emergen de las prácticas matemáticas. Los objetos primarios corresponden a: (1) lenguajes (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros; (2) situaciones-problemas (aplicaciones intra o extra-matemáticas, ejercicios); (3) conceptos-definiciones (introducidos mediante definiciones o descripciones: recta, punto, número, media, función); (4) propiedades y proposiciones (enunciados sobre conceptos); (5) procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo); y, (6) argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos deductivos o de otro tipo).

En la misma línea que plantea el EOS, se asume la comprensión de los objetos matemáticos desde una perspectiva pragmática; es decir, la comprensión que se tiene de un objeto matemático queda definida por la capacidad para reconocer las propiedades y características de dicho objeto; relacionarlo con otros objetos matemáticos; y, utilizarlo en una variedad de situaciones problemas (Font, Godino y D'Amore, 2007). Así, la comprensión del concepto de área quedaría definida por la capacidad que se tiene para resolver de manera competente una determinada tarea matemática, reconociendo los distintos objetos que intervienen en dicha resolución, además de las relaciones entre ellos. En este sentido, la competencia geométrica queda definida como la capacidad que tienen los estudiantes para utilizar y movilizar conceptos, procedimientos, propiedades y representaciones de naturaleza geométrica.

El significado de un objeto matemático queda definido por el sistema de prácticas realizadas por una persona, o compartidas en el seno de una institución, ante determinadas situaciones problemas (Godino, Batanero y Font, 2007; 2019). Al considerar el significado de un objeto matemático en términos de prácticas, se distingue el *sentido* y *significado* de los objetos matemáticos. El *sentido* corresponde al *significado parcial* del objeto; es decir, el significado de un objeto se puede parcelar en distintos tipos de prácticas más específicas o subsistema de prácticas (Godino *et al.*, 2007) que pueden ser utilizadas en un determinado contexto. Por su parte, el significado global del objeto se reconstruye mediante la exploración sistemática de los contextos de uso del objeto y los sistemas de prácticas que intervienen (Godino *et al.*, 2019). Así, el significado global del área queda definido por prácticas específicas que se realizan en diferentes contextos. Utilizando esta distinción entre significado parcial y global, se utilizan dos de los significados parciales del área (SP) presentados en Autor 1, Autor 2 y Autor 3 (2019) para caracterizar la competencia geométrica de los estudiantes en la resolución de dos tareas de área (Tabla 1).

Significados parciales del área	Procedimientos asociados a cada SP	Otros objetos matemáticos asociados
SP ₁ : Porción de espacio cerrado	Comparan dos o más superficies por superposición total y/o parcial	-Propiedades: conservación acumulación y aditividad transitividad -Representaciones: gráfica -Conceptos: cantidad de espacio ocupado
	Comparan dos o más superficies por recorte y pegado	

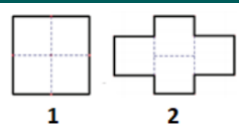
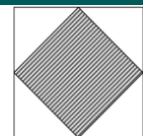
SP₂: Magnitud/At ributo	Comparan superficies de manera directa y/o indirecta identificando que superficies. diferentes en forma pueden tener igual cantidad de superficie	Propiedades: conservación, acumulación y aditividad transitividad -Representaciones: gráfica; simbólica(numérica) -Conceptos: cantidad de espacio ocupado; magnitud que mide a una superficie
	Descomponen de forma conveniente, gráfica o mentalmente, dos o más superficies (en cuadrados y/o triángulos) para realizar comparaciones entre ellas	
	Utilizan la reconfiguración por complementariedad de formas para realizar comparaciones entre las superficies	

Tabla 1. Significados parciales del área (Caviedes, De Gamboa y Badillo, 2020)

3. Método

El estudio se posiciona en un paradigma interpretativo con enfoque cualitativo (Bassey, 1990). Mediante el análisis e interpretación de respuestas de estudiantes a tareas de área de figuras planas, se busca caracterizar la competencia geométrica de los estudiantes atendiendo a la manera en que éstos utilizan los SP₁ y SP₂. Se toma en consideración la configuración de objetos del EOS y los registros de representación semiótica. Para esto, se realiza un análisis de contenido (Krippendorff, 2004) donde se analizan respuestas de estudiantes considerando la configuración de objetos de cada SP. Se buscan evidencias de procedimientos, representaciones, propiedades y conceptos, además de transformaciones de tratamiento (Duval, 1995). Posteriormente se distinguen tres niveles de adquisición de la competencia geométrica.

El periodo de recogida de datos se realizó en el tercer trimestre del curso escolar 2018-2019. Los participantes fueron 71 estudiantes con edades comprendidas entre los 11-12 años, que cursaban sexto de primaria en un centro concertado de Educación Primaria y Secundaria de la provincia de Barcelona (España). Los cuestionarios fueron respondidos por los estudiantes de manera individual en una única sesión de 90 minutos y se les permitió el uso de instrumentos de medición. Los estudiantes, dentro de su programa de estudios, habían recibido instrucción previa sobre la medición de áreas de figuras planas. Las tareas del cuestionario fueron un total de siete y se ordenan de manera ascendente, de acuerdo a la complejidad de procedimientos que pueden ser utilizados. Las representaciones gráficas de las tareas 1, 2, 6 y 7 se presentan de manera ampliada como anexo al cuestionario, a fin de que los estudiantes pudiesen manipularlas de la manera que estimaran conveniente. La Tabla 2 muestra el enunciado y representación gráfica de cada una de las tareas del cuestionario, sin embargo, en este artículo se presentan las resoluciones a las tareas 6 y 7 del cuestionario.

Enunciado Tarea	Representación gráfica
TAREA 1: El cuadrado de la izquierda se ha cortado por la línea punteada y con las piezas obtenidas se ha formado la Figura 2 de la derecha. ¿Cuál de las dos figuras ocupa mayor superficie, la 1 o la 2? ¿Por qué?	 (Adaptada de Popoca y Acuña, 2011)
TAREA 2: ¿Cómo puedes descomponer la superficie del cuadrado sombreado para comprobar que su área equivale a la mitad del área del cuadrado grande? Explicalo.	 (Adaptada de Corberán, 1996)

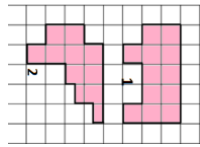
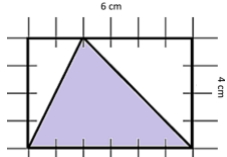
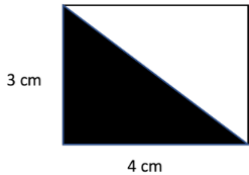
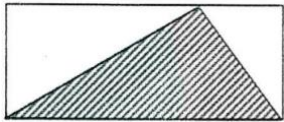
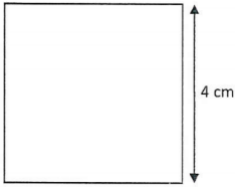
TAREA 3: a- ¿Cuántas unidades cuadradas componen las superficies de la Figura 1 y de la Figura 2? b- ¿Cuál dirías que tiene una mayor área? ¿Por qué?	 (Adaptada de Corberán, 1996)
TAREA 4: a- ¿Cuántas unidades cuadradas cubren el rectángulo? ¿Cuántas filas y columnas hay dentro del rectángulo? b- ¿Encuentras alguna relación entre el número de filas y columnas que hay dentro del rectángulo y las medidas de sus lados? Explícalo. c- ¿Cuántas unidades cuadradas cubren el triángulo? Explícalo.	 (Elaborado por la autora)
TAREA 5: El siguiente rectángulo tiene un área de 12cm^2, ¿Cuál dirías que es el área del triángulo negro? ¿Por qué?	 (Adaptada de Corberán, 1996)
TAREA 6: Si el siguiente rectángulo tiene un área de 24cm^2 a- ¿Cuáles podrían ser las longitudes de sus lados? ¿Cómo lo sabes? b- ¿Cuál sería el área del triángulo? ¿Por qué?	 (Adaptada de Castelnuovo, 1981)
TAREA 7: a- ¿Cuál es el área del cuadrado? Explica cómo la calculaste. b- ¿Podría un triángulo cubrir la misma superficie que el cuadrado? ¿Cómo lo sabes? c- Si tu respuesta anterior es SI, dibuja el triángulo y explica tu método.	 (Elaborada por la autora)

Tabla 2. Tareas propuestas al grupo de estudiantes

4. Análisis

4.1. Identificación de los componentes de la competencia geométrica

En esta etapa se buscan evidencias de los procedimientos de naturaleza geométrica que permiten establecer relaciones de equivalencia y/o inclusión entre las áreas de las superficies que se quieren comparar. Se encuentran aquí los procedimientos de *comparación directa*, que implican superponer una superficie sobre otra para encontrar relaciones de equivalencia o inclusión (una superficie es la mitad, el doble o igual que otra). Procedimientos de *comparación indirecta*, que implican recortar o descomponer una superficie, y recomponer sus partes en una nueva forma sin superponerlas (obtener un triángulo a partir de un rectángulo/cuadrado y viceversa). Procedimientos de *descomposición de*

superficies, que consisten en descomponer una superficie de manera conveniente para facilitar el proceso de comparación de áreas (descomposición gráfica o mental). Procedimientos de *reconfiguración por complementariedad* de las formas en las que se ha dividido la superficie, en el que se establece una relación de igualdad entre las superficies. Además, se buscan evidencias de las propiedades de *conservación*, que implica cortar una superficie y reorganizar sus partes advirtiendo la inmutabilidad del área; la *transitividad*, que implica la comparación del área de dos superficies, tomando como referencia el área de una tercera superficie; y la propiedad de acumulación y aditividad, que implica componer y recomponer figuras en superficies con áreas equivalentes. De igual forma, se buscan evidencias de representaciones geométricas del área y del concepto de área como superficie. En su conjunto, estos elementos permiten caracterizar la competencia geométrica de los estudiantes. Se presentan las resoluciones de tres estudiantes, quienes representan la resolución prototípica para caracterizar la competencia geométrica. Las Figuras 1, 2 y 3 muestran evidencias de los distintos niveles de adquisición de la competencia geométrica evidenciada en los estudiantes.

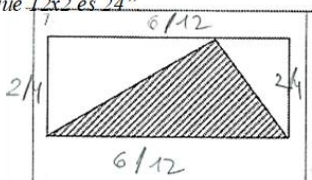
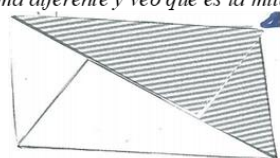
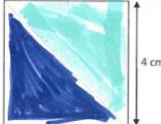
TAREA 6	TAREA 7
a- ¿Cuáles podrían ser las longitudes de sus lados? ¿Cómo lo sabes? “Las longitudes podrían ser $6 \times 4 = 24 \text{ cm}^2$, porque 6×4 es 24. Las longitudes podrían ser $12 \times 2 = 24 \text{ cm}^2$, porque 12×2 es 24”  b- ¿Cuál sería el área del triángulo? ¿Por qué? “El área del triángulo es 12 cm^2, porque he cortado la figura y luego la he enganchado de forma diferente y veo que es la mitad”. 	a- ¿Cuál es el área del cuadrado? Explica cómo la calculaste. “$4 \times 4 = 16 \text{ cm}^2$ es el área del cuadrado. Un cuadrado tiene los lados iguales, por tanto el cuadrado es $4 \times 4 = 16$.” b- ¿Podría un triángulo cubrir la misma superficie que el cuadrado? ¿Cómo lo sabes? “Sí, porque he dividido el cuadrado en dos piezas.  En la parte “c” voy a mostrar cómo las voy a juntar. c- Si tu respuesta anterior es SI, dibuja el triángulo y explica tu método. “He descompuesto el cuadrado en dos piezas y he montado un triángulo grande” 

Figura 1. Resolución de “Estudiante 1” para las tareas 6 y 7 del cuestionario.

En la Figura 1 es posible identificar distintos componentes que permiten caracterizar un nivel alto de competencia geométrica. Dichos componentes son los siguientes:

Componentes de la competencia geométrica en la resolución de la Tarea 6, estudiante 1

- El estudiante utiliza el procedimiento de *comparación indirecta* por recorte y pegado de la superficie sombreada y no sombreada, para posteriormente recomponer la zona no sombreada en un solo triángulo. De esta manera, el estudiante advierte que el triángulo sombreado equivale a la mitad de la superficie del rectángulo en el que está contenido. Este procedimiento de comparación indirecta muestra evidencias sobre el uso de las propiedades de transitividad, y acumulación y aditividad. El estudiante advierte que los triángulos no sombreados pueden componer un triángulo diferente, poniendo en evidencia la propiedad de acumulación y aditividad. De manera similar, el procedimiento de comparación indirecta permite al estudiante identificar que, si el área del triángulo sombreado equivale a la superficie de ambos triángulos no sombreados, el triángulo



sombreado equivale a la mitad del rectángulo grande, mostrando el uso de la propiedad de transitividad.

- El estudiante utiliza representaciones de tipo geométrico para establecer relaciones de inclusión entre el triángulo sombreado y el rectángulo, y relaciones de equivalencias entre el triángulo sombreado y los triángulos no sombreados. Primero, descompone el triángulo sombreado trazando el segmento de su altura, con el fin de recortarlo, pero sin alterar su forma geométrica, sino solo la posición por medio de un movimiento de rotación. Posteriormente, recorta los triángulos no sombreados y realiza movimientos de rotación y traslación para componer un nuevo triángulo, un triángulo equivalente al triángulo sombreado. Por otro lado, utiliza una representación de tipo manipulativa, ya que hace uso de las representaciones gráficas del anexo del cuestionario para manipular las figuras y reorganizar sus partes.
- Las representaciones de tipo geométrico mencionadas muestran transformaciones de tratamiento dentro de un registro de representación geométrica, ya que, el estudiante utiliza un procedimiento de descomposición conveniente de la superficie (trazar altura del triángulo sombreado) y un procedimiento de comparación indirecta.
- Los procedimientos, propiedades y representaciones utilizadas, permiten inferir que el estudiante moviliza el concepto de cantidad de espacio ocupado, ya que no depende exclusivamente de cálculos para resolver la tarea de manera competente, sino que comprende que el área de una figura se refiere a la cantidad de superficie o espacio que ocupa dicha figura. Los objetos matemáticos que conforman los SP_1 y SP_2 han sido adquiridos, evidenciando una buena competencia geométrica.
- Además de los objetos matemáticos mencionados con anterioridad, se evidencia una aproximación hacia el uso de argumentos y principios geométricos relacionados con los procedimientos de naturaleza geométrica. Por ejemplo, que el acto mental de cortar el espacio bidimensional en partes de igual área sirve como base para comparar áreas, pues permite establecer relaciones en función de las partes que componen la superficie, considerando sus longitudes. También, que todo polígono puede descomponerse en triángulos; y que un paralelogramo que tiene la misma base que un triángulo, ambos colocados entre las mismas paralelas, es el doble del triángulo. De esta manera, es posible enriquecer los objetos matemáticos asociados a los SP_1 y SP_2 .

Componentes de la competencia geométrica en la resolución de la Tarea 7, estudiante 1

- El estudiante utiliza el procedimiento de *comparación indirecta* por recorte y pegado del cuadrado, para posteriormente recomponer el cuadrado en una nueva figura, un triángulo. De esta manera, el estudiante advierte que es posible obtener una figura diferente al cuadrado, sin que su área se vea alterada. Este procedimiento de comparación indirecta muestra evidencias sobre el uso de las propiedades de conservación, transitividad, y acumulación y aditividad. El estudiante advierte que los triángulos rectángulos que componen el cuadrado pueden recomponer una nueva figura, un triángulo más grande, poniendo en evidencia la propiedad de acumulación y aditividad. Así, mismo se pone en evidencia el uso de la propiedad de conservación, pues al cortar el cuadrado y reorganizar sus partes, el área se mantiene inmutable. De manera similar, el procedimiento de comparación indirecta permite al estudiante identificar que, si el área del triángulo formado equivale al área de los dos triángulos rectángulos que componen el cuadrado, el área del triángulo formado equivale al área del cuadrado.
- El estudiante utiliza representaciones de tipo geométrico para establecer relaciones de equivalencia entre el cuadrado y el triángulo grande. Primero, descompone de manera

gráfica el cuadrado por su diagonal, así distingue dos triángulos rectángulos. Posteriormente, recorta los triángulos rectángulos y realiza movimientos de rotación y traslación para componer un nuevo triángulo, un triángulo equivalente al cuadrado. Por otro lado, utiliza una representación de tipo manipulativa, ya que hace uso de las representaciones gráficas del anexo del cuestionario para manipular las figuras y reorganizar sus partes.

- Las representaciones de tipo geométrico mencionadas muestran transformaciones de tratamiento dentro de un registro de representación geométrico, ya que, el estudiante utiliza un procedimiento de descomposición conveniente de la superficie (trazar la diagonal del cuadrado) y un procedimiento de comparación indirecta.
- Los procedimientos, propiedades y representaciones utilizadas, permiten inferir que el estudiante moviliza el concepto de cantidad de espacio ocupado, ya que no depende exclusivamente de cálculos para resolver la tarea de manera competente, sino que comprende que el área de una figura se refiere a la cantidad de superficie o espacio que ocupa. Los objetos matemáticos que conforman los SP_1 y SP_2 han sido adquiridos, evidenciando una buena competencia geométrica.
- Además de los objetos matemáticos mencionados con anterioridad, se evidencia una aproximación hacia el uso de argumentos y principios geométricos relacionados con los procedimientos de naturaleza geométrica. Por ejemplo, que al cambiar la forma de una superficie no se producen cambios en el área de ésta, ya que, las figuras pueden ser descompuestas y reorganizadas conservando las mismas “partes”. También, que todo polígono puede descomponerse en triángulos; y que todo triángulo es equidescomponible a un paralelogramo. De esta manera, es posible enriquecer los objetos matemáticos asociados a los SP_1 y SP_2 .

En la Figura 2 es posible identificar algunos componentes que permiten caracterizar un nivel medio de competencia geométrica. Dichos componentes son los siguientes:

Componentes de la competencia geométrica en la resolución de la Tarea 6, estudiante 54

- El estudiante utiliza el procedimiento de *comparación directa* por superposición de las superficies no sombreadas sobre la superficie del triángulo sombreado. De esta manera, el estudiante advierte que el triángulo sombreado equivale a la mitad de la superficie del rectángulo en el que está contenido. Este procedimiento de comparación directa muestra evidencias sobre el uso de las propiedades de transitividad, y acumulación y aditividad. El estudiante advierte que los triángulos no sombreados pueden componer un triángulo diferente, poniendo en evidencia la propiedad de acumulación y aditividad. De manera similar, el procedimiento de comparación directa permite al estudiante identificar que, si el área del triángulo sombreado equivale a la superficie de ambos triángulos no sombreados, el triángulo sombreado equivale a la mitad del rectángulo grande, mostrando el uso de la propiedad de transitividad.
- El estudiante utiliza una representación de tipo manipulativa, ya que hace uso de las representaciones gráficas del anexo del cuestionario para manipular las figuras y comprobar la equivalencia de áreas entre las superficies sombreadas y no sombreadas.
- Los procedimientos, propiedades y representaciones utilizadas, permiten inferir que el estudiante moviliza el concepto de cantidad de espacio ocupado, ya que no depende exclusivamente de cálculos para resolver la tarea de manera competente, sino que comprende que el área de una figura se refiere a la cantidad de superficie o espacio que ocupa dicha figura. Los procedimientos que conforman los SP_1 y SP_2 no han sido ampliamente adquiridos, por lo que la competencia geométrica, en este sentido, es inferior al ejemplo mostrado en la Figura 1.



- Además de los objetos matemáticos mencionados con anterioridad, se evidencia una aproximación hacia el uso de argumentos y principios geométricos relacionados con los procedimientos de naturaleza geométrica. Por ejemplo, que comparar dos o más superficies colocando una forma sobre otra resulta útil para establecer relaciones de equivalencia/inclusión. También, que un paralelogramo que tiene la misma base que un triángulo, ambos colocados entre las mismas paralelas, es el doble del triángulo. De esta manera, es posible enriquecer los objetos matemáticos asociados a los SP₁ y SP₂.

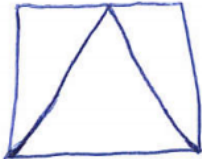
TAREA 6 a- ¿Cuáles podrían ser las longitudes de sus lados? ¿Cómo lo sabes? <i>“Las longitudes de sus lados podrían ser $8 \times 3 \text{ cm}^2$ o $6 \times 4 \text{ cm}^2$. Lo sé porque multiplicando estos números se consigue el área de 24 cm^2”.</i> b- ¿Cuál sería el área del triángulo? ¿Por qué? <i>“El área del triángulo sería de 12 cm^2, porque cuadrando la esquina de arriba del triángulo, con la esquina de arriba a la derecha del rectángulo, se puede ver que es la mitad”.</i>	TAREA 7 a- ¿Cuál es el área del cuadrado? Explica cómo la calculaste. <i>“Es de 16 cm^2 es el área del cuadrado. Como todos los lados miden lo mismo en un cuadrado, he multiplicado los lados y me ha salido eso”.</i> b- ¿Podría un triángulo cubrir la misma superficie que el cuadrado? ¿Cómo lo sabes? <i>“No, porque no tienen los mismos lados”.</i> c- Si tu respuesta anterior es SI, dibuja el triángulo y explica tu método. <i>“Pues al no tener los mismos lados, se puede ver que no puede cubrir la misma superficie”.</i> 
--	---

Figura 2. Resolución de “Estudiante 54” para las tareas 6 y 7 del cuestionario.

Componentes de la competencia geométrica en la resolución de la Tarea 7, estudiante 54

- El estudiante utiliza, únicamente, la fórmula de base x altura para calcular el área del cuadrado. Sin embargo, no resuelve de manera competente la tarea. Las respuestas a las preguntas “b” y “c”, permiten inferir que el estudiante tiene dificultades para advertir que figuras con formas diferentes pueden tener áreas equivalentes. En este sentido, presenta dificultades en el uso de las propiedades de conservación, transitividad y acumulación y aditividad. Del mismo modo, el repertorio de procedimientos geométricos, representaciones y conceptos que conforman los SP₁ y SP₂ no ha sido adquirido, evidenciando un nivel medio de la competencia geométrica, que dificulta la resolución competente de la Tarea 7.

En la Figura 3 es posible identificar que los distintos componentes que permiten caracterizar la competencia geométrica del estudiante se encuentran ausentes, es decir, la competencia geométrica es escasa:

Componentes de la competencia geométrica en la resolución de la Tarea 6 y 7, estudiante 49

- El estudiante utiliza, únicamente, la fórmula de base x altura para calcular el área de las superficies solicitadas para ambas tareas. No evidencia adquisición de los objetos matemáticos que conforman los SP₁ y SP₂, por lo que queda en evidencia que el nivel de la competencia geométrica es bajo. No se observa uso de propiedades, ni de procedimientos de naturaleza geométrica y, se infiere que el estudiante asocia el área, únicamente, con su representación basada en la fórmula de base x altura, lo que se presenta como un obstáculo para resolver las tareas de manera competente.

TAREA 6	TAREA 7
a- ¿Cuáles podrían ser las longitudes de sus lados? ¿Cómo lo sabes? “Uno 6 y el otro 4, porque si los multiplicas te sale 24”. b- ¿Cuál sería el área del triángulo? ¿Por qué? “20cm porque creo que los lados miden 5 y 4 y si los multiplicas te da 20”.	a- ¿Cuál es el área del cuadrado? Explica cómo la calculaste. “16, multiplicas $4 \times 4 = 16$”. b- ¿Podría un triángulo cubrir la misma superficie que el cuadrado? ¿Cómo lo sabes? “No”. c- Si tu respuesta anterior es SI, dibuja el triángulo y explica tu método.

Figura 3. Resolución de “Estudiante 49” para las tareas 6 y 7 del cuestionario

5. Resultados

Los hallazgos muestran que, en general, los estudiantes tienen dificultades en el uso de los objetos matemáticos que determinan una buena competencia geométrica y, a su vez, un desempeño competente en la resolución de las tareas 6 y 7. La Figura 4 muestra el porcentaje de estudiantes que evidencia una buena competencia geométrica en sus resoluciones, el número de estudiantes que muestra un nivel medio de competencia geométrica, y el número de estudiantes que muestra un nivel bajo de competencia geométrica.

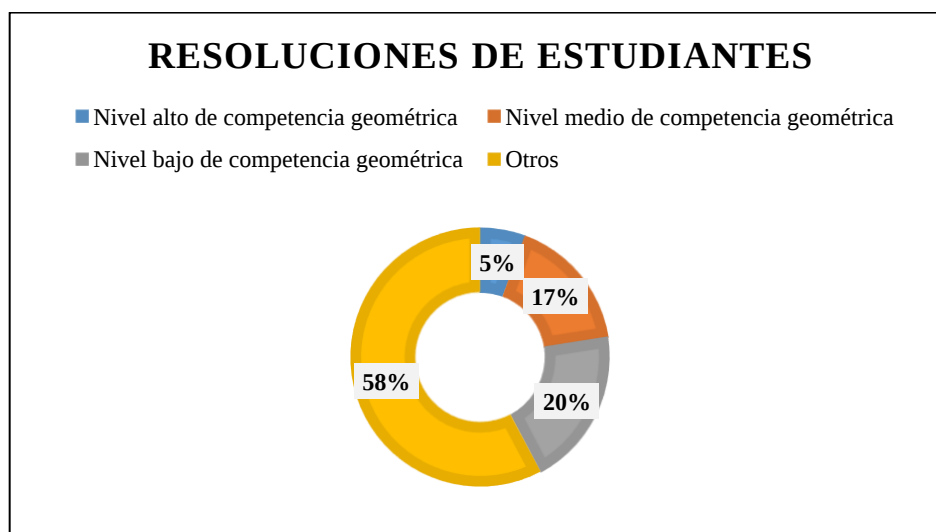


Figura 4. Competencia geométrica de los estudiantes



La Figura 4 deja en evidencia que una minoría de estudiantes muestra un nivel alto de competencia geométrica en las resoluciones de las tareas 6 y 7, pues sólo un 5% de los estudiantes se encuentra dentro del grupo que puede resolver ambas tareas de manera competente. El nivel medio de competencia geométrica se refleja en las resoluciones de un 17% de los estudiantes, quienes sólo pueden resolver de manera competente una de las dos tareas. Por su parte, el nivel bajo de la competencia geométrica se refleja en un 20% de los estudiantes, quienes no pueden resolver de manera competente tareas que requieren del uso de procedimientos ajenos a cálculos. La competencia geométrica no puede caracterizarse en el grupo “otros”, pues en este grupo los estudiantes dejan en blanco las Tareas, o bien, no responden según lo solicitado, ya sea porque calculan perímetro en lugar de área, o bien utilizan otro tipo de procedimientos que no se corresponde con la demanda de la tarea. Debido a que el objetivo del estudio es caracterizar competencia geométrica, sólo mostramos evidencias de aquellas resoluciones que permiten dicha caracterización. En este sentido, se advierte que no existe conocimiento sobre los diferentes objetos matemáticos que conforman los SP_1 y SP_2 en el grupo “otros”.

Los estudiantes que se encuentran dentro del 5% que resuelve las tareas de manera competente, con un nivel alto de competencia geométrica, evidencian una adquisición más avanzada de los diferentes objetos matemáticos que conforman los SP_1 y SP_2 , es decir, hacen uso de diferentes procedimientos, propiedades, representaciones y/o conceptos de naturaleza geométrica, evidenciando comprensión sobre el concepto de área. A su vez, hacen uso de argumentos y proposiciones de naturaleza geométrica, lo que permite complementar los objetos matemáticos de los SP_1 y SP_2 (p.e. Figura 1). De esta manera, un nivel alto de competencia geométrica quedaría determinado por procedimientos, propiedades y proposiciones, argumentos, representaciones y/o conceptos de naturaleza geométrica. La Figura 5 muestra los objetos que caracterizan un nivel alto de competencia geométrica, y que permiten resolver, de manera competente las tareas que requieren, por ejemplo, de la comparación y reproducción de formas.

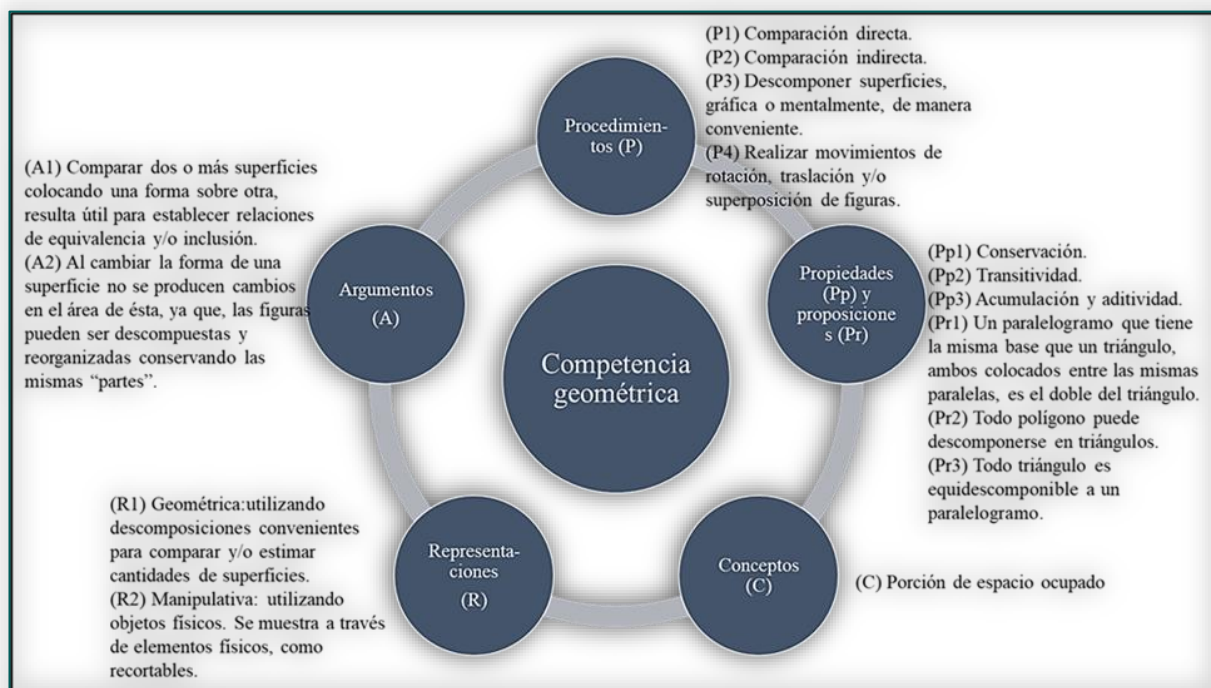


Figura 5. Objetos matemáticos que determinan un nivel alto de competencia geométrica.

6. Conclusiones

Los resultados de este estudio indican que una mayoría de estudiantes manifiestan un uso incompleto de los procedimientos, propiedades, representaciones y/o conceptos que conforman los SP₁ y SP₂, limitando la competencia geométrica y la capacidad para resolver tareas de manera competente. Esto se evidencia en el escaso porcentaje de estudiantes que muestran un nivel alto de competencia geométrica y comprensión del concepto de área, entendida como el uso estratégico de diversos procedimientos, basándose en las propiedades del objeto que se quiere medir. El uso de los distintos objetos matemáticos que conforman los SP₁ y SP₂ queda limitado por el uso de cálculos asociados a la fórmula de base x altura, para el caso de cuadrados y rectángulos, y de base x altura/2 para el caso de triángulo, sin que esto signifique un uso comprensivo de ambas fórmulas. Así, queda en evidencia la necesidad de incorporar y trabajar con los estudiantes procedimientos basados en geometría euclidiana, para comprender las diferentes propiedades involucradas en los procesos de medición de áreas que permiten un acercamiento al uso comprensivo de fórmulas (Douady y Perrin-Glorian, 1989; Freudenthal, 1983; Kordaki y Potari 1998; Kospentaris, Spyrou y Lappas, 2011; Mamona-Downs y Papadopoulos, 2006; Zacharos, 2006).

Los distintos niveles de adquisición de la competencia geométrica evidenciada por los estudiantes en sus resoluciones y justificaciones permite inferir que, el uso de los diferentes objetos matemáticos de naturaleza geométrica de los SP₁ y SP₂, se presentan como una herramienta que ayuda a los estudiantes a resolver tareas de manera competente, entiendo qué se hace y por qué se hace (Caviedes, De Gamboa, y Badillo, 2020). Del mismo modo, las transformaciones geométricas de tratamiento se asocian con una capacidad para justificar mejor los procedimientos de naturaleza geométrica que se utilizan. La caracterización de la competencia geométrica muestra que mientras más objetos matemáticos de naturaleza geométrica se movilizan en una resolución, mayor es la competencia que se tiene para resolver una determinada tarea, lo que indica que la comprensión del área queda definida por la capacidad para reconocer las propiedades y características de dicho objeto; relacionarlo con otros objetos matemáticos; y, utilizarlo en una variedad de situaciones problemas (Font, Godino y D'Amore, 2007).

Los objetos matemáticos que determinan un nivel alto de competencia geométrica (Figura 5), y a su vez a los SP₁ y SP₂, podrían ser útiles para el diseño didáctico de tareas de área, tanto a lo largo de la educación obligatoria como en la formación inicial de maestros. De esta manera, es posible introducir tareas que incentiven el uso de procedimientos, propiedades y proposiciones, argumentos, representaciones y conceptos de naturaleza geométrica, favoreciendo el desarrollo de un uso comprensivo de fórmulas y una comprensión del concepto área.

Agradecimientos

A mis directores de tesis doctoral, Genaro de Gamboa y Edelmira Badillo, por su seguimiento, acompañamiento y apoyo en el proceso seguido. Estudio realizado en el Programa de Doctorado en Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona (España). Financiado por ANID PFCHA/DOCTORADO BECAS CHILE/2018-72190032, PID2019-104964GB-I00 (MINECO-España) y GIPEAM, SGR-2017-101, AGAUR

Bibliografía

Barrett, J. E., Clements, D. H. y Sarama, J. (Eds.). (2017). *Children's measurement: A longitudinal study of children's knowledge and learning of length, area, and volume*. National Council of Teachers of Mathematics, Incorporated.



- Bassey, M. (1990). *On the nature of research in education*. Research Intelligence.
- Caviedes, S., De Gamboa, G y Badillo, E. (2019). Conexiones matemáticas que establecen maestros en formación al resolver tareas de medida y comparación de áreas. *Praxis*, 15(1), 69-87.
- Caviedes, S., De Gamboa, G y Badillo, E. (2020). Procedimientos utilizados por estudiantes de 13-14 años en la resolución de tareas que involucran el área de figuras planas. *Bolema: Boletim de Educação*, 34(68), 1015-1035.
- Corberán, R. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad*. [Tesis doctoral, Universidad de Valencia]. <https://www.uv.es/aprengeom/archivos2/Corberan96.pdf>
- D'Amore, B. y Fandiño, M. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes1. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 10(1), 39-68.
- Douady, R. y Perrin-Glorian, M. J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*, 20(4), 387-424.
- Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In, *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales (M. Vega, Trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle. (Original publicado en 1995).
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 61(1-2), 103-131.
- Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27(2): 2 -7.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The Onto-Semiotic Approach: Implications for the Prescriptive Character of Didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 38-43.
- Huang, H.-M. E. y Witz, K. G. (2013). Children's Conceptions of Area Measurement and Their Strategies for Solving Area Measurement Problems. *Journal of Curriculum and Teaching*, 2(1), 10-26.
- Kordaki, M. y Potari, D. (1998). A learning environment for the conservation of area and its measurement: a computer microworld. *Computers & Education*, 31(4), 405-422.
- Kamii, C. y Kysh, J. (2006). The difficulty of „length×with”: Is a square the unit of measurement? *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 105-115.
- Kospentaris, G., Spyrou, P. y Lappas, D. (2011). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 77(1), 105-127.
- Krippendorff, K. (2004) *Content Analysis: An Introduction to its Methodology*. Sage
- Mamona-Downs, J. y Papadopoulos, I. (2006, Julio). The problem-solving element in young students'work related to the concept of area. In *Proceedings of the 30 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 121-128).
- Olmo, M., Moreno, M. y Gil, F. (1989). *Superficie y volumen: ¿algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid: Síntesis.
- Outhred, L. y Mitchelmore, M. C. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2), 144-167.
- Popoca, M. y Acuña, C. (2011). Cambios en figuras de área igual, conservación y relaciones figúrales. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol 24, pp. 541-550). México, DF.
- Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.

- Simon, M. y Blume, G. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15(1), 3-31.
- Sisman, G.T. y Aksu, M. (2009). Seventh grade students success on the topics of area and perimeter. *Elementary Education Online*, 8(1), 243-253.
- Sisman, G. T. y Aksu, M. (2016). A study on sixth grade students' misconceptions and errors in spatial measurement: Length, area, and volume. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(7), 1293-1319.
- Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *The Journal of Mathematical Behavior*, 25(3), 224-239.

Sofía Caviedes Barrera. Chilena. Estudiante de doctorado en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales, Universidad Autónoma de Barcelona. Cerdanyola del Vallés. España. Máster en Investigación con especialidad en Didáctica de las Matemáticas, Universidad Autónoma de Barcelona, España. Profesora de Educación Primaria con Mención en matemática, Universidad Central de Chile. Email: sofialuisa.caviedesbarrera@gmail.com.

