
MATEMÁTICAS EN LAS AULAS DE SECUNDARIA

Sección a cargo de

Luisa Cuadrado

Todos contra la máquina

por

Lluís Albarracín

En este artículo se presenta una propuesta didáctica basada en el uso de un videojuego comercial como contexto para trabajar la resolución de problemas y la modelización matemática. Los videojuegos promueven el interés de los jugadores a partir de proponerles retos que estos consideran interesantes, proporcionando situaciones complejas pero claramente delimitadas en las que los jugadores deben tomar decisiones para cumplir con sus objetivos. Si el videojuego elegido está diseñado de forma en la que sus elementos y sus relaciones pueden interpretarse en términos matemáticos, el videojuego se transforma en un contexto perfecto para hacer conjeturas y probarlas, para experimentar, para recoger datos y analizarlos matemáticamente. En esta propuesta exploramos una nueva vía para enfrentarse a los retos que propone un videojuego: que toda la clase trabaje colaborativamente para superar todos los niveles de un videojuego de estrategia. Las oportunidades de aprendizaje matemático que aparecen son innumerables y cada alumno puede centrarse en aquellos aspectos que considera que están a su alcance, colaborando con el resto al aportar lo aprendido durante la experiencia.

La estructura del artículo es la que describimos en este párrafo. En primer lugar se proporciona un breve repaso a lo publicado sobre el uso de videojuegos en las aulas de matemáticas. El segundo bloque se dedica a clarificar el enfoque tomado respecto a las actividades de resolución de problemas y la modelización matemática. Estas dos secciones de tipo teórico son la base de la concreción de la propuesta didáctica. Esta propuesta contiene una descripción del videojuego utilizado, un análisis de los aspectos matematizables del videojuego y una descripción de la dinámica de aula que se genera al trabajar de forma colaborativa. Estas consideraciones específicas se sintetizan en una sección final de reflexiones didácticas. Todos los aspectos concretos de la experiencia son altamente dependientes de las características específicas del videojuego utilizado, pero se pretende que el lector asimile la forma en la que se ha diseñado la actividad para que explore por su cuenta las posibilidades de otros videojuegos para los que puede tener sentido adaptar esta propuesta de actividad.

1. VIDEOJUEGOS COMO HERRAMIENTA DE APRENDIZAJE EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En la literatura, la actividad de juego se entiende como un sistema en el que los jugadores se involucran en un conflicto artificial y definido por reglas, que da lugar a un resultado cuantificable [21]. En la práctica del juego existen diversos elementos que promueven el aprendizaje y que habilitan la formación, cohesión social o el soporte a la comunicación. Desde esta perspectiva, se considera que un niño aprende a partir de jugar con otros, ya que, en muchos casos, jugar conlleva situaciones y actividades más complejas que las que experimenta en su día a día [22].

Las matemáticas se pueden considerar una tecnología simbólica que está caracterizada por unas actividades universales, que son contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar [5]. La ejecución de estas actividades es la que promueve la necesidad de crear y desarrollar los conceptos matemáticos que consideramos relevantes. En concreto, los juegos están relacionados con el aprendizaje de las matemáticas, ya que requieren relacionarse con unas reglas, incitan al uso de aquellas técnicas que llevan al éxito y permiten desarrollar patrones de juego complejos, que pueden ser equivalentes a problemas matemáticos [14].

En las últimas décadas la actividad de juego se ha transferido también a los entornos digitales. Los videojuegos aparecieron en la segunda mitad del siglo XX para ser, ya a principios de la década de 1980, un producto diseñado para el entretenimiento de niños y adolescentes. Las primeras generaciones que incorporaron la actividad de juego digital en su infancia quisieron seguir jugando en la adolescencia y en su etapa adulta, con lo que la industria del videojuego creció rápidamente. La llegada, a principios del siglo XXI, de los dispositivos móviles individuales ha permitido que los videojuegos hayan sido adoptados por personas de todas las edades. La omnipresencia y relevancia de los videojuegos en la sociedad actual es enorme, hasta llegar a ser la industria de entretenimiento que más dinero mueve. Los desarrollos tecnológicos y las posibilidades de negocio han permitido que los videojuegos evolucionen notablemente. No solo desde el punto de vista técnico o artístico, también presentando una grandísima variedad de géneros que plantea diferentes retos a los jugadores.

Como producto de ocio, los videojuegos poseen características que los hacen atractivos para los jugadores y que los dotan de una gran potencialidad como instrumentos para desarrollar habilidades o estrategias específicas, así como para la adquisición de conocimientos [12]. Las características principales de los videojuegos que los habilitan como herramientas en entornos educativos son la competición, la presencia de objetivos, la existencia de reglas bien definidas y la necesidad de tomar decisiones [7]. También se ha apuntado que la naturaleza de la interacción con la máquina permite ofrecer respuesta inmediata a las acciones de los jugadores. La rapidez con la que se obtienen respuestas, reacciones o diferentes tipos de *feedback* a las acciones del jugador permiten que este adapte y mejore aspectos de su juego para conseguir los retos que el videojuego plantea [9].

En una revisión sistemática de la literatura se encontraron evidencias de mejora en habilidades motoras y perceptivas, así como en habilidades cognitivas como la

rotación mental, la memoria o la resolución de problemas, entendida en un sentido amplio del término [8]. Estos investigadores también documentan beneficios en habilidades sociales para aquellos videojuegos que promueven los aspectos cooperativos del juego. Se ha comprobado también que los videojuegos educativos, aquellos diseñados expresamente para ayudar al aprendizaje, no son los que más interesan a los estudiantes. Estos prefieren jugar a videojuegos comerciales, ya que están diseñados para potenciar su aspecto lúdico [15].

Respecto al aprendizaje de las matemáticas a partir del uso de videojuegos, en los últimos años se han desarrollado algunas investigaciones muy clarificadoras de su potencial didáctico. De hecho, se han explorado diversas formas de utilizar videojuegos para promover aprendizajes matemáticos. Existen casos exitosos en los que se desarrollan videojuegos que alinean adecuadamente los objetivos del juego y los objetivos de aprendizaje. Este sería el caso de *Semideus*, un videojuego en el que las mecánicas de juego hacen necesario trabajar con el valor de las fracciones para avanzar en la aventura propuesta [20]. Otro ejemplo muy interesante es *DragonBox Algebra*, en el que las operaciones básicas para resolver ecuaciones de primer grado se han traducido a un formato visual y los alumnos aprenden sus fundamentos sin necesidad de pasar por aspectos abstractos en primera instancia [13]. También se ha trabajado en actividades en las que un videojuego es el foco de atención pero el trabajo matemático se complementa con otras actividades. En una experiencia de aula en la que se usa un videojuego del género de los puzzles tridimensionales, la actividad de juego se acompaña de una secuencia de ejercicios y problemas planteados para que los alumnos de primaria visualicen las plataformas tridimensionales del juego soportándose en el uso de materiales manipulativos [2]. En esta secuencia, son especialmente interesantes los productos que desarrollan los alumnos en forma de plataformas tridimensionales que podrían ser nuevos niveles a incorporar en el videojuego.

En la propuesta presentada en este artículo se toma como referencia un estudio exploratorio en que se usa el videojuego comercial *Plague Inc: Evolved* para introducir el uso de funciones para modelar aspectos esenciales del juego con estudiantes de secundaria promoviendo el trabajo de modelización matemática y el estudio de la función logística [11]. De esta forma, la actividad matemática promovida en el trabajo de aula con el videojuego es la modelización matemática.

2. MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Existen varias formas de entender la modelización matemática en la literatura [1], pero una concepción ampliamente compartida es la de considerarla un proceso de resolución de problemas que vincula el mundo real y las matemáticas. Implica la matematización de situaciones del mundo real y la elaboración de modelos matemáticos para describir los fenómenos estudiados, a menudo conceptualizados como el resultado de haber participado en un complejo proceso de modelización. Las actividades de modelización matemática son tareas contextualizadas de resolución de problemas en las que la representación matemática de un fenómeno de la vida real es un aspecto clave de su proceso de resolución.

Para relacionar los elementos característicos de los modelos matemáticos con las producciones de los estudiantes, en nuestro estudio nos basamos en la siguiente definición de modelo matemático [19, p. 159]:

Los modelos son sistemas conceptuales que, por lo general, tienden a expresarse utilizando una variedad de medios de representación que interactúan, los cuales pueden involucrar símbolos escritos, lenguaje hablado, gráficos en computadora, diagramas o gráficos en papel, o metáforas basadas en la experiencia. Su finalidad es construir, describir o explicar otro(s) sistema(s).

Los modelos incluyen (a) un sistema conceptual para describir o explicar los objetos matemáticos relevantes, las relaciones, las acciones, los patrones y las regularidades que se atribuyen a la situación de resolución de problemas; y (b) procedimientos de acompañamiento para generar construcciones, manipulaciones o predicciones útiles para lograr objetivos claramente reconocidos.

A partir de esta definición, entendemos que crear y desarrollar modelos matemáticos destinados a describir o representar abstractamente un determinado fenómeno o realidad, es una tarea compleja. En lo sucesivo, nos referiremos por modelo a esta interacción entre diferentes conceptos y procedimientos.

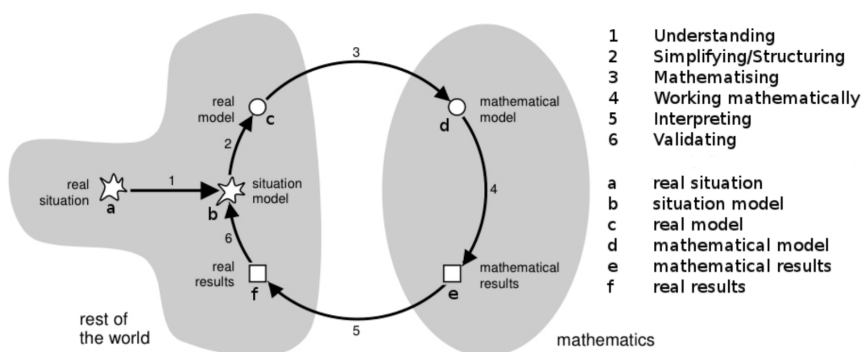


Figura 1: El ciclo de modelización matemática [6].

Por norma general se entiende que el proceso de modelización matemática es cíclico [6]. Los estudiantes analizan un fenómeno real, identifican los elementos clave que lo constituyen y generan un primer modelo real que expresan matemáticamente. Este modelo se encuentra, conceptualmente, en el espacio abstracto del conocimiento matemático. De esta forma los estudiantes pueden usar los procedimientos matemáticos que consideren adecuados para resolver las preguntas formuladas sobre el fenómeno estudiado en términos matemáticos, obteniendo una solución que debe reinterpretarse nuevamente en el dominio real. Este proceso puede repetirse diversas veces hasta encontrar un modelo que genere soluciones satisfactorias. La figura 1 muestra una representación comúnmente aceptada en la literatura sobre el ciclo de modelización.

La propuesta de aula que aquí se presenta está orientada a promover que los alumnos generen modelos matemáticos para un fenómeno concreto, jugar a un videojuego con éxito, y que los retos que propone el videojuego sean los que motivan a los alumnos a seguir el ciclo de modelización de forma efectiva.

3. EL VIDEOJUEGO UTILIZADO: VECTOR TOWER DEFENSE 2

En esta actividad utilizamos *Vector Tower Defense 2* (en adelante, VTD2), un videojuego que hemos usado en investigaciones previas [17, 16] y otras experiencias de aula [18, 3]. VTD2 es un juego programado en Flash, diseñado originalmente para ser jugado desde el navegador web. Desde la desaparición de Flash de la web, ha pasado a ser *abandonware* y puede jugarse libremente utilizando Flashpoint Infinity¹.

VTD2 es un videojuego de estrategia en tiempo real, y pertenece concretamente al subgénero de los *Tower Defense*. En VTD2 el jugador debe evitar que oleadas de enemigos crucen el mapa a partir de colocar una serie de torres defensivas que actúan de forma autónoma. En concreto, en cada oleada aparecen 20 enemigos que pretenden cruzar el mapa y el objetivo del jugador es impedirlo utilizando torres defensivas. Cuando se han eliminado los enemigos de una oleada el jugador se enfrenta a los 20 enemigos de la siguiente. Para superar el juego es necesario defenderse de 50 oleadas en total.

Este tipo de videojuego es de los más sencillos dentro del género de estrategia y permite a los jugadores familiarizarse rápidamente con las mecánicas de juego, por la simplicidad de su planteamiento. Sin embargo, a partir de unas premisas básicas relativamente sencillas, las cuestiones estratégicas que aparecen en la toma de decisiones son complejas ya que exigen coordinar diversos objetos que tienen que trabajar de forma conjunta.

En esta sección se detallan los elementos de diseño que caracterizan a VTD2 y que son los que permiten que existan elementos matemáticos en la toma de decisiones. En este sentido, para poder armar una actividad matemática rica sobre el uso de un videojuego es necesario controlar en detalle la formulación específica de sus características, ya que de ellas depende el tipo de actividad matemática que van a desarrollar los alumnos y los contenidos a los que van a tener que enfrentarse.

La figura 2 muestra la pantalla de juego de VTD2. En la parte superior se proporciona información al jugador sobre el estado de juego a partir de la puntuación, el nivel de juego alcanzado, las vidas que le quedan al jugador, el dinero del que dispone para invertir en torres. En la parte derecha de la pantalla se muestra información sobre las torres disponibles y las características de los enemigos que aparecerán en las siguientes oleadas.

En la parte central se puede ver un camino por el que circulan nuestros enemigos (esos objetos con forma de pez que avanzan juntos en la parte superior) y un pequeño conjunto de torres que los atacan. Cada enemigo tiene una cantidad inicial de puntos de vida que van disminuyendo con cada ataque que recibe de las torres. En concreto

¹BlueMaxima's Flashpoint es un proyecto de conservación de videojuegos programados en Flash: <https://flashpoint-infinity.uptodown.com>

cada ataque resta una determinada cantidad de puntos de vida; cuando el contador llega a cero, el enemigo desaparece.

Estéticamente, el juego tiene un diseño abstracto y de colores vivos. Esto permite identificar claramente cada elemento en pantalla, pero también evitar posibles sesgos de género, ya que no se asocia a ningún contexto concreto. Un aspecto relevante es que los videojuegos de estrategia contienen en su formulación referencias bélicas, pero en este caso están completamente enterradas en el diseño de arte, con lo que el juego no presenta referencias violentas.

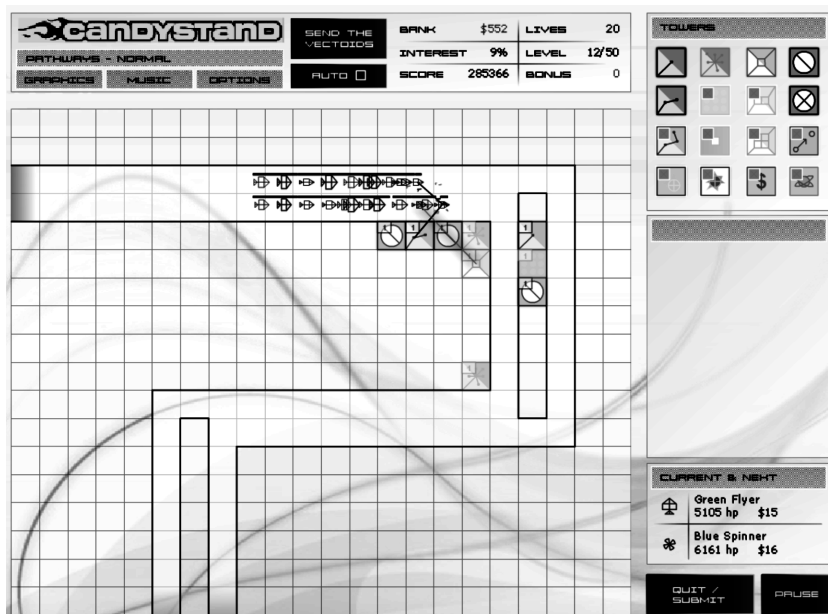


Figura 2: Una captura de pantalla de *Vector Tower Defense 2*.

Es importante describir la dinámica económica del juego. El jugador dispone de un banco de recursos que puede invertir en comprar torres o en mejorarlas. Las torres también pueden venderse y recuperar una parte de su coste inicial. De hecho, la gestión de estos recursos es el principal aspecto limitante en la toma de decisiones del jugador. Entre las mecánicas de juego se incluye un elemento que promueve el ahorro, ya que al inicio de cada oleada de enemigos se incrementa el contador económico en un porcentaje concreto (3% al inicio del juego) que el jugador puede incrementar a partir del uso de un bonus concreto. Justamente, en las oleadas múltiples de 5 se activa la posibilidad de usar un bonus que mejora algunas características del juego. El bonus puede aplicarse a mejorar el daño de las torres, su alcance, a incrementar el contador de vidas o a mejorar ese porcentaje de ingresos económicos al inicio de una oleada.

Finalmente, los elementos principales del juego son las torres defensivas. Para colocar una torre es necesario asumir su coste y elegir la posición en la pantalla en

la que se ubicará. Cada tipo de torre tiene unas características distintas y elegir las adecuadamente afecta notablemente en el rendimiento obtenido. En esencia, cada torre tiene un alcance concreto y ejerce una cantidad de daño en cada ataque. La figura 3 muestra el detalle del menú de elección de torres y la información relativa a la torre verde de nivel 2 (primer elemento de la segunda fila). En este caso, la torre tiene un coste de 400, hace un daño de 45 puntos de vida en cada ataque, excepto a enemigos verdes para los que el daño se incrementa en un 50% y a enemigos rojos en los que se disminuye el daño al 50%.



Figura 3: Una captura de pantalla de *Vector Tower Defense 2*.

El juego ofrece al jugador 12 torres de 4 colores distintos. Cada color presenta torres de tres niveles de potencia que pueden tener comportamientos distintos. Por ejemplo, las torres rojas de nivel 1 y 2 atacan a diversos enemigos al mismo tiempo, aunque con un ataque relativamente débil. Por su parte la torre roja de nivel 3 ataca a un solo enemigo en cada ataque, aunque dispone de un gran alcance y un ataque muy potente, lo que debería justificar su coste. Existen también unas sinergias concretas entre las torres según sus colores. Las torres verdes y rojas atacan con mayor fuerza a los enemigos de su mismo color, pero con menos intensidad al color opuesto. Este factor de diseño promueve que el jugador deba alternar su uso para compensar su potencia de ataque. Algo similar pasa entre las torres lilas y azules, con la característica específica de que las torres azules centran su ataque en ralentizar a los enemigos, más que en ejercerles daño.

Como hemos apuntado, los enemigos también tienen características propias, como su valor de vida inicial, que se va incrementando en cada oleada; o el color, que puede ser verde, rojo, lila, azul, blanco o amarillo. De esta forma, cada tipo de enemigos se ve afectado de forma diferente por cada una de las torres. Todos estos enemigos se desplazan a una misma velocidad excepto las torres amarillas, que se mueven especialmente rápido.

Cada uno de estos elementos que conforman el diseño de VTD2 son explícitos en el juego. Las características de los enemigos y de las torres se pueden consultar en todo momento. De esta forma se puede usar la información que proporciona el juego directamente para deducir determinados comportamientos, sin necesidad de utilizar técnicas de ingeniería inversa. Esta vertiente, en la que un videojuego de defensa de torres no es suficientemente explícito y es necesario plantear actividades para cuantificar los aspectos relevantes del diseño del juego, es la que se explota en [10].

4. PROPUESTA DE AULA: TODOS CONTRA LA MÁQUINA

Una partida habitual a VTD2 sigue la siguiente dinámica: un jugador se enfrenta al reto de evitar que los enemigos crucen el campo de juego y, gestionando los recursos que va acumulando al eliminar enemigos, invierte en un conjunto de torres que van a defender su territorio. Conforme el juego avanza y el jugador supera niveles, la elección de la tipología de torres usadas, la gestión de los recursos y los bonus que va consiguiendo se vuelven elecciones más delicadas, en el sentido de que una mala decisión vuelve poco efectiva la defensa que propone el jugador.

De hecho, el árbol de decisiones que se abre al jugador es enorme. Algunas de las preguntas que se plantean los jugadores en las primeras partidas son las siguientes:

- ¿Qué torres y qué combinaciones de torres son más efectivas?
- ¿En qué posiciones del terreno de juego es mejor colocarlas?
- Si lleno el terreno de juego de las torres azules que ralentizan a los enemigos ¿me quedarán recursos para disponer de torres que los eliminen?
- Si solo uso torres rojas, ¿llegará un momento en el que no pueda defenderme de los enemigos verdes?
- ¿Hasta qué punto es efectivo incrementar el interés de bonus al inicio de cada oleada?
- ¿Vale la pena vender gran parte de las torres que ya tengo colocadas para reiniciar mi estrategia defensiva?

La respuesta a estas preguntas no es siempre inmediata y puede resolverse de diversas formas, pero el tiempo necesario para obtener una respuesta adecuada para cada pregunta es considerable. Esto nos lleva a plantear un tipo de reto concreto en el aula a un grupo-clase: que todos los estudiantes trabajen de forma colaborativa para aprender a superar los retos del juego y que uno de ellos consiga superar los 50 niveles necesarios para alcanzar el final del juego. De esta forma los estudiantes pueden trabajar individualmente o en pequeños equipos para identificar estrategias de éxito y compartirlas con el resto de la clase.

El papel del profesor es claro aunque exigente: debe promover que los alumnos superen las pruebas de ensayo y error para desarrollar análisis en los que intervenga de forma clara y efectiva el trabajo de modelización matemática y debe ayudar a los alumnos a buscar un formato adecuado de comunicación para los hallazgos que deben compartirse con el resto de alumnos. Es importante no perder de vista que el objetivo didáctico de la actividad es que los alumnos desarrollen modelos matemáticos que expliquen los comportamientos de enemigos y torres en el juego. Para ello es necesario que el profesor conozca en detalle los aspectos matematizables del videojuego y que pueda anticiparse a las necesidades de los alumnos. Si algunos aspectos del juego van a tener que estudiarse para poder aprender a jugar de forma más efectiva, el profesor puede preparar materiales concretos para promover el trabajo matemático de los estudiantes.

5. ACTIVIDAD MATEMÁTICA PROMOVIDA POR VECTOR TOWER DEFENSE 2

Ya se ha apuntado que VTD2 es un videojuego que propone un reto a los jugadores en el que la modelización matemática puede ser clave para superarlo con éxito. Esta afirmación se sustenta en estudios previos que nos permiten identificar las oportunidades de aprendizaje matemático promovidas por VTD2. En un estudio de tipo cualitativo se consideró la toma de decisiones de alumnos de primaria y secundaria al jugar a VTD2 en parejas. Aunque el juego sea individual, el juego en pareja fuerza a los estudiantes a explicitar sus decisiones para llegar a consensos [17].

Por una parte, se identificaron una gran cantidad de oportunidades de aprendizaje matemático en relación a diversos contenidos matemáticos. Durante el juego los alumnos deben tomar decisiones fundamentadas en aspectos aritméticos, geométricos y de relaciones funcionales entre variables, proporcionales o no. La existencia de estas oportunidades de aprendizaje matemático durante el juego es la que permite introducir actividades matemáticas externas al juego para fundamentar la toma de decisiones.

Por otro lado, se observa que existen situaciones problemáticas durante el juego que no pueden resolverse de inmediato ni con una secuencia simple de acciones. Se observa que algunos fenómenos requieren de soluciones que afectan a otras situaciones problemáticas en el juego. Un ejemplo es la necesidad de enfrentarse a los enemigos amarillos, que circulan a una velocidad muy superior al resto. Pero tratar de retener a estos enemigos a base de colocar torres azules (que ralentizan) provoca que no se puedan utilizar efectivamente esos recursos para eliminar a los otros tipos de enemigos. En el estudio, el proceso de juego al VTD2 se manifiesta como una actividad compleja de resolución de problemas, ya que los alumnos tratan de resolver diferentes tipos de situaciones problemáticas que aparecen durante el juego de forma simultánea y se solapan generando amplios ciclos de «Observación – Planificación – Toma de decisiones» que caracterizan la actividad de resolución de problemas matemáticos.

En un segundo estudio se utiliza un *eye-tracker* para monitorizar el foco de

atención de los alumnos al jugar individualmente a VTD2. El seguimiento de la atención ocular de los alumnos permite identificar nuevos aspectos no revelados por sus conversaciones. En concreto, se observa que los alumnos leen en detalle las informaciones que ofrece el juego sobre sus elementos. También es especialmente relevante la atención que prestan al lugar preciso en el que deben colocar una torre para maximizar su impacto en el juego, como se puede observar en la figura 4, en la que el cuadrado resaltado muestra el foco de atención ocular del alumno al estudiar los límites del alcance de un bonus que incrementa el daño de todas las torres que afecta.

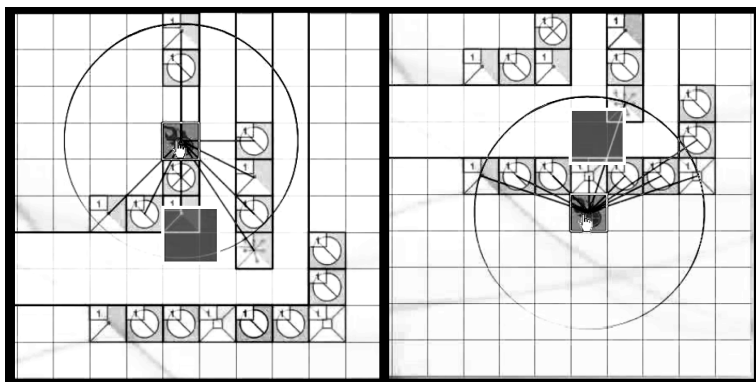


Figura 4: Estudiando el alcance de un elemento de bonus para decidir su posición.

Otro aspecto relevante identificado son las decisiones que toma el jugador en situaciones de riesgo que puede anticipar. La figura 5 muestra dos eventos en una misma oleada del juego. En la imagen de la izquierda se observa que el jugador presta su atención a los enemigos que están entrando en la zona en la que se han acumulado las torres. El jugador interpreta que estos enemigos rojos podrían pasar esa zona y restarle vidas, con lo que se fija en la zona inferior izquierda de la pantalla, donde decide establecer un nuevo conjunto de torres para evitar que los enemigos lleguen hasta el final del camino.

Analizando este tipo de acciones en situaciones de riesgo durante el juego se observa que los alumnos van acumulando conocimientos específicos sobre el juego. Cuando esta situación se da en las primeras partidas, los jugadores actúan caóticamente, buscando información rápidamente y tomando decisiones sin criterio. Cuando ya se han enfrentado a diversas oleadas y han podido observar el comportamiento de los enemigos ante diferentes tipos de torre el comportamiento en situaciones de riesgo cambia. Cuando el jugador se va volviendo experto, en estos momentos de riesgo la toma de decisiones sigue siendo rápida, pero los jugadores se dirigen directamente a los elementos que necesitan y toman decisiones más efectivas. Este comportamiento nos hace pensar que los jugadores se enfrentan al juego de una forma acumulativa, en la que van añadiendo conocimientos concretos a su bagaje en el juego. Se podría decir que los alumnos generan un modelo mental que explica comportamientos en el

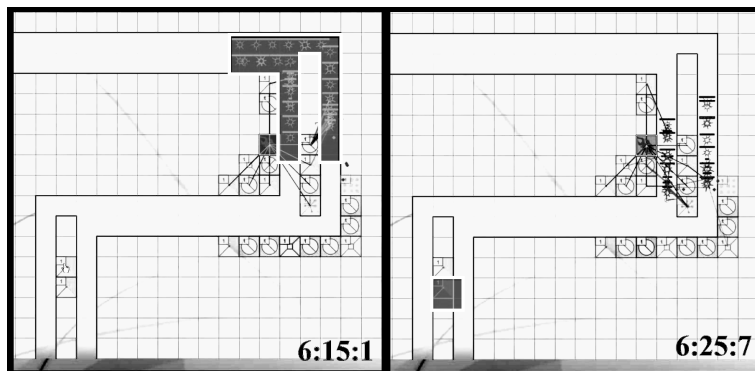


Figura 5: Anticipación.

juego. La propuesta de aula en la que toda la clase juega colaborativamente contra la máquina pretende obligar a los alumnos a hacer explícitos estos modelos mentales y transformarlos en modelos matemáticos y compartirlos con el resto de estudiantes, promoviendo un mayor aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje matemático que surgen.

6. MODELOS MATEMÁTICOS PARA JUGAR MEJOR

Las secciones anteriores presentan los elementos clave que fundamentan la implementación de aula de la actividad. En esta sección detallamos algunas necesidades matemáticas concretas que aparecen durante la actividad y una propuesta determinada para enfrentarse a ellas desde la perspectiva de la modelización matemática.

En el aula, y una vez los alumnos han tratado de superar el juego por ellos mismos de forma libre, el papel del profesor es identificar las dificultades que los alumnos observan en el juego. Se puede proponer a pequeños grupos de alumnos que experimenten con aspectos concretos y que compartan sus hallazgos con el resto de la clase. En algunas ocasiones los alumnos tratan de proporcionar soluciones simples a problemas complejos, pero no acostumbra a ser una buena opción en esta actividad. La postura del profesor debe ser la de un guía que les ayuda a dar forma al problema a resolver y que les proporciona ideas concretas para desarrollar una solución.

En este artículo nos centraremos en tres aspectos esenciales del juego y una de las formas concretas de resolverlo, pero algo que hace realmente interesante a esta actividad es que existen más elementos relevantes que merecen ser estudiados, así como otras vías para pensar cómo resolverlos.

6.1. ¿QUÉ TORRES Y QUÉ COMBINACIONES DE TORRES SON MÁS EFECTIVAS? COSTE DE OPORTUNIDAD

El primer aspecto que los alumnos identifican como clave es la elección de las torres. Ya en las primeras partidas observan que algunas torres parecen ser más

efectivas que otras. Observan también que torres con diferentes características pueden combinarse para generar sinergias positivas. Ya en las primeras partidas algunos alumnos comentan que alguna torre que no parecía muy útil puede ser indispensable en algunos casos.

Entrando en detalle, los alumnos observan que las torres de nivel 2 tienen un rendimiento muy superior a las de nivel 1, con lo que vale la pena la inversión. También acaban observando que las torres azules, al ralentizar a los enemigos, permiten que el resto de torres les afecten durante más tiempo. En concreto, las torres azules son indispensables contra los enemigos amarillos, que cruzan el terreno de juego a una velocidad altísima. Este tipo de observaciones les lleva a plantearse la necesidad de determinar las mejores combinaciones de torres, pero no acostumbran a establecer procedimientos que les permitan tomar decisiones informadas.

El profesor puede pedir a pequeños grupos de alumnos que experimenten con la siguiente premisa: si dispones de 500 \$, ¿qué combinación de torres es más efectiva? El punto clave es que un pequeño grupo de alumnos trabaje con la limitación de los 500 \$, que permitirá decidir qué torres se usan en las primeras fases del juego, pero que otros alumnos estén encargados de explorar las mejores opciones al disponer de 1000 \$, y otros con 1500 \$. Estas opciones deben ejecutarse dentro del juego y no es fácil experimentar con valores mayores ya que, en ocasiones, al forzar la situación se pierde la partida antes de poder dar respuesta a la pregunta planteada.

De esta forma, para experimentar con las torres más potentes, un elemento clave es el hecho de que el juego dispone de un modo denominado *Sandbox*, en el que la dinámica es distinta. En este modo el jugador empieza con una gran cantidad de recursos y el objetivo es disponer las torres en el mapa en una posición y ver hasta qué nivel se sostiene su estructura, sin generar nuevos recursos durante la partida. De esta forma, el modo *Sandbox* puede actuar de entorno de pruebas. Así, cada grupo de alumnos obtiene información detallada que puede irse usando durante diferentes momentos del juego, maximizando el impacto de las torres elegidas en cada fase.

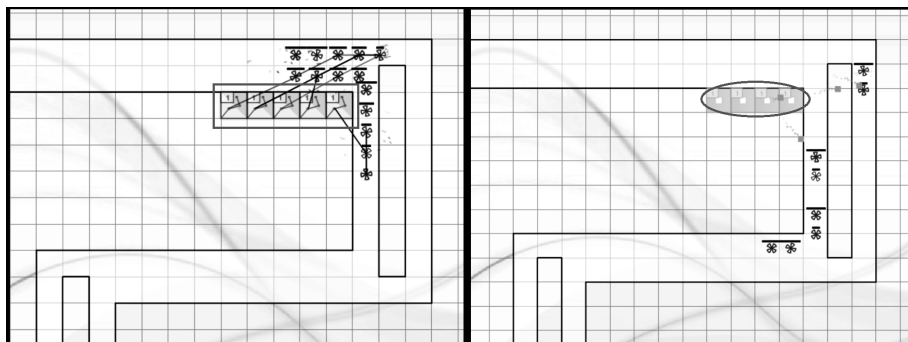


Figura 6: Coste de oportunidad en la elección de torres.

La figura 6 muestra dos configuraciones distintas en el modo *Sandbox* con un gasto de recursos de 10 000 \$. En la izquierda se pueden colocar 5 torres verdes de

nivel 3 (enmarcadas en un rectángulo en la figura 6), que son capaces de eliminar 14 de los 25 enemigos de la primera oleada de este modo (en el que los enemigos son mucho más resistentes que en el modo de juego normal). En la imagen de la derecha se colocan cuatro torres rojas de nivel 3 (enmarcadas en un óvalo en la figura 6), que suponen el mismo gasto en recursos, y que consiguen eliminar 23 de los 25 enemigos. Por ello, los alumnos acaban decantándose mayoritariamente por este tipo de torre cuando llegan a los niveles avanzados del juego, teniendo en cuenta que su efectividad contra los enemigos verdes se ve disminuida por los aspectos de diseño antes señalados.

Esta actividad permite introducir un concepto económico como es el coste de oportunidad, entendido como el coste de la alternativa a la que renunciamos cuando tomamos una determinada decisión. Este concepto es el que estructura el modelo con el que los alumnos toman decisiones sobre la conveniencia de elegir cada tipo de torre y que refinan posteriormente durante la experiencia.

6.2. ¿EN QUÉ POSICIONES DEL TERRENO DE JUEGO ES MEJOR COLOCAR LAS TORRES?

Una vez los alumnos han determinado qué combinaciones de torres son las más efectivas, aparece la necesidad de determinar las posiciones del terreno de juego en las que colocarlas. De esta forma, si los alumnos identifican las posiciones que permiten obtener el máximo rendimiento de las torres, podrán decidir qué torre y en qué nivel ocupan esa posición. De hecho, cuando los alumnos aprenden que unas posiciones concretas ofrecen un mayor aprovechamiento de las torres, las usan desde los primeros niveles. Pero esta estrategia se vuelve en su contra cuando avanzan los niveles, ya que conforme avanza el juego prefieren tener otras torres de nivel superior en esas posiciones. Esta estrategia evoluciona durante la actividad, ya que los alumnos acaban reservando las mejores posiciones para ser ocupadas en oleadas superiores por torres de mayor nivel.

Pero para decidir qué posiciones son las más adecuadas debe encontrarse un criterio de decisión. Es fácil para los alumnos establecer que si la zona cubierta por el rango de una torre ocupa una gran cantidad de la superficie del camino, este hecho implicará que los enemigos circularán durante mucho tiempo al alcance de esa torre. Por ello, una actividad productiva y fácil de reproducir en el aula es dibujar con un compás el rango de una torre en cada posición posible de la pantalla, y estimar el área de camino que cubre. La figura 7 muestra el trabajo de un estudiante al tratar de determinar las posiciones más efectivas del mapa para el rango de la torre verde de primer nivel.

Es necesario apuntar que cada mapa del juego presenta un camino distinto y requiere volver a determinar sus posiciones óptimas, y que la posición óptima en el terreno de juego es distinta para cada tipo de torres, porque estas tienen rangos distintos. De esta forma, los alumnos generan un modelo que permite identificar las posiciones más ventajosas para cada tipo de torre basado en una función que mide el área de camino cubierta por su rango.

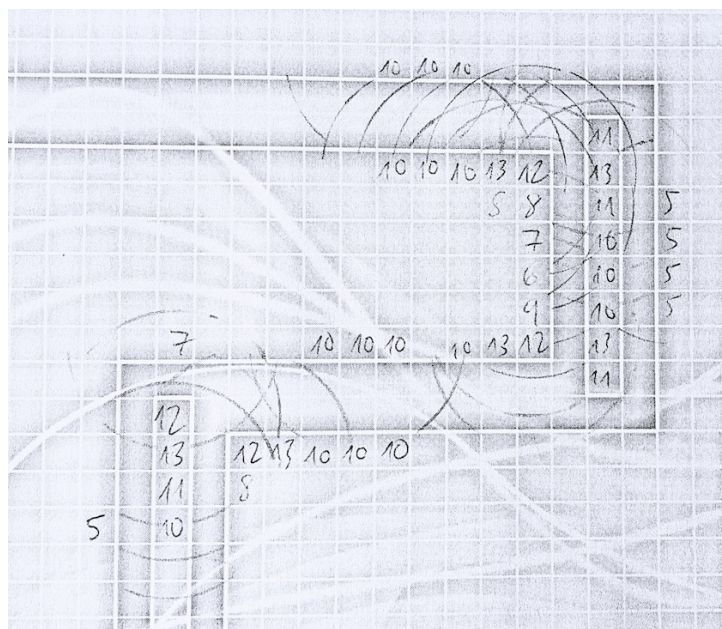


Figura 7: Calculando el alcance de las torres en diferentes posiciones del mapa.

6.3. USO OPTIMIZADO DE LOS INTERESES

Un elemento útil didácticamente del diseño de VTD2 es el uso de intereses que permiten ampliar los recursos disponibles para comprar o mejorar torres. En concreto, en el momento en el que se inicia una nueva oleada de enemigos se aplica un interés a la cantidad de recursos disponibles. Este interés es de un 5% al inicio del juego, pero puede incrementarse un 3% nominal al usar los bonus que se ganan cada 5 oleadas. En general, los alumnos no prestan atención de inicio a la mecánica de los intereses y puede ser necesario que el profesor recomiende que exploren su uso. Cuando los estudiantes observan que permiten incrementar sus recursos si se usan adecuadamente, estos empiezan a incorporarlos a su toma de decisiones.

En primera instancia los alumnos no tratan de entender cómo se aplican los intereses y en algunos casos es necesario que el profesor recuerde la forma de calcular un incremento porcentual. A partir de este punto, una pregunta investigable es calcular qué cantidad de recursos es necesaria a un interés concreto para poder comprar una torre concreta con los intereses generados. Este sería un caso de problema aritmético que permite resolver una situación de juego concreta, pero la mecánica de los intereses tiene una mayor potencialidad de análisis.

Si en lugar de centrarse en el beneficio obtenido en una sola oleada se plantea la opción de estudiar el impacto de los intereses durante un conjunto de oleadas, aparece la necesidad de generar un modelo matemático que describa esta situación y permita sustentar la toma de decisiones. Este modelo puede implementarse sobre

	3 %	6 %	9 %	12 %	15 %	18 %
Ronda 1 - inicio	300	300	300	300	300	300
Ronda 1 - intereses	309	318	327	336	345	354
Ronda 1 - ganancias	509	518	527	536	545	554
Ronda 2 - intereses	524	549	574	600	627	654
Ronda 2 - ganancias	724	749	774	800	827	854
Ronda 3 - intereses	746	794	844	896	951	1 007
Ronda 3 - ganancias	946	994	1 044	1 096	1 151	1 207
Ronda 4 - intereses	974	1 054	1 138	1 228	1 323	1 425
Ronda 4 - ganancias	1 174	1 254	1 338	1 428	1 523	1 625
Ronda 5 - intereses	1 210	1 329	1 459	1 599	1 752	1 917
Ronda 5 - ganancias	1 410	1 529	1 659	1 799	1 952	2 117
Ronda 6 - intereses	1 452	1 621	1 808	2 015	2 245	2 498
Ronda 6 - ganancias	1 652	1 821	2 008	2 215	2 445	2 698
Ronda 7 - intereses	1 701	1 930	2 188	2 481	2 811	3 184
Ronda 7 - ganancias	1 901	2 130	2 388	2 681	3 011	3 384
Ronda 8 - intereses	1 958	2 258	2 603	3 003	3 463	3 993
Ronda 8 - ganancias	2 158	2 458	2 803	3 203	3 663	4 193

Cuadro 1: Primer modelo sobre el impacto de los intereses en el juego.

una hoja de cálculo para agilizar el proceso. En primera instancia, los alumnos identifican los elementos clave: que al inicio de cada oleada se aplica un interés a los recursos disponibles y que durante cada oleada se obtienen unos recursos por el hecho de ir eliminando enemigos. El cuadro 1 muestra la comparación de los recursos disponibles diferenciando en cada columna el interés aplicado, que va del 3 % al 18 %. Con esta simulación, los alumnos ven claramente las posibilidades que se presentan para alcanzar un número de recursos que permita comprar las torres más caras, que son las más potentes.

Pero cuando los alumnos enfocan parte de su estrategia de juego a incrementar los intereses, observan un nuevo problema: al colocar nuevas torres van perdiendo recursos y no pueden acumular beneficios. Esto los obliga a no perder de vista la optimización del uso de torres y a matizar su estrategia basada en acumular beneficios vía intereses. Por ello refinan su modelo en una segunda iteración (cuadro 2) e incorporan gastos puntuales en momentos de necesidad, que les hace ver que la estrategia de incrementar intereses es válida pero que debe compaginarse con otros elementos para obtener el mayor éxito posible.

7. CONCLUSIONES Y REFLEXIONES FINALES

La actividad aquí desarrollada tiene una formulación muy específica y requiere de un conocimiento muy concreto por parte del docente de las características del videojuego utilizado y de los conceptos matemáticos que aparecen al jugar. Sin embargo, el hecho más destacable de esta actividad se da en el impacto sobre la valoración que hacen los alumnos sobre el papel del análisis matemático en su actuación. Aprender

	3 %	6 %	9 %	12 %	15 %	18 %
Ronda 1 - inicio	300	300	300	300	300	300
Ronda 1 - intereses	309	318	327	336	345	354
Ronda 1 - ganancias	509	518	527	536	545	554
Ronda 2 - intereses	524	549	574	600	627	654
Ronda 2 - ganancias	724	749	774	800	827	854
Ronda 3 - intereses	746	794	844	896	951	1 007
Ronda 3 - ganancias	946	994	1 044	1 096	1 151	1 207
Gasto en torre 400	546	594	644	696	751	807
Ronda 4 - intereses	562	612	663	717	773	832
Ronda 4 - ganancias	762	812	863	917	973	1 032
Ronda 5 - intereses	785	861	941	1 027	1 119	1 217
Ronda 5 - ganancias	985	1 061	1 141	1 227	1 319	1 417
Ronda 6 - intereses	1 015	1 124	1 244	1 375	1 517	1 672
Ronda 6 - ganancias	1 215	1 324	1 444	1 575	1 717	1 872
Gasto en torre 400	815	924	1 044	1 175	1 317	1 472
Ronda 7 - intereses	839	952	1 075	1 210	1 357	1 517
Ronda 7 - ganancias	1 039	1 152	1 275	1 410	1 557	1 717
Ronda 8 - intereses	1 070	1 221	1 390	1 579	1 790	2 026
Ronda 8 - ganancias	1 270	1 421	1 590	1 779	1 990	2 226

Cuadro 2: Segundo modelo sobre el impacto de los intereses en el juego.

a jugar al VTD2 no es difícil, pero alcanzar sus niveles más altos es un reto considerable. De esta forma, en este tipo de actividad se pone de manifiesto de forma clara que el análisis de diversas situaciones relevantes para la toma de decisiones desde la perspectiva de la modelización matemática permite tomar decisiones informadas que mejoran substancialmente su juego. De hecho, al principio los alumnos se hacen preguntas que permiten sortear las dificultades de los primeros niveles, que resuelven a partir de los primeros estudios. Esto les permite alcanzar niveles más avanzados en los que se encuentran nuevas dificultades y ya toman directamente la perspectiva de analizarlos matemáticamente. Con esto se genera un círculo virtuoso en el que el juego genera la necesidad de estudiar fenómenos matemáticamente y las soluciones generadas tienen un efecto en el que se generan nuevas preguntas. La simbiosis entre juego y análisis es muy efectiva en esta actividad y los alumnos así lo perciben.

Considerando que el profesorado pueda transportar esta propuesta de actividad a su contexto educativo concreto, es posible que un profesor considere usar la propuesta de juego aquí presentada, pero con un videojuego alternativo que conoce en detalle o que sabe que tiene un potencial específico que puede ser útil para sus objetivos didácticos. En primer lugar, es importante atender al soporte de juego. Esta decisión condiciona buena parte de la práctica de aula, ya que cada tipo de soporte permite un tipo u otro de videojuegos y, sobre todo, una forma distinta de interacción con la máquina. En los centros de secundaria es común disponer de aulas con diversos ordenadores o tabletas. Los ordenadores no suelen tener las características que permiten jugar a videojuegos exigentes desde el punto de vista gráfico: este es

el primer motivo por el que usamos VTD2, por su sencillez gráfica que permite jugar en cualquier ordenador. Por su parte, el soporte tableta permite ejecutar juegos diseñados para dispositivos móviles, en los que los controles del juego serán táctiles. Este hecho reduce el número de juegos disponibles, ya que no todos los tipos de juego se adaptan fácilmente a este tipo de control. Sin embargo, el tipo de experiencia que ofrece el juego en dispositivos móviles se adapta bien a los tiempos en el aula, ya que, en general, estos juegos plantean retos estructurados en fases que se pueden jugar en pocos minutos. El segundo aspecto a tratar es la elección del propio videojuego a utilizar. En [4] se identifican tres géneros de videojuegos con el potencial adecuado para promover aprendizajes matemáticos. Estos géneros son los videojuegos de estrategia, los de simulación y los de puzzle. Es necesario que el docente tenga experiencia en el juego y que tenga identificadas las oportunidades de aprendizaje matemático que se generan así como métodos de análisis específico. Finalmente, aunque el motor de la actividad sea superar el reto planteado por el videojuego, es conveniente dejar claro a los alumnos la importancia de los procesos desarrollados y el papel del trabajo matemático.

REFERENCIAS

- [1] A. ABASSIAN, F. SAFI, S. BUSH Y J. BOSTIC, Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education, *Investigations in Mathematics Learning* **12** (2020), no. 1, 53–65.
- [2] L. ALBARRACÍN, Una secuencia de actividades para desarrollar la visualización usando un videojuego, *Enseñanza de las Ciencias* **39** (2021), no. 2, 181–199.
- [3] L. ALBARRACÍN, J. CHICO, C. SIMARRO Y L. VALDÉS-SÁNCHEZ, Un taller de experimentación matemática usando un videojuego de estrategia, *Ensayos: Revista de la Facultad de Educación de Albacete* **34** (2019), no. 2, 85–99.
- [4] L. ALBARRACÍN, A. HERNÁNDEZ-SABATÉ Y N. GORGORIÓ, Los videojuegos como objeto de investigación incipiente en Educación Matemática, *Modelling in Science Education and Learning* **10** (2017), no. 1, 53–72.
- [5] A. BISHOP, *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education*, Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [6] W. BLUM Y D. LEISS, How do students and teachers deal with modelling problems?, *Mathematical modelling: Education, Engineering and Economics* (C. Haines, P. L. Galbraith, W. Blum y S. Khanet, eds.), 222–231, Springer, 2007.
- [7] D. CHARSKY, From edutainment to serious games: A change in the use of game characteristics, *Games and Culture* **5** (2010), no. 2, 177–198.
- [8] T. M. CONNOLLY, E. A. BOYLE, E. MACARTHUR, T. HAINEY Y J. M. BOYLE, A systematic literature review of empirical evidence on computer games and serious games, *Computers & Education* **59** (2012), no. 2, 661–686.
- [9] M. D. DICKEY, Engaging by design: How engagement strategies in popular computer and video games can inform instructional design, *Educational Technology Research and Development* **53** (2005), no. 2, 67–83.

- [10] I. FERRANDO, J. CASTILLO Y M. PLA-CASTELLS, Videojuegos de estrategia en Educación Matemática: Una propuesta didáctica en secundaria, *Epsilon* **97** (2017), 23–42.
- [11] P. FREJD Y J. B. ÄRLEBÄCK, Initial results of an intervention using a mobile game app to simulate a pandemic outbreak, *Mathematical Modelling and Applications* (G. A. Stillman, W. Blum y G. Kaiser, eds.), 517–527, Springer, 2017.
- [12] B. GROS, Digital games in education: The design of games-based learning environments, *Journal of Research on Technology in Education* **40** (2007), no. 1, 23–38.
- [13] J. GUTIÉRREZ, D. ARNAU Y J. A. GONZÁLEZ, Un estudio exploratorio sobre el uso de DragonBox Algebra[®] como una herramienta para la enseñanza de la resolución de ecuaciones, *Ensayos: Revista de la Facultad de Educación de Albacete* **30** (2015), no. 1, 33–44.
- [14] M. DE GUZMÁN, Enseñanza de las ciencias y la matemática, *Revista iberoamericana de educación* **43** (2007), 19–58.
- [15] K. R. HAMLEM, Children’s choices and strategies in video games, *Computers in Human Behavior* **27** (2011), no. 1, 532–539.
- [16] A. HERNÁNDEZ-SABATÉ, L. ALBARRACÍN, D. CALVO Y N. GORGORIÓ, EyeMath: Identifying mathematics problem solving processes in a RTS video game, *International Conference on Games and Learning Alliance, 2016* (R. Bottino, J. Jeuring y R. Veltkamp, eds.), 50–59, Lecture Notes in Computer Science (LNCS), 10056, Springer, Cham., 2016.
- [17] A. HERNÁNDEZ-SABATÉ, M. JOANPERE, N. GORGORIÓ Y L. ALBARRACÍN, Mathematics learning opportunities when playing a tower defense game, *International Journal of Serious Games* **2** (2015), no. 4, 57–71.
- [18] M. JOANPERE, J. NICOLICH, M. VILA Y L. ALBARRACÍN, Un videojuego de estrategia para proponer problemas de matemáticas, *Aula de innovación educativa* **248** (2016), 24–28.
- [19] R. LESH Y G. HAREL, Problem solving, modeling, and local conceptual development, *Mathematical Thinking and Learning* **5** (2003), no. 2-3, 157–189.
- [20] M. NINAUS, K. KIILI, J. McMULLEN Y K. MOELLER, Assessing fraction knowledge by a digital game, *Computers in Human Behavior* **70** (2017), no. 1, 197–206.
- [21] K. SALEN Y E. ZIMMERMAN, *Rules of play: Game design fundamentals*, MIT Press, Cambridge, 2004.
- [22] L. S. VIGOTSKY Y M. COLE, *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*, Crítica, Barcelona, 1979.