
Medidas indirectas en la formación inicial de maestros: resultados preliminares de una experiencia de aula

Lluís Albarracín
Francisco Rojas



UAB Universitat Autònoma de Barcelona



01

Origen del estudio



Universitat Autònoma
de Barcelona



Francisco Rojas

Professor Agregat UAB



Lluís Albarracín

Professor Agregat Serra
Hunter UAB



Matemáticas para Maestros

Asignatura de primer año
del Grado de Educación
Primaria.

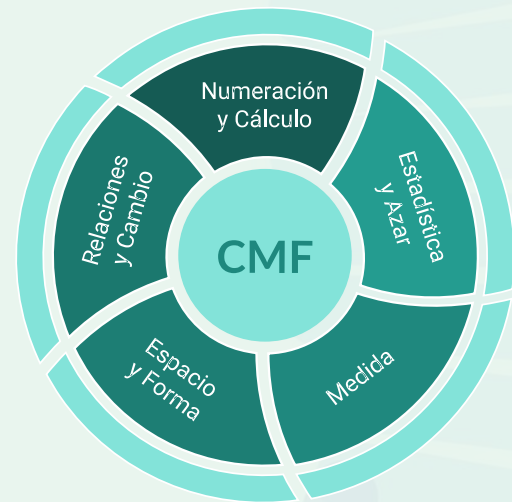
Cohorte 2022-2023

Gran Grupo: 71 estudiantes

Pequeño Grupo: 17 sub-grupos



Universitat Autònoma
de Barcelona



CONOCIMIENTO MATEMÁTICO FUNDAMENTAL:
Son los conocimientos matemáticos necesarios para seguir con **aprovechamiento** las asignaturas de matemática y su didáctica en el grado, teniendo en cuenta los requerimientos de la práctica profesional y las competencias matemáticas propias de la educación primaria.

(Castro Mengual, Prat, Albarracín y Gorgorió, 2014; Gorgorió y Albarracín, 2020; (Gorgorió, Albarracín, Ärleback, Laine, Newton & Villarreal, 2017; Gorgorió, Albarracín, Laine y Llinares, 2021).

Matemáticas para Maestros

Asignatura de primer año
del Grado de Educación
Primaria.

Cohorte 2022-2023

Gran Grupo: 71 estudiantes

Pequeño Grupo: 17 sub-grupos

Bloques de Contenidos: Estadística –
Números – Proporcionalidad – **Medida** –
Geometría.



Tipos de magnitudes y medidas
Unidades e instrumentos de medida
Procedimientos de medida y estimación
Práctica de medida

Medidas indirectas

En una *medida directa* es posible utilizar un instrumento de medida para obtener el valor numérico de una magnitud aplicando el instrumento de medida sobre el objeto a medir.

Cuando esto no es posible se puede tratar de *efectuar un procedimiento de medida indirecta* en el que es necesario desarrollar un modelo (generalmente geométrico) en el que se sustente el resultado a partir de mediciones auxiliares.

Es una tarea abierta en el sentido que no siempre existe un proceso bien definido que pueda ser enseñado, por lo que en muchas ocasiones deben desarrollarse modelos adecuados a la situación a estudiar.

Desde el punto de vista de la formación de maestros, el estudio de las medidas indirectas aparece como una oportunidad para visitar y reconceptualizar diversos elementos clave del proceso de medida.

Práctica: medidas indirectas



Área de la zona ajardinada



Diámetro del
Alcorque



Altura de la hoja más alta



Volumen del Farol
(incluyendo el mástil)

Práctica: secuencia didáctica

**Elaboración de
propuesta individual**
(Sesión 1)

**Cada estudiante
desarrolla una
propuesta**

describiendo los pasos
que piensa que son
necesarios para obtener
la medida final.

**Elaboración de
propuesta grupal**
(Sesión 1)

**Los grupos elaboran
una única propuesta**

poniendo en común sus
propuestas individuales,
señalando todos los
pasos necesarios.

**Medición y Elaboración
de Informe**
(Sesión 1)

**Los grupos
implementan sus
estrategias de
medición**

y escriben un informe del
proceso y los resultados.

**Puesta en común y
Propuesta de Mejora**
(Sesión 2)

**Las estudiantes
proponen mejoras**

a partir de la revisión de
las estrategias de
medición, justificando
qué aspectos es
necesario mejorar.



02

Por qué medida...
...y qué se espera que aprendan

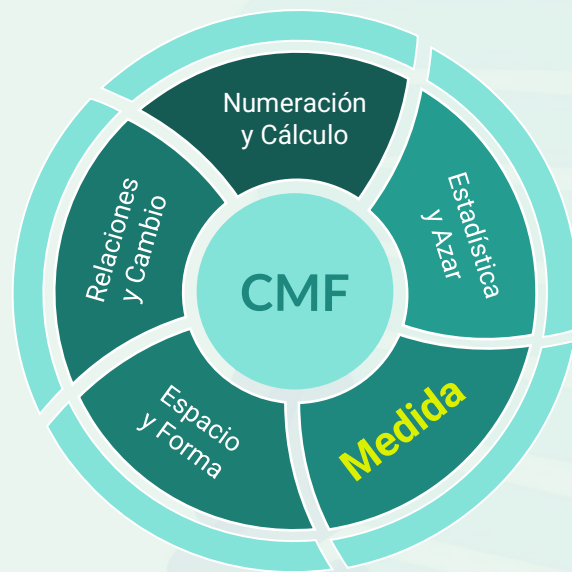
Aritmetización de la medida

Desde la escuela se suele considerar que el alumno aprenderá a medir de forma práctica por su cuenta a través de experiencias sociales o familiares (Chamorro, 2003).

Los materiales docentes sobre medida (ej. textos escolares) se orientan hacia la **consecución de un dominio aritmético**, con lo que se produce una desnaturalización de los objetivos del aprendizaje del sentido métrico (Mengual, Gorgorió y Albarracín, 2017), **careciendo de actividades prácticas como las mediciones** (Montoro et al., 2021).

Conocimiento Matemático Fundamental (CMF)

Medida. Es necesario demostrar el conocimiento del significado de magnitud medible (ángulo, longitud, área, volumen, capacidad, masa y tiempo) y de los **procesos de medida**; el conocimiento de las unidades de medida decimales y sexagesimales correspondientes y de los mecanismos para resolver situaciones de cambio de unidades, y el dominio de los conocimientos y las habilidades necesarias para resolver situaciones diversas relacionadas con las ideas de perímetro, área y volumen.

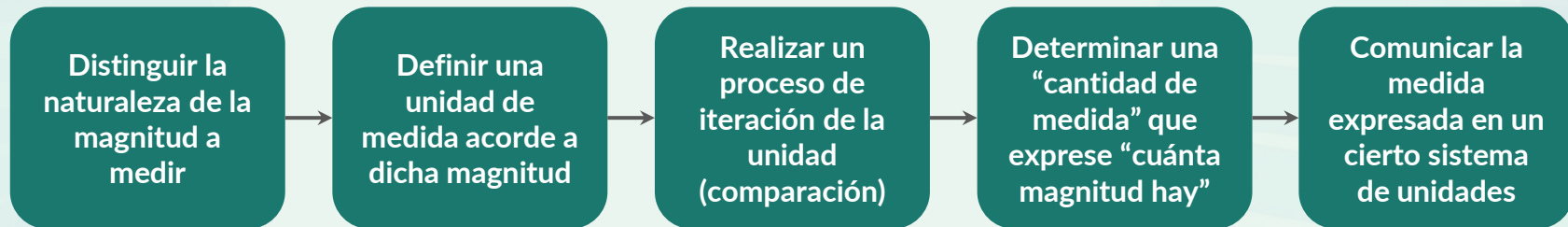


(Gorgorió, Albarracín, Ärlebäck, Laine, Newton & Villarreal, 2017)

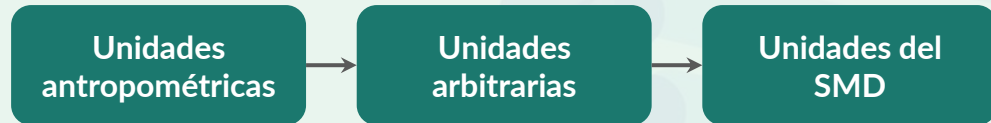
Medición y Unidades de medida

Medir involucra, al menos, los siguientes procesos:

(Reyes et al., 2013)



Unidades de Medida: cantidad de una determinada magnitud que se mantiene constante durante el proceso de medición



(Albarracín, et al., 2018)

Medir y Estimar una medida

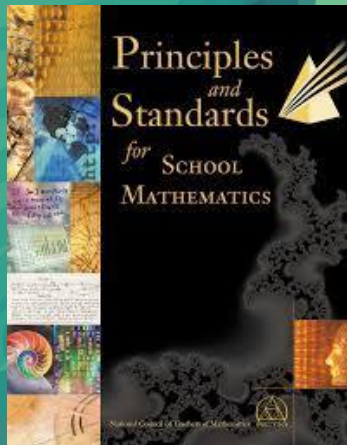
Tipos de medición (Pizarro, Albarracín y Gorgorió, 2016):

- **Directa:** se utiliza un instrumento de medida para obtener el valor numérico de una magnitud aplicándolo sobre el objeto a medir.
- **Indirecta:** a partir de la no disponibilidad de un instrumento o la inaccesibilidad del objeto a medir, se desarrolla un modelo, generalmente geométrico, en el que se sustente el resultado de la medida a partir de mediciones auxiliares.

Estimación de medidas es parte de la base para el aprendizaje de la medición física, por lo tanto, debe ser un tema incluido en la formación docente (NCTM, 2000).

- **Asignar perceptivamente un valor** o un intervalo de valores **y una unidad** correspondiente a una cantidad de magnitud discreta o continua por medio de los conocimientos previos o por comparación no directa a algún objeto referente (Pizarro, Gorgorió y Albarracín, 2014, 2015).

Aprendizaje de la Medida



Al final de la educación primaria, los estudiantes deberían ser capaces de:

- **Procesos principales en medida**

- comprender el **PROCESO DE MEDICIÓN**, hacer estimaciones, realizar mediciones y usar las medidas para describir y comparar fenómenos,
- seleccionar **UNIDADES Y HERRAMIENTAS ADECUADAS** a la medición al nivel de exactitud que se requiera en una situación en concreto,
- entender la estructura y el uso de los **SISTEMAS DE MEDIDAS**,
- ampliar su comprensión de los **CONCEPTOS BÁSICOS** de la medida (perímetro, área, volumen, medida de ángulos, capacidad, peso y masa),
- adquirir los conceptos de proporción y de otras **MEDIDAS DERIVADAS E INDIRECTAS**,
- desarrollar **FÓRMULAS Y PROCEDIMIENTOS** para determinar medidas en la resolución de problemas.

Trayectoria de aprendizaje

Estadios de desarrollo

(Dickson et al., 1991; Piaget, 1982)

- **Estadio 1: Ausencia de conservación** (cambio en el objeto no implica cambio en la cantidad de magnitud)
- **Estadio 2: Conservación y transitividad** (unidades de medidas antropométricas)
- **Estadio 3: Medición bidimensional**
- **Estadio 4: Iteración de la unidad** (unidad más pequeña que el objeto a medir)
- **Estadio 5: Etapa formal** (operaciones bidimensionales y tridimensionales mediante cálculos basados en dimensiones lineales)

Trayectoria de aprendizaje

(Clements y Sarama, 2015)

- Identificar la **longitud** como un atributo
- Comparar de forma **directa** longitudes mediante alineación de dos objetos
- Comparar de forma **indirecta** usando un tercer objeto
- **Ordenar** conjuntos de hasta 6 objetos por su longitud
- Medir un objeto de extremo a extremo (**sin unidad** establecida).
- **Repetir una unidad** sobre un objeto y **relacionar tamaño y número**.
- Medir la longitud segmentando y efectuando **operaciones aritméticas** sobre las medidas.



03

Qué estamos aprendiendo...

... y qué resultados hemos obtenido



Universitat Autònoma
de Barcelona

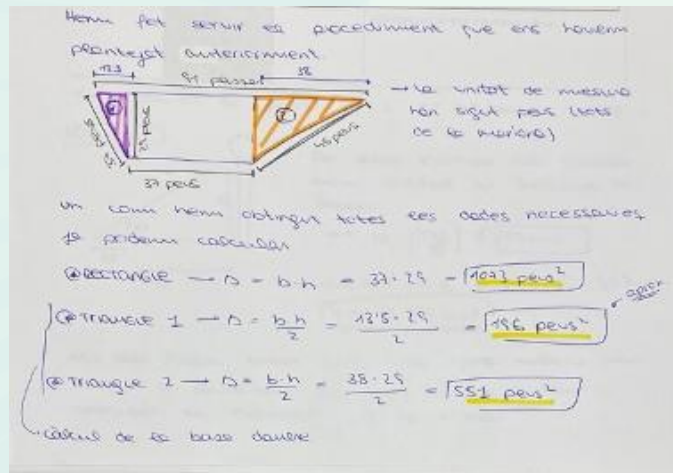
Desarrollo colaborativo de estrategias de medida indirecta: ¡Vamos a medir al patio!



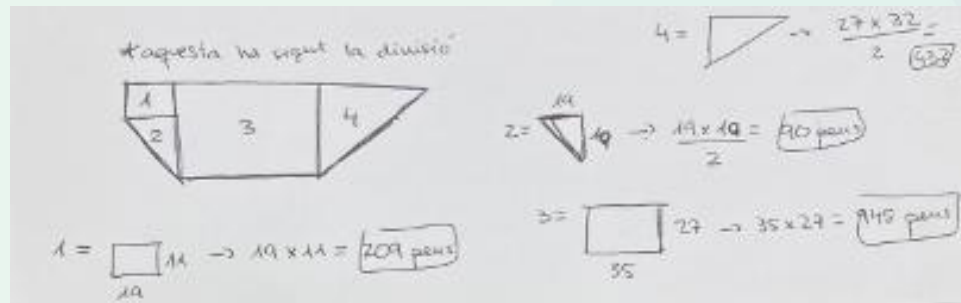
Sociedad Canaria de Profesorado de Matemáticas
Luis Balbuena Cruz-González



Producciones de los estudiantes: Área



Pies como unidad de medida lineal para áreas parciales (B3)

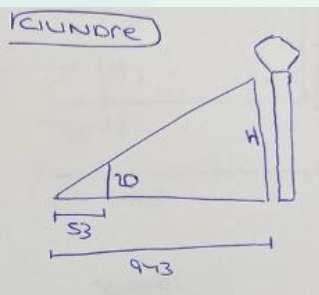


Composició aditiva de àrees parciales (A11)

Composició de àrees parciales

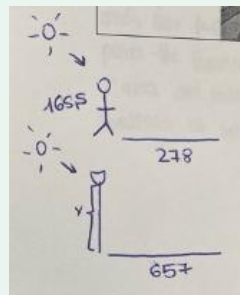
Conservació de la quantitat
Uso de fórmulas

Producciones de los estudiantes: Volumen



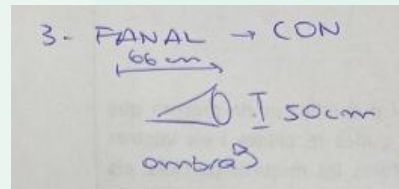
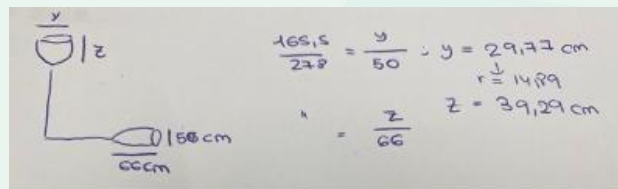
Teorema de Thales (B3)

A



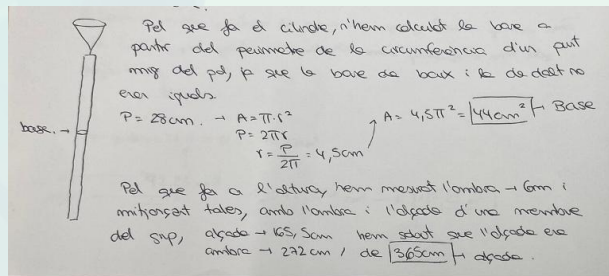
Proporcionalidad con una persona (A2)

C

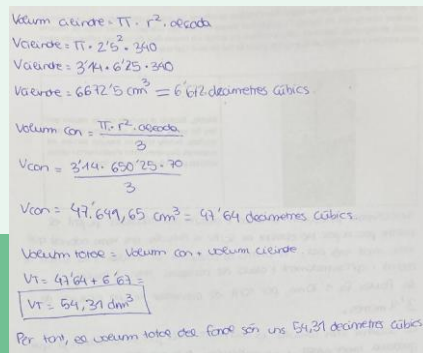


Estrategias para calcular el radio y la altura de la lámpara (cono)

B



Estrategias para calcular el volumen del mástil (A112)



Composición de las medidas de los volúmenes del mástil y la lámpara de la farola (B7)

D

Análisis 1. Árbol de soluciones



Medición y ELABORACIÓN DE
INFORME (Sesión 1)

Estrategia: una forma genérica de actuar para resolver el problema

Procedimientos: cadena de acciones para resolver el problema.

Acciones: estrategias específicas para una parte concreta del problema

(Albarracín, Ferrando & Gorgorió, 2021;
Albarracín & Gorgorió, 2014)

Estrategias clave sobre *medida indirecta*

Grupo A1

A1.1 Per calcular l'alçada de la fulla més alta des del

A1.2 tronc hem utilitzat l'ombra que projectava l'arbre.

Hem calculat amb una cinta mètrica que mesurava 9 m.

A1.3 Com que ens hem adonat que l'ombra no és igual

A1.4 que la mesura de l'arbre hem calculat aquesta proporció.

Per calcular aquesta proporció hem agafat d'exemple l'alçada de la Carlota

A2.2

Alçada Carlota	Ombra Carlota
1'60 m	2'35 m
Alçada arbre	Ombra arbre
x m	9 m

D'aquesta manera hem p

l'alçada de l'arbre fins

6'12 m.

Acciones	Procedimiento	Estrategia
A1.1 Identificación de objeto a medir (altura)	P1. Caracterización métrica de objeto a medir.	Proporcionalidad Numérica: se establece una proporción objeto/referente. → proporción entre la longitud de la sombra del árbol, y la altura de una persona y la longitud de su sombra. → Se inicia con un supuesto: altura del árbol igual longitud de sombra (no se explicita argumento para desecharlo)
A1.2 Equivalencia con referente inicial (sombra)		
A1.3 Medición directa con cinta métrica de referente inicial (sombra)		
A1.4 Conclusión sobre desigualdad objeto (altura)/referente inicial (sombra)		
A2.1 Identificación de nuevo referente (persona)	P2. Caracterización métrica del referente.	
A2.2 Medición directa de altura y sombra de la persona referente		
A3.1 Establecimiento de relación proporcional	P3. Determinación de la solución.	
A3.2 Regla de tres (¿cálculo implícito?)		
A3.3 Respuesta al problema		

Estrategias clave sobre *medida indirecta*

Proporcionalidad Numérica

Se establece una proporción con un objeto o referente.

Proporcionalidad Geométrica

Se establece la semejanza de triángulos aplicando Thales

Iteración Visual

Se establece un referente para estimar la medida del objeto.

P1. Caracterización métrica de objeto a medir.

P2. Caracterización métrica del referente.

P3. Determinación de la solución.

Estrategias clave sobre *medida indirecta*

Proporcionalidad Numérica

Se establece una proporción con un objeto o referente.

P1. Caracterización métrica de objeto a medir.

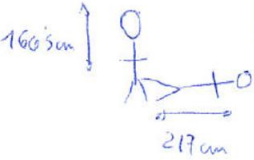
P2. Caracterización métrica del referente.

P3. Determinación de la solución.

Grupo A2

En primer lloc hem mesurat l'alçada de real de la Clavella (1'655 m) i la seva alçada projectada en l'ombra (2'17 m). després hem mesurat l'alçada de la fulla més alta projectada en l'ombra (9'8 m). hem fet una regla de 3. El resultat final no està de 747'42 cm.

A2.1 **A2.2** **A1.1** **A3.3** **A3.2**


$$\frac{x}{980} = \frac{160}{217} \quad ; \quad x = 747'42 \text{ cm} // = 7,47 \text{ m} //$$

A3.1

Estrategias clave sobre *medida indirecta*

Proporcionalidad Geométrica

Se establece la semejanza de triángulos aplicando Thales

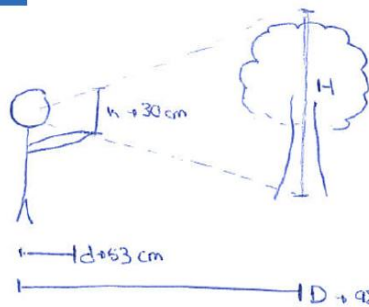
P1. Caracterización métrica de objeto a medir.

P2. Caracterización métrica del referente.

P3. Determinación de la solución.

A1.1

Per calcular l'alçada



hem utilitzat una cinta mètrica.

Tal com es mostra al dibuix, hem utilitzat el teorema de Thales i dels triangles semblants per poder saber l'alçada.

A2.1

①. Hem colocat la cinta de 30 cm davant dels

nostres ulls,

A2.2

per tant la $h = 30$ cm.

A2.3

Estrategias clave sobre *medida indirecta*

Iteración Visual

Se establece un referente para estimar la medida del objeto.

P1. Caracterización métrica de objeto a medir.

P2. Caracterización métrica del referente.

P3. Determinación de la solución.

Grupo B4

$$1'64\text{ m} \cdot 3'5 = 4'92\text{ m} + 0'82\text{ m} = \boxed{5'74\text{ m}}$$

↗ alçada de la fulla més alta

Explicació

Per a saber l'alçada de la fulla més alta, hem agafat l'alçada de la gina com a referència (1'64m) **A1.1**

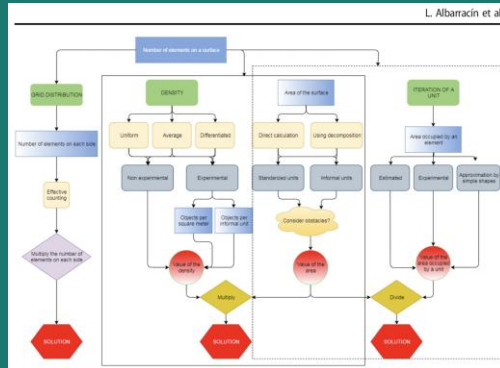
A2.1 seguidament, a ull (de manera aproximada), hem calculat que la gina cabria 3 cops i mig. **A1.2**

Aleshores, hem multiplicat els 3'5 cops per 1'64 metres. **A3.1** Després hem dividit entre dos l'alçada de la gina per saber ben bé aquests 0'5m **A3.2**

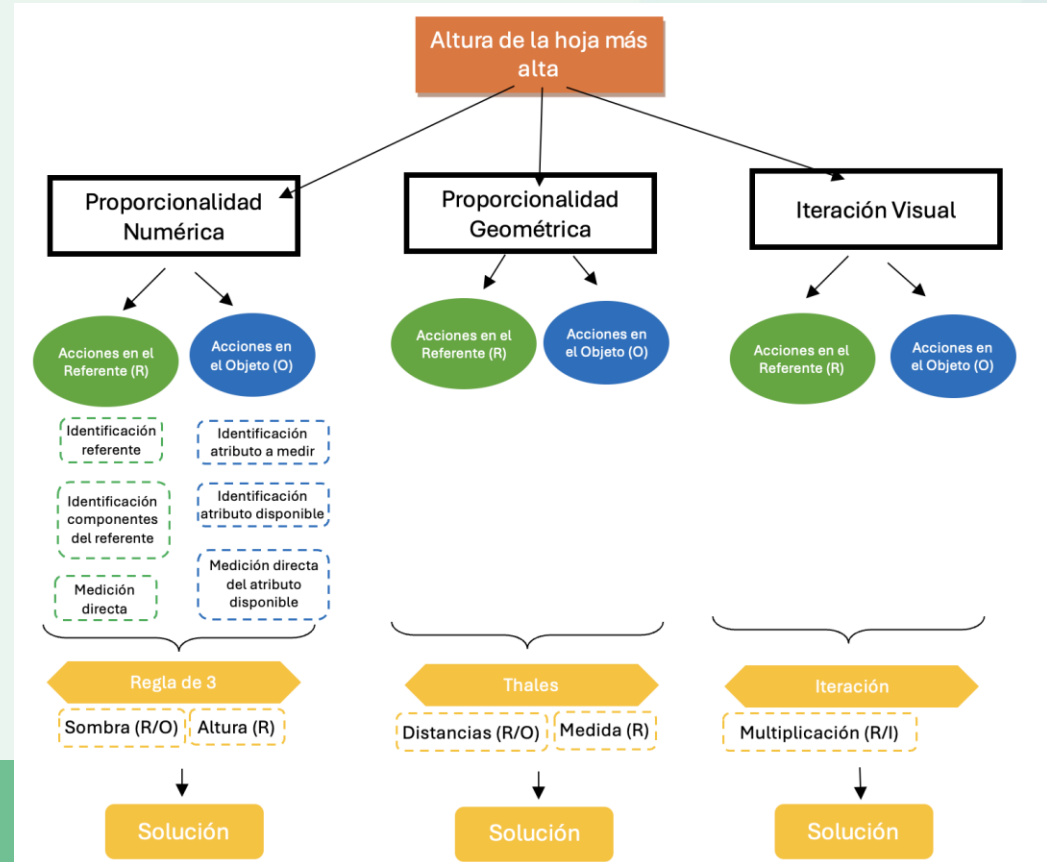
El resultat ens ha donat 0'82m, per tant, **A3.3** sumem tots els resultats (4'92 + 0'82) i obtenim l'alçada final que equival a 5'74m. **A3.4**

Estrategias clave sobre *medida indirecta*

Árbol de Soluciones



(Albarracín, Ferrando & Gorgorió, 2021)



Análisis 2. Aprendizaje colaborativo



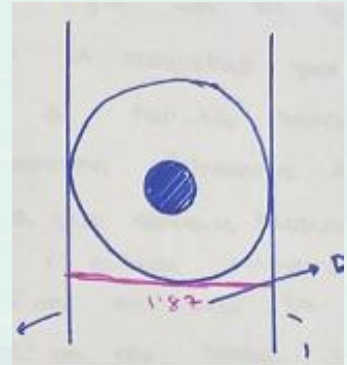
Diámetro del Alcorque

Propuesta Individual

Propuesta Grupal

Medición

Propuesta de Mejora



Desplazamiento
del diámetro

$$\begin{aligned} \text{Perímetro} &= 2\pi r \\ 612\text{cm} &= 2 \cdot 3.14 \cdot r \\ 612\text{cm} &= 6.28r \\ \frac{612\text{cm}}{6.28} &= r \\ \boxed{97.45^{\text{cm}} = r} \end{aligned}$$



Uso de fórmula

Aprendizaje (colaborativo) de la *medida*

Impacto de cada una de las **fases formativas** de la actividad:

01 Propuesta Individual

~25% de propuestas individuales correctas.

02 Propuesta Grupal

03 Medición

04 Propuesta de Mejora

Aprendizaje (colaborativo) de la *medida*

Impacto de cada una de las **fases formativas** de la actividad:

01

Propuesta Individual

02

Propuesta Grupal

03

Medición

04

Propuesta de Mejora

10 de los 17 grupos presentan propuestas que obtendrían medidas adecuadas.

Esto eleva el ~25% de éxito individual a una participación del ~60% de estudiantes en estrategias correctas.

Aprendizaje (colaborativo) de la *medida*

Impacto de cada una de las **fases formativas** de la actividad:

01

Propuesta Individual

02

Propuesta Grupal

03

Medición

04

Propuesta de Mejora

Se aumenta a un ~77% de estudiantes que participan de estrategias correctas.

Resulta clave enfrentarse a las restricciones de la realidad y las características de los instrumentos de medición.

Aprendizaje (colaborativo) de la *medida*

Impacto de cada una de las **fases formativas** de la actividad:

01

Propuesta Individual

02

Propuesta Grupal

03

Medición

04

Propuesta de Mejora

Se eleva el porcentaje de éxito hasta casi un 90% de estudiantes que participan de estrategias correctas.

Ya no se encuentran grupos que no presenten procesos de medida suficientemente adecuados.

Aprendizaje (colaborativo) de la *medida*



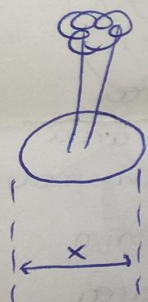
05 Evaluación Final

8. **(1,5 punts).** Les oliveres de la plaça de les oliveres tenen un espai de terra al seu voltant limitat per maons. Resulta que aquest espai es diu escocell. Descriuiu detalladament dos procediments diferents per mesurar l'àrea d'un escocell de l'olivera que més us agradi. Especifiqueu els passos i instruments de mesura que faríeu servir. Quin dels dos procediments és més precís?

Aprendizaje (colaborativo) de la medida

8. Primer de tot hem de tenir clara la fórmula per calcular l'àrea de l'escorçell, és a dir, la fórmula per calcular l'àrea d'un cercle. $a = \pi r^2$
D'aquesta manera, ara hem de trobar ~~trobar~~ el radi:

opció 1:



$$\frac{x}{2} = r$$

No pots
Tresnem el diàmetre de l'escorçell i el dividim entre 2 per trobar el radi. Un cop tinguem el radi ja podrem calcular l'àrea.



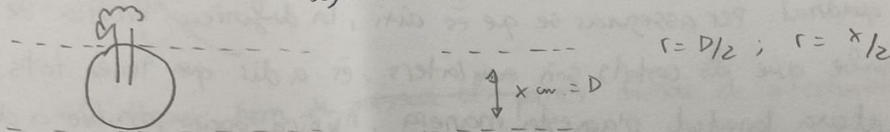
Aprendizaje (colaborativo) de la medida

8) Fórmula àrea escocell (suposant que és una circumferència perfecta) = ~~πr^2~~ πr^2

Per tant, haurem de trobar el diàmetre radi de

Procediment 1)

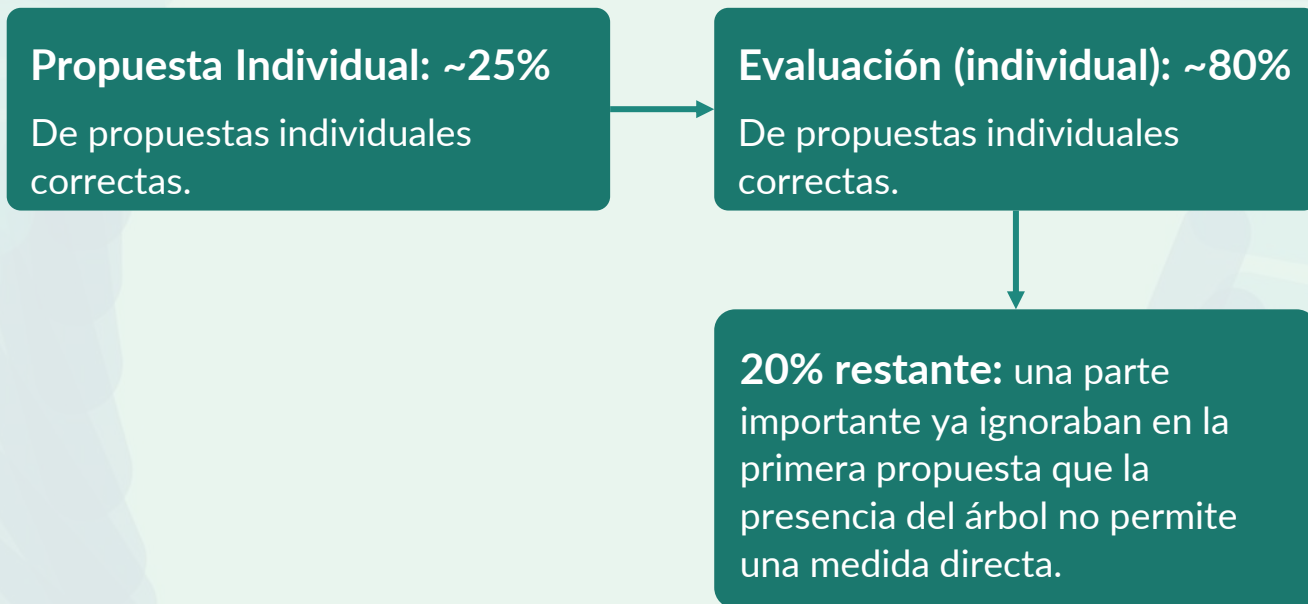
Traçem 2 línies paral·leles que passin pels marges de l'escocell, mitjançant un restle i una esquadra, de la següent manera. A continuació calarem la distància entre les dues



rectes i la dividim en 2 per trobar el radi, ja que el resultat que haurem obtingut prèviament és el del diàmetre. Un cop fet això, ~~elevem el radi al cub i el multipliquem per π~~ ~~tenim l'àrea.~~
 elevem el radi al quadrat i el multipliquem per π
 tenim l'àrea.

Aprendizaje (colaborativo) de la *medida*

Impacto de la actividad en el **conocimiento específico** de los participantes:



En definitiva...

La actividad de medida indirecta contribuye a la construcción colectiva de conocimiento sobre medición de los futuros maestros.



Universitat Autònoma
de Barcelona

Conocimientos matemáticos identificados (superación de la *arimetización* de la medida)

- Conservación de la cantidad
- (des)Composición de la medida
- Estimaciones
- Uso de fórmulas y teoremas
- Uso de relaciones proporcionales
- Uso de modelos geométricos

Potencial Didáctico

- **Trabajo Grupal:** todos los estudiantes acaben implementando estrategias complejas para obtener los valores de las medidas solicitadas
- **Aplicación del Proceso de Medida:** valorar la matemática como una actividad situada.
- **Discusión colectiva:** foco sobre el error (inherente al proceso de medida) y modelación de estrategias de control de la medición.

Práctica: medidas indirectas



Área de la zona ajardinada



Diámetro del
Alcorque



Altura de la hoja más alta



Volumen del Farol
(incluyendo el mástil)

Referencias

- Albarracín, L., Rojas, F., & Torregrosa, A. (2026). Estrategias de medida indirecta: un enfoque de trabajo colaborativo en el terreno. *Enseñanza De Las Ciencias. Revista De investigación y Experiencias didácticas*, 44(1), 165–182. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6474>
- Castro, Á., Mengual, E., Prat, M., Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2014). Conocimiento matemático fundamental para el grado de educación primaria: inicio de una línea de investigación. *Investigación en educación matemática*, 18, 227-236.
- Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2019). [El conocimiento matemático previo a la formación inicial de los maestros: necesidad y concreción de una prueba para su evaluación.](#) En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 111-132). Ediciones Universidad Salamanca.
- Gorgorió, N., Albarracín, L., Ärleback, J., Laine, A., Newton, R., & Villarreal, A. (2017). *Fundamental mathematical knowledge: Progressing its specification*. Linköping University Electronic Press.
- Gorgorió, N., Albarracín, L., Laine, A., & Llinares, S. (2021). Primary education degree programs in Alicante, Barcelona and Helsinki: Could the differences in the mathematical knowledge of incoming students be explained by the access criteria?. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, 9(1), 174-207.
- Mengual, E., Gorgorió, N., & Albarracín, L. (2017). [Análisis de las actividades propuestas por un libro de texto: el caso de la medida.](#) *REDIMAT*, 6(2), 136-163.
- Pizarro, N., Gorgorió, N., & Albarracín, L. (2016). Caracterización de las tareas de estimación y medición de magnitudes. *Números*, 91, 91-103.
- Pizarro, N., Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2018). [Actividades de estimación de medida: La interpretación de los docentes de educación primaria.](#) *Bolema - Boletim de Educação Matemática*, 32(62), 1177–1197.
- Pizarro, N., Gorgorió, N., & Albarracín, L. (2017). [Irrupción de un concepto en el currículo: profesores de primaria definen y aplican el concepto de estimación de medida.](#) *Dilemas contemporáneos: Educación, Política y Valores*, 5(1), 1-27.
- Rojas, F., & Albarracín, L. (2024). Uso de actividades de medidas indirectas en la formación de maestros. *Números*, 116(1), 23-42.

Trabajo colaborativo en procesos de medición indirecta

Esta publicación es parte del proyecto PID2021-126707NB-I00, financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033/FEDER, UE.

Francisco Rojas

Professor Agregat UAB

Lluís Albarracín

Professor Agregat Serra Hunter UAB

GRACIAS!



Universitat Autònoma
de Barcelona