NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 116, marzo de 2024, páginas 23 - 42

Uso de actividades de medidas indirectas en la formación de maestros

Francisco Rojas
Lluís Albarracín
(Universitat Autònoma de Barcelona)

Fecha de recepción: 20 de noviembre de 2023
Fecha de aceptación: 06 de marzo de 2024

Resumen El tratamiento de la medida en la escuela se suele orientar hacia un trabajo aritmético, desnaturalizando los procesos de medida, conocimiento con el que llegan los futuros maestros a su formación inicial. Por ello, en este estudio se abordan los procesos de medición indirecta como estrategia para analizar la variedad y pertinencia de estrategias de medición planificadas y ejecutadas por estudiantes. A partir de cuatro situaciones concretas que involucran medición de longitudes, superficies y volúmenes, los estudiantes para maestro: proponen estrategias para medir; realizan las mediciones; y establecen cambios y mejoras a sus estrategias. Se caracterizan sus propuestas y se observa que los estudiantes ponen en práctica conocimientos matemáticos formales e informales, desde la composición de medidas o la estimación, hasta el uso de fórmulas y teoremas.

Palabras clave Medición indirecta, Formación de maestros, Trabajo colaborativo, Educación primaria.

Abstract The treatment of measurement in school is usually oriented towards arithmetic work, distorting the processes of measurement, knowledge with which future teachers arrive at their initial training. Therefore, this study addresses indirect measurement processes as a strategy to analyze the variety and relevance of measurement strategies planned and executed by students. Based on four concrete situations involving the measurement of lengths, surfaces, and volumes, students for teachers: propose strategies for measuring; take measurements; and establish changes and improvements to their strategies. Their proposals are characterized, and it is observed that students put into practice formal and informal mathematical knowledge, from the composition of measures or estimation to the use of formulas and theorems.

Keywords Indirect Measurement, Primary Teacher Education, Collaborative work, Primary Education.

1. Introducción

Desde la creación de la escuela elemental como institución, la medida ocupa un papel importante dentro de la enseñanza de las matemáticas debido a sus múltiples aplicaciones tanto sociales como científicas (Chamorro, 1996; Segovia et al., 1996), ya que el conocimiento de la medida permite establecer conexiones desde las matemáticas con la realidad, pero también en aplicaciones intra-matemáticas. Sin embargo, dentro de la enseñanza de la medida en la escuela en la etapa de educación primaria, las actividades prácticas, como pueden ser las mediciones, son casi inexistentes

(Montoro et al., 2021) y se realizan con muchos obstáculos tanto de materiales como de gestión del aula (Chamorro, 2003). Este tipo de actividades que evitan la experimentación adquieren una mayor presencia en los ciclos medio y superior de la etapa de educación primaria, poniendo de manifiesto por ejemplo las diferencias entre los contenidos aparentes de libros de texto y los aprendizajes reales promovidos. Así, no es de extrañar que el tratamiento de la medida se ha visto reducido a la consecución de un dominio aritmético y mecánico, donde se realizan operaciones correctas y exactas, involucradas en la realización de actividades relacionadas, por ejemplo, con el cambio de unidades o la expresión compleja e incompleja de una medida (Callís, 2002).

Este hecho se concreta en el fenómeno denominado *aritmetización de la medida* (Chamorro y Belmonte, 1988), lo que se observa claramente en los materiales curriculares y docentes, los que se orientan hacia un trabajo numérico, produciendo una desnaturalización de los objetivos que implica la medición (Mengual et al., 2017). De forma habitual, las actividades de medida presentadas en libros de texto o materiales didácticos se centran en establecer el dominio sobre el Sistema Métrico Decimal y se considera que los estudiantes han alcanzado los objetivos de aprendizaje cuando efectúan cambios de unidades adecuadamente y pueden usar fórmulas para calcular medidas de áreas o volúmenes. Y en lo que respecta al proceso de medición en sí mismo, desde la escuela se asume que el alumno aprenderá a medir de forma práctica por su cuenta a través de experiencias sociales o familiares (Chamorro, 2003).

Debido a que los futuros maestros han experimentado situaciones *aritmetizadas* de medida en la escuela, es altamente deseable generar nuevas oportunidades que permitan vivenciar el proceso de medir identificando sus etapas nucleares, a saber: reconocimiento de magnitudes, comprensión del proceso de medir, y estimación (Moreno et al., 2014). Para contribuir al diseño de actividades que avancen en este sentido, en este artículo se presenta una actividad de medida diseñada para el trabajo con futuros maestros en una asignatura de matemáticas de un plan de formación del profesorado de educación primaria en España. Los elementos clave de su diseño son el uso de medidas indirectas sobre longitudes, áreas y volúmenes, y una organización de aula en la que se pasa del trabajo individual al grupal, y del trabajo en el espacio de la clase al trabajo de medida en contexto real. De este modo, el objetivo de este trabajo es presentar una sistematización de la variedad de métodos que utilizan los estudiantes para maestro al resolver problemas de medidas indirectas como base para generar discusiones sobre la variedad y adecuación de las estrategias de medición.

A continuación, se presentan los referentes teóricos que sustentan el diseño de la actividad así como los aspectos metodológicos de su implementación y análisis.

2. Marco conceptual

La medida es considerada como una activad matemática transversal a todas las culturas (Bishop, 1999) que “se ocupa de comparar, ordenar y cuantificar cualidades que tienen valor e importancia” (p.55). Para ello, es necesario “el proceso de asignar un número a una magnitud de algún atributo de un objeto […], relativa a una unidad” (Clements y Sarama, 2015, p. 265). En cuanto al aprendizaje de los procesos de medida, estos envuelven muchos conceptos fundamentales, tales como la comprensión de la idea de atributo (magnitud), la conservación, la transitividad, la igualdad de particiones, la iteración de la unidad, la distancia, el origen y la relación con el número (Clements y Sarama, 2015; Mengual et al., 2017; Pizarro et al., 2016). Además, por su naturaleza y aplicabilidad, la medida aparece en otras áreas disciplinares como las ciencias experimentales, pero también conecta con otras áreas al interior de las matemáticas, como geometría, aritmética o dependencia funcional, además de vincularse estrechamente a la resolución de problemas (Godino et al., 2002).

Estas características dan pie a considerar la medida como un aspecto central en la formación de maestros (Albarracín et al., 2018), para lo cual es clave comprender cómo se espera que sus futuros estudiantes aprendan a medir, de qué manera aparece este tema en los actuales marcos curriculares, así como algunos desafíos de la formación docente al respecto. Por ello, a continuación se profundizará en algunos de estos aspectos, de cara a exponer posteriormente las propuestas para su trabajo.

2.1. Trayectoria de aprendizaje de la medida

Las primeras propuestas sobre cómo se aprende medida fueron señaladas por la escuela Piagetiana (Dickson et al., 1991; Piaget, 1970; Piaget, 1981), en la cual se distinguen cinco estadios para para la adquisición del concepto de medida. Los infantes comienzan considerando que bajo transformaciones (forma, posición, tamaño) no hay conservación de la medida. Una vez superado esto, emerge la transitividad como estrategia de medición, sobre todo de forma antropométrica, para pasar después a establecer coordinaciones bidimensionales. Finalmente, el estudiantado coordina el tamaño de la unidad con la medición a realizar por medio de la iteración de esta, para después entrar en una etapa de comprensión operativa, donde se es capaz de realizar cálculos aritméticos diversos para obtener las medidas de forma indirecta. Considerando estos antecedentes, Chamorro y Belmonte (1988) ponen de manifiesto que medir una magnitud no es una acción fácil y espontánea, y que es necesario que los alumnos trabajen la identificación de magnitudes físicas desde pequeños. Para ello deberían identificar la naturaleza de las unidades, iniciando el proceso de medición con ausencia de unidades (comparación directa), progresando a establecer objetos como unidades, para avanzar a una unidad figural en la que se distingue unidad de objeto hasta que el estudiante genera su concepto completo de unidad de medida.

Más recientemente, Clements y Sarama (2015) han propuesto un enfoque de trayectorias de aprendizaje para la medida, estableciendo los saberes que los estudiantes deberían dominar entre los 4 y 8 años, así como las actividades que los promueven. En lo que refiere a medición lineal, establecen una serie de conceptos clave a tener en cuenta: la comprensión del atributo de *longitud*, la *conservación* (el movimiento de un objeto rígido no cambia su longitud), la *transitividad* entre medidas, la *partición equitativa* como actividad mental para cortar un objeto en unidades iguales, las *unidades y su iteración* como procedimiento de comparación y medición, la *acumulación de la distancia y la aditividad* de medidas de longitud, el establecimiento de un *origen* que permita realizar comparaciones y mediciones, y la *relación entre número y medida* (a mayor tamaño de la unidad, menor es la medida expresada en esa unidad). Para abordar estos conceptos se propone una trayectoria de actividades tales como comparar de forma directa longitudes mediante alineación de dos objetos, comparar de forma indirecta usando un tercer objeto (transitividad), ordenar conjuntos de objetos por su longitud (hasta 6), medir un objeto de extremo a extremo (sin unidad establecida), repetir una unidad sobre un objeto y relacionar tamaño de la unidad y cantidad de unidades utilizadas (medida obtenida), y finalmente medir la longitud segmentando el objeto a medir y efectuando operaciones aritméticas sobre las medidas.

En relación a las medidas de área y volumen, se comparten muchos de los conceptos claves con la medición de longitud, pero se agrega una idea fundamental para comprender estas magnitudes como es la *estructuración del espacio*, ya sea bidimensional o tridimensional. En el caso del área, para que los estudiantes realicen tal estructuración, Clements y Sarama (2015) sostienen que se han de establecer arreglos bidimensionales, y así componer un mecanismo que permita cubrir una superficie. Para ello, en la trayectoria de aprendizaje se han de introducir actividades que lleven al estudiante de ser un “cubridor primitivo” a un “estructurador de filas y columnas”. En el primer caso, el estudiante itera la unidad de área cubriendo el arreglo bidimensional pero cometiendo errores de alineamiento, y en el segundo establece la relación de paralelismo y perpendicularidad entre filas y columnas, llegando a establecer la multiplicación como la operación que permite cuantificar la cantidad de unidades de área se han generado. En el caso del volumen, la tercera dimensión presenta un desafío en la estructuración espacial, además que la naturaleza de los materiales fluidos presenta otras dificultades. Esto lleva a dos formas de medir el volumen: *empaquetar* un espacio con un arreglo tridimensional cuantificando las unidades cúbicas, o *llenar* un espacio con las unidades de material fluido que toman la forma del recipiente. Clements y Sarama (2015) sostienen que el llenado es más fácil para los estudiantes que el empaquetamiento, aunque esta última conduce a una comprensión más profunda y da sentido a las fórmulas del volumen.

2.2. El sentido de la medida en el currículum

Desde el punto de vista curricular, se han organizado diferentes propuestas para concretizar qué deberían aprender los estudiantes respecto de la medida. El National Council of Teachers of Mathematics de Estados Unidos (NCTM, 2000) considera dos aspectos centrales a desarrollar en toda la etapa escolar: *Comprender los atributos mensurables de los objetos y las unidades, sistemas y procesos de medición*, y *Aplicar técnicas, herramientas y fórmulas apropiadas para determinar las medidas*. En la educación primaria, los estudiantes deberían ser capaces de entender los atributos de longitud, capacidad, peso, área, volumen, tiempo, temperatura y ángulo, desarrollando el proceso de medición y los conceptos relacionados con las unidades de medida pertinentes (convencionales o no). Al terminar esta etapa educativa, los alumnos deberían ser capaces de ampliar su comprensión del proceso de medición al describir y comparar fenómenos realizando estimaciones y mediciones, seleccionando las unidades y herramientas adecuadas al nivel de exactitud que se requiera en una situación en concreto. Así mismo, y deberían avanzar a comprender los conceptos de proporción y de medidas derivadas e indirectas, desarrollando fórmulas y procedimientos para resolver problemas que involucren determinar este tipo de medidas.

En el contexto español, y a partir de del cambio curricular producido en 2022, la Comunidad Autónoma de Cataluña (lugar donde se realiza este estudio), ha propuesto una especificación de los saberes matemáticos como sustento para el desarrollo de las competencias de la educación básica (Generalitat de Catalunya, 2022). En esta propuesta, el Sentido de la Medida “se caracteriza por la comprensión y comparación de atributos de los objetos del mundo natural [y sostiene que] Entender y seleccionar las unidades adecuadas para estimar, medir y comparar, utilizar instrumentos adecuados para realizar mediciones y comprender las relaciones entre magnitudes a partir de su manipulación son los ejes centrales de este sentido” (p. 174, traducción de los autores). De acuerdo a lo propuesto para cada uno de los tres sub-ciclos de educación primaria (1° y 2°, 3° y 4°, 5° y 6°) se distinguen tres ideas centrales: Magnitud, Medida y Estimación. En cuanto a la magnitud, se espera que los alumnos aprendan a distinguir los atributos medibles, a usar y caracterizar las unides de medida (convencionales y no convencionales) para finalizar seleccionado las unidades apropiadas según el contexto de medición. Respecto de la medida, se espera que desarrollen procesos de medida por repetición de la unidad y con instrumentos, terminando por seleccionar instrumentos pertinentes según la magnitud a medir. Finalmente, relacionado con la estimación, se espera que los alumnos apliquen estrategias de comparación directa e indirecta, realicen ordenación de medidas, para al final utilizar el Sistema Métrico Decimal y evaluar la pertinencia de los resultados.

Si bien los currículos recogen los conocimientos que la investigación señala como clave para el desarrollo del sentido de la medida, se siguen presentando diversas dificultades en la enseñanza. Una de ellas corresponde al fenómeno de la *Aritmetización de la Medida* (Chamorro, 2003), en que el tratamiento de la medida ha sido sustituido principalmente por actividades de carácter aritmético, poniendo énfasis en números y operaciones, y en la obtención y uso de fórmulas para el cálculo de la medida, lo que no permite que los estudiantes tengan una experiencia auténtica de los procesos de medición (Mengual et al., 2017). Por otra parte, en educación primaria se sobreentiende que las medidas han de ser directas, entendiéndolas como aquellas en que es posible utilizar un instrumento de medida para obtener el valor numérico de una magnitud aplicando dicho instrumento sobre el objeto a medir (Pizarro et al., 2016). Dado que este proceso no siempre es posible, ya sea por no disponer de instrumentos que se ajusten a las medidas necesarias (una regla para medir la longitud de una curva) o porque los elementos del objeto a medir son inalcanzables, los autores proponen la utilización de mediciones indirectas. En este caso, es necesario desarrollar un modelo que generalmente será de tipo geométrico, en el que se sustente el resultado a partir de mediciones auxiliares, utilizando relaciones matemáticas o fórmulas para deducir el valor de una magnitud a partir de otras medidas o información conocida (Albarracín y Rojas, 2023).

2.3. El aprendizaje de la medida en futuros maestros

En la actualidad, existe un conceso generalizado respecto de que los maestros deberían tener un conocimiento profundo y especializado de los contenidos y procesos matemáticos que han de enseñar (Ball et al., 2008; Carrillo et al., 2018; Ma, 1999; Rowland et al., 2005; Shulman, 1987). Sin embargo, al iniciar su formación los futuros maestros no siempre muestran una comprensión adecuada de lo que se espera que conozcan de lo estudiado en la escuela. Si bien el estudio de este conocimiento matemático inicial tiene menos presencia en la investigación (Linsell y Anakin, 2012, 2013), se ha podido avanzar en instrumentos para caracterizarlo (e.g. Martínez et al., 2019) y en conceptualizar lo que se denomina Conocimiento Matemático Fundamental (CMF) (Gorgorió y Albarracín, 2020; Gorgorió, et al., 2021), entendido como aquel conocimiento que es deseable que tengan los futuros maestros para seguir con éxito su trayectoria formativa en lo referente a matemática y su didáctica. En el proceso de concreción de esta propuesta, Gorgorió et al. (2017) plantean que en el ámbito de la medida sería necesario que los futuros maestros comprendan el significado de magnitud medible (ángulo, longitud, área, volumen, capacidad, masa y tiempo) y de los procesos de medida; el conocimiento de las unidades de medida decimales y sexagesimales correspondientes y de los mecanismos para resolver situaciones de cambio de unidades, y el dominio de los conocimientos y las habilidades necesarias para resolver situaciones diversas relacionadas con las ideas de perímetro, área y volumen.

Respecto de las dificultades que presentan los estudiantes para maestro en actividades relativas a la medida de magnitudes, diversos estudios presentan evidencias sobre falta de comprensión conceptual y uso extendido de estrategias de corte procedimental en la resolución de problemas en este tópico. En una experiencia con tareas de modelización en el contexto de medición de magnitudes trabajando en el plano, Pla-Castells et al. (2021) observan diversos errores de futuros maestros al trabajar el modelo matemático que plantean para abordar el problema. En este caso, los estudiantes presentaron errores de cálculo de áreas de polígonos simples, de conversión de unidades en el proceso de utilización de escalas, y el uso del concepto de proporción de forma no adecuada a la situación. Otros estudios muestran que los futuros maestros usan preferentemente estrategias basadas en fórmulas en problemas de medidas de áreas (Caviedes et al., 2019; Dickson et al., 1991). Sin embargo, Runnalls y Hong (2020) al entrevistar a sus estudiantes después de responder una serie de actividades, observan que son capaces de ampliar su mirada procedimental y presentar nuevas estrategias de medida, tales como subdividir la figura en unidades, sobre poner objetos de área conocida sobre la figura, o descomponer la figura en otras más simples y cuya área se pudiera medir de forma sencilla. Además del uso de fórmulas, Caviedes et al. (2019) también observan otras estrategias en estudiantes, tales como la estimación visual, la reconfiguración por complementariedad de trozos, es decir, que establecen "relaciones de equivalencia por medio de la unión de partes, en superficies que ya presentan una descomposición previa" (p. 239), comparaciones directas y descomposición de superficies. Por otra parte, al realizar una experiencia manipulativa de resolución abierta consistente en replicar un objeto 3D (una mesa), Sala-Sebastià y Farsani (2022) observan algunos errores cometidos por las futuras maestras de educación infantil en el proceso de medición de objetos cilíndricos, así como dificultades al subdividir la unidad de medida cuando la longitud a medir es menor a dicha unidad.

Para abordar estas dificultades a la vez que profundizar en estrategias diversas de medición de magnitudes en la formación de maestros, proponemos que estos tengan experiencias diversificadas respecto a la actividad de medida, que conecte con los objetivos curriculares y que les permita ir más allá del uso de fórmulas y cálculos aritméticos. Por ello, es necesario introducir actividades y tareas que promuevan la implementación de diversas estrategias para construir un conocimiento completo sobre medida (Caviedes et al., 2019). En particular, el estudio de las medidas indirectas aparece como una oportunidad para revisitar y reconceptualizar diversos elementos clave del proceso de medida, como los planteados por Clements y Sarama (2015), así como desaritmetizar su proceso de enseñanza aprendizaje. La actividad que planteamos a continuación pone a los futuros maestros ante la necesidad de tomar un amplio número de decisiones respecto a los elementos que pueden ser medidos directamente y los que no, el uso de instrumentos de medida adecuados para cada situación, y la estimación y la gestión del error en las medidas.

3. Metodología

En este estudio se aplicó un enfoque metodológico cualitativo-interpretativo, ya que busca examinar la forma en que estudiantes para maestro comprenden los procesos de medición, a través de medidas indirectas, profundizando en sus puntos de vista, interpretaciones y significados (Hernández et al., 2014). La investigación se realizó con 71 estudiantes de un grupo de la asignatura *Matemàtiques per Mestres*, del Grado de Educación Primaria de la Universitat Autònoma de Barcelona, matriculados en el curso 2022/2023. El estudio se desarrolla dentro del marco de la unidad temática de Medida, y la actividad corresponde al desarrollo de la actividad práctica de este bloque de contenidos. La participación de los estudiantes se realiza en este contexto, por lo que les era obligatorio desarrollar la actividad. Los datos corresponden entonces a las respuestas de los estudiantes a las distintas fases del trabajo de aula.

La actividad general constaba de cuatro etapas, en las cuales los estudiantes para maestro generaban propuestas para determinadas medidas concretas en un espacio de la Facultad, la Plaza de las Oliveras. Las tres primeras fases se realizaron en una sesión de clase de dos horas y media, y la cuarta fase en la sesión siguiente, de la misma duración. A continuación, se detalla lo que se pedía hacer a los estudiantes en cada fase.

1. **Elaboración de propuesta individual**. El estudiante desarrolla una propuesta para medir cuatro magnitudes concretas en la Plaza de las Oliveras, para lo cual se le entregaba una ficha con las fotos de los objetos a medir (Figura 1). De forma individual, el estudiante debía escribir en cada caso los pasos que pensaba que serían necesarios para obtener la medida final.

2. **Elaboración de propuesta grupal**. En grupo, los estudiantes debían de poner en común sus propuestas individuales para medir los cuatro objetos. A partir de la discusión, debían elaborar una única propuesta, señalando todos los pasos necesarios.
3. **Medición y Elaboración de Informe**. Después de implementar sus estrategias de medición en la Plaza de las Oliveras y adecuarlas en caso de ser necesario, de manera grupal los estudiantes debían escribir un informe del proceso y los resultados de cada medición. Debían incluir todas las medidas parciales, esquemas, diagramas y cálculos realizados para llegar a la medida final. En cada caso, debían reflexionar sobre qué aspectos o estrategias de la propuesta grupal no habían utilizado y por qué.
4. **Puesta en común y Propuesta de Mejora**. Después de una puesta en común guiada por el formador en que se revisaban las principales estrategias de medición, así como los resultados de la medida, los estudiantes debían proponer mejoras a sus estrategias de medición implementadas en la clase anterior en la Plaza de las Oliveras. En cada caso, los estudiantes debían señalar qué aspectos creían que era necesario mejorar y por qué, además de explicar cuáles cambios introducirían en el proceso de medida.

Respecto de las mediciones concretas que los estudiantes debían realizar, se seleccionaron cuatro medidas: el área de un jardín, el diámetro de un alcorque, la altura a la que se encontraba la hoja más alta de un olivo, y el volumen de un farol incluyendo su mástil y la lampara superior (Figura 1). En todas ellas se debía medir una magnitud que no podía ser medida de forma directa, por lo cual se consideran los cuatro casos como medidas indirectas. En el caso del área del jardín, que asemejaba un trapecio, se solicitaba a los estudiantes usar referentes antropométricos, lo que dificultaba la medida de sus elementos lineales al estar plantado con diferentes tipos de arbustos. En el caso del diámetro del alcorque, la olivera se encontraba en su centro, con lo cual no se podía realizar una medida directa de esta magnitud. En los casos de la altura de la hoja más alta de la olivera y del volumen del farol, existía un problema de accesibilidad, ya que los estudiantes solo disponían de cintas métricas u odómetros para realizar sus medidas.

Figura 1. Objetos sobre los cuales realizar las mediciones. Elaboración propia.

A partir de las estrategias propuestas y las mediciones realizadas por los distintos grupos (Fases 2 y 3), se realizó una revisión sistemática de sus estrategias de medición para cada una de las medidas propuestas, así como de los resultados. A continuación, se presenta la sistematización de esta revisión y se concluye sobre la variedad de conocimientos y estrategias de medición implementadas por los estudiantes.

4. Resultados

El análisis de las producciones de los estudiantes permitió conocer las distintas medidas que daban a las magnitudes propuestas (Figura 1) a la vez que conocer y discutir la plausibilidad de estas comparadas con una respuesta prototípica otorgada por el formador. Posteriormente, se sistematizaron las propuestas de medición, dando lugar a estrategias comunes entre los distintos grupos de trabajo. A continuación, se muestran estos dos elementos para cada una de las medidas realizadas.

4.1. Área de zona ajardinada

Para esta medición, se solicitó a los estudiantes realizar la medida de forma antropométrica. Así, muchos grupos utilizaron los pies como unidades, expresando la medida final en pies cuadrados y/o en metros cuadrados. En la Tabla 1 se muestran las respuestas de los estudiantes y las estrategias principales utilizadas para obtener la medida.

Para poder discutir en el aula sobre las medidas obtenidas por los estudiantes, en la puesta en común de la fase cuatro se incluyó la conversión a metros cuadrados de las medidas obtenidas en pies, según la medida en centímetros del pie utilizado. De esta manera, se pudieron comparar los resultados entre los distintos grupos. Para establecer la plausibilidad de los resultados se calculó el promedio de las distintas medidas, habiendo descartado previamente los valores atípicos. Este promedio arroja un resultado de 133,33 m^2 y una desviación típica de 12,52 para los 14 valores utilizados, con lo que se obtiene un rango de valores entre 120 m^2 y 145 m^2 como adecuado para una respuesta adecuada. Alternativamente, el formador utiliza Google Maps para medir los lados del trapecio que forman la figura, obteniendo un valor de referencia alternativo de 136,55 m^2, como se muestra en la Figura 2.

En cuanto a las estrategias elaboradas e implementadas por los estudiantes, se observa que la mayoría realizó una descomposición de la forma de la zona ajardinada, usando el trapecio como modelo geométrico. Principalmente, este trapecio fue descompuesto en dos triángulos rectángulos y un rectángulo. Los estudiantes pudieron calcular el área de cada parte de acuerdo con las medidas lineales de sus lados y usando propiedades geométricas de las formas obtenidas (B16). Algunos grupos que siguieron la estrategia anterior se apegaron más a la forma real del jardín, que tenía una de sus esquinas “cortadas” (A11). Ambas producciones se observan en la Figura 3. Una estrategia diferente de las anteriores fue calcular directamente el área del trapecio que sirvió como modelo geométrico de la zona ajardinada. Los estudiantes que siguieron esta estrategia midieron la longitud de las bases de este trapecio y su altura, ya sea en pies o en metros. Teniendo las medidas a disposición, aplicaron entonces la fórmula del área de un trapecio.

Grupo	Medida	Estrategia para medir el área
A1	115,45 m^2	Descomposición: rectángulo + 2 triángulos
A2	128,8 m^2	Descomposición: rectángulo + 2 triángulos
A5	1672,8 $pies^2$ *(111,35 m^2)*	Descomposición: rectángulo + 2 triángulos (1 triangulo “descabezado”)
A6	---	No se calcula el área
A10	2223 $pies^2$ *(186,96 m^2)*	Descomposición: rectángulo + 2 triángulos
A11	1676 $pies^2$ *(140,95 m^2)*	Descomposición: rectángulo + 2 triángulos + cuadrado
A13	140,9 m^2	Descomposición: rectángulo + 2 triángulos + trapecio
A112	1383 $pies^2$ *(124,47 m^2)*	Descomposición: trapecio + triángulo
A113	146,2 m^2	Descomposición: rectángulo + 2 triángulos
B3	1820 $pies^2$ *(132,7 m^2)*	Descomposición: rectángulo + 2 triángulos
B4	131,04 m^2	Descomposición: trapecio + 2 triángulos
B7	155,4 m^2	Descomposición: rectángulo + trapecio
B8	148,5 m^2	Descomposición: rectángulo + trapecio
B9	108 m^2	Recomposición en un rectángulo
B12	1764 $pies^2$ *(138,2 m^2)*	Área trapecio
B15	1950 $pies^2$ *(124,1 m^2)*	Área trapecio
B16	128,49 m^2	Área trapecio

Tabla 1. Resultado y estrategias en la medición del área del jardín.

$$\grave{A}rea = \frac{24,76 + 10,03}{2} \times 7,85 = 136.55\ m^2$$

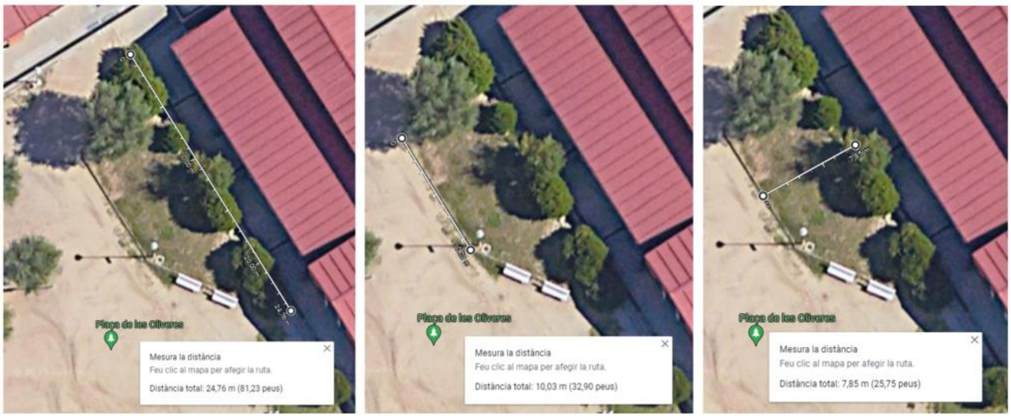
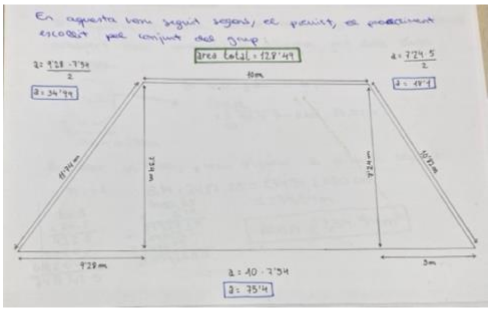
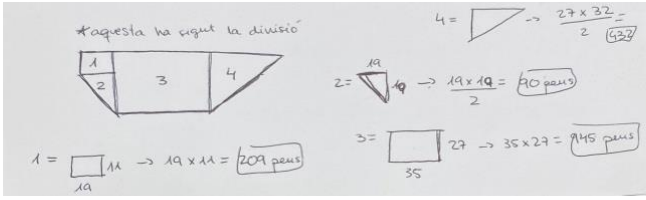


Figura 2. Cálculo del área de la zona ajardinada por medio de Google Maps.



(Grupo B16)



(Grupo A11)

Figura 3. Descomposición en áreas parciales de la zona ajardinada y el cálculo de su área.

4.2. Diámetro del alcorque

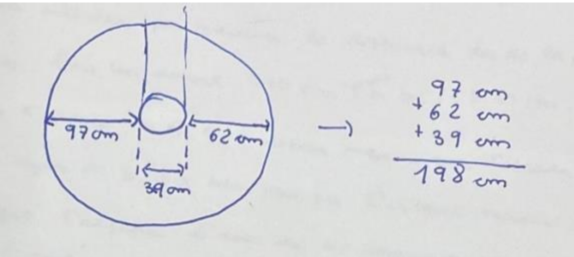
En este caso, y en los siguientes, los estudiantes podían usar instrumentos de medida estandarizados, tales como una cinta métrica (de costura o un flexómetro) o una rueda de metro (odómetro). A los estudiantes no se les señaló un alcorque en particular del Patio de las Oliveras, por lo que las medidas obtenidas no son estrictamente comparables, pese a la semejanza que había entre ellos. En la Tabla 2 se muestran las respuestas de los estudiantes y las estrategias principales utilizadas para obtener la medida.

Grupo	Medida	Estrategia para medir el diámetro
A1	---	Se calculó el perímetro
A2	1,79 m	Desplazamiento del diámetro
A5	1,87 m	Perímetro + fórmula
A6	2,51 m	Descomposición con sombra
A10	1,87 m	Desplazamiento del diámetro
A11	1,89 m	Alcorque sin obstáculo
A13	1,81 m	Descomposición + fórmula
A112	1,95 m	Perímetro + fórmula
A113	1,72 m	Descomposición + desplazamiento
B3	1,73 m	Desplazamiento del diámetro
B4	1,9 m	Perímetro + fórmula
B7	1,73 m	Desplazamiento del diámetro
B8	1,87 m	Desplazamiento del diámetro
B9	1,84 m	Perímetro + fórmula
B12	1,98 m 1,92 m	Descomposición + desplazamiento Perímetro + fórmula
B15	1,86	Perímetro + fórmula
B16	---	Se calculó el área

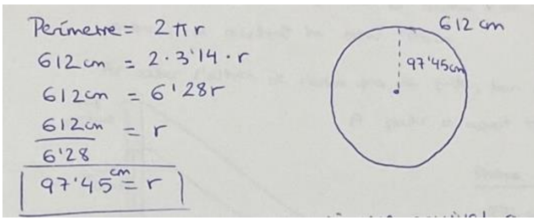
Tabla 2. Resultado y estrategias en la medición del diámetro del alcorque.

En las respuestas de los estudiantes no se observan valores inadecuados para el diámetro de un alcorque, y dado que no siempre midieron el mismo, los valores más atípicos como los del grupo A6 no constituyen una variación al respecto. En la fase de puesta en común, se discutió con los estudiantes sobre la no comparabilidad de estas medidas al desconocer de qué alcorque provenían, y por tanto que el promedio no podía ser un buen representante, como en el caso anterior. En el caso de obtener un promedio, se hizo la distinción que dicho valor sería el diámetro promedio de los alcorques de la Plaza de las Oliveras, y no el diámetro promedio de un alcorque específico.

Respecto de las estrategias de medición, se observa que los estudiantes utilizan dos principales. La primera estrategia, y dado que no pueden medir el diámetro directamente por encontrarse el árbol en medio, realizan un desplazamiento del diámetro, ya sea del alcorque o del tronco, de forma de conservar la distancia. En este último caso, se realiza una descomposición de medidas y se miden directamente los segmentos del diámetro del alcorque a cada lado del árbol, y después se realiza un desplazamiento del diámetro del árbol (B12), o bien se calcula este diámetro a través del perímetro del tronco. Pese a ser efectiva, esta estrategia no sigue estrictamente la instrucción de realizar la medición por vía indirecta, aunque si la contempla. Como segunda estrategia, los estudiantes miden la longitud del contorno del alcorque o del tronco según sea el caso, y luego utilizan la formula del perímetro de una circunferencia para obtener el diámetro (A112). Ambas estrategias pueden visualizarse en las producciones de la Figura 4.



Desplazamiento del diámetro (B12)



Medición del perímetro y uso de fórmula (A112)

Figura 4. Estrategias de los estudiantes para medir el diámetro de un alcorque.

4.3. Altura de la hoja más alta del olivo

En esta actividad, todos los grupos de estudiantes debían usar el mismo olivo y realizar la medida de la altura respecto de la tierra de la misma hoja. Una condición del contexto que permitió el desarrollo de esta actividad fue la existencia de sombra, con lo cual muchos de los estudiantes establecieron relaciones proporcionales con otros objetos. En la Tabla 3 se muestran las respuestas de los estudiantes y las principales estrategias utilizadas para obtener la medida.

Las medidas obtenidas por los diferentes grupos después de implementar sus estrategias varían entre poco menos de 5 metros y poco más de 6 metros, aproximadamente. Solo el grupo A2 dio un valor atípico de casi 7,5 metros.

En la puesta en común de esta medición, se discutió la resolución propuesta por parte del formador, que utilizó un clinómetro y una cinta métrica. El clinómetro es un instrumento de medida específico para calcular alturas de objetos. Configurando el instrumento a una distancia concreta del objeto a medir, en este caso 7 metros, este otorga la altura automáticamente a partir de la medida de ángulos de elevación y depresión a la parte superior e inferior del objeto a medir. La medida obtenida siguiendo este proceso (Figura 5) fue de 6,4 metros, con lo cual se pudo discutir de la pertinencia de los resultados de cada grupo.

Grupo	Medida	Estrategia para medir la altura
A1	6,12 m	Thales con proporcionalidad de sombra de una persona
A2	7,47 m	Thales con proporcionalidad de sombra de una persona
A5	5,16 m	Thales con proporcionalidad de una foto
A6	4,83 m	Thales con proporcionalidad de sombra de una persona
A10	6,32 m	Thales con proporcionalidad de un objeto real (cinta)
A11	6,05 m	Thales con proporcionalidad de sombra de una persona
A13	6,45 m	Thales con proporcionalidad de sombra de una persona
A112	5,94 m	Thales con proporcionalidad de sombra de una persona
A113	5,94 m	Thales con proporcionalidad de sombra de una persona
B3	5,54 m	Thales con proporcionalidad de un objeto real (cinta)
B4	5,74 m	Iteración de una unidad de forma visual (altura de una persona)
B7	5,10 m	Iteración de una unidad de forma visual (altura de una persona)
B8	4,70 m	Thales con proporcionalidad de un objeto real (bolígrafo)
B9	4,62 m	Medida directa de una hoja accesible
B12	5,32 m	Thales con proporcionalidad de sombra de una persona
B15	5,96 m	Thales con proporcionalidad de sombra de una persona
B16	4,80 m	Thales con proporcionalidad de sombra de una persona

Tabla 3. Resultado y estrategias en la medición de la altura de la hoja más alta del olivo.

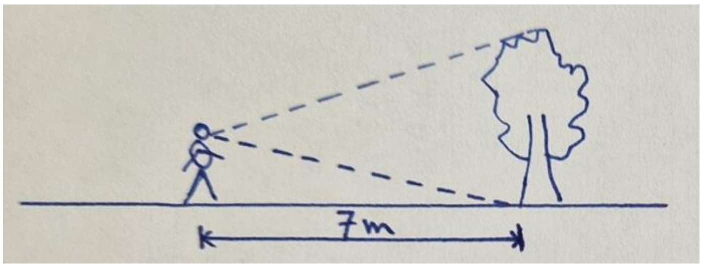
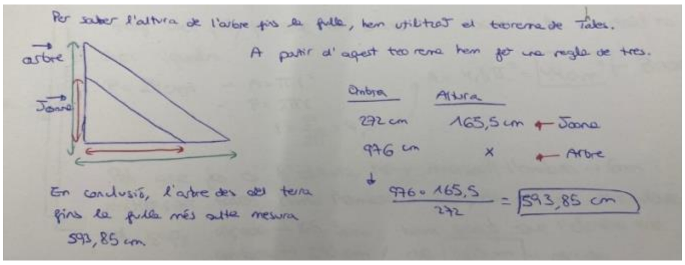


Figura 5. Diagrama usado para representar la medición de la altura del olivo por medio de un clinómetro.

Respecto de las estrategias utilizadas por los estudiantes, en la Tabla 3 se puede apreciar que la mayoría utilizó una relación proporcional entre la altura y sombra del árbol y la altura y sombra de una persona, y en algunos casos, una relación proporcional del mismo tipo, pero con un objeto auxiliar. En estos casos, algunos estudiantes utilizaban explícitamente el teorema de Thales y triángulos semejantes, o bien realizaban los cálculos mediante una regla de tres o igualdad de razones. En la Figura 6 se puede apreciar una versión que combina estos aspectos.

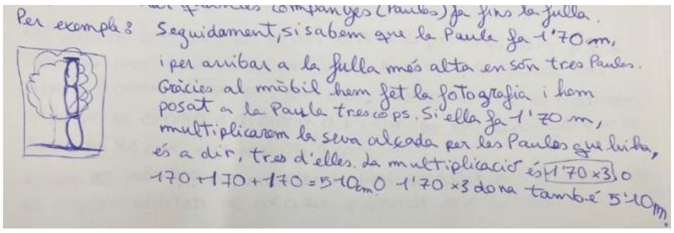


Para saber la altura del árbol hasta la hoja, utilizamos el teorema de tales. A partir de este teorema hicimos una regla de tres.

En conclusión, el árbol desde el suelo hasta la hoja más alta mide 593,85 cm.

Figura 6. Estrategias de proporcionalidad para medir la altura de la hoja más alta del olivo (grupo A112).

Una estrategia alternativa y minoritaria fue la iteración de la altura de una persona para calcular la altura del árbol, ya sea de forma estimada o bien utilizando una foto y el teléfono móvil como herramienta. En la Figura 7 se puede apreciar un esquema de cómo realizaron la estimación de la medida. En la explicación, los estudiantes señalan que Paula mide 1,70 metros y que para llegar a la hoja más alta hacen falta tres "Paulas". Usando el teléfono móvil fotografiaron el árbol y pusieron a Paula tres veces. Para el cálculo, multiplicaron 1,70 por 3 para obtener la altura del árbol. Si bien esta estrategia puede dar estimaciones razonables, presenta inconvenientes relacionados tanto con la perspectiva como con la partición de la unidad de medida (Paula).



Si sabemos que Paula mide 1,70 m, y para llegar a la hoja más alta son tres Paulas. Con el móvil hemos hecho la fotografía y puesto a Paula tres veces. Si ella mide 1,70 m, multiplicamos su altura por las Paulas que hay, es decir, tres de ellas. La multiplicación es 1,70 × 3, o 170 + 170 + 170 = 510 cm o 1,70 × 3 da también 5,10 m.

Figura 7. Estrategias de iteración para medir la altura de la hoja más alta del olivo (grupo B7).

4.4. Volumen de la farola

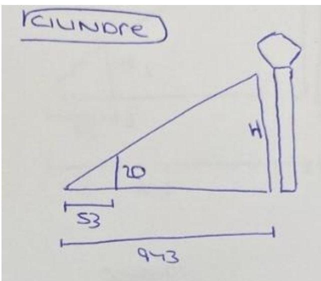
Esta última medición resulto más compleja para los estudiantes, tanto desde el punto de vista de la estrategia de medición como desde el cálculo del volumen. Aun así, una vez en terreno, la mayoría de los grupos pudo distinguir la descomposición de formas como un elemento clave dentro de las estrategias de medición. En la Tabla 4 se muestran las respuestas de los estudiantes y las estrategias principales utilizadas para obtener la medida.

Dada la dificultad de la medición, las respuestas presentan una gran variabilidad. En la puesta en común se discutieron los valores atípicos, tales como los resultados de los grupos A6, A11 o B4, comparándolos con una caja de leche de un litro. Los estudiantes comprendieron que o bien su estrategia no fue efectiva o bien tenían errores de cálculo que pudieron corregir.

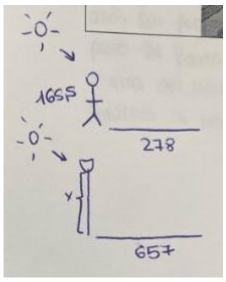
Como ya se mencionó, todos los grupos descompusieron la forma de la farola en dos partes: el mástil y la lampara. La mayoría de los grupos asimiló el mástil a un cilindro, dado que su diámetro en la parte superior era un poco inferior al diámetro de la parte inferior, lo que lo hacía en realidad tener la forma de un cono truncado. Para calcular el volumen, los estudiantes necesitaban conocer la altura y el área de una sección circular del mástil. Dado que la altura del mástil no podía medirse de forma directa, la mayoría de los grupos hizo uso de la proporcionalidad comparando con la sombra y la altura de una persona u objeto. En la Figura 8 se pueden apreciar dos esquemas de esta estrategia.

Grupo	Medida	Estrategia para medir el volumen
A1	35,99 l	Descomposición en cono (mástil) + cilindro (lampara)
A2	48,89 l	Descomposición cilindro (mástil) + cono (lampara)
A5	20,69 l	Descomposición cono + cilindro
A6	1,17 l	Iteración de un cilindro (mástil) + cono (lampara)
A10	79 l	Descomposición cilindro (mástil) + cono (lampara)
A11	2,1 l	Descomposición cilindro (mástil) + cono (lampara)
A13	52, 2 l	Descomposición cilindro (mástil) + cono (lampara)
A112	79,68 l	Descomposición cilindro (mástil) + cono (lampara)
A113	1169,3 l	Descomposición cilindro (mástil) + cono (lampara)
B3	83,5 l	Descomposición cilindro (mástil) + cono (lampara)
B4	0,86 l	Descomposición cilindro (mástil) + cono (lampara)
B7	54,3 l	Descomposición cilindro (mástil) + cono (lampara)
B8	32,4 l	Descomposición cilindro (mástil) + cono (lampara)
B9	61 l	Descomposición cilindro (mástil) + cono (lampara)
B12	97,9 l	Descomposición cilindro (mástil) + esfera
B15	32,6 l	Descomposición en tres conos
B16	99 l	Descomposición cilindro (mástil) + esfera

Tabla 4. Resultado y estrategias en la medición del volumen de la farola.



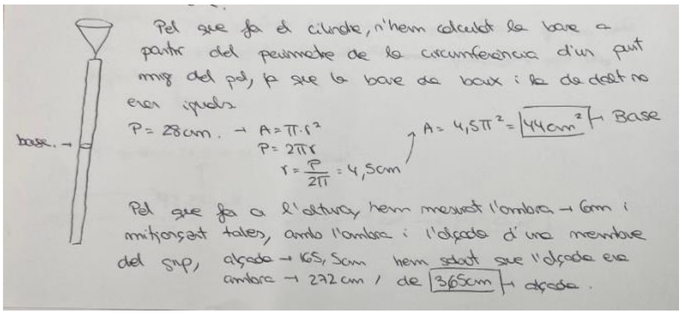
Teorema de Thales (B3)



Proporcionalidad con una persona (A2)

Figura 8. Estrategias de proporcionalidad para calcular la altura del mástil de la farola.

Para determinar el radio de la sección circular, los estudiantes muchas veces consideraban la base del mástil. Sin embargo, el grupo A112 consideró la circunferencia de la sección media del mástil, de modo de compensar la diferencia de diámetros entre la parte baja y alta. Utilizando la fórmula del perímetro, los grupos calcularon el radio de una sección circular seleccionada y con ello aplicaron la fórmula del volumen de un cilindro. En la Figura 9 se muestra la resolución del grupo A112 que ha aplicado las estrategias descritas hasta aquí.

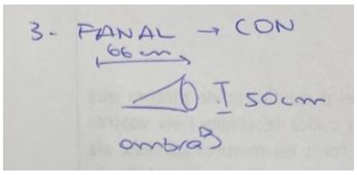


En cuanto al cilindro, hemos calculado la base a partir del perímetro de la circunferencia de un punto medio del mástil, ya que la base abajo y la de arriba no eran iguales.

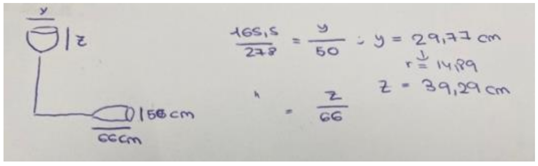
En cuanto a la altura, hemos medido la sombra → 6m y por medio de tales, con la sombra y la altura de un miembro del grupo, altura → 165,5 cm sombra → 272 cm, supimos que la altura era 365 cm.

Figura 9. Estrategias para calcular el volumen del mástil de la farola (grupo A112).

Para el cálculo del volumen de la lampara, la mayoría de los grupos la asimiló a un solo cono, aunque en realidad eran dos con la misma base y distinta altura. Dada la altura a la que se encontraba la lampara no era posible tomar medidas directas, por lo que varios grupos utilizaron la sombra de esta parte de la farola para determinar el diámetro y el correspondiente radio de la base del cono. Esto es posible hacerlo ya que, si bien la sombra distorsiona la longitud vertical del objeto debido a la posición del sol, la longitud horizontal se mantiene debido a la proyección paralela de los rayos de este. Para medir la altura del cono, algunos grupos volvieron a utilizar un razonamiento proporcional utilizando las medidas de la sombra proyectada. En la Figura 10, se muestran dos esquemas para estas estrategias. Teniendo estas medidas, los estudiantes pudieron calcular el volumen de la lampara, y sumado al volumen del mástil, pudieron componer el volumen de la farola.



Grupo A13



Grupo A2

Figura 10. Estrategias para calcular el radio y la altura de la lámpara (cono) de la farola.

Para este problema el formador proporcionó su propio método y resultado, trabajando también a partir de medidas indirectas. En esta propuesta se consideran dos objetos, el mástil y la lámpara. El mástil se trata como un cilindro del que se puede conocer el radio de la base a partir de medir directamente el perímetro de la circunferencia y la altura total por proporcionalidad con la sombra proyectada, como trabajan parte de los grupos de estudiantes, pero con medidas independientes. Esto proporcionó un volumen de 27,83 dm^3 para el mástil. Para la medición del volumen de la lámpara se obtiene una fotografía y se trabaja con GeoGebra para analizar las proporciones de las longitudes clave de la lámpara trabajando por descomposición de conos y usando como referencia la sombra (Figura 11). El cálculo del volumen conjunto de los dos conos arroja una medida de 25,25 dm^3 para un total de 53,08 dm^3 para el volumen del farol.

Figura 11. Sombra de la lámpara de la farola y estudio de proporciones en GeoGebra para generar la respuesta de referencia.

Esta respuesta proporcionada por el formador tampoco puede considerarse exacta, pero al controlar el proceso en cada medición puede asegurarse que no supera el 10% de error. Con ello permite establecer un rango de respuestas adecuadas a los estudiantes y sugerir acciones para corregir los métodos o mediciones ejecutadas cuando se hayan discrepancias de los valores obtenidos por los grupos respecto al valor de referencia.

5. Discusión y conclusiones

En este trabajo se ha desarrollado un análisis de las producciones de futuros maestros frente a la resolución de una actividad de medición a través de medidas indirectas. En el desarrollo de sus propuestas, se han podido identificar diversos conocimientos matemáticos que permiten inferir que se ha superado el fenómeno de la aritmetización de la medida (Chamorro y Belmonte, 1988; Mengual et al., 2017). En primer lugar, los estudiantes han desarrollado procesos de medida para los cuales no era evidente la estrategia a seguir. Entre ellas no solo estaba el uso de fórmulas, las cuales debían ser seleccionas de forma pertinente en cada caso, sino que también hacían uso de estrategias de descomposición de los objetos a medir, en longitudes, superficies o volúmenes más simples, obteniendo medidas parciales que después componían, evidenciando una comprensión y uso de la conservación de cantidad como propiedad básica de la medida. Por otra parte, se puede constatar en las producciones de los estudiantes que la medición indirecta también moviliza el uso de conocimiento formal, como el teorema de Tales o el uso de relaciones proporcionales, cuestiones necesarias para medir magnitudes inaccesibles o que no podían ser efectuadas con instrumentos de medida convencionales.

En términos de los conceptos clave de la trayectoria de aprendizaje de la medida, los estudiantes muestran una comprensión adecuada de las magnitudes a medir y establecen estrategias y modelos geométricos pertinentes para obtener medidas longitudinales, superficiales y volumétricas. Además, la actividad les permite construir conocimientos matemáticos considerados fundamentales por Gorgorió et al. (2017) respecto de la realización de procesos de medida concretos tanto a través del uso de unidades de medida no convencionales (antropométricas) como estandarizadas pertenecientes al sistema métrico decimal. Finalmente, este tipo de situaciones promovió una de las tres características clave del sentido de la medida, tal como lo señala el currículum escolar y diversas investigaciones, al contemplar estimaciones en base a referentes (Generalitat de Catalunya, 2022; Clements y Sarama, 2015), como en el caso de la altura de la hoja más alta de la olivera.

La actividad, desde el punto de vista global, sustenta su potencial didáctico en tres aspectos. El primero es el trabajo grupal, que permite que todos los estudiantes acaben implementando estrategias complejas para obtener los valores de las medidas solicitadas. En este aspecto es necesario destacar que en primer lugar se ha solicitado a todos los estudiantes que generen sus propuestas individuales, con lo que se promueve que cada estudiante conecte las estrategias que finalmente han utilizado con sus propias propuestas, permitiendo integrar nuevos conocimientos a partir de conocimientos previos. En segundo lugar, los enunciados de los problemas de medida indirecta se proporcionan en formato texto, pero los estudiantes acaban trabajando sobre el terreno. Este es un elemento clave para promover la acción de medida e ilustrar la actividad matemática como una actividad situada y contextualizada, cuestión que los docentes podrían replicar en sus contextos educativos. Finalmente, la discusión colectiva sobre estrategias y resultados permite poner el foco sobre el error, inherente a toda actividad de medida, y su gestión. Para proporcionar un valor de referencia que permita establecer un intervalo de valores adecuados se usan dos estrategias docentes. Por un parte se considera el valor promedio de las medidas bien ejecutadas que no proporcionan valores atípicos, y por otra, se proporciona una medición indirecta soportada en decisiones en las que se controla al máximo el resultado por parte del profesorado.

Este tipo de actividad, que conecta aspectos de la medida con conocimiento geométrico es adaptable a los objetos físicos que están al alcance de cada centro educativo, y muestra un gran potencial para promover aprendizajes relacionados con la medida (Albarracín y Rojas, 2023; Costado, 2023). Desde la perspectiva de la formación de maestros, ya sea inicial o permanente, este tipo de experiencias pone en evidencia que en el proceso de medida influye una gran cantidad de conceptos matemáticos, tal como los planteados por Clements y Sarama (2015) para la educación primaria, pero también el uso de conocimiento formal como fórmulas y teoremas propios de la educación secundaria. Así, esta propuesta puede utilizarse a lo largo de la educación obligatoria para trabajar la medida de las magnitudes de longitud, área y volumen, como una propuesta que permite introducir la actividad de medida en las aulas y superar la aritmetización de la medida.

Agradecimientos

Este trabajo se desarrolla en el marco del *Grup d'Investigació sobre Pràctica Educativa i Activitat Matemàtica* GIPEAM (2021SGR-00159) que es un Grupo de Investigación Consolidado (GRC), reconocido y financiado por la Generalitat de Catalunya. La participación de Francisco Rojas en este trabajo fue como Investigador María Zambrano del programa de Ayudas para la Recualificación del Sistema Universitario Español (RD289/2021), financiado Ministerio de Universidades (España) y por la Unión Europea-Next GenerationEU. Lluís Albarracín es Profesor Agregado Serra Húnter en la Universitat Autònoma de Barcelona.

Bibliografía

Albarracín, L. y Rojas, F. (2023). Desarrollo colaborativo de estrategias de medida indirecta: ¡Vamos a medir al patio! *UNO – Revista de didáctica de las matemáticas 102*, 67-73.

Albarracín, L., Badillo, E., Giménez, J., Vanegas, Y. y Vilella, X. (2018). *Aprender a enseñar matemáticas en la educación primaria*. Editorial Síntesis.

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389−407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bishop, A. (1999). *Enculturación Matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Paidós.

Callís, J. (2002). *Estimació de mesures longitudinals rectilínies y curvalínies. Procediments, recursos i estratègies*. Memoria para optar al Grado de Doctor, Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, España.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236 – 253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2019). Aproximación a las conexiones matemáticas que establecen futuros maestros de primaria en tareas de medida y comparación de áreas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. MuñozEscolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 233-242). Valladolid: SEIEM.

Chamorro, M. C. (1996). El currículum de medida en Educación Primaria y ESO y las capacidades escolares. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 10*, 43-62.

Chamorro, M. C. (2003). El tratamiento escolar de las magnitudes y su medida. En M.C. Chamorro (Ed.), *Didáctica de las matemáticas* (pp.221-244). Pearson.

Chamorro, M. C. y Belmonte, J. M. (1988). *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales*. Madrid: Síntesis.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2015). *El Aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a temprana edad: el enfoque de las trayectorias de aprendizaje*. Learning Tools.

Costado Dios, M. (2023). Una experiencia de formación para futuros maestros de educación primaria: implementación de una actividad de geometría y de medida. *Educación Matemática 35*(1), 255-278.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. MEC y Labor.

Generalitat de Catalunya (2022). Decret 175/2022, de 27 de setembre, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació bàsica. Disponible en https://dogc.gencat.cat/ca/document-del-dogc/?documentId=938401

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2002). Medida de magnitudes y su didáctica para maestros. Universidad de Granada.

Gorgorió, N., Albarracín, L., Ärlebäck, J., Laine, A., Newton, R. & Villarreal, A. (2017). Fundamental Mathematical Knowledge: progressing its specification. Linköping University Electronic Press, 2019, p. 8 . LiTH-MAT-R-2019/03-SE. Available online: https://www.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2%3A1318541&dswid=-7867

Gorgorió, N., Albarracín, L., Laine, A., & Llinares, S. (2021). Primary education degree programs in Alicante, Barcelona and Helsinki: Could the differences in the mathematical knowledge of incoming students be explained by the access criteria? *LUMAT, 9*(1) 174–207. https://doi.org/10.31129/lumat.9.1.1468

Gorgorió, N., y Albarracín, L. (2020). El conocimiento matemático previo a la formación inicial de los maestros: necesidad y concreción de una prueba para su evaluación. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández & M. González-Astudillo (Eds.), *RED8-Educación Matemática y Formación de Profesores*, (pp. 111-132). Ediciones Universidad de Salamanca.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. P. (2014). *Metodología de la investigación (6ª edición)*. Mcgraw-hill / Interamericana Editores.

Linsell, C. & Anakin, M. (2012). Diagnostic Assessment of Pre-Service Teachers' Mathematical Content Knowledge. *Mathematics Teacher Education and Development, 14*(2), 4-27.

Linsell, C. & Anakin, M. (2013). Foundation Content Knowledge: What do pre-service teachers need to know? In Steinle, V.; Ball, L.; Bardini, C. (ed.). *Mathematics Education: Yesterday, today and tomorrow* (442-449). MERGA.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Erlbaum.

Martínez, M. V., Rojas, F., Ulloa, R., Chandía. E., Ortíz, A. y Perdomo-Díaz, J. (2019). Beliefs and Mathematical School Knowledge at the Beginning of Pre-service Primary Teacher Education. *Pensamiento Educativo*, *56*(2), 1-19. https://doi.org/10.7764/PEL.56.2.2019.9

Mengual, E., Gorgorió, N. & Albarracín, L. (2017). Análisis de las actividades propuestas por un libro de texto: El caso de la medida. *REDIMAT*, *6*(2), 136-163. https://doi.org/10.17583/redimat.2017.2415

Montoro, A. B., Aguayo-Arriagada, C. G., & Flores, P. (2021). Measurement in Primary School Mathematics and Science Textbooks. *Mathematics,* *9*(17), 2127. https://doi.org/10.3390/math9172127

Moreno, M. F., Gil, F. y Montoro, A. B. (2014). Sentido de la medida. En P. Flores, L. Rico (coords). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria (147-168). Pirámide.

NCTM (2000). *Principles and standards for School Mathematics*. NCTM.

Piaget, J. (1970). *Structuralism*. New York: Basic Book.

Piaget, J. (1981). *Psicología y educación*. España: Ariel.

Pizarro, N., Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2016). Caracterización de las tareas de estimación y medición de magnitudes. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas, 91*, 91-103.

Pla-Castells, M., Melchor Borja, C. y Chaparro, C. (2021). Errores y dificultades de los futuros maestros de educación primaria al afrontar un problema de modelización asociado a la medida de magnitudes. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas 109*, 33-49.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary Teachers' Mathematics Subject Knowledge: The Knowledge Quartet and the Case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education volume 8*, 255–281. https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

Runnalls, C. & Hong, D. (2020). "Well, they understand the concept of area": pre-service teachers' responses to student area misconceptions. *Mathematics Education Research Journal 32*(4), 629-651.

Sala-Sebastià, G. y Farsani, D. (2022). Reflexiones de futuros maestros de infantil sobre una tarea de medida. *CEMeR Caminhos da Educação Matemática em Revista 12*(2), 213-228.

Segovia, I., Castro, E. y Flores, P. (1996). El área del rectángulo. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 10*, 63-67.

Shulman, S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reforms. Harvard Educational Review, 57(1), 1-22.

Francisco Rojas Sateler es Profesor Agregado en el Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals, Universitat Autònoma de Barcelona, Campus de la UAB, 08193 Bellaterra (Cerdanyola del Vallès). Su línea de investigación se centra en el conocimiento matemático de los estudiantes para maestro al inicio de su formación inicial docente, y en el rol del formador de profesores durante el proceso formativo. **franciscojavier.rojas@uab.cat**

Lluís Albarracín Gordo es Profesor Agregado *Serra Hunter* en el Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals, Universitat Autònoma de Barcelona, Campus de la UAB, 08193 Bellaterra (Cerdanyola del Vallès). Su línea de investigación es el desarrollo de Problemas de Fermi como herramienta para el aprendizaje de la modelización matemática en formación inicial docente y en la escuela primaria y secundaria. **lluis.albarracin@uab.cat**