ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230149

ARTÍCULO

Objetos matemáticos que configuran la noción de volumen

Mathematical objects configuring the notion of volume

Sofía Caviedes*

ORCID iD 0000-0002-5304-212X

Guadalupe Morales-Ramírez**

ORCID iD 0000-0002-8295-9965

Luis R. Pino-Fan***

ORCID iD 0000-0003-4060-7408

Resumen

En el presente artículo desarrollamos un estudio histórico-epistemológico a fin de caracterizar los significados parciales de la noción de volumen, y sus ideas epistémicas fundamentales, en tanto objeto complejo de las matemáticas. Para ello, se sigue un análisis de contenido de corte cualitativo y se utilizan herramientas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos como marco teórico-metodológico. Los resultados sugieren cuatro significados parciales de volumen que, en su conjunto, dan cuenta del significado global de tal objeto matemático: 1) volumen como espacio que ocupa un cuerpo en relación con otros objetos, susceptible de ser medido; 2) volumen como relación entre dimensiones y formas; 3) volumen en relación con los indivisibles; y 4) volumen como una función. El análisis histórico, y la caracterización de los significados parciales del volumen, han puesto de relieve la presencia de ideas epistémicas fundamentales que trascienden las diferentes configuraciones epistémicas, pudiendo favorecer la representatividad y la conexión de los significados de volumen.

Palabras clave: Volumen. Idea fundamental. Idea epistémica fundamental. Significados parciales.

Abstract

In this article, we undertake a historical-epistemological study to characterize the partial meanings of the concept of volume and its fundamental epistemic ideas, considering it as a complex object within mathematics. For this purpose, we follow a qualitative content analysis and use some tools of the Ontosemiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction as a theoretical-methodological framework. The results suggest four partial meanings of volume that, as a whole, account for the global meaning of such a mathematical object: 1) volume as the space occupied by a body in relation to other objects, susceptible of being measured; 2) volume as a relationship between dimensions and shapes; 3) volume in relation to indivisibles; and 4) volume as a function.

* Dra. Universitat Autònoma de Barcelona (UAB), España. Profesora Asistente. Universidad de Los Lagos (ULagos), Osorno, Chile. E-mail: sofia.caviedes@ulagos.cl

** Dra. Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ), México. Profesora Asistente. Universidad de Los Lagos (ULagos), Osorno, Chile. E-mail: guadalupe.morales@ulagos.cl

*** Dr. Universidad de Granada (UGR), España. Profesor Titular. Universidad de Los Lagos (ULagos), Osorno, Chile. Profesor Visitante. Universidad de Sonora, México. E-mail: luis.pino@ulagos.cl

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230149

The historical analysis and characterization of partial meanings of volume have brought to light the presence of fundamental epistemic ideas that transcend epistemic configurations, potentially enhancing the representativeness and interconnectedness of volume meanings.

Keywords: Volume. Fundamental idea. Fundamental epistemic idea. Partial meanings.

1 Introducción

La literatura muestra que la comprensión de la noción de volumen, y de sus procesos de medición, resulta problemática para los estudiantes, pues en muchos casos éstos aplican fórmulas sin comprender su origen y funcionamiento (BATTISTA; CLEMENTS, 1996; CLEMENTS; BATTISTA, 1992). Esto se acentúa aún más en el proceso de transición primaria-secundaria, donde procedimientos más abstractos para el cálculo del volumen son introducidos (FREUDENTHAL, 1983; TAN-SISMAN; AKSU, 2016). Igualmente, y en concordancia con Sáiz (2003), las dificultades de los alumnos pueden estar relacionadas con los distintos significados atribuidos a la noción de volumen donde, en cada caso, los elementos susceptibles de ser medidos cambian, es decir, las reglas de uso, comparación y cálculo del volumen son diferentes (SÁIZ, 2002). Esto permite inferir la existencia de distintos significados parciales del volumen (PINO-FAN; GODINO; FONT, 2011), los que no se encuentran descritos en la literatura especializada. En este contexto, con este articulo buscamos dar respuesta a la pregunta: ¿cuáles son los significados parciales de la noción de volumen, que conformarían su significado holístico de referencia?

Tomando en cuenta las aportaciones de Pino-Fan, Godino y Font (2011), se considera que los distintos significados parciales de la noción de volumen dan cuenta del significado global de tal objeto y de su complejidad (RONDERO; FONT 2015). Así, el objetivo de este artículo es caracterizar los significados parciales de la noción de volumen, así como sus ideas epistémicas fundamentales, evidenciando su riqueza matemática en términos de los objetos matemáticos que lo conforman. Para llevar a cabo dicha caracterización utilizamos la noción de idea fundamental (BRUNER, 1960), así como algunas herramientas introducidas por el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS), las cuales explicamos en la siguiente sección.

2. Marco teórico

2.1 La noción de Idea(s) fundamental(es)

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230149

La idea fundamental se introduce en los trabajos de Bruner (1960, 1970), con el fin de distinguir aquello que es relevante para insertar los contenidos científicos, y en sintonía con el desarrollo intelectual de los estudiantes en la escuela. Aunque estas ideas han sido identificadas para la estocástica (HEITELE, 1975), y posteriormente la estadística (p.e., BURRIL; BIEHLER, 2011), no existen estudios que vinculen la noción idea(s) fundamental(es) con la caracterización de volumen que abordamos en este estudio. Así, el presente artículo pretende aportar a la literatura científica mediante la identificación de las ideas fundamentales que son necesarias para la comprensión de la noción de volumen y los procesos de medición asociados.

Bruner (1970) señala que la enseñanza debe estar en concordancia con la cultura, de modo que las ideas fundamentales deben tener un valor explicativo. Por ello, en la identificación de relaciones entre la cultura matemática y no matemática las ideas fundamentales de los conceptos matemáticos juegan un papel clave (HEYMANN, 2003). Bruner (1970) otorga importancia a que los alumnos puedan aprender la estructura fundamental de un contenido (en lugar de hechos individuales), para poder, posteriormente, clasificar, evaluar y deducir hechos individuales. En relación con la teoría curricular del autor, las ideas centrales pueden resumirse en: (1) las estructuras fundamentales del contenido a enseñar están contenidas en un número limitado de conceptos básicos -o ideas fundamentales; (2) la estructura del currículo en espiral permite el tratamiento de las ideas fundamentales y los conceptos en diferentes niveles cognitivos, epistemológicos y lingüísticos. Así, las ideas fundamentales son una continuidad que aborda la comprensión desde lo intuitivo a una forma analítica más elaborada. Los alumnos deben encontrar las ideas fundamentales una y otra vez, cada vez de una forma que se corresponda con el aumento de sus capacidades cognitivas, con la profundidad adecuada y con niveles más complejos de representación (HEYMANN, 2003).

En el enfoque curricular de Bruner las ideas fundamentales se convierten en puntos de cristalización para identificar aquello que tiene importancia en un tema concreto (HEYMAN, 2003). En este sentido, del trabajo de Bruner se desprende que las ideas fundamentales pueden ser entendidas como ideas inherentes a una disciplina concreta y, como representación del mundo no matemático (HEYMAN, 2003). Por ejemplo, la noción de volumen tiene presencia en todos los niveles educativos, aumentando en términos de generalidad y formalización, pero conservando ideas fundamentales que permiten caracterizar su complejidad.

En el caso de la Educación Infantil, por ejemplo, el estudio de los atributos cualitativos de los cuerpos sólidos, la percepción espacial y la medición informal mediante comparaciones directas e indirectas (BATTISTA; CLEMENTS, 1996) constituyen ideas fundamentales para el estudio de la noción de volumen. En la Educación Primaria, las ideas fundamentales se

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230149

relacionan, además, con el establecimiento de la medición formal mediante fórmulas básicas de cuerpos sólidos. Las ideas anteriores se recuperan en la Educación Secundaria para la deducción de fórmulas algebraicas de cuerpos sólidos e identidades notables; y en la Educación Universitaria con el estudio formal del cálculo. A partir de lo anterior, se desprende que la noción de volumen se hace explícita mediante ciertos objetos matemáticos que, con diferentes niveles de complejidad, se van recuperando a lo largo del currículo educativo. Así, este artículo pretende identificar aquellos objetos matemáticos subyacentes al volumen, con el fin de caracterizar sus distintos significados parciales que se van desarrollando de forma progresiva (en términos de formalidad y generalidad) a lo largo del currículo. A continuación, se describen algunas herramientas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemáticos (GODINO; BATANERO; FONT, 2007; 2019), que permiten la caracterización antes señalada.

2.2 Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la instrucción Matemáticos

El EOS adopta una visión pragmática de la comprensión de los objetos matemáticos, por lo que la comprensión del volumen queda definida por la capacidad que se tiene para resolver de manera competente una determinada tarea matemática, reconociendo los distintos objetos que intervienen y emergen en dicha resolución (FONT; GODINO; GALLARDO, 2013). Desde el EOS, el significado de volumen queda definido por el sistema de prácticas realizadas por una persona, o compartidas en el seno de una institución, ante determinadas situaciones problemas (GODINO; BATANERO; FONT, 2007, 2019). Así, cuando se considera el significado del objeto volumen en términos de prácticas, es posible distinguir entre *sentido y significado*. El *sentido* corresponde al *significado parcial* del objeto, indicando que el significado de volumen como objeto complejo se puede parcelar en distintos tipos de prácticas más específicas (GODINO; BATANERO; FONT, 2007), y que pueden ser utilizadas en un determinado contexto. Por su parte, el significado global u holístico (PINO-FAN; GODINO; FONT, 2011) se reconstruye mediante la exploración sistemática de los contextos de uso tal objeto y los sistemas de prácticas que intervienen (GODINO; BATANERO; FONT, 2019). Así, el significado global de volumen queda definido por los significados parciales que emergen de las prácticas específicas que se realizan sobre dicho objeto en diferentes contextos. De este modo, tal objeto queda formado por partes o componentes que posibilitan una mirada global desde su complejidad (RONDERO; FONT 2015).

Godino et al., (2007) proponen una tipología explícita de objetos y procesos matemáticos, lo que condiciona la descripción y el análisis de la práctica matemática. Se

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230149

distinguen seis tipos de objetos matemáticos primarios: (1) elementos lingüísticos (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros; (2) situaciones-problemas (aplicaciones intra o extra-matemáticas); (3) conceptos/definiciones (qué se entiende por un determinado objeto); (4) proposiciones/propiedades (enunciados sobre conceptos/definiciones); (5) procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo); y (6) argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos deductivos o de otro tipo). La emergencia de los objetos matemáticos primarios, por medio de sistemas de prácticas, subraya la complejidad de tales objetos matemáticos y la necesidad de articular las componentes en los que dicha complejidad se enmarca. La configuración epistémica es una herramienta que da cuenta de tal complejidad (BORJI; ERFANI; FONT, 2019; BREDA; SECKEL; FONT, 2018; CAVIEDES; DE GAMBOA; BADILLO, 2021), y está referida al sistema de prácticas que promueve una institución o el currículo, desde un contexto intra matemático del objeto de referencia, en este caso volumen. En este sentido, una buena representatividad del objeto volumen quedaría definida, en un sentido pragmático, por la articulación/conexión de los distintos significados parciales.

3 Método

El presente estudio se sitúa en un paradigma interpretativo y sigue un enfoque de tipo cualitativo (COHEN; MANION; MORRISON, 2013). Se realiza una codificación deductiva guiada por la herramienta de la configuración epistémica (GODINO; BATANERO; FONT, 2007) y sus respectivos objetos primarios. Así, mediante un análisis de contenido (KRIPPENDORFF, 2004) se revisan documentos en los que se discute sobre la riqueza matemática del objeto volumen. Dichos documentos corresponden a unidades de análisis que se dividen en subunidades manejables, buscando los objetos primarios intervinientes en los sistemas de prácticas de los cuales emerge, se desarrolla y formaliza el volumen.

3.1 Análisis

En concordancia con lo señalado por Sáiz (2002), la noción de volumen puede ser rastreada desde dos fuentes, las que en ocasiones se pueden entrelazar: la historia del cálculo y la historia del desarrollo de la geometría. Tomando esto como referencia, se distinguen tres etapas de análisis. La primera es la revisión documental en libros de historia de las matemáticas, actas de congresos, y artículos científicos, para identificar la evolución del conocimiento de volumen. En esta fase, nos inspiramos en las fases de Siddaway, Wood y Hedges (2019) realizando cadenas de búsqueda en *Google Scholar* a partir de palabras en inglés (también español) como volumen, historia, matemáticas/geometría, enseñanza, aprendizaje. La fase de cribado consistió en la lectura del título de cada documento a fin de descartar registros duplicados. Las fases de idoneidad y de inclusión supusieron la lectura del resumen de los artículos/congresos seleccionados, así como de los índices en el caso de los libros. En algunos casos fue necesario leer artículos completos, pues el resumen no era lo suficientemente claro. En la segunda etapa, identificación de objetos matemáticos primarios presentes en la evolución del conocimiento sobre el objeto volumen, el análisis tuvo dos momentos y generó unidades empíricas (sobre la enseñanza y aprendizaje de la noción de volumen) y unidades teóricas (sobre la naturaleza y evolución de la noción de la noción de volumen). Las unidades de contenido empírico se crearon para informar sobre la etapa educativa, participantes y resultados para cada estudio documentado. Lo mismo ocurre con las unidades de contenido teórico, que se crearon para informar sobre fundamentos histórico/teóricos respecto al objeto volumen. Para las unidades identificadas se rastrean los objetos matemáticos primarios (EOS) que configuran el objeto volumen. En la tercera etapa, identificación de los significados parciales de volumen mediante el uso de configuraciones epistémicas, los objetos matemáticos primarios rastreados se agrupan en función de las situaciones problemas que posibilitan su emergencia. Cada agrupación se constituyó como una configuración epistémica que caracteriza a un significado parcial de volumen, a saber: (1) volumen como espacio que ocupa un cuerpo en relación con otros objetos, susceptible de ser medido; (2) volumen como relación entre dimensiones y formas; (3) volumen en relación con los indivisibles; y (4) volumen como una función. Finalmente, se identificaron los objetos matemáticos primarios transversales a las cuatro configuraciones. Estos objetos debían cumplir con la característica de estar presentes en el tratamiento del volumen de manera intuitiva e igualmente de forma analítica más elaborada (BRUNER, 1970). A tales objetos les hemos denominado *ideas epistémicas fundamentales,* las que describimos en el apartado de resultados. A continuación, presentamos los objetos rastreados para cada significado parcial.

3.1.1 Volumen como espacio que ocupa un cuerpo en relación con otros objetos, susceptible de ser medido

La problematización del volumen de los cuerpos sólidos data de las antiguas civilizaciones, existiendo consenso en que los conocimientos geométricos de los babilónicos y

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230149

egipcios nacen de *situaciones problemas* reales, como calcular el volumen de sólidos o pirámides para su construcción. La geometría de los babilónicos da cuenta de la relación íntima con la medición práctica de algunos problemas relativos a sólidos, como los prismas rectos y cilindros. En este sentido, los babilónicos centraron su atención en el uso de la estructura y reglas matemáticas, aunque sin interés por justificarlas o probarlas (GILLINGS, 1982). La construcción de pirámides llevó a los egipcios a mantenerse fieles a una matemática relacionada con el conjunto de *procedimientos* aritméticos, de esta manera recurrían al uso de fórmulas para determinar la medición de volúmenes de sólidos. Los primeros indicios sobre el cálculo del volumen de sólidos se ven en el papiro de Moscú (1890 a.C), donde los egipcios muestran evidencias del uso de la fórmula del volumen para resolver una *situación problema* asociada a la pirámide truncada (GILLINGS, 1982) - obtener la medida del volumen de una pirámide cuadrangular truncada con arista de base inferior igual a 4, arista de base superior igual a 2, y altura igual a 6 -. Gillings (1982) señala que en el papiro se explica el *procedimiento* numérico de la siguiente manera: (i) se eleva 4 al cuadrado; (ii) se duplica este 4; (iii) se eleva 2 al cuadrado; (iv) se suman estos resultados y resulta 28; (v) se obtiene un tercio de 6 resulta 2; (vi) 2 se multiplica por la suma anteriormente obtenida; (vii) el resultado final es 56. Los cálculos anteriores corresponden a la aplicación de la fórmula que se usa hasta la fecha: $v = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$, en un *lenguaje* simbólico explícito por *representaciones* de tipo numérico/algebraico. Aunque no está claro si los egipcios conocían dicha fórmula, es posible que hayan conocido la fórmula $v = \frac{1}{3}(a^2h)$ para calcular el volumen de una pirámide cuadrangular y, a partir de ella la del volumen de la pirámide truncada. Gillings (1982, p. 191) considera que los egipcios podrían haber sido capaces de *argumentar* que *en una pirámide recta construida de arcilla o madera, cuya altura perpendicular es exactamente la mitad del lado de la base cuadrada…el volumen de la pirámide resulta ser* $v = \frac{1}{3}(a^2h)$. Esto indica que los egipcios mostraron cierto dominio del *lenguaje* simbólico en sus distintas *representaciones* (numérica y posiblemente algebraica), e interés por las *propiedades* geométricas de las pirámides. Por ejemplo, podían ejecutar *procedimientos* para calcular el volumen de la pirámide (dada la longitud de un lado de la base y la altura), evidenciando relaciones entre dos medidas lineales, la altura y la longitud, con un volumen (TABAK, 2011).

Los papiros egipcios, además, muestran evidencias de *procedimientos* para el cálculo del volumen de un cilindro (GILLINGS, 1982), con una fórmula que permitía obtener el resultado directamente en unidades de volumen de granos y, con la fórmula del área de la base por la altura, transformando las *unidades de medida* a unidades de capacidad. Este cambio entre

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230149

procedimientos de cálculo de volúmenes, desde aquellos que involucran un conteo eficiente de unidades de la misma naturaleza de aquello que se pretende medir, y otros que involucran comparaciones entre unidades de igual o distinta naturaleza a la que se está midiendo (p.e., longitudes y áreas), da cuenta de un cambio de significado en la medición de volúmenes y permite inferir la existencia de dos *conceptos/definiciones* que se entrelazan en el desarrollo del objeto volumen: el volumen interno (capacidad) y volumen externo.

Al igual que los egipcios, los mesopotámicos se interesaron en la geometría de la medida, como un medio para alcanzar un fin (TABAK, 2011). Por ejemplo, podían calcular el volumen de un objeto que tuviera la forma de una muralla, para responder la *situación problema* de averiguar el número de ladrillos que había que fabricar, y el número de horas/hombres necesarios para construir la muralla. Aunque esta civilización se interesó más por calcular costos y no formas geométricas, los *procedimientos* para la obtención del volumen dan cuenta de una aproximación hacia la *iteración* y conteo de *unidades de medida* y el *concepto/definición* de estructuración espacial, aspectos que hoy en día resultan claves en el contexto escolar. Esto porque permiten a los estudiantes (primaria-secundaria) transitar desde llenar un espacio con unidades concretas, a visualizar y utilizar la estructura de unidades cúbicas como una unidad de medida para el volumen (BATTISTA; CLEMENTS, 1996; BATTISTA, 2007).

En concordancia con Vergnaud (1983), lo anterior hace referencia al entrelazamiento histórico entre el volumen como una magnitud unidimensional y como una magnitud de tipo tridimensional. En el primer caso, el volumen se presenta como una magnitud susceptible de ser medida, aproximada y comparada directamente (p.e., llenado de recipientes, conteo de cubos) y que hace explicitas *propiedades/proposiciones* de las magnitudes unidimensionales, como ser sumable o calculada por apreciaciones cualitativas (p.e., unión y complementación). En el segundo caso, el volumen es calculado a través de magnitudes de otra naturaleza (p.e., la longitud).

3.1.2 Volumen como relación entre dimensiones y formas

Los griegos desarrollaron un enfoque de la geometría más abstracto y menos computacional, pues investigaban las propiedades de clases de objetos geométricos a fin de resolver *situaciones problemas* de tipo deductivo y lógico (TABAK, 2011). Al abordar problemas tridimensionales, los griegos limitaban su atención a formas geométricas relativamente sencillas como cilindros, esferas y conos. Una de las grandes *situaciones problemas* de esta época surge en Atenas alrededor del año 430 a.C: encontrar las dimensiones

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230149

de un nuevo cubo cuyo volumen sea el doble del original usando sólo una regla y un compás. Para dicha situación, Archytas de Tarento (428-347 a.C) encuentra una solución manipulando tres superficies curvas, sin embargo, la solución se demuestra de manera formal en el siglo XIX con el uso de nuevos métodos algebraicos.

Alrededor del 300 a.C, Euclides demuestra las fórmulas para el volumen de los prismas y pirámides mediante el lema (método) de exhausión (Libro XII de Los Elementos), antes presentado por Eudoxo (409-356 a.C). En dicho método se miden volúmenes utilizando un *lenguaje* gráfico en su *representación* geométrica, y *procedimientos* de descomposición de los cuerpos en volúmenes conocidos. La *proposición* 7 del libro XII señala: "un prisma de base triangular se descompone en tres pirámides triangulares iguales entre sí, con base triangular", lo que le permite *argumentar* que el volumen de una pirámide es la tercera parte del prisma de igual altura y con la misma base, y demostrar, mediante el método de exhausión, la *proposición* 10 del mismo libro: "un cono es la tercera parte de un cilindro de la misma base y la misma altura". Así, se *argumenta* que los conos y los cilindros de igual altura son entre sí como sus bases, que los conos y cilindros semejantes guardan entre sí una razón triplicada de la que guardan los diámetros de sus bases y, que los conos y cilindros que tienen bases iguales son entre sí como sus alturas. En la proposición 18 se señala que "las esferas son entre sí como las razones triplicadas de sus diámetros", haciendo explícito el *concepto/definición* de proporcionalidad que existe entre la esfera y su diámetro, aunque no se indica una fórmula para el volumen. A diferencia de lo que Euclides realiza para la pirámide, donde se aplica la exhausión a la descomposición de la misma en otros cuerpos, para el cilindro la exhausión prueba que es posible aproximar el cilindro y el cono mediante prismas y pirámides, respectivamente, por dentro y por fuera (volumen interno y externo).

Utilizando también el método de exhausión, Arquímedes (250 a.C.) profundiza en el volumen de cuerpos desconocidos. Para esto, introduce nuevos *conceptos/definiciones* como el peso y el centro de gravedad. En su denominado "Método", Arquímedes calcula volúmenes más complicados, como el de la esfera, *argumentando* que este es cuatro veces el del cono que tiene como base un gran círculo de la esfera y altura igual al radio. Arquímedes calcula un volumen desconocido en términos del volumen de otros cuerpos conocidos, donde son utilizadas las *propiedades* de transitividad, aditividad y conservación (transformaciones de desplazamiento) por comparación directa de los cuerpos. A modo de ejemplo, en el caso del cálculo del volumen de un cuerpo A, se utilizan otros dos cuerpos B y C, tales que se conocen sus volúmenes, además, de B se conoce también su centro de gravedad (SÁIZ, 2002). En suma, Arquímedes y Eudoxo establecieron diversos resultados sobre el área y el volumen mediante argumentos sofisticados, por ejemplo, en sus cálculos de cocientes de áreas o volúmenes de dos figuras, Arquímedes hizo uso de infinitesimales de un modo similar al del cálculo integral en su primera etapa, como la cuadratura de la parábola (TOSHIKAZU, 2019).

Una *situación-problema* particular de esta época es la que el rey de Siracusa pide a Arquímedes: comprobar si su nueva corona estaba realmente hecha de oro puro. Al respecto, Arquímedes introduce la corona en una tina con agua advirtiendo un desplazamiento de cierta cantidad de agua. Así, surge la *proposición* de "todo cuerpo sumergido dentro de un fluido experimenta una fuerza ascendente llamada empuje, equivalente al peso del fluido desalojado por el cuerpo", donde se hace explícito un significado de volumen por desplazamiento de líquido (capacidad), introduciendo los *conceptos/definiciones* de densidad y masa, más ligados a la física. Para efectos de este estudio, vinculamos este significado al volumen interno que se puede calcular, pues en matemáticas no se ha elaborado un modelo para la capacidad como tal, por lo que hay que recurrir a su relación con el volumen para manejarla matemáticamente (OLMO; MORENO; GIL, 1989).

3.1.3 Volumen en relación con los indivisibles

Con el fin de resolver *situaciones-problemas* relacionadas con el almacenamiento y comercio de vinos (la forma de los barriles que con menor superficie puedan tener mayor volumen), Kepler utiliza un cierto 'principio de continuidad'. Así, el *concepto/definición* infinitesimal comienza a relacionarse con el cálculo del volumen y surgen *propiedades* que aluden a la idea de incrementar una magnitud como variable independiente (GONZÁLEZ, 2008; ANDERSEN, 1984); situación que representa el punto de partida para el uso de magnitudes infinitamente pequeñas, los infinitesimales (PINO-FAN; GODINO; FONT, 2011). En este sentido, Toshikazu (2019) señalan que Kepler calculó los volúmenes de los sólidos de revolución cuando el cálculo integral se encontraba aún en una fase incipiente, pero fue Pappus quien llegó a encontrar una fórmula general para calcular estos sólidos (TABAK, 2011).

Al cabo de un tiempo, Bonaventura Cavalieri (1598-1647) propuso el principio de Cavalieri, para hallar áreas y volúmenes de figuras generales, considerado como un término medio entre la cuadratura griega y el cálculo integral. Cavalieri considera que una región plana se compone de un número infinito de líneas paralelas, cada una de las cuales se considera un rectángulo infinitesimal. Así, el principio indica que es posible medir mediante *procedimientos* de comparación de lo que él llama los *indivisibles*, *concepto/definición* importante en este significado, y que se *define* como los sólidos que se forman al cortar el cuerpo con planos

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230149

paralelos a su base. De esta manera, el volumen queda *definido* mediante la incorporación sucesiva de una cantidad infinita de planos paralelos a las bases del objeto tridimensional (ARAYA *et al.,* 2021). La idea de Cavalieri era la de considerar todos los planos paralelos a la base que cortan al cuerpo, en consecuencia, se forman sólidos infinitamente delgados. El principio de Cavalieri, para volúmenes, puede enunciarse como "si en dos cuerpos de igual altura las áreas de las secciones producidas por planos paralelos a la base son iguales, entonces los cuerpos tienen el mismo volumen". Los *procedimientos* que justifican volúmenes mediante este principio comienzan comparando unos cuerpos con otros y, en concordancia con González-López y Flores (2001), consideran las siguientes *proposiciones:* (i) un ortoedro, un prisma y un cilindro que tengan igual base y altura tienen el mismo volumen, (ii) pirámides y conos que tengan igual base y altura tienen el mismo volumen. Estas proposiciones introducen un *argumento* con el *concepto/definición* de proporcionalidad que prueba que, si dos pirámides o conos de la misma altura se cortan por planos que están a la misma distancia perpendicular de los vértices, las secciones son como las respectivas bases. En particular, la *proposición* indica que, si las bases de las dos pirámides o los dos conos son iguales, entonces las secciones también son iguales (Figura 1).

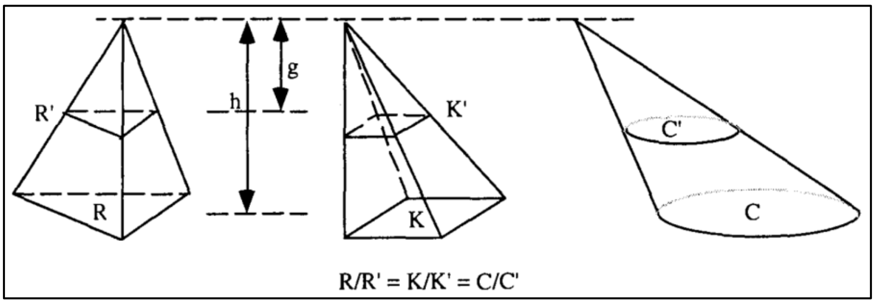

Figura 1 - Ejemplo de aplicación del principio de Cavalieri
Fuente: GONZÁLEZ-LÓPEZ; FLORES (2001, p. 105)

Las proposiciones anteriores permiten afirmar que las tres pirámides triangulares en que se descompone un prisma triangular tienen igual volumen, lo que conduce a la razón (*concepto/definición*) 1:3 entre el volumen de la pirámide y el prisma. Por medio de un *lenguaje* gráfico en su representación geométrica, y simbólico en su representación algebraica, se extiende esta razón al cono y cilindro (GONZÁLEZ-LÓPEZ; FLORES, 2001). En el principio de Cavalieri, la geometría plana y espacial están directamente relacionadas mediante el significado de volumen como espacio ocupado por un cuerpo sólido, ya que los postulados de una sirven de base para comprender la naturaleza de la otra. Además, el *procedimiento* de descomposición en capas es la base para generalizar el cálculo de volumen a otros cuerpos geométricos mediante el uso de la integral. Así, en este significado parcial se encuentra implícita la estructura de capas que subyace a la fórmula de volumen y, por ello, a la visualización de la

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230149

estructura de los objetos tridimensionales mediada por la estructuración espacial, y las propiedades de polígonos y cuerpos geométricos (BATTISTA; CLEMENTS, 1996).

3.1.4 Volumen como una función

Con los trabajos de Newton (1642-1727) y Leibniz (1646-1716), se introduce el *concepto/definición* integración, donde *se relacionan procedimientos y técnicas propias del cálculo para obtener la longitud de las curvas, el tamaño de las áreas y los volúmenes de los sólidos* (TABAK, 2011, p. 223). La integración permite resolver *situaciones problemas* vinculadas a los sólidos de revolución (sólido que se obtiene al rotar una curva plana respecto a una recta fija), con uso de un *lenguaje* simbólico en su *representación* algebraica y un *lenguaje* gráfico en su *representación* geométrica/cartesiana. En este sentido, González-López y Flores (2001), señalan que en el cálculo integral se parte del espacio euclídeo E, donde el volumen adquiere el *significado de función* real positiva, cuyo dominio son los subconjuntos compactos de E, que verifica una serie de *propiedades* (p.e., aditividad, conservación, linealidad, homogeneidad, monotonía). La teoría general de la medida proporciona un tipo de integral (p.e., integral definida para el sólido de revolución) que responde a las propiedades requeridas para la función volumen (GONZÁLEZ-LÓPEZ; FLORES, 2001) y donde entra en juego el teorema fundamental del cálculo y el límite como nuevos *conceptos/definiciones*. En general, una función puede girarse libremente, por lo que la forma del sólido que se genera depende tanto de la naturaleza de la función, como del eje de revolución. Un volumen del sólido de revolución se conforma de la suma infinita de franjas unitarias de volumen, y si se genera haciendo girar a una función $f(x)$ alrededor del eje x se puede calcular por medio del *procedimiento* que involucra a la fórmula: $v = \int_a^b a\,\pi \cdot [f(x)]^2 dx$ donde a y b representan las rectas que lo limitan, es decir, son los extremos, dicho procedimiento se conoce como volúmenes por discos.

De acuerdo con Sáiz (2002), la integración se lleva a cabo sobre diferentes tipos de conjuntos. Por ejemplo, Marsden, Tromba y Mateos (1991) presentan la siguiente definición: *Sea D una región en el plano, y R un rectángulo que contiene a D. Dada $f: D \to R$ donde f es continua (y por lo tanto acotada), definir $\int_D \quad f(x,y)dA$, la integral de f sobre el conjunto D como sigue: extender f a una función $f*$ definida en todo R mediante:*

$$f*(x,y) \;=\; f(x,y), \quad si\ (x,y) \in D \quad y \;\; f*(x,y) = 0 \;\; si\ (x,y) \notin D \;\; y (x,y) \in R$$

Así, $f*$es integrable sobre R.

Por lo tanto, se puede definir:

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230149

$\int_D f(x,y)dA = \int_R f*(x,y)dA.$

Cuando $f(x,y) \geq 0$ en D, se puede interpretar la integral $\int_D f(x,y)dA$ como el volumen de la región tridimensional entre la gráfica f y D (Figura 2).

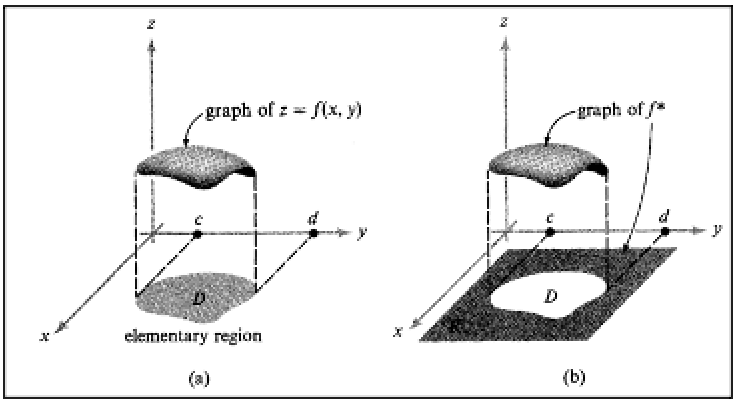

Figura 2 – Ejemplo de aplicación de la integración
Fuente: MARSDEN; TROMBA; MATEOS (1991, p. 330)

En el estudio formal del cálculo también suceden procesos de cálculo bidimensionales, es decir, se centra la atención en dos parámetros que involucran tipos de unidades y *conceptos/definiciones* diferentes (p.e., longitud y área), los cuales permiten determinar el volumen como objeto complejo (Sáiz, 2002). Esto indica que, para ejecutar procedimientos de cálculo es necesario recuperar los significados de volumen en relación con el espacio que ocupa un cuerpo y el volumen como magnitud que se puede calcular, así como los *conceptos/definiciones, propiedades* y *proposiciones* involucrados.

La integral de Lebesgue puede considerarse como el último eslabón de la cadena que representa el desarrollo histórico del objeto volumen (Sáiz, 2002), aunque el volumen se *define* como medida de un espacio de dimensión tres, quedando reducido a la medida y sin distinguirlo de la longitud o del área. Aquí, el volumen pierde las cualidades que como magnitud lo enriquecen (SÁIZ, 2002). Al respecto, Boltianskii (1978) citando a Hilbert observa que:

> […] desde los tiempos de Euclides el volumen de una pirámide había sido calculado usando un proceso complicado de límite. La esencia de la situación problema es justificar el uso de un proceso de límite 'superfluo'... y demostrar que, sin el uso de tal procedimiento, no se puede construir una teoría de volúmenes para poliedros (BOLTIANSKII, 1978 p. 1).

Así, Hilbert hace referencia a los procedimientos de equidescomposición que resultan útiles en geometría plana, pero no siempre para el volumen. De esta manera, surge la *situación problema* que Hilbert plantea en 1900: dados dos poliedros de igual volumen ¿es siempre posible cortar el primero en una cantidad finita de piezas poliédricas que puedan ser ensambladas de modo que quede armado el segundo? Este problema es resuelto por Dehn y se hace explícito en la *proposición* que indica que el cubo y la pirámide triangular de igual

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230149

volumen no son equicompuestos (BOLTIANSKII, 1978). Sáiz (2002) señala que este resultado tiene efectos en la educación secundaria, pues dicha fórmula puede formalizarse a través de un proceso de límite, lo que requiere volver a los conocimientos geométricos tridimensionales, su relación con la geometría plana, la estructuración espacial, estructura de capas, iteración de unidades de medida y la estructura de unidades cúbicas.

4 Resultados

El análisis anterior ha permitido identificar la existencia de cuatro significados parciales de volumen que dan cuenta de su significado global u holístico, así como de su complejidad y riqueza matemática asociada.

El Cuadro 1 muestra los objetos matemáticos asociados al significado parcial de volumen como *espacio que ocupa un cuerpo en relación con otros objetos, susceptible de ser medido*. Este significado se construye tomando como referencia los objetos matemáticos primarios que emergen de la problematización del volumen de los cuerpos sólidos hecha por las antiguas civilizaciones (babilónicos y egipcios).

<table>
<tr><th>Objetos primarios</th><th colspan="2">Descriptores</th></tr>
<tr><td>Situaciones problema (S)</td><td colspan="2">(S1) Calcular el volumen de las estructuras (sólidos o pirámides).
(S2) Medir la cantidad de material necesario para erigir pirámides o el grano necesario para la elaboración de productos o bebidas alcohólicas.</td></tr>
<tr><td>Elementos lingüísticos (E)</td><td colspan="2">(E1) Oral/escrito: cantidad de grano o material ocupado
(E2) Geométricos: figuras de objetos tridimensionales que se asemejan a cuerpos geométricos.
(E3) Simbólicos: sistema numérico</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Conceptos / Definiciones (CD)</td><td colspan="2">(CD1) El volumen es la cantidad de espacio tridimensional ocupado por una sustancia cuando se vierte o se coloca en un recipiente.
(CD2) El volumen es un espacio tridimensional ocupado por un objeto sólido.
(CD3) El volumen es el número de unidades cúbicas idénticas que caben en un espacio determinado.</td></tr>
<tr><td>(CD1) Base
(CD2) Altura
(CD3) Ancho
(CD4) Pirámide
(CD5) Pirámide truncada
(CD6) Cilindro
(CD7) Estructuración espacial
(CD8) Estructura de capas</td><td>(CD9) Espacio ocupado
(CD10) Superficie ocupada
(CD11) Capacidad
(CD12) Proporcionalidad
(CD13) Unidades de medida no estándar
(CD14)Unidad cúbica
(CD15) Unidad compuesta</td></tr>
<tr><td>Propiedades/proposiciones</td><td colspan="2">(Pp1) Conservación
(Pp2) Aditividad
(Pp3) atributos de los cuerpos geométricos
(Pr1) El volumen de una pirámide es un tercio del volumen de un prisma con la misma base y altura.</td></tr>
</table>

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230149

	(Pr2) El volumen de la pirámide truncada es un tercio del producto de la altura por la suma de las áreas de las dos bases ,y el área de las caras laterales trapezoidales.
Procedimientos (P)	(P1) Verter o colocar una sustancia (p.e., líquido, granos) en un recipiente graduado. (P2) Contar del número de unidades individuales en la misma dimensión del objeto a medir. (P3) Aplicar fórmulas para el volumen de pirámides y pirámides truncadas.
Argumentos (A)	(A1) El volumen de un objeto puede obtenerse multiplicando el número de unidades necesarias para llenar completamente el objeto, por el volumen unitario de cada cubo. Así, la medida del volumen se obtiene de manera indirecta mediante operaciones aritméticas. (A2) El volumen de un objeto puede obtenerse mediante el uso de instrumentos de medida (unidades de medida tridimensionales). Así la medida del volumen se obtiene de manera indirecta aplicando reiteradamente las unidades de medida hasta lograr cubrir el espacio que se quiere medir.

Cuadro 1 - Volumen como espacio que ocupa un cuerpo en relación con otros objetos, susceptible de ser medido
Fuente: elaboración propia

El Cuadro 2 muestra los objetos matemáticos asociados al significado parcial de *volumen como relación entre dimensiones y formas.* Este significado se construye tomando como referencia los objetos matemáticos primarios que emergen de la problematización de demostrar y relacionar (de manera cualitativa y/o cuantitativa) los atributos de los cuerpos sólidos en el tiempo de Euclides y Arquímedes.

Objetos primarios	Descriptores	
Situaciones problema (S)	(S1) Calcular y demostrar el volumen de diferentes sólidos.	
Elementos lingüísticos (E)	(E1) Oral/escrito: cantidad de veces que un cuerpo contiene/compone a otro. (E2) Geométricos: figuras geométricas sólidas. (E3) Simbólicos: sistema aritmético y algebraico para establecer relaciones de proporcionalidad.	
Conceptos / Definiciones (CD)	(CD1) El volumen es una propiedad de las figuras sólidas, definidas como formas tridimensionales que tienen longitud, anchura y altura. (CD2) El volumen es la relación entre los tipos de figuras sólidas y sus propiedades. (CD3) El volumen corresponde a la medida como diferencia entre una cantidad de sustancia (que se vierte o se coloca en un recipiente) resultante de la inmersión de un objeto, y la cantidad de sustancia inicial.	
	(CD1) Magnitud conmesurable. (CD2) Estructuración espacial. (CD3) Peso. (CD4) Centro de gravedad. (CD5) Unidades de medida (CD6) Unidad cúbica	(CD7) Unidad compuesta. (CD8) Densidad. (CD9) Masa. (CD10) Capacidad. (CD11) Descomposición de cuerpos. (CD12) Estructura de capas

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230149

Propiedades (Pp) y proposiciones (Pr)	(Pp1) Conservación por transformación de desplazamiento (traslación). (Pp2) Transitividad. (Pp3) Aditividad. (Pp4) atributos de los cuerpos geométricos (Pr1) El volumen de una pirámide es exactamente un tercio del volumen de un prisma con la misma base y altura. (Pr2) El volumen de objetos de forma irregular puede obtenerse sumergiéndolos en agua y midiendo la cantidad de agua desplazada. (Pr3) El volumen de cualquier cono es igual a un tercio del volumen de un cilindro. (Pr4) El volumen del cilindro es tres veces el volumen del cono. (Pr5) El volumen de la esfera es exactamente dos tercios del volumen del cilindro.
Procedimientos (P)	(P1) Componer y (equi)componer. (P2) Descomponer. (P3) Desplazar líquidos. (P4) Utilizar esquemas de estructuración espacial, como encontrar una capa e iterar a través de la altura.
Argumentos (A)	(A1) El volumen de los poliedros regulares puede obtenerse por descomposición y composición de las formas que los componen. (A2) Las fórmulas de volumen se justifican mediante el razonamiento y la lógica, que permiten deducir las relaciones entre las distintas dimensiones de un objeto sólido.

Cuadro 2 - Volumen como relación entre dimensiones y formas
Fuente: elaboración propia

El Cuadro 3 muestra los objetos matemáticos asociados al significado parcial de *volumen en relación con los indivisibles*. Este significado se construye tomando como referencia los objetos matemáticos primarios que emergen de la problematización de encontrar áreas y volúmenes de figuras generales a partir la partición infinitesimal. El principio de Cavalieri juega un papel clave en este significado parcial, considerado un término medio entre la cuadratura griega y el cálculo integral.

Objetos primarios	Descriptores	
Situaciones problema (S)	(S1) Medir la cantidad de sustancia requerida para la elaboración y comercio de bebidas alcohólicas. (S2) Calcular y demostrar el volumen de sólidos desconocidos	
Elementos lingüísticos (E)	(E1) Oral/escrito: aproximación por subdivisiones. (E2) Geométricos: figuras geométricas sólidas conocidas. (E3) Simbólicos: conjunto de los R+ para el uso de operaciones aritméticas/ algebraicas para justificar la aproximación al volumen por subdivisiones.	
Conceptos / Definiciones (CD)	(CD1) El volumen es la medida de la cantidad de espacio ocupado por un objeto tridimensional, que se obtiene mediante la aproximación de la suma de volúmenes de formas más pequeñas y simples, y tomando el límite a medida que el número de subdivisiones tiende al infinito.	
	(CD1) Pi (π) (CD2) Radio (CD3) Diámetro (CD4) Unidades de medida (CD5)Unidad cúbica	(CD6) Unidad compuesta (CD7) Estructuración espacial (CD8) Estructura de capas (CD9) Rectángulo infinitesimal (CD10) indivisibles

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230149

Propiedades (Pp) y proposiciones (Pr)	(Pp1) Conservación por transformaciones isométricas. (Pp2) Transitividad. (Pp3) Aditividad. (Pp4) atributos de los cuerpos geométricos (Pr1) El volumen de la esfera es dos tercios del volumen del cilindro circunscrito. (Pr2) El volumen se disocia de la forma del objeto.
Procedimientos (P)	(P1) Aplicar método de exhausión. (P2) Aplicar fórmulas de poliedros y cuerpos redondos.
Argumentos (A)	(A1) El volumen de un cuerpo geométrico puede obtenerse al dividir dicho cuerpo en formas más pequeñas y sencillas, cuyos volúmenes se conocen o pueden calcularse fácilmente. Sumando los volúmenes de estas subdivisiones y tomando el límite, a medida que el número de subdivisiones se acerca al infinito, puede obtenerse un valor preciso del volumen.

Cuadro 3 - Volumen en relación con los indivisibles
Fuente: elaboración propia

El Cuadro 4 muestra los objetos matemáticos asociados al significado parcial de *volumen como una función*. Este significado se construye tomando como referencia los objetos matemáticos primarios que emergen de la problematización de determinar el volumen de solidos de revolución a partir de la integral definida, introducido con los trabajos de Newton y Leibniz.

Objetos primarios	Descriptores	
Situaciones problema (S)	(S1) Calcular matemáticamente el volumen de sólidos que se obtienen al girar una figura plana sobre un determinado eje.	
Elementos lingüísticos (E)	(E1) Oral/escrito: función positiva, aditiva, invariante. (E2) Gráfico: figuras del plano cartesiano, eje de las abscisas y ordenadas. (E2) Geométricos: figuras de polígonos y sólidos. (E3) Simbólicos: conjunto de los R+ para el cálculo indirecto del volumen (aritmético y algebraico).	
Conceptos / Definiciones (CD)	(CD1) El volumen de una región en R^3 es igual a la integral definida del área de sus secciones por planos paralelos a uno dado. (CD2) El volumen de una región R^3 es igual a la diferencia de las integrales definidas de sus secciones por planos paralelos a uno dado. (CD3) El volumen de un sólido de revolución es la integral definida del área circular cuyo radio es una función dada.	
	(CD1) Volumen por desplazamiento (CD1) Límite (CD2) Integración (CD3) Integral definida (CD4) Unidad compuesta (CD5) Estructuración espacial	(CD6) Estructura de capas (CD7) Plano euclidiano (CD8) Función (CD9) Sólidos de revolución (CD10) Unidades de medida (CD11) Unidad cúbica
Propiedades (Pp) y proposiciones (Pr)	(Pp1) Conservación (Pp2) Aditividad (Pp3) Linealidad (Pp4) atributos de los cuerpos geométricos	(Pp5) Homogeneidad (Pp6) Monotonía (Pp7) No negatividad

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230149

Procedimientos (P)	(P1) Aplicar técnicas de cálculo algebraico que involucran integración para la obtención del volumen de los sólidos de revolución. (P2) Calcular la integral definida sobre el área de sus secciones transversales a lo largo de una dirección específica (método por discos).
Argumentos (A)	(A1) La integración, es un método para hallar el área bajo una curva. En el caso del volumen de un objeto tridimensional, la integración se utiliza para sumar los volúmenes infinitesimales de las finas láminas que componen el objeto.

Cuadro 4 - Volumen como función
Fuente: elaboración propia

Las configuraciones epistémicas elaboradas han evidenciado que ciertos objetos primarios son transversales a los significados parciales de volumen, permitiendo su articulación. A estos objetos los hemos denominamos *ideas epistémicas fundamentales* (Figura 3), encontrándose entre ellas *conceptos/definiciones* (p.e., estructuración espacial, estructura de capas de capas, unidad cúbica, unidad compuesta, unidades de medida), y *propiedades/proposiciones* (p.e., atributos de los cuerpos geométricos, conservación del volumen, acumulación y aditividad del volumen). Se evidencia que la *estructuración espacial* y *estructura de capas* son conceptos/*definiciones* vinculados a un proceso de visualización presente en el significado de volumen como relación entre dimensiones y formas, por ejemplo en la utilización de esquemas de estructuración espacial al iterar capas a través de la altura de un cuerpo geométrico. En el significado de volumen en relación con los indivisibles, estos *conceptos/definiciones*, así como el proceso de visualización, se hacen explícitos al obtener volumen de un cuerpo geométrico dividiendo dicho cuerpo en formas más pequeñas y sencillas. De manera similar, en el significado de volumen como una función, la *estructuración espacial* y *estructura de capas* son conceptos/*definiciones* vinculados a la representación de un sólido de revolución donde, al mismo tiempo, se requiere de un proceso de visualización para identificar la figura en el plano que genera dicho sólido.

Los *conceptos/definiciones* de unidades de medida, unidad cúbica o unidad compuesta, constituyen otras ideas epistémicas fundamentales, en tanto permiten conectar distintos significados parciales de volumen. Por ejemplo, estos *conceptos/definiciones* hacen parte de los significados de volumen como espacio que ocupa un cuerpo en relación con otros objetos, susceptible de ser medido; y de volumen en relación con los indivisibles. En el primer caso, estas ideas resultan importantes para integrar y coordinar *unidades cúbicas* en un *procedimiento* de *iteración* (BATTISTA, 1999), y comprender la composición de dichas unidades en relación con magnitudes unidimensionales y bidimensionales (longitud y área). En el segundo caso, las ideas mencionadas resultan relevantes para la obtención del volumen mediante la aproximación de la suma de volúmenes de formas más pequeñas y simples.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230149

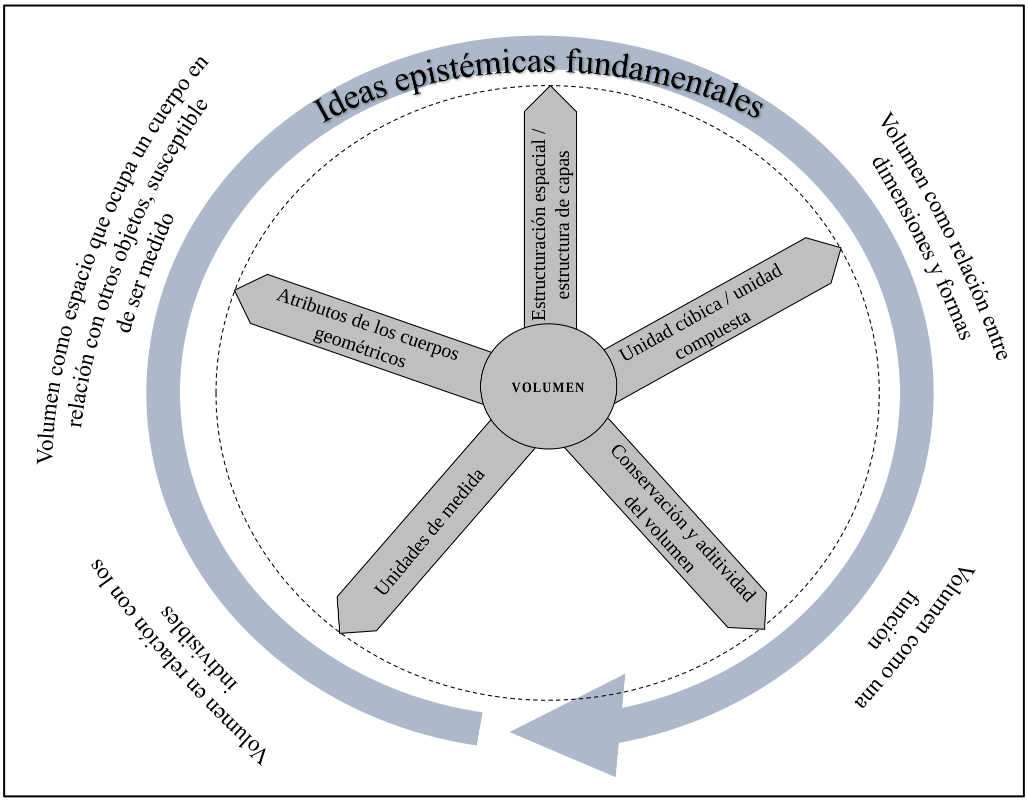

Figura 3 - Ideas epistémicas fundamentales de los significados parciales de volumen
Fuente: elaboración propia

Los *atributos de los cuerpos geométricos* corresponden a *propiedades/proposiciones* que constituyen otra idea epistémica fundamental, en tanto son transversales a todos los significados parciales de volumen y guardan directa relación con las propiedades del volumen, como la conservación y aditividad. Dicha idea se asocia con las descomposiciones, (equi) composiciones y giros que se realizan sobre los cuerpos y figuras geométricas respectivamente, y que permiten la obtención del volumen por distintos procedimientos. Por ejemplo, el proceso de medición que involucra el *procedimiento* de exhausión en el caso del volumen como relación entre dimensiones y formas; y, el cálculo en el caso del volumen como una función.

5. Discusión y conclusiones

El objetivo de este artículo fue caracterizar los significados parciales de la noción de volumen y sus ideas epistémicas fundamentales, evidenciando su riqueza matemática en términos de los objetos matemáticos que lo conforman. La evolución histórica del objeto volumen sugiere que el trabajo de Euclides sienta las bases para la medida volumétrica y la visualización de la estructura de los objetos tridimensionales, en términos de las unidades de medida, y para integrar la información de las tres dimensiones lineales de los objetos al razonar sobre fórmulas de volumen. Hoy se sabe que esto tiene especial relevancia en la introducción del volumen en los niveles educativos de primaria y secundaria, y en la construcción cognitiva de la estructura de las matrices de cubos 3D en los alumnos (BATTISTA; CLEMENTS, 1996). El desarrollo del conocimiento sobre el objeto volumen permitió identificar distintos significados parciales los cuales se integran, transversalmente, por ideas epistémicas fundamentales referidas a conceptos/definiciones y propiedades/proposiciones, tal es el caso de los atributos geométricos tridimensionales, la estructura unitaria de una matriz y de los algoritmos que, a su vez, se ven vinculados con la estructura de capas y la fórmula de volumen (HUANG; WU, 2019). Esto se ve reflejado, por ejemplo, en los trabajos de Cavalieri con la introducción de los indivisibles y, posteriormente, con el desarrollo del cálculo integral.

El recorrido histórico, y la construcción de las configuraciones epistémicas, sugiere que las ideas epistémicas fundamentales se presentan como objetos que podrían favorecer la representatividad y la conexión de los significados de volumen, tal y como se sugiere de manera intuitiva en Rondero y Font (2015). En este sentido, estas ideas epistémicas fundamentales podrían sustentar el proceso seguido para la obtención de fórmulas de cálculo indirecto de volúmenes (p.e., a partir de áreas y longitudes) siendo un puente entre el conocimiento de tipo intuitivo y otro de tipo formal que transitan en espiral (en el sentido de BRUNER, 1970).

Los resultados presentados pueden tener implicaciones en el tratamiento que dan los docentes en la enseñanza del objeto volumen y su medición en un contexto de aula. En este sentido, los resultados sugieren que la resolución de situaciones-problema que involucran la medición/cálculo de volumen necesita de una coordinación entre distintos significados parciales de volumen, a fin de desarrollar una compresión de los elementos subyacentes (BATTISTA; CLEMENTS, 1996; CLEMENTS; BATTISTA, 1992). No obstante, y con miras a su aplicabilidad en el aula, reconocemos la importancia de expandir este estudio mediante un análisis curricular que integre las ideas epistémicas fundamentales delineadas en el presente manuscrito.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco de los Proyectos Fondecyt Posdoctorado 3230316, Fondecyt Regular 1200005, y Proyecto de Fortalecimiento de Programas de Doctorado Nº 86220016, financiados por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile.

Referencias

ARAYA, A; PINO-FAN, L. R; MEDRANO, I. G; CASTRO, W. F. Epistemic Criteria for Designing Limit Tasks on a Real Variable Function. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230149

35, n. 69, p. 179-205, nov. 2021.

ANDERSEN, K. **The Geometry of an Art: The History of the Mathematical Theory of Perspective from Alberti to Monge**. Dordrecht: Springer, 1984.

BATTISTA, M. T. Fifth graders' enumeration of cubes in 3D arrays: conceptual progress in an inquiry-based classroom. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 30, n. 4, p. 417-448, jul. 1999.

BATTISTA, M. T. The development of geometric and spatial thinking. *En:* LESTER JR, F. (ed.). **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics**. Greenwich: Information Age Publishing, Inc.; NCTM, 2007 p. 843-909.

BOLTIANSKII, V.G. **Figuras equivalentes y equicompuestas**. Traducción al español por Stanislav N. Betoúsov. Moscú: Editorial Mir. 1978 p.1-81.

BORJI, V., ERFANI, H., FONT, V. A combined application of APOS and OSA to explore undergraduate students' understanding of polar coordinates. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,** London, v. 51, n. 3, p. 405-423, mar. 2019.

BREDA, A., SECKEL, M. J., FONT, V. Algunas implicaciones didácticas derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos cuando estos se aplican a distintos contextos. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Curitiba, v. 11, n. 2, 498-519, ago. 2018.

BRUNER, J. S. On learning mathematics. **The Mathematics Teacher**, v. 53, n. 8, p. 610-619, 1960.

BRUNER, J. S. **The Process of Education**. Cambridge: Harvard University Press, 1970.

BURRILL, G.; BIEHLER, R. Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. *En:* BATANERO, C.; BURRILL, G.; READING, C. (ed.). **Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education.** A joint ICMI/IASE study. Dordrecht: Springer, 2011. p. 57-69.

CAVIEDES, S; DE GAMBOA, G; BADILLO, E. Mathematical objects that configure the partial area meanings mobilized in task-solving. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,** London, v. 54, n. 6, dec. p. 1092-1111, 2021.

CLEMENTS, D. H.; BATTISTA, M. Geometry and spatial reasoning. *En:* GROUWS, D. A. (ed.) **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: NCTM; Macmillan, P. C., 1992. p. 161-204.

COHEN, L.; MANION, L.; MORRISON, L. **Research methods in education.** London: Routledge, 2013.

EUCLIDES. **Elementos.** Madrid: Gredos, 2007.

FONT, V.; GODINO, J. D.; GALLARDO, J. The emergence of objects from mathematical practices. **Educational Studies in Mathematics**, Amsterdam, v. 82, n. 1, p. 97-124, may. 2013.

FREUDENTHAL, H. Measuring by means of Geometry. *En:* BISHOP, A.J. (ed.). **Didactical phenomenology of mathematical structures**. Dordrecht: Kluwer, 1983. p. 373-392.

GILLINGS, R. J. Areas and volumes. **Mathematics in the time of the pharohs.** Mineola: Dover Publications, 1982, p. 13-150.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230149

education. **ZDM**, Heidelberg, v. 39, n. 1-2, p. 127-135, jan. 2007.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The Onto-Semiotic Approach: Implications for the Prescriptive Character of Didactics. **For the Learning of Mathematics**, Vancouver, v. 39, n. 1, p. 38-43, mar. 2019.

GONZÁLEZ, L. E. El cálculo infinitesimal y su historia en la obra de Julio Rey Pastor entre 1921 y 1940. **Actes d'Història de la Ciència i de la Tècnica**, v. 1, n. 1, p. 367-376, 2008.

GONZÁLEZ-LÓPEZ, M. J; FLORES, P. Conocimiento profesional del profesor de secundaria sobre las matemáticas: el caso del volumen. **Educación Matemática**, Ciudad de México, v. 13, n. 1, p. 81-93, abr. 2001.

HEYMANN, H.W. Mathematics Instruction From the Perspective of General Education. *En:* BISHOP, A. J. (ed.). **Why teach mathematics? A focus on general education**. Dordrecht: Springer, 2003. p. 83-131.

HUANG, H.E.; WU, H. Supporting Children's Understanding of Volume Measurement and Ability to Solve Volume Problems: Teaching and Learning. **EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, Taipei, v. 15, n. 12, dec. p. 1-36, 2019.

HEITELE, D. An epistemological view on fundamental stochastic ideas. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 6, n. 2, jun. p. 187-205, 1975.

KRIPPENDORFF, K. **Content Analysis: An Introduction to its Methodology**. London: SAGE, 2004.

MARSDEN, J.E.; TROMBA, A.J.; MATEOS, M. *Cálculo vectorial*. v. 1, 3. ed. Ciudad de México: Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.

OLMO, M. A.; MORENO, M.F.; GIL, F. **Superficie y volumen: algo más que el trabajo con fórmulas?** Madrid: Editorial Síntesis, 1989.

PINO-FAN, L.; GODINO, J.D.; FONT, V. Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 13, n. 1, p. 141-178, mar. 2011.

RONDERO, C.; FONT, V. Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. **Enseñanza de las Ciencias,** Barcelona, v. 33, n. 2, p. 29-49, abr. 2015.

SÁIZ, M. **El pensamiento del maestro de primaria acerca del concepto matemático volumen y su enseñanza.** 2002. Tesis (Doctorado en Matemática Educativa) - Instituto Politécnico Nacional, Cinvestav, Ciudad de México, 2002.

SÁIZ, M. Algunos objetos mentales relacionados con el concepto volumen de maestros de primaria. **Revista Mexicana de Investigación Educativa**, Ciudad de México, v. 8, n. 18, p. 447-478, ago. 2003.

SIDDAWAY, A. P; WOOD, A. M; HEDGES, L. V. How to do a systematic review: A best practice guide for conducting and reporting narrative reviews, meta-analyses, and meta-syntheses. **Annual Review of Psychology**, Palo Alto, v. 70, n. 1, p. 747-770, jan. 2019.

TABAK, J. Geometry in Antiquity. **The history of mathematics: Geometry. The language of space and form**. New York: Facts On File, 2011. p. 3-137.

TAN SISMAN, G; AKSU. M. A Study on Sixth Grade Students' Misconceptions and Errors in Spatial Measurement: Length, Area, and Volume. **Int J of Sci and Math Educ**. Taipei, v. 14, n. 1, p. 1293–1319. Jan. 2016.

TOSHIKAZU, S. From Euclid to Riemann and Beyond: How to Describe the Shape of the Universe. *En:* DANI, S.G; PAPADOPOULOS, A. (ed.). **Geometry in history.** Cham: Springer Nature, 2019 p. 213-303.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. *En:* LESH, R.; LANDAU, M. (ed.). **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983. p. 124-127.

Submetido em 14 de Julho de 2023.
Aprovado em 07 de Julho de 2024.