Matemáticas y demografía. Del tiempo al espacio

Daniel Devolder
Centre d'Estudis Demogràfics, Universitat Autònoma de Barcelona

INTRODUCCIÓN

En este trabajo, haré una panorámica del uso de leyes y modelos matemáticos en el campo de la demografía, ciencia del estudio de la población. La demografía y la estadística fueron desde su origen en el siglo XVII estrechamente asociadas con las ciencias matemáticas y condicionadas por el estado de su desarrollo. En concreto, y a partir de los siglos XVII y XVIII, fueron importantes para la demografía sobre todo la evolución del tratamiento matemático de la progresión geométrica, la teoría de las probabilidades y la función exponencial, que dieron a la demografía el impulso para desarrollar sus modelos fundadores, el modelo de la tabla de mortalidad y luego los modelos de crecimiento en el tiempo y de composición por edad, que presentaré en los puntos 1 y 2. Estos modelos consideran la población en su conjunto, pensando normalmente en la población de un país entero. Se desarrollaron en paralelo con la aparición de las monarquías absolutistas de Francia e Inglaterra y recibieron un gran impulso en el siglo XIX y principios del XX con los modernos sistemas de administración pública centralizada. El estado centralizado moderno encontró en la demografía la ciencia que justificó el desarrollo de los sistemas de recuento de la población, tales como los censos y los registros continuos de nacimientos, defunciones y migraciones. Pero esta óptica centralizada, considerando la población como un conjunto de individuos en un país, un espacio político esencialmente unidimensional, ha frenado el desarrollo de métodos de análisis del grupo familiar y del parentesco, así como de las características del poblamiento, que necesita como mínimo de las 2 dimensiones del plano geográfico. Es solamente de forma muy reciente que la demografía se ha ocupado de desarrollar modelos de la familia y de la variación de la densidad en el espacio, que presentaré en los puntos 3 y 4.

1. EL ANÁLISIS MATEMÁTICO DE LA MORTALIDAD

1.1. Orígenes de la tabla de mortalidad

El origen de la demografía y de la estadística modernas se remonta a un libro publicado en el año 1662, *Observaciones naturales y políticas sobre los boletines de mortalidad de la ciudad de Londres*. Después de una larga controversia, parece ahora probado que el autor principal de este libro fue una persona con formación científica, William Petty, y que el autor único que aparece en la cubierta, el comerciante de telas John Graunt, sólo lo fue de los capítulos más descriptivos.[1] Este libro incluye la primera tabla de mortalidad moderna, basada de hecho sobre un modelo matemático más que sobre datos reales. Como lo vemos en la figura siguiente, que reproduce un gráfico original del siglo XVII construido por Christian Huygens, uno de los fundadores de la teoría de las probabilidades, esta tabla de mortalidad está construida a partir de una hipótesis de riesgo de morir constante entre 6 y 76 años. La curva indica para cada edad el número de supervivientes a partir de una cifra inicial de 100 nacimientos. Para nosotros este gráfico representa una curva exponencial, de razón positiva e inferior a 1. Pero en el siglo XVII todavía no se conocía esta función.[2] Los astrónomos utilizaban los resultados de Lord Napier sobre la construcción de la función logarítmica, pero habría que esperar al siglo XVIII para el estudio de su función inversa. De hecho, en la construcción de la tabla, Petty no utilizó tampoco los logaritmos, sino una progresión geométrica de razón 0,64, con redondeo al entero inferior a cada paso del cálculo, tal como se indica en la figura, un original del año 1669, dibujado por Christian Huygens, a partir de los datos de supervivientes a cada edad de Petty.[3]

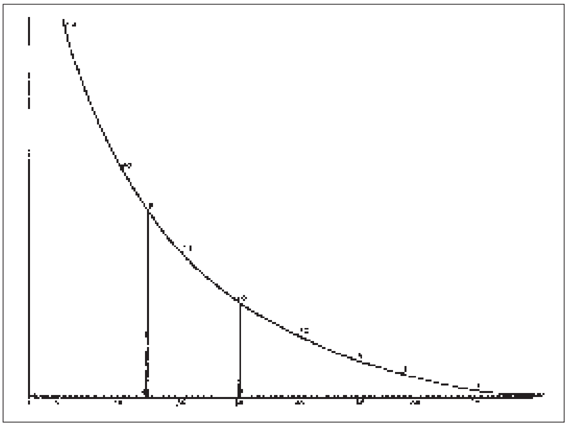

Figura 1. Gráfica teórica de mortalidad en el siglo XVII (número de supervivientes en cada edad a partir de 100 nacimientos).

1. Lo prueba de manera definitiva Hervé Le Bras, *Naissance de la mortalité*, Gallimard-Le Seuil, Paris, 2000. William Petty es conocido como fundador de la «aritmética política», precursora de la economía política moderna.

2. Los primeros trabajos que abordan el problema de forma moderna se publican en los 10 últimos años del siglo XVII (Bernoulli y Leibniz).

3. El proceso de construcción de esta tabla fue tan misterioso como su autoría. Grandes estadísticos como Karl Pearson o epidemiólogos como el Major Greenwood no consiguieron reproducirlo. Hervé Le Bras, en el libro citado, encuentra finalmente el algoritmo exacto, tan ciegamente sencillo y evidente, tal como lo hubiera hecho el Caballero Dupin, de «La carta robada» de Edgar A. Poe.

Regla de construcción de la función de superviviente de Petty: progresión geométrica de razón 0,64, con redondeo a cada etapa del cálculo:

Nacimiento	6 años	16 años	26 años	...
$\left(\frac{64}{100}\right)^0$	$\left(\frac{64}{100}\right)^1$	$\left(\frac{64}{100}\right)^2$	$\left(\frac{64}{100}\right)^3$	. . .

A partir de esta tabla modelo, interpretada en un principio de manera probabilística, Christian Huygens y su hermano Louis derivaron, en 1669, los conceptos de probabilidad de sobrevivir entre 2 edades:

$$p(x, x+n) = \frac{S(x+n)}{S(x)}$$

y la esperanza de vida a partir de una edad (la esperanza matemática de la función de supervivencia reducida a un solo nacimiento inicial):

$$e(x) = \frac{1}{S(x)} \int_x^\infty S(y)\, dy$$

donde $S(x)$ son los supervivientes a la edad x de la tabla de Petty.

Huygens utilizaba para la población el lenguaje de las apuestas en juegos de azar. Esta interpretación probabilística domina todavía hoy en día, y se sigue utilizando por ejemplo el término de «esperanza» en vez de «vida media».

Los progresos posteriores en la elaboración de tablas de mortalidad, por parte sobre todo del astrónomo Edmund Halley y del estadístico Johann Süssmilch, se centraron en utilizar datos reales y no un simple modelo matemático como lo hizo Petty, lo que permitió mostrar que la hipótesis de riesgo constante con la edad no era correcta.

Otro aspecto interesante de este primer estudio de la mortalidad en los siglos XVII y XVIII es la creencia en la existencia de un riesgo de mortalidad único, fuera de los años de crisis, guerras o epidemias. Incluso después de reconocer que el riesgo de morir no es constante con la edad, los primeros demógrafos asimilaban la mortalidad a un juego con probabilidades iguales para todos y invariable en el tiempo. Buscaban regularidades que podían ser útiles para las aplicaciones en el campo actuarial, de determinación de pagos anuales en contratos de seguro de vida o rentas vitalicias. Esto explica por qué intentaban construir una tabla universal, única, válida en cualquier lugar y momento. En este sentido buscaban realmente una Ley de mortalidad, con mayúscula. Hoy en día, y muy al contrario, los demógrafos calculan tablas para todos los lugares y en cada momento posible, resaltando los aspectos diferenciales de cada una.

En el siglo XIX, cuando la obtención de datos no representaba ya un problema, pero también cuando se hizo evidente que el riesgo de morir no era igual, más alto por ejemplo en las ciudades que en el campo, y también más bajo que a finales del siglo XVII, los esfuerzos se centraron en la resolución de dos problemas: la modelización de la variación del riesgo de morir con la edad, por una parte, y el análisis de los factores de variación del nivel de este riesgo a cada edad, por otra.

1.2. Modelización de la mortalidad por edad

A partir del siglo XIX, el problema inicial de Petty y de Halley está formulado de otra manera: la mortalidad por edad obedece a dos clases de parámetros: los que afectan su nivel general y los de forma, que afectan a su progresión con la edad. Pero sigue la preocupación por encontrar una Ley universal. Así, en 1825, el matemático Benjamin Gompertz elaboró la primera función que respondía a este propósito de encontrar una Ley universal de mortalidad capaz de tener en cuenta estos atributos de nivel y forma. Se trata de una función exponencial de la edad, en la que de la manera más sencilla posible, se multiplican los dos parámetros de nivel y de forma con la edad. La Ley de Gompertz es válida a partir de los 30 años, es decir intenta describir el aumento del riesgo de morir con la edad como resultado del proceso de envejecimiento. Vemos en la figura para Estados Unidos, donde está representado este riesgo en una escala logarítmica, que la fórmula es bastante razonable, puesto que el aumento con la edad de este riesgo es casi log-lineal. Pero la Ley de Gompertz tiene la misma ambición que la Ley de la gravitación de Newton: describir totalmente un fenómeno sin explicarlo. A partir del momento en el que se utiliza para buscar explicaciones, demuestra sus limitaciones. Con dos ejemplos vamos a ver que cuando se empieza con esta Ley como instrumento para el estudio

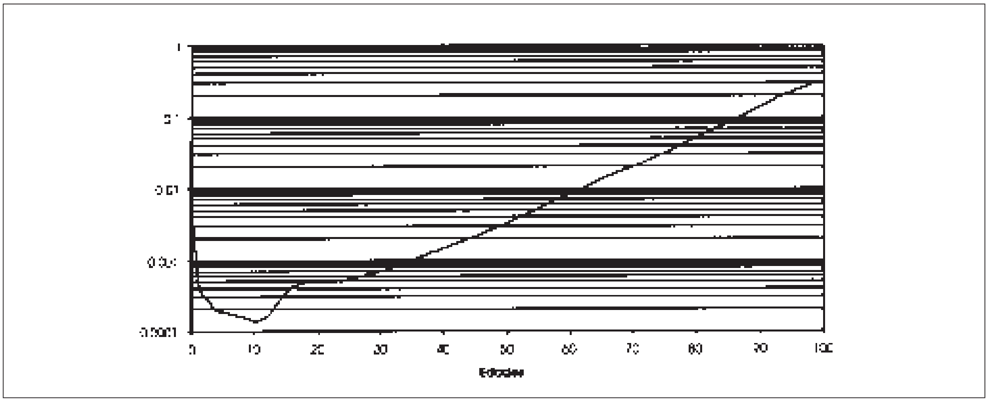

Figura 2. Logaritmo del riesgo de morir por edad, Estados Unidos, 1997.

de la mortalidad, podemos llegar a problemas o paradojas que muestran sus limitaciones, fuerzan un replanteamiento de las hipótesis de partida y nos permiten mejorar nuestro conocimiento de los determinantes biológicos de la mortalidad.

El primer problema es saber si la forma y el nivel del riesgo de morir a edades muy avanzadas están correctamente aproximados con la fórmula exponencial de Gompertz. Con el aumento del tamaño de las poblaciones, y sobre todo el perfeccionamiento de los métodos de recogida de datos, podemos ahora calcular los valores del riesgo de morir a edades superiores a 80 años[4]. En general se constata que la progresión de este riesgo deja de ser log-lineal y el crecimiento se reduce con la edad (Figura 3). Entonces la fórmula de Gompertz no es satisfactoria. Se han buscado muchas fórmulas alternativas a la de Gompertz, basadas o bien en el aumento del número de parámetros, o bien en modelos tan parsimoniosos como el de Gompertz, que hacen generalmente uso de hipótesis nacidas en el campo de las ciencias biológicas o de campos más alejados (teorías físicas del movimiento de las moléculas en un gas, teoría de la fiabilidad de los sistemas físicos, etc.). Pero una solución aceptable, que tiene el interés de conservar la sencillez de la fórmula de Gompertz, es buscar una formulación de tipo logística.

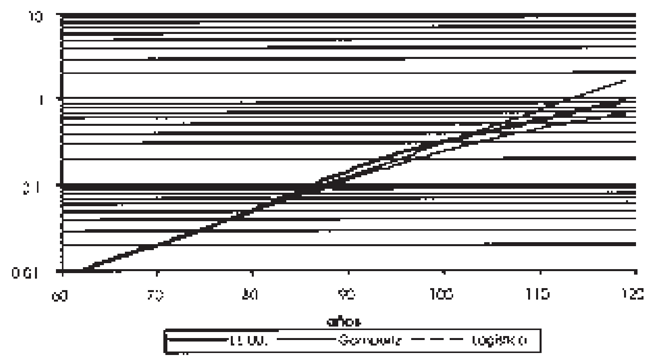

Figura 3. Mortalidad a edades avanzadas, Estados Unidos, 1997.

De las muchas fórmulas probadas que dan un mejor ajuste a partir de 80 años, las más sencillas y más utilizadas son las logísticas[5]. La forma general es la siguiente:

4. Una revisión reciente de modelos y resultados en A. R. Thatcher, V. Kannisto, y J. W. Vaupel, *The Force of Mortality at Ages 80 to 120*, Odense, 1998, Odense University Press.

5. Perks, W. «On some experiments in the graduation of mortality statistics». *Journal of the Institute of Actuaries*, 63:12.

$$\frac{\mu(x)}{1-\mu(x)} = Ae^{bx} \Leftrightarrow \mu(x) = \frac{Ae^{bx}}{1+Ae^{bx}} \ .$$

Esta nueva formulación presenta también el interés de poner un límite de tipo tendencial al valor del riesgo de morir, puesto que, tratándose de una probabilidad, no puede exceder 1, cuando en la fórmula de Gompertz los valores del riesgo tienden hacia el infinito con la edad[6]. Pero la introducción de una logística no fue solamente una solución formal. El hecho mismo de la disminución de la tasa de crecimiento de la mortalidad con la edad encuentra una explicación razonable si consideramos que las personas no son iguales delante del riesgo de morir y que hay diferencias debido a factores genéticos. La forma logística parece dar cuenta de un proceso de selección, en el cual hay distintos grupos de personas, cada uno con una ley de mortalidad tipo Gompertz, pero con un nivel distinto a cada edad. El cambio de forma de la curva y la reducción de la tasa de crecimiento de este riesgo con la edad probablemente se explican porque a edades avanzadas disminuye el peso de los grupos con mayor riesgo genético de mortalidad y aumenta de forma inversa el peso de los grupos con bajo riesgo genético de mortalidad.

Un segundo problema, la paradoja de Gumbel[7], viene a confirmar esta conclusión. Este autor predijo, en base al ajuste de la ley de Gompertz, que en poblaciones con una alta mortalidad general, el riesgo de morir a edades avanzadas tendía a igualar o incluso a estar por debajo de este riesgo en poblaciones con una baja mortalidad general. Es lo que se puede hoy en día constatar con las tablas de mortalidad, con los datos del cuadro siguiente. Debido al crecimiento más lento del riesgo de morir con la edad, en poblaciones con una mortalidad general más alta llegan incluso en vida más personas a edades muy avanzadas que en poblaciones con una mortalidad general baja.

País	Hombres supervivientes a los 85 años (por 100.000)	Esperanza de vida al nacimiento (años)
Austria	9.947	66,6
Japón	10.287	67,7
Colombia	12.588	58,2
El Salvador	16.525	56,4
Argelia	28.546	63,2

6. El riesgo de morir, llamado en demografía cociente instantáneo o fuerza de mortalidad, no puede sobrepasar 1, pero tampoco puede lógicamente tomar el valor de 1 en una edad finita, puesto que si una persona llega a esta edad menos un segundo, ¡no tendría ya derecho a vivir!

7. Gumbel, E. J., *La durée extrême de la vie humaine*, Paris, 1937. Ver Le Bras, H., «Lois de mortalité et âge limite», *Population*, 3, 1976.

La explicación de esta paradoja utiliza el mismo tipo de argumento basado sobre un efecto de selección en el cual mueren antes los individuos con el riesgo de morir más elevado, debido a las diferencias intrínsecas o genéticas. Pero incluso en este caso, se tendría que admitir que los ancianos de los países con una mortalidad general más alta son más resistentes o tienen un riesgo de morir más bajo a edades avanzadas que los ancianos de los países con una mortalidad general más baja. La explicación más probable estaría en el nivel de la respuesta inmunológica de los organismos en relación inversa con el grado de uso de antibióticos, en general mayor en los países de baja mortalidad general.

Tanto la forma de la mortalidad a edades avanzadas como la paradoja de Gumbel se explicarían entonces por la *heterogeneidad* de la mortalidad entre individuos, debido seguramente a factores genéticos. Una parte importante de la investigación en mortalidad está actualmente dedicada al estudio de esta heterogeneidad, tanto para entenderla como para tenerla en cuenta en los estudios comparativos. El uso de una modelización matemática de la forma de la curva de riesgos por edad ha permitido, pues, plantear este problema y dar pistas sobre las causas de la inflexión de la curva normalmente log-lineal a partir de los 80 años.

1.3. Mortalidad normal y accidental. Mortalidad endógena-exógena

Para los autores de los siglos XVII y XVIII, la mortalidad tenía solamente dos niveles: el de los años normales, tal como la recogían sus tablas de mortalidad, y el nivel de crisis, por ejemplo debido a la peste bubónica. Hoy en día se suelen distinguir también otros dos tipos de mortalidad: la mortalidad debida a factores endógenos o genéticos y la mortalidad exógena, que se explica por factores del entorno, como las enfermedades infecciosas. La separación entre estos dos tipos puede basarse sobre el análisis de las causas de muerte. Pero aquí de nuevo el análisis matemático permite ordenar los datos y modelizar los procesos subyacentes. Jean Bourgeois-Pichat elaboró el primer método de este tipo, que permitió separar el nivel de la mortalidad infantil (del primer año) entre el componente endógeno (principalmente malformaciones genéticas difícilmente curables) y el componente exógeno o evitable. El razonamiento de Bourgeois-Pichat es muy interesante, y aunque el modelo está ahora superado, sigue siendo un buen ejemplo de los procedimientos que se utilizan hoy en día en las modelizaciones biomédicas[8].

8. Bourgeois-Pichat, J., «De la mesure de la mortalité infantile», *Population*, 1946. Un trabajo actual es Manton, K. G. y Yashin, A. *Mechanisms of Aging and Mortality: Searches for New Paradigms*, Odense, 2000, Odense University Press.

2. MODELOS DE POBLACIÓN, EN EL TIEMPO Y POR EDAD

2.1. Modelo exponencial de Euler

Leonard Euler se adelantó un siglo y medio a su tiempo, publicando un trabajo redescubierto en el siglo XX en el cual anticipaba resultados importantes de los modelos modernos de las poblaciones[9]. A partir de una hipótesis de mortalidad constante en el tiempo y suponiendo que los nacimientos siguen una progresión geométrica de razón constante, mostró por ejemplo que la estructura por edad de la población (la proporción de población en cada grupo de edad) es constante en el tiempo. Estableció también otros resultados acerca de las poblaciones exponenciales que fueron redescubiertos en el siglo XX.

2.2. Modelo de las poblaciones estables de Lotka

Alfred Lotka, un matemático norteamericano, no conocía los resultados de Euler cuando fundó entre los años 1910 y 1930 la teoría matemática de las poblaciones, estableciendo los principales resultados de lo que llamó la teoría de las poblaciones estables[10]. Lotka empezó con el mismo modelo de población exponencial desarrollado por Euler, llamándolas «poblaciones maltusianas», haciendo referencia en esto a la oposición que hacía Malthus entre las poblaciones humanas que tienden a crecer de forma geométrica y los alimentos que lo hacen de forma aritmética. Pero Lotka introdujo una hipótesis nueva que le permitió ir más allá que el simple modelo exponencial. Sustituyó la hipótesis de nacimientos en progresión geométrica de Euler por una hipótesis de fecundidad por edad constante en el tiempo. Este cambio pequeño en apariencia fue decisivo a la hora de estudiar los procesos de convergencia de las poblaciones reales hacía poblaciones modelo. Las poblaciones modelo con fecundidad constante en el tiempo son lo que Lotka llamó las poblaciones estables. Forman un subconjunto de la clase de las poblaciones maltusianas o exponenciales.

Lotka estableció fórmulas muy útiles para el demógrafo. Por ejemplo, para el conjunto maltusiano redescubre la fórmula de Euler acerca de la proporción de personas de edad x en relación con la población total, proporción constante en el tiempo:

$$c(x) = be^{-rx}S(x)$$

9. Euler, L. *A general investigation into the mortality and multiplication of the human species*, Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres, 1760.

10. Lotka, A. J., «Relation between birth rates and death rates», *Science*, N.S., 26:21-22 es el primer trabajo. Tratamiento completo en: Lotka, A. J., *Théorie analytique des associations biologiques*, Paris, Herman, 1936.

donde $c(x)$ es esta proporción a la edad x, b es la tasa de natalidad, r la tasa de crecimiento de los nacimientos y $S(x)$ la proporción de sobrevivientes a la edad x en la tabla de mortalidad.

Pero sobre todo muestra cómo calcular el valor de la tasa de crecimiento r de la población en el subconjunto de las poblaciones estables, resolviendo una ecuación fundamental, llamada desde entonces *ecuación de Lotka*:

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-rx} m(x) S(x)\, dx = 1$$

con α y β los límites del intervalo de edad fértil (15 a 49 años para las mujeres) y $m(x)$ la tasa (o riesgo) de fecundidad a la edad de x años, que se calcula dividiendo los nacimientos de madres de edad x por el efectivo de mujeres de edad x. Esta ecuación tiene una única raíz real, la *tasa r de crecimiento intrínseca* de la población estable. Lotka mostró también que las raíces complejas de esta ecuación describían las condiciones del proceso de convergencia de una población real hacia la población estable definida a partir de niveles constantes en el tiempo de la mortalidad y la fecundidad. Lotka desarrolló el estudio de este proceso de convergencia a partir de una ecuación de recurrencia sobre los nacimientos que Euler también había considerado:

$$B(t) = \int_{\alpha}^{\beta} B(t-x)\, m(x)\, S(x)\, dx$$

donde $B(t)$ son los nacimientos en el momento t. Lotka estableció los principales teoremas de la convergencia, pero sin llegar a probarlos de forma rigurosa. Habrá que esperar los trabajos de Feller sobre los conjuntos auto-renovados[11], poblaciones humanas entre otras, y el estudio general de las condiciones de convergencia de Lopez[12] para establecer de forma definitiva estos teoremas.

2.3. La población estable como población equilibrada

El modelo matemático de la población exponencial de Euler y su extensión en el siglo XX, a partir de los trabajos de Lotka sobre las poblaciones estables, proporciona un instrumento de análisis que aplican de forma habitual los demógrafos. Se utiliza por ejemplo para completar y rectificar datos defectuosos o parciales, sobre todo en los paí-

11. Feller, W., «On the integral equation of renewal theory», *Annals of Mathematical Statistics.*
12. Lopez, A., *Problems in Stable Population Theory*, Princeton, 1961.

ses desarrollados. Pero las poblaciones modelo proporcionan una medida para los desequilibrios de las poblaciones humanas reales. Desde el siglo XVIII, la mortalidad y la fecundidad no se han mantenido nunca constantes, dividiéndose por tres hasta la segunda guerra mundial. También la fecundidad tiene tendencia a oscilar en el tiempo desde la segunda guerra mundial. Entonces las poblaciones estables son un modelo muy aproximado de las poblaciones reales contemporáneas. Pero pueden servir para definir lo que podría ser la población en condiciones de equilibrio, en el sentido de un crecimiento en el tiempo a una tasa constante, ¡lo que sería el ideal de todo planificador!

Así a cada población real podemos asociarle una población estable que tiene la misma tabla de mortalidad y una serie de nacimientos en progresión geométrica, con una razón igual a la de la tasa de crecimiento tendencial de la serie real. La población real se puede comparar a la estable asociada, lo que permite visualizar los desequilibrios calculando las desviaciones relativas a cada edad, como está hecho con el gráfico para Estados Unidos[13].

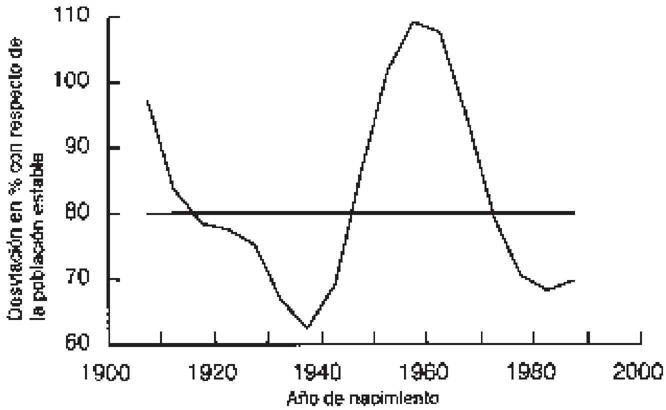

Figura 4. Estados Unidos, 1991. Comparación de la población femenina con una población estable próxima.

2.4. La convergencia débil y fuerte

El proceso de convergencia de una población real hacia una población estable supone que a partir de un momento los riesgos por edad de la mortalidad y de la fecundidad son constantes en el tiempo. En estas condiciones, la estructura por edad de una

13. Devolder, D., «Les types d'instabilités des populations du passé», *Cahiers des Annales de Démographie Historique*, 2, 2000.

población real se acerca cada vez más a la estructura de la población estable definida por estos niveles constantes de la mortalidad y la fecundidad. Este proceso de convergencia, al que se refería Lotka, se conoce ahora como convergencia *débil*. Sus características dependen de la estructura por edad inicial de la población real y de la forma de las curvas de riesgo por edad de la mortalidad y la fecundidad (el análisis de estos factores de forma se conduce a partir del estudio de las raíces complejas de la ecuación de Lotka). En general se observa que bastaría con unos 150 años de constancia de la mortalidad y la fecundidad para que una población real «olvidara» su estructura por edad inicial y se volviera estable. Pero este proceso de convergencia débil supone que se cumplan estas hipótesis irrealistas de constancia en el tiempo. Para llegar a resultados más generales, se estudia también el llamado proceso de convergencia *fuerte*, en el que se elimina la hipótesis de constancia en el tiempo de la fecundidad y la mortalidad. Por ejemplo, Coale[14] formuló una conjetura según la cual si a partir de un momento sometemos dos poblaciones distintas a la misma serie de valores de los riesgos por edad de mortalidad y fecundidad, variable en el tiempo, estas dos poblaciones tenderán al cabo de un cierto tiempo hacia la misma estructura por edad (proporción de las personas a cada edad en relación con la población total). Esta conjetura fue demostrada por Lopez[15]. Es un resultado importante en la medida en la que establece de forma definitiva esta tendencia de las poblaciones a «olvidar» las estructuras por edad del pasado.

Pero a la inversa, como este proceso de convergencia es largo (un siglo o más), subraya también la fuerza de inercia contenida en la estructura por edad, que determina durante largo tiempo la tendencia de la evolución. Este factor de inercia se estudia bajo el nombre de *momentum* de la población[16].

2.5. El proceso de la convergencia como restricción al crecimiento

El proceso de convergencia, y sobre todo de convergencia débil, se puede interpretar como la imposición de una restricción a una población[17]. Así la hipótesis de fecundidad constante de las poblaciones estables significa que se impone una relación constante en el tiempo entre el efectivo de los nacimientos y el efectivo de las mujeres en edad de tener hijos. En el marco más amplio de las poblaciones exponenciales de

14. Coale, A. J., «How the age distribution of a human population is determined». *Cold Spring Harbor Symposia on Quantitative Biology*, 22, 1957.

15. op. cit. También una demostración más sencilla, a partir de la idea de procesos de media móviles, en Arthur, W. B., «The ergodic theorems of demography: a simple proof», *Demography*, 1982.

16. Keyfitz, N., «On the momentum of population growth», *Demography*, 8. También Li, N. y Tuljapurkar, S., «Population momentum for gradual demographic transitions», *Population Studies*, 53, 1999.

17. Le Bras, H., «Fluctuations et croissance des populations soumises à une contrainte», *Population*, 2, 1983.

Euler, la hipótesis de evolución exponencial de los nacimientos es también una restricción en el sentido que los nacimientos de dos años consecutivos tienen que estar en una relación constante. Otro tipo de restricción que se ha estudiado es la de forzar una población a tener un crecimiento nulo, es decir, que se igualen los nacimientos con las defunciones, un objetivo aparentemente razonable para una política demográfica. Obviamente estas restricciones son difíciles de hacer cumplir para la población de un país entero, pero en algunos casos se pueden aplicar, por ejemplo para la población de un cuerpo profesional (maestros, policías, ...) o la plantilla de una gran empresa. El problema que plantean estas restricciones es que la relación de constancia que se tiene que cumplir fuerza el ajuste de otros componentes de la evolución, y este ajuste puede tener consecuencias imprevistas y en algunos casos peores que la situación a la que se pensaba remediar con la restricción. En el gráfico siguiente se aprecia como una fecundidad constante, y aun más una tasa de crecimiento constante, son restricciones que provocan un ajuste de la población en forma de fluctuaciones en el tiempo de los nacimientos.

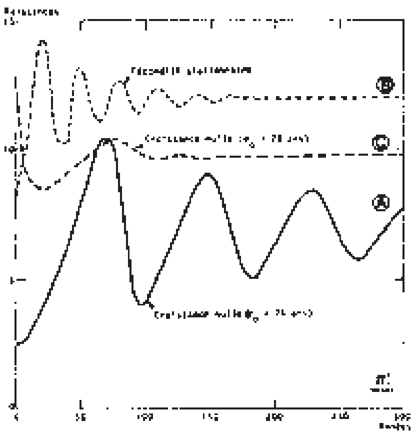

Figura 5. Evolución comparada de los nacimientos en el caso de crecimiento nulo y en el caso de fecundidad constante.

En este contexto el estudio matemático de la convergencia tiene un especial interés, sobre todo en la medida en la que puede orientar a un planificador hacia el tipo de restricción que sea menos peligroso o más suave en términos de estos ajustes dinámicos.

2.6. Modelo de población estable generalizado

El modelo de Lotka es una aproximación: las poblaciones estables son siempre hipotéticas, y solamente en casos muy peculiares se podría llegar a las condiciones de constancia necesarias. Esto explica por qué de forma más reciente se han establecido fórmulas más *generales* que las del modelo estable, que permiten conducir cálculos directos, sin aproximaciones, a partir de datos de poblaciones reales[18]. En este sentido, más que un modelo, basado normalmente sobre hipótesis simplificadoras, tenemos que hablar de una contabilidad, puesto que las nuevas relaciones son siempre exactas.

La idea de partida de esta generalización es considerar las tres dimensiones de edad, tiempo y generación de las poblaciones como caminos que recorren los grupos de personas de la misma edad. Y la relación entre variables se puede deducir de la velocidad de los desplazamientos sobre estas tres dimensiones demográficas, sin privilegiar ninguna de ellas. Esto se puede apreciar a partir del gráfico siguiente, que representa lo que llaman los demógrafos una superficie de Lexis. El tamaño de la población por edad en cada momento es la elevación de la superficie en este gráfico, pero los desplazamientos se producen sobre esta última. Este tamaño se reduce a medida que pasa el tiempo, la primera dimensión. Pero el paso del tiempo es también un aumento según la dimensión de la edad para las personas. Este aumento conjunto del tiempo y de la edad son las dos fuerzas elementales que, combinadas, dan como resultado un desplazamiento en diagonal sobre la dimensión de generación (aumento a la vez del tiempo y de la edad para personas nacidas el mismo año).

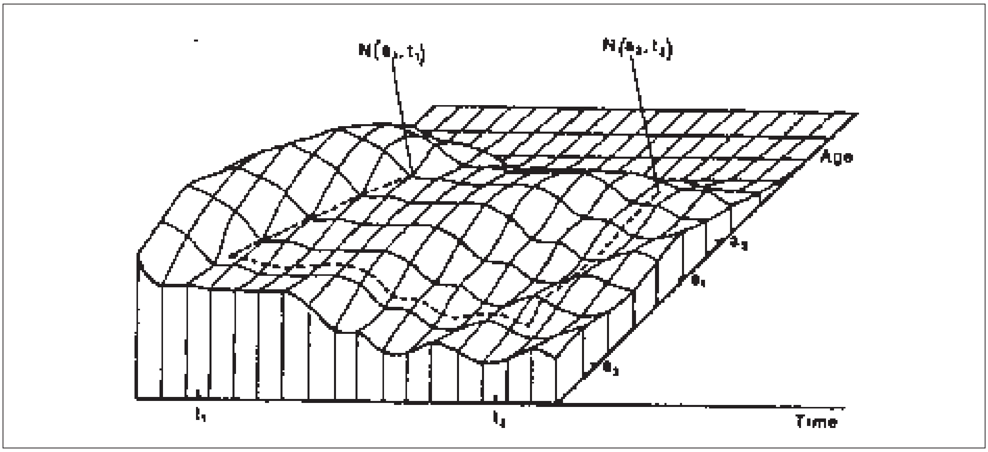

Figura 6. Un desplazamiento sobre una superficie de Lexis.

18. Preston S. H. y Coale, A. J., «Age structure, growth, attrition and accession: a new synthesis», *Population Index*, 1982. También Arthur, W. B. y Vaupel, J. W., «Some general relationships in population dynamics», *Population Index*, 1984.

Este razonamiento conduce a la definición de tres tasas de cambio fundamentales que permiten «viajar» sobre el gráfico de tres dimensiones de la población:

$$r(a,\ t) = \frac{\partial \ln N(x,\ t)}{\partial t},$$

la tasa de crecimiento en el tiempo de la población de edad x,

$$v(a,\ t) = -\frac{\partial \ln N(x,\ t)}{\partial x},$$

la tasa de crecimiento con la edad de la población de edad x,

$$\mu(a,\ t) = -\frac{\partial \ln N(x+y,\ \ t+y)}{\partial y},$$

la tasa de crecimiento con la edad y el tiempo, que a su vez es el riesgo o la fuerza de la mortalidad de la generación a la edad x, si no hay migraciones.

Estas tres tasas están unidas por la identidad fundamental de este modelo generalizado:

$$\mu(x,\ t) = v(x,\ t) - r(x,\ t).$$

Sobre esta base se pueden reformular todas las fórmulas del modelo estable a partir de estas tasas. Por ejemplo, la proporción de población a la edad x,

$$c(x) = be^{-\int_0^x r(y,\ t)dy}S(x),$$

la ecuación de Lotka,

$$\int_\alpha^\beta e^{-\int_0^\infty r(y,\ t)dy}m(x)S(x)\ dx = 1.$$

Esta formulación generalizada permite también establecer nuevas relaciones, que no podían aparecer en el modelo estable, por ejemplo relativas a los factores del envejecimiento[19], las relaciones entre tablas de mortalidad del momento y tablas de generación[20], etc.

---

19. Preston, S. H., Himes, C. y Eggers, M., «Demographic conditions responsible for population aging», *Demography*, 1989.

20. Horiuchi S. y Preston, S., «Age-specific growth rates: the legacy of past population dynamics», *Demography*, 1988.

3. MODELOS DE LA REPRODUCCIÓN Y DEL PARENTESCO

Los modelos demográficos tradicionales empiezan con la población como objeto de estudio. Pero son los individuos los elementos generadores del cambio de las poblaciones, porque tienen determinados comportamientos de procreación y están sujetos a riesgos de morir o de migrar. La demografía desde sus orígenes se define toda como una transición incesante entre estos dos niveles, macro para la población y micro para los individuos. Esto explica por qué hay una verdadera dificultad de la demografía para situarse a niveles intermedios, como son el nivel familiar y en general el de las redes que relacionan los individuos entre sí, tanto el parentesco como los grupos sociales. Para conseguir estudiar esta dimensión nueva, las relaciones entre personas, se han desarrollado de forma mucho más reciente modelos de la reproducción y del parentesco que empiezan con los individuos en vez de con la población en su conjunto. La idea es reconstruir poco a poco el nivel familiar elemental (pareja, hijos) y luego llegar hasta todo el parentesco, y eventualmente hasta el nivel de las redes de sociabilidad. Hay varios tipos de modelos de la familia y del parentesco. Pero los más comunes y útiles son modelos que empiezan con un individuo central (ego), permiten construir genealogías y también calcular las probabilidades de tener familiares en vida, a cada edad del ego.

Los modelos de parentesco más utilizados hoy en día son *micro-simulaciones*. Complementan y reemplazan los modelos matemáticos iniciales que llevaban a fórmulas para el cálculo de relaciones de parentesco que incorporaban integrales múltiples, lo que hace difícil el cálculo de resultados. Como ejemplo de fórmula matemática para determinar el número esperado de primas hermanas, se tiene que calcular el valor de fórmulas con integrales múltiples como:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left[\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\int_{y}^{a+x+y}\left(\int_{\alpha}^{a+x+y+z} S(w)m(w)S(a+x+y-z-w)dw\right)\frac{S(z)}{S(y)}\,m(z)dz\right\}W(y)dy\,W(x)dx\right]$$

Se necesitan métodos de cálculo numérico, en los cuales es necesario utilizar números aleatorios. Entonces es más rápido y más interesante incorporar los factores estocásticos al principio mismo de la modelización, lo que es el planteamiento de una micro-simulación. Éstas ofrecen además la ventaja de permitir incorporar de forma sencilla nuevas hipótesis sobre los comportamientos, sin aumento del nivel de complejidad de los cálculos.

La micro-simulación empieza normalmente con un individuo en vida a cada edad y calcula a partir de distribuciones de probabilidad el número de parientes en vida, progresando paso a paso a partir de la madre, el padre, el cónyuge, etc. Estas micro-simulaciones se llaman a menudo de Monte-Carlo porque utilizan procedimientos de tiraje de números al azar que sirven para seleccionar el valor de una probabilidad dentro de distribuciones preestablecidas (de mortalidad, fecundidad, nupcialidad, migración, etc.)[21].

4. MODELOS ESPACIALES: SIMULACIÓN DE AGENTE Y DENSIDAD FRACTAL

El estudio de la difusión de la población en el espacio o el problema general de los tipos de poblamiento son temas que tradicionalmente los demógrafos no han considerado como suyos sino del dominio de la geografía. La única dimensión territorial relevante que se toma en cuenta en demografía son las migraciones. Pero las migraciones se definen en relación con el espacio político unidimensional de un país u otras unidades administrativas. Para estudiar los movimientos humanos dentro de un espacio continuo y bidimensional, y no segmentado desde una visión política, es necesario abandonar el concepto mismo de migración y interesarse por la dinámica de la difusión en el espacio. Hay dos formas de estudiar esta dinámica: desde una visión de los procesos individuos elementales o bien a partir de la distribución espacial en un momento dado.

4.1. El juego de la difusión

La modelización de los procesos de difusión en el espacio encuentra un formalismo cómodo en lo que se conoce como el «juego de la vida». Lo que empezó como una curiosidad matemática se ha convertido hoy en día en algo muy útil para la experimentación en biología, en física o en informática[22]. La idea es trabajar con una estructura de celdas, normalmente en dos dimensiones, ocupadas por individuos de una población. En la versión original del juego, introducido por el matemático John Conway, la reglas son relativas a la ocupación de las celdas por nacimiento o defunción, en función de la presencia de individuos en las celdas vecinas. Se pueden adaptar estas reglas al caso de las migraciones, con una población en este espacio de celdas que se desplazan de una celda libre a otra en función de un parámetro de atracción (los hombres aborrecen la soledad) y otro de repulsión (una densidad local demasiado alta puede ser un problema). Como ejemplo de resultados, podemos tomar dos poblaciones distribuidas inicialmente al azar a las que se le han aplicado dos series distintas de

---

21. Una síntesis y resultados en Devolder, D. *Effects of the European late marriage pattern on kinship. A study using a microsimulation model,* en prensa, 2001. Disponible en la web en la dirección: http://www.ced.uab.es/pdfs /paperspdf/text135.pdf.

22. Por ejemplo Sigmund, K., *Games of Life. Explorations in ecology, evolution and behaviour*, Oxford, 1993.

valores de estos parámetros de atracción y repulsión[23]. La aplicación iterativa de estas reglas conduce a la situación de equilibrio representada en los dos dibujos de Conway siguientes:

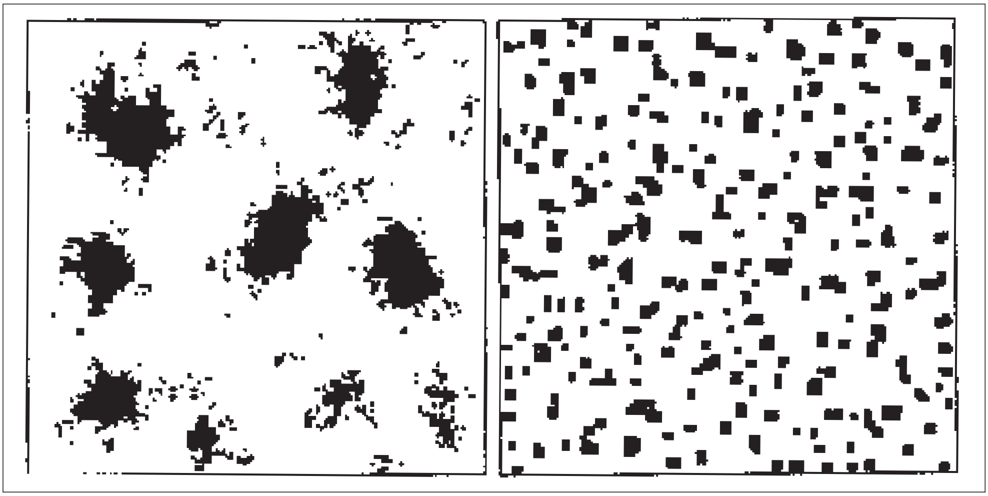

Figura 7. Dos situaciones de equilibrio en el juego de la vida, según Conway.

Estas dos formas de ocupación del territorio son representativas de la división histórica de las zonas rurales en Europa occidental, entre poblaciones dispersas y poblaciones agrupadas. Este tipo de modelización sugiere que esta oposición entre dos tipos fundamentales de poblamiento se puede explicar por pequeñas alteraciones de las reglas básicas de atracción y repulsión.

4.2. La densidad fractal

Otro procedimiento para estudiar estas reglas elementales es empezar con el tipo de poblamiento observado en vez de intentar reconstruirlo, como en el enfoque anterior[24]. La ocupación humana del territorio normalmente no es continua y se suelen encontrar repeticiones de las conformaciones espaciales. Estas repeticiones se

23. Le Bras, H., *Essai de géométrie sociale*, Paris, 2000.

24. Frankhauser, P., «The fractal approach. A new tool for the spatial analysis of urban agglomerations», *Population: An English Selection*, 1998.

producen en varias partes del territorio, pero también en una misma zona, pasando de una escala a otra más pequeña. Esta ocupación del territorio con un patrón repetido sugiere una analogía con las figuras de la geometría fractal, como lo podemos ver con el mapa de la ciudad francesa de Besançon, comparado con una alfombra de Sierpinski.

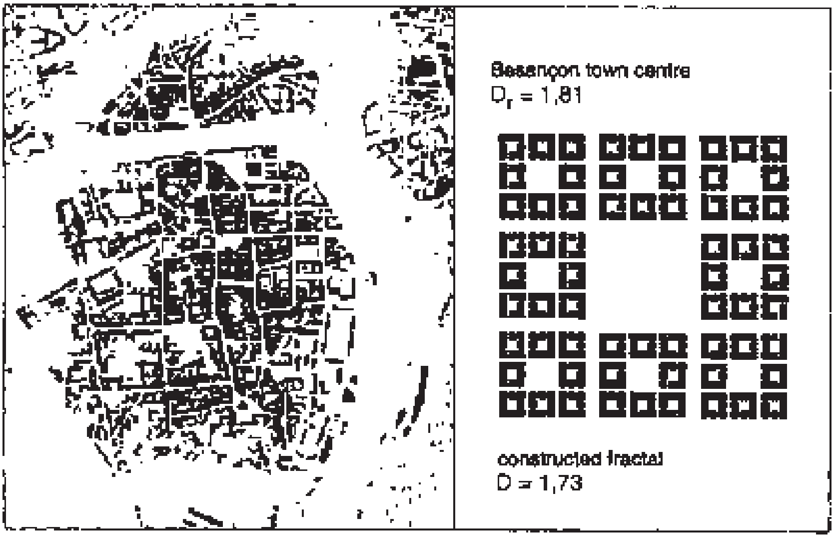

Figura 8. El centro de Besançon (D_r = 1,81) comparado con un fractal (D = 1,73). La distribución de los espacios libres en el fractal se ha ajustado a las condiciones reales, que parecen caracterizarse por la presencia de bloques amplios construidos alrededor de patios interiores.

Este objeto matemático podría ser un modelo de las reglas de segmentación del territorio, seguidas por la población de esta ciudad. La alfombra se genera en base a una cuadrícula inicial con un perímetro de longitud l, según una regla de partición en 8 cuadrículas de perímetro $lr = l / 3$. Esta operación se reproduce a la escala siguiente y el efecto de invariancia de escala se puede medir a través de la dimensión fractal, el parámetro D del gráfico calculado por:

$$D = \frac{\ln N}{\ln(1/r)}$$

donde N es el número de cuadrículas creadas a partir de una anterior.

Este parámetro de invariancia de escala es una medida más adecuada que la densidad de la población (efectivo por unidad de superficie). Toma valores entre 1 (desierto) y

2 (superficie totalmente ocupada) y permite una cuantificación basada sobre la observación de que la ocupación del territorio es un fenómeno discreto (en cada punto hay población o no la hay) y no continuo, como lo sugiere una métrica como la densidad.

Queda entonces como problema la estimación de la dimensión fractal asociada con cada territorio, lo que en general se puede resolver con procedimientos de tratamiento informático de imágenes. La dimensión fractal observada puede servir entonces para construir un modelo del proceso elemental de fragmentación del espacio seguido por la población del territorio analizado.