This is a preprint of: "Experimentant les Matemàtiques", Armengol Gasull, Gregori Guasp, RECULL DE CONFERÈNCIES 2015/DEBATS DE RECERCA, vol. 9, 77–87, Ed. Societat Andorrana de Ciències, 2017.
DOI: [10.2436/15.8060.11.7]

EXPERIMENTANT LES MATEMÀTIQUES

Armengol Gasull i Gregori Guasp

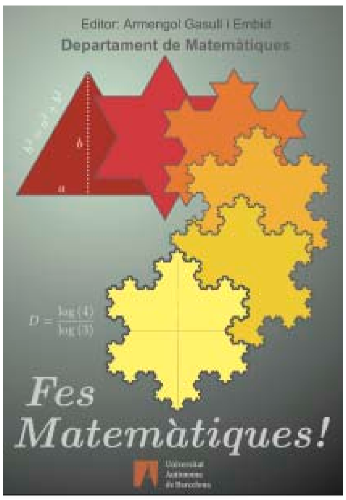
Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona

En aquest treball farem un breu resum de les activitats que s'estan fent en el Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB) per mostrar quina és la presència de les matemàtiques en el món actual i compartir la passió per aquesta ciència amb tota la societat i molt en particular amb els estudiants no universitaris.

En qualsevol cas, i seguin en la línia de l'anterior paràgraf en lloc de explicar amb detall cadascuna d'aquestes activitats, ens limitarem a passar molt per sobre de moltes d'elles i ens centrarem en dues que creiem que ens permetran gaudir de la bellesa i utilitat de les matemàtiques. Aquestes dues activitat són:

1) La descripció amb una mica de detall d'uns punts de llibre amb temàtica matemàtica en els que barrejarem fórmules, fotografies i demostracions,
2) Una breu descripció de les possibilitats de l'exposició virtual **Matemàtiques Experimentals** (ExperiencingMaths.org) en la que es mostren més de 200 situacions matemàtiques que proposen als estudiants experimentar, temptejar, fer hipòtesis, provar-les, intentar validar-les, provar de demostrar i debatre sobre propietats matemàtiques.

A més dels punts anteriors també volem mencionar el següent:



En el mercat laboral, la demanda de matemàtics i estadístics és important i es preveu que en un futur immediat encara ho serà més, especialment en els sectors empresarials, industrials i tecnològics. Per tal d'animar als alumnes de batxillerat a plantejar el seu futur professional en aquesta direcció, el nostre departament va preparar l'any 2000 el llibre **Fes Matemàtiques!**. Aquest llibre pretenia en primer lloc ser una mostra de les múltiples aplicacions de les matemàtiques; cobrint un ampli espectre anant de la música a les travesses, passant per aportacions als camps de la genètica, el tractament d'imatges, la codificació, les finances, l'astronomia,.... També volia plantejar problemes, catalogats segons el seu grau de dificultat, de deu especialitats matemàtiques diferents, com per exemple la topologia, l'aritmètica, l'optimització, l'experimentació numèrica, o l'estadística, així com mostrar un recull d'entreteniments matemàtics. Finalment feia un petit viatge per la història de les matemàtiques, basant-se en la biografia d'alguns matemàtics importants, i en un recull de citacions sobre ciència en general, i matemàtiques en particular.

El programa **Argó** de suport als treballs de recerca de Secundaria. De fet aquest programa és una iniciativa general de la UAB que abasta totes les disciplines universitàries. Ofereix assessorament i suport als estudiants de batxillerat i de cicles formatius en el seu pas a la universitat, també ofereix actualització de coneixements per al professorat i la possibilitat de conèixer centres d'estudis, projectes i recerques que es fan a la UAB.

Cursos de preparació per les proves **Cangur**. A finals de l'any 1995 la Societat Catalana de Matemàtiques va convocar, per primera vegada a Catalunya, la prova Cangur dins el marc de l'organització internacional "Le Kangourou sans frontières", que uns anys abans havia "importat" cap a Europa una idea procedent d'un grup de professors australians (i d'aquí la denominació de l'activitat!). L'objectiu de les sessions és l'aprofundiment en alguns conceptes i tècniques matemàtiques que permetran als estudiants enfrontar-se amb una major preparació i solidesa a les proves, i alhora gaudir afrontant reptes matemàtics nous.

Cursos de preparació per a **l'Olimpíada Matemàtica**. Les Olimpíades Matemàtiques són un concurs que se celebra cada any des de l'any 1965, consistent a resoldre diversos problemes d'alta dificultat però en els que només s'utilitzen tècniques de nivell de batxillerat. La fase catalana és a mitjans de desembre i es fa en dos dies, divendres a la tarda i dissabte el matí. A cada sessió es proposen tres o quatre problemes. Es concedeixen tres medalles d'or, tres de plata i tres de bronze. Cadascuna de les medalles té també un premi en metàl·lic i, a més, aquests nou estudiants participen en les olimpíades espanyoles, d'on se seleccionen els que van a l'olimpíada internacional. Les classes que s'imparteixen no són només útils com a preparació per a les Olimpíades, són també una introducció a tècniques senzilles que els estudiants podran utilitzar a les seves classes, tant a l'institut com a la universitat. A la vegada, són una oportunitat perquè els estudiants gaudeixin tot començant a manipular conceptes matemàtics nous.

Edició d'una revista electrònica oberta **Materials Matemàtics (MAT^2).** El seu objectiu és la difusió de les matemàtiques per mitjà de la publicació electrònica de treballs originals. Aquests articles van dirigits a un ventall ampli de lectors que pretén cobrir des dels joves interessats per les matemàtiques fins a matemàtics professionals. Els treballs poden estar escrits en qualsevol dels idiomes usats de forma habitual en la comunitat matemàtica d'aquest país.

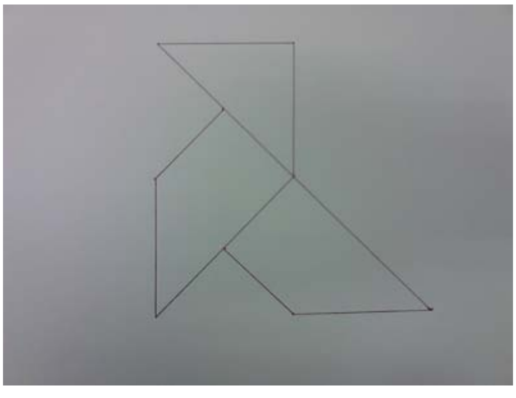
El curs 1999/2000 es va inaugurar el cicle de conferències **Trobades amb secundària** que va esdevenir en el que ara anomenem **Dissabtes de les Matemàtiques**, nou format va començar el curs 2003/2004. Després de tants anys els Dissabtes de les Matemàtiques ja són un clàssic i, en cada edició, més d'un centenar d'estudiants de batxillerat, els seus professors, monitors i d'altres fans de les matemàtiques tenen l'oportunitat de participar en aquesta experiència. Una activitat similar ha sortit del campus de la UAB i ha donat lloc al **Dissabte transfronterer a l'Alt Ampurdà.**

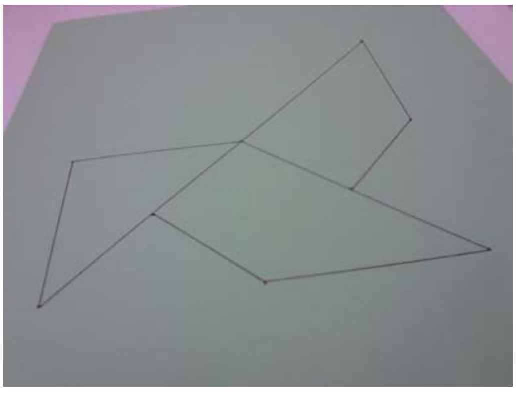
Per a donar una idea dels seus continguts donem a continuació els títols de les xerrades corresponents al curs 2014-15: *L'infinit i més enllà; Papiroflèxia de sòlids platònics i arquimedians; Quins càlculs fa el mòbil quan fem una panoràmica; L'Enigma, la màquina de xifrar perfecta* i *"Sorpresas Matemáticas"*.

Com que els autors d'aquest treball van ser també dos dels conferenciats d'aquests dissabtes, incloem aquí un petit resum de les xerrades.

La primera es va centrar en els diferents significats de l'infinit. L'atracció per aquest concepte abstracte és innegable. Va costar molt a les comunitats científiques i filosòfiques arribar a la seva definició i de fet, avui en dia, encara hi ha discussions sobre el tema. En la xerrada es va abordar l'infinit matemàtic des de diferents punts de vista. Començant amb una breu introducció històrica, es va continuar buscant habitació a l'hotel de Hilbert i es va avançar explicant diverses paradoxes associades a l'infinit. Es pot consultar amb detall el que es va exposar al treball, *L'infinit i més enllà*, publicat a Materials Matemàtics, vol. 2015, treball núm. 2 (http://www.mat.uab.cat/matmat/PDFv2015/v2015n02.pdf).

Per altra banda, en la xerrada *Quins càlculs fa el mòbil quan fem una panoràmica,* es va explicar com es pot modelar amb eines no massa complicades d'àlgebra lineal l'efecte de la perspectiva sobre la representació d'un motiu essencialment pla (de fet, i parlant en més precisió, es va donar una primera idea del que és la geometria projectiva). En particular, es va poder veure quina mena de càlculs s'han de fer per aconseguir que els cartells de propaganda que, últimament, es posen estirats al terra, als costats de les porteries dels camps de futbol o de les cistelles dels camps de bàsquet, sembli que estan drets en les imatges preses per la televisió des de la graderia. El mateix efecte és el que es produeix quan, des de la mateixa posició, es fan dues projeccions (fotografies) del mateix motiu amb orientacions diferents (és el que passa quan es vol fabricar una panoràmica enganxant les imatges que s'obtenen després d'haver fet una *escombrada* del paisatge) i, per tal de mostrar com les tècniques de la geometria projectiva s'adapten a la situació, es va proposar als assistents un taller en el que, amb l'ajut d'un petit programa que realitza els càlculs, es feia coincidir un parell d'imatges distorsionades per una perspectiva diferent com, per l'exemple, les que venen a continuació





No cal dir que, sense l'ajut d'eines electròniques de càlcul, aquesta mena de situacions ja les havien plantejat els pintors del Renaixement i que la geometria projectiva és una de les branques matemàtiques clàssiques.

També hi ha un article a Materials Matemàtics (*Enganxant Fotografies,* n. 9 del vol. 2007, http://www.mat.uab.cat/matmat/PDFv2007/v2007n09.pdf) en el que s'explica amb una mica més de detall aquest problema.

PUNTS DE LLIBRE

Hem decidit incloure una selecció des figures i fórmules de dos punts de llibre matemàtics dissenyats pel autors, que formen part d'una col·lecció més extensa editada pel Departament de Matemàtiques, vegeu la plana web

http://www.uab.cat/web/divulgacio/punts-de-llibre-1334819611118.html

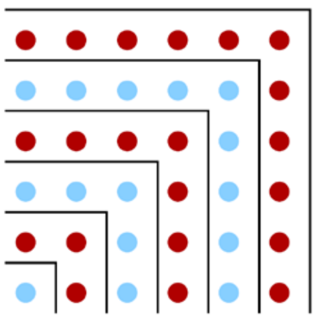
Demostracions sense paraules. Les Demostracions sense paraules ha esdevingut una secció fixa de les revistes publicades per la Mathematical Association of America, particularment del "Mathematical Magazine" i del "The College Mathematics Journal". Visualitzar resultats com el Teorema de Pitàgores o la relació entre la mitjana aritmètica i la geomètrica ajuden molt a una comprensió més profunda dels conceptes matemàtics. Els resultats del llibres: "Demostraciones sin palabras" i "Proofs without words II" de R. B. Nelsen són una font de consulta obligada sobre el tema.

Una anècdota molt famosa que s'explica d'en Carl Friedrich Gauss (1777-1855), un dels matemàtics més brillants de la història, és que quan era molt petit un mestre, per tal de tenir al alumnes ocupats, els hi va demanar que fessin la suma 1+2+3+...+98+99+100. Gauss en molt poc temps va dir-li al mestre que ja havia acabat i que la suma era 5050. Quan el mestre li va preguntar com ho havia fet, ell va dir: "molt fàcil, he agrupat els números com

(1+100)+(2+99)+(3+98)+...+(49+52)+(50+51)=101+101+101+...+101+101.

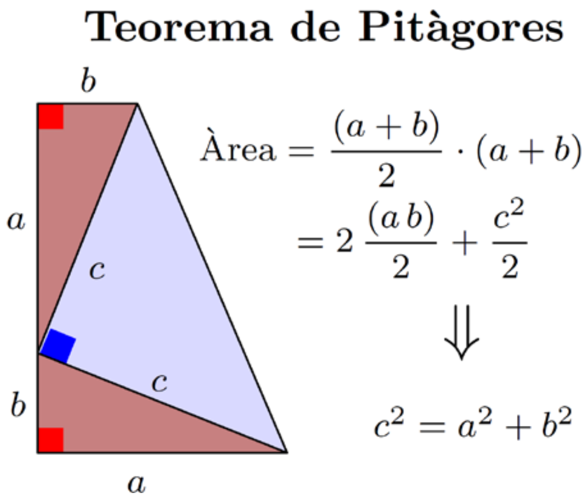
Com que hi ha un total de 50 grups, el total és 50x101=5050". Fet més en general, no és gens difícil veure que 1+2+3+...+(n-1)+n=n(n+1)/2. Una fórmula similar ens la dóna la figura següent:

Progressió aritmètica



$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Un dels resultats més famosos a matemàtiques és el conegut com a Teorema de Pitàgores. És clar que, al menys per certs casos concrets, ja es coneixia la seva tesi des dels temps dels babilonis. Així s'han trobat tauletes babilòniques amb triplets pitagòrics, és a dir tres números com 3, 4 i 5 que compleixen $3^2+4^2=5^2$. Recordem que aquest teorema afirma que, per a tot triangle rectangle amb catets *a* i *b*, i hipotenusa *c*, és compleix $a^2+b^2=c^2$. Una prova visual, basada exclusivament en saber l'àrea d'un trapezi i la d'un triangle, es



pot veure a la figura següent:

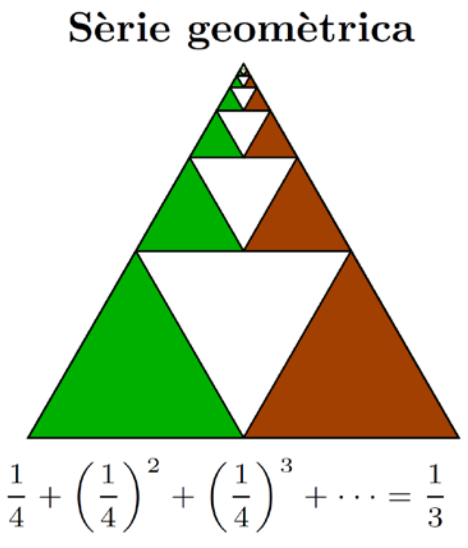
La suma d'infinits nombres és en general una tasca força complicada. Així, per exemple, és obvi que si sumem infinits 1's arribem a infinit. És a dir que podem escriure 1+1+1+1+...+1+1+.....=∞. Tot i que és una mica més difícil de veure, si sumem números cada cop més petits també podem arribar a obtenir infinit. Així es compleix, per exemple, 1+1/2+1/3+1/4+1/5+....1/n+....= ∞. La raó és la següent:

1+1/2+1/3+1/4+1/5+1/6+1/7+1/8+1/9+...+1/16+1/17+...+1/32+...=

1+1/2+(1/3+1/4)+(1/5+1/6+1/7+1/8)+(1/9+...+1/16)+(1/17+..+1/32)+...>

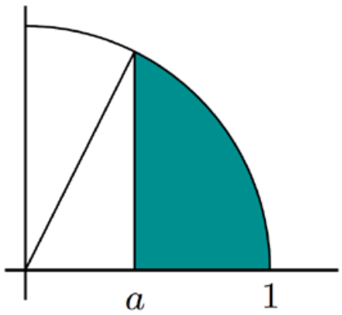
1+1/2+(1/2)+(1/2)+(1/2)+(1/2)+...=∞.

De vegades, però, la suma és finita com passa amb les progressions geomètriques. Aquest resultat esta il·lustrat a la figura següent:



El càlcul diferencial i integral és una de les eines més importants en Ciència i en Enginyeria per tal de modelitzar i mon. Basat en la interpretació geomètrica d'una integral com un àrea (zona acolorida en la figura següent) podem donar una igualtat matemàtica que només sembla a l'abast d'una persona experta en càlcul integral. Observis que les eines que permeten assegurar la igualtat són: el Teorema de Pitàgores per a calcular l'alçada del triangle, i en conseqüència la seva àrea, i el càlcul de l'àrea d'un sector circular d'angle arccos(*a*).

Integral definida

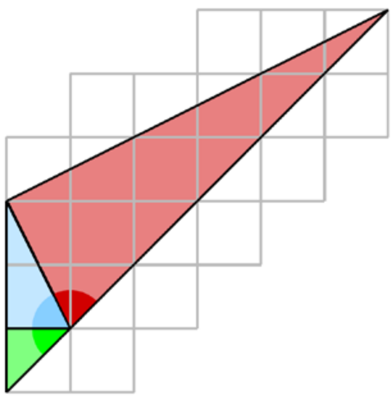


$$\int_a^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\arccos(a)}{2} - \frac{a\sqrt{1-a^2}}{2}$$

Finalment donem una igualtat molt senzilla, basada en dibuixar tres triangles en una quadricula, que en el seu moment va ser utilitzada per a calcular les primeres xifres decimals de π=3.14159265358979323846264... De fet la fórmula similar que va usar John Machin l'any 1706 va ser:

π/4=4 arctan(1/5)-arctan(1/239).

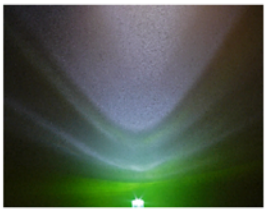
Suma de tres angles

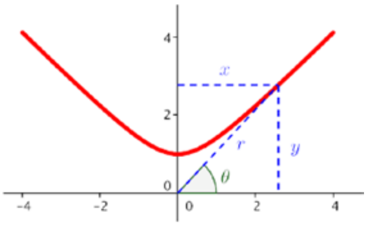


$$\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) = \pi$$

Corbes a la natura. Donem a continuació unes quantes corbes que es poden observar a la natura, juntament amb les seves corresponents equacions matemàtiques

Hipèrbola





Eq. explícita: $y = \sqrt{1 + x^2}$

Eq. implícita: $x^2 - y^2 + 1 = 0$

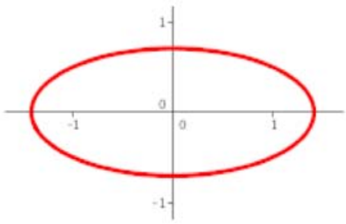
Eq. paramètrica: $\begin{cases} x = \frac{t-1/t}{2} \\ y = \frac{t+1/t}{2} \end{cases}$

Eq. polar: $r = \frac{1}{\sqrt{\cos(\pi - 2\,\theta)}}$

Des dels temps d'Apoloni de Perga (262-190 aC) se sap que el talls d'un pla amb un con dóna lloc a les tres còniques no degenerades: hipèrbola, el·lipse i paràbola. Aquestes tres corbes apareixen sovint a la realitat. En la foto següent es mostren els reflexos d'una llum en una tauleta de nit sobre una paret. Les línies que es veuen son clarament hipèrboles. En la mateixa figura es donen les expressions de la corba corresponent en coordenades explícites, implícites, paramètriques i polars.

Les mateixes hipèrboles, junt amb les paràboles i les el·lipses surten quan estudiem el moviment d'alguns cossos celestes. Així degut als remarcables resultats de Kepler, sabem que els moviment dels planetes del sistema Solar és el·líptic.

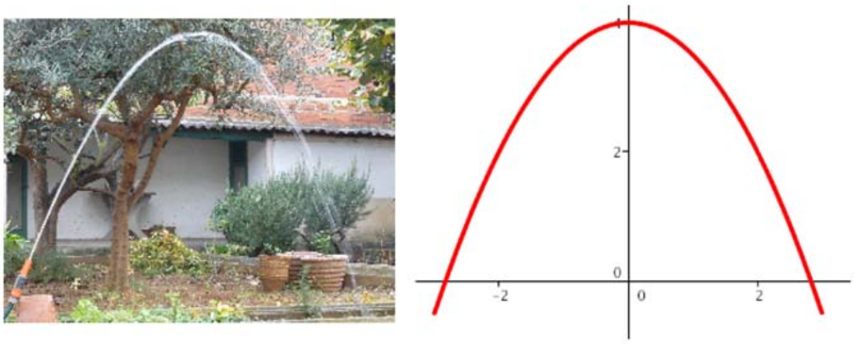
El·lipse



$$x^2 + 4\,y^2 = 2$$

A les figures corresponents mostrem el·lipses i paràboles que apareixen a la natura. De fet les ones d'aigua avançant son circumferències (un cas particular d'el·lipse) que es tornen el·líptiques degut al nostre punt de vista. La paràbola que genera l'aigua que surt de la manega és quasi perfecta!

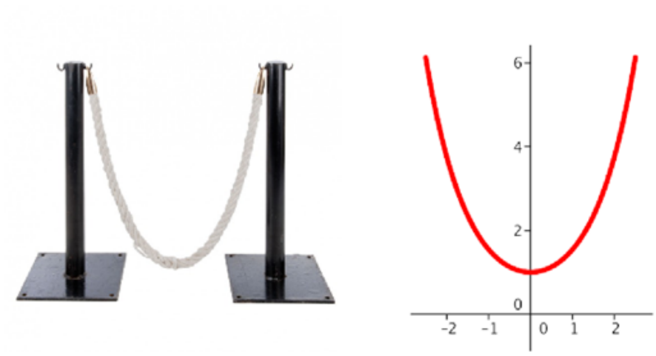
Paràbola



$$y = 4 - x^2/2$$

La catenària apareix per exemple als cables de corrent que ajunten dues torres elèctriques. A la figura mostrem com un cordill que uneix dos petites columnes segueix la seva equació.

Catenària



$$y = \cosh(x) = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})/2$$

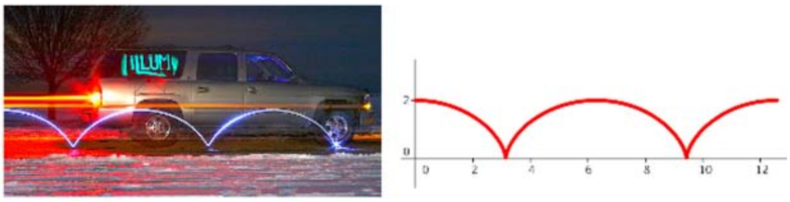
Veure una cardioide al fons d'una cassola o d'una tassa de té és un privilegi. Aquesta corba és una càustica i la seva aparició es deguda a la concentració dels raigs de llum. A la figura també mostrem la seva expressió en coordenades polars.

Cardioide

$$r = 1 - \sin(\theta)$$

La cicloide és una corba que s'observa quan posem un punt de llum a una roda en moviment.

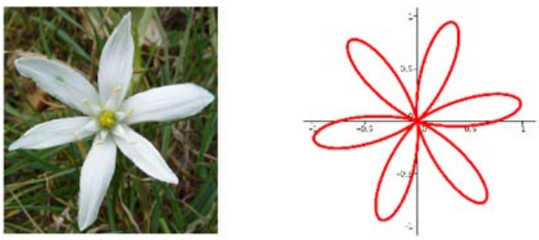
Cicloide



$$x = t - \sin(t + \pi), \;\; y = 1 - \cos(t + \pi)$$

Encara que és impossible captar la bellesa d'una flor en una fórmula, a la figura següent ho intentem. Potser el que és més remarcable és la senzillesa de la fórmula que ens dóna la simetria de la flor!

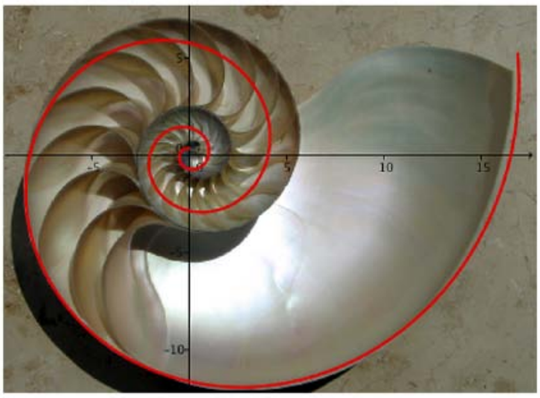
Flor



$$r = \cos^2(3\,\theta - \pi/6)$$

No podem acabar aquesta secció sense parlar del nomenat *nombre d'or*, *o raó àuria*. Aquest número és $\phi = (1+\sqrt{5})/2 = 1.618...$ i apareix sovint a la natura. En particular, es diu que l'espiral àuria $r = \phi^{\theta}$ modela les espirals dels cargols Nautilus. En el de la figura hem trobat una espiral logarítmica que ajusta força bé la del cargol, però el seu pas en lloc de ser ϕ, és 5/4.

Espiral logarítmica



$$r = \left(\frac{5}{4}\right)^{\theta}$$

MATEMÀTIQUES EXPERIMENTALS

L'altra tema principal que volem tractar a continuació és una petita explicació de les motivacions i els continguts del material que apareix a l'adreça www.experiencingmaths.org.

Aquest material va aparèixer com una *versió virtual* d'una exposició *física* (http://www.mathex.org/) que es va dissenyar com a continuació natural d'un programa de divulgació de les matemàtiques de la IMU (International Mathematical Union) de l'any 2000 i ha anat recorrent el món des de 2004 (amb més de dos milions de visitants). Va ser quan s'estava presentant pel sud de l'Àfrica que va sorgir la idea de crear un material disponible a INTERNET per tal d'arribar al nombre més gran possible de llocs, evitant així els problemes de manca de recursos que apareixen, en molts casos, quan es vol muntar un esdeveniment d'aquest tipus. D'aquesta forma, patrocinat per la UNESCO i realitzat per Michel Darche (Centre·Sciencies, ADECUM, Orleans) va néixer aquest lloc WEB.

La versió original només era en francès, anglès i portuguès, però per iniciativa de la CNAU, que ens ho va proposar al Dpt. de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona, es va ampliar amb la versió catalana (quasi al mateix temps, el 2014, que sortia la versió en àrab).

El públic a qui va dirigida aquesta exposició està format, principalment, pels estudiants de secundària i els seus mestres i professors (encara que segueix tenint un interès significatiu entre altres segments).

Què hi trobareu

El primer que cal remarcar és que aquest material està pensat com una mena de *font d'experiments* i és a partir d'aquesta experimentació que es proposa plantejar el debat, comentar problemes relacionats i obrir vies d'explicació dels fenòmens que van apareixent.

Això vol dir que els temes que apareixen són, com a mínim en el seu punt de partida, a l'abast dels alumnes d'aquests nivells, encara que en el seu desenvolupament es pugui arribar a entreveure aspectes matemàtics força refinats.

L'esquema del lloc i la forma de navegar-hi es pot assimilar a una exposició amb *10 sales*, cada una d'elles amb un *tema general* de fons, de forma que dins cada una d'aquestes sales hi ha *3 espais* o *vitrines* amb continguts més específics, girant sempre al voltant del tema de fons corresponent.

Com a regla general, es pot dir que cada una de les vitrines conté:

- Un material interactiu *per obrir boca*.
- Propostes d'experiments que es poden realitzar amb materials molt fàcils d'aconseguir.
- Un recull de referències històriques o explicacions del tema que s'està visitant.
- Una petita llista *d'aplicacions a la vida real* de les matemàtiques que han aparegut.
- Una llista de mots clau que poden servir com a punt de partida en la recerca de materials relacionats amb el tema en qüestió.

Per tal que sigui útil fins i tot si no es disposa d'accés a la xarxa o ni tan sols a un ordinador, es pot descarregar i imprimir un dossier amb els continguts i realitzar la majoria dels experiments proposats amb materials de molt fàcil accés utilitzant, en alguns casos, les plantilles que estan incloses en aquest material imprès.

Quan ens passegem per aquesta *exposició* queda ben clar que un dels objectius principals és que un estudiant qualsevol sigui capaç, per ell mateix (i sota la direcció del seu mestre o professor) de plantejar-se quines són les qüestions rellevants d'un problema, plantejar hipòtesis, discutir-les amb els seus companys i, un cop arribats a alguna conclusió, explicar i defensar davant els altres la validesa dels arguments propis. Cap d'aquestes fases (experimentació-inferència i justificació-deducció) deixa de formar part de l'experiència matemàtica més rigorosa i és principalment a través d'aquest procés, comú en totes les ciències, que s'adquireixen nous coneixements i es millora l'habilitat en adquirir-ne.

Les seccions

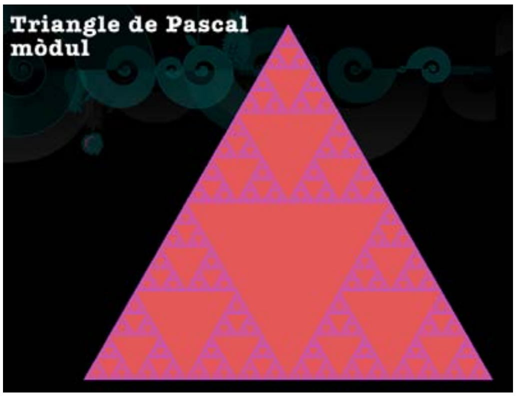
Per tal de donar una idea general del contingut, podeu veure a continuació els títols dels apartats i subapartats principals.

- **Llegir la natura.**
  - Espirals en la natura.
  - Un món fractal.
  - Còniques a l'espai.
- **Enrajolar el terra.**
  - L'art de l'enrajolat.
  - Calidoscopis.
  - On sóc?
- **Omplir l'espai.**
  - Apilar taronges.
  - Poliedres.
  - Problemes complexos.
- **Connectar-se.**
  - D'un sol traç.
  - Quatre colors basten.
  - Hola, ets tu?

- **Calcular.**
  - Amb el cap i les mans.
  - Nombres primers.
  - Imatges digitals.
- **Construir.**
  - Corbes i velocitats.
  - Corbes i volums.
  - Corbes suaus.
- **Estimar-Preveure.**
  - 2 boles vermelles?
  - Bingo!
  - I el guanyador és?
- **Optimitzar.**
  - Bombolles de sabó.
  - El camí més curt.
  - La forma òptima.
- **Demostrar.**
  - Pitàgores.
  - Nombres i figures.
  - És veritat?
- **Concloure.**
  - Experimenteu.
  - Formuleu hipòtesis.
  - Demostreu!

Tot i que no creiem que sigui adequat explicar en la seva totalitat aquests continguts (objectiu, per altre banda, impossible donada la seva extensió) ja que la filosofia del lloc és que cadascú pugui fer seu aquest material i arribi per si mateix tan lluny com estimi oportú i un punt de vista extern resulta, sens dubte, contraproduent, acabarem mostrant alguns dels apartats que ens han cridat més l'atenció fent-ne una petita descripció.

El món fractal

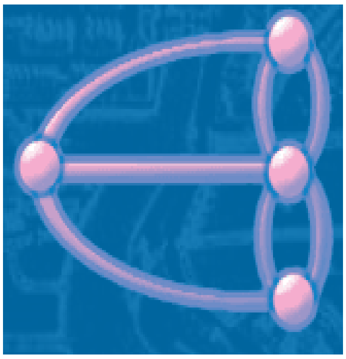


Encara que sembli mentida, si marquem en colors diferents els nombres que surten en el triangle de Pascal/Tartaglia segons si es tracta de parells o senars apareix una figura que va tendint, a mesura que anem afegint més files, a l'objecte fractal conegut com triangle de Sierpinski (que apareix com la configuració límit del procés que consisteix a començar amb un triangle equilàter, dividir-lo en quatre triangles equilàters iguals, eliminar el del centre i repetir el procés en els triangles que van quedant).

Omplir l'espai

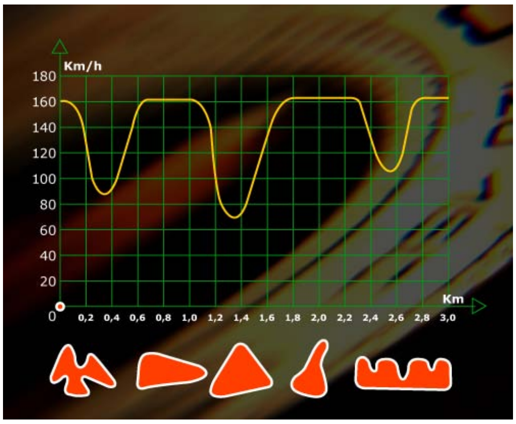
Descobrir quina és la configuració òptima per omplir l'espai amb esferes, deixant el mínim d'espai buit, és un d'aquests problemes de presentació extremadament simple però de tractament molt complicat. Tot i que Kepler ja havia conjecturat quina havia de ser aquesta configuració (Gauss ja havia demostrat que era la millor entre les *regulars*), no es va aconseguir donar una justificació del fet fins l'any 1998 (analitzant moltíssims casos particulars i utilitzant força temps d'ordinador). D'altra banda, també es posa de manifest com un problema que sembla purament geomètric pot estar lligat a aspectes pràctics d'interès com, per exemple, el problema logístic d'un embalatge eficient per tal d'aconseguir transportar el màxim de mercaderia amb el volum mínim.

Connectar-se



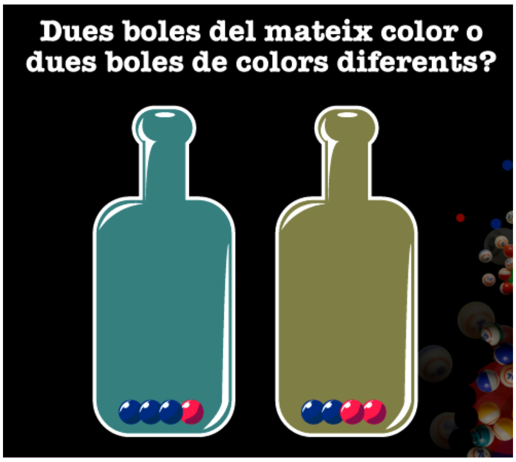
Un altre exemple clar de la forma de resoldre problemes típica de les matemàtiques. Euler redueix el problema de la passejada per tots els ponts de la ciutat, sense passar dos cops pel mateix, als seus elements essencials: els ponts són arestes que uneixen uns vèrtexs que representen les zones de la ciutat que delimita el riu. El més important de tot és que hi nombroses situacions en les que aquesta forma de pensar és la millor per a resoldre el problema plantejat ja que, un cop reduït el problema a un graf, les eines de resolució són comuns i independents de la naturalesa dels elements originals.

A quin circuit estem?



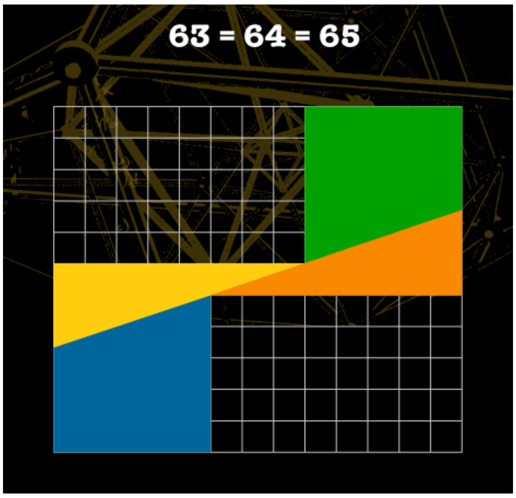
Prenent com a punt de partida el joc d'associar a cada circuit el gràfic de la velocitat que assoleix un cotxe que el va recorrent, es planteja la qüestió d'interpretar adequadament un gràfic i, a més, la situació serveix per introduir la idea de derivada i el càlcul infinitesimal. En aquest context es posa també de manifest com els signe de la derivada reflecteix el fet que una funció sigui creixent o decreixent. Permetent localitzar els instants en els que s'assoleix un valor extrem com aquells en què aquesta derivada canvia el signe.

Estimar-Preveure



És clar que un recull de temes com aquest no seria mai complet sense alguna menció a una de les eines matemàtiques fonamentals en el món actual com és l'estadística (o, en un sentit més general, la probabilitat). Quantificar l'atzar o obtenir informació significativa d'una situació en la que només és possible obtenir una *mostra* ja que recollir la informació total esdevé impossible és el que permeten les probabilitats i l'estadística. D'aquesta forma, les matemàtiques es converteixen en una de les eines bàsiques per a la presa de decisions.

És veritat?



Els polígons de la figura es poden combinar per tal de formar un quadrat de 8x8 o un rectangle de 13x5. En la configuració de la figura ocupen una superfície de 63 unitats, en la configuració quadrada són 64 unitats i en la rectangular 65!!! Com és possible que passi això? Com desfem la paradoxa? Amb aquest *petit truc de màgia* es posa de manifest, de forma prou evident, la importància d'analitzar qualsevol problema amb la màxima precisió possible i sense deixar-se enganyar per les primeres impressions. Fins que no es posa de manifest que les peces només poden coincidir de forma perfecta en la configuració quadrada (ja que els angles dels trapezis i dels triangles no es corresponen adequadament) i que, en les altres dues, la unitat de superfície que sobra o falta prové de la petita obertura o solapament entre les peces que es produeix per aquesta falta de correspondència, ens trobarem davant del fet que, segons com es posin les mateixes peces, la superfície ocupada pot variar. Veiem, doncs, la importància d'un raonament correcte o *bona demostració* en qualsevol situació per simple que sembli en un principi.

Agraïments

El primer autor té el suport del projecte MTM2013-40998-P del Ministeri d'Economia i Competitivitat del Govern d'Espanya i del projecte número 2014-SGR-568 de la Generalitat de Catalunya.